Comment manier une hypothèse d'angles ?

Martin Rakovsky

L'objectif du présent TD est de se concentrer sur des problèmes de géométrie au caractère repoussant : des problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles. Pourquoi cela est repoussant ? Parce que bien souvent il n'est pas évident de tracer directement une figure exacte. Super, on peut donc se débarasser de son compas et de son équerre et réfléchir complètement à main levée ? Rien n'est moins sûr ! Bien souvent dans ce genre de problème, c'est au contraire en cherchant comment tracer la figure exacte que l'on progresse dans sa résolution. En effet, pour tracer la figure, on est amené à chercher diverses propriétés sur les points présentés, à rajouter soi-même des objets géométriques, à effectuer des transformation, à reconnaître des configurations classiques... Vous l'aurez compris, le travail de recherche pour une construction exacte est déjà un travail de résolution de l'exercice.

Il est à penser, au vu des IMO des années précédentes, que de tels problèmes vont apparaître de plus en plus souvent, une raison de plus de traiter ce genre de problèmes en particulier.

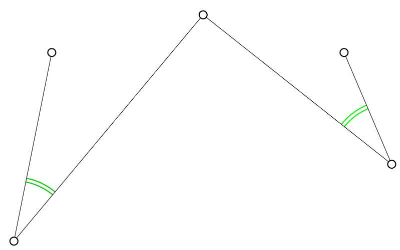
En gage de ma bonne foi, toutes les figures du présent corrigé ont été tracées de façon exacte.

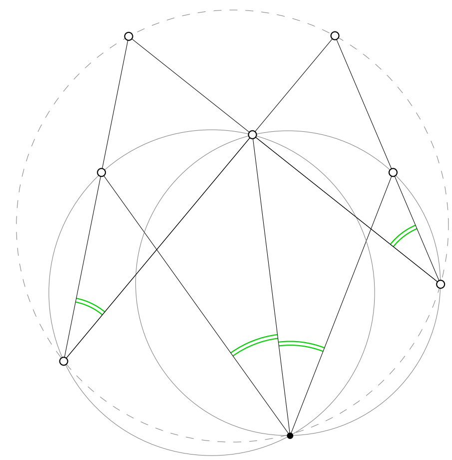
1 Quelques conseils

Pour traiter les problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles, voici quelques conseils :

- Chercher comment tracer la figure exacte. Bien souvent, les idées déployées pour tracer la figure exacte sont également utiles pour la résolution de l'exercice. On va par exemple naturellement introduire des points intermédiaires, des cercles supplémentaires, des droites nouvelles et ces objets révèlent souvent les informations qui étaient cachées derrière la condition d'angles.
- Manipuler algébriquement l'hypothèse donnée. En rajoutant une quantité de chaque côté de l'équation, en soustrayant l'équation à 180°...l'objectif est de transformer l'hypothèse d'angle donnée en une hypothèse géométrique.
- **Introduire des points intermédiaires.** Voyons deux exemples.

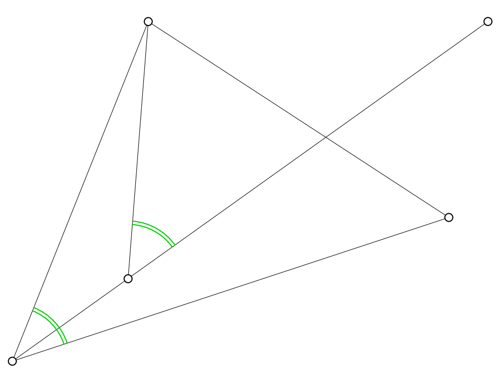
  Supposons tout d'abord qu'on se trouve dans la situation de gauche :

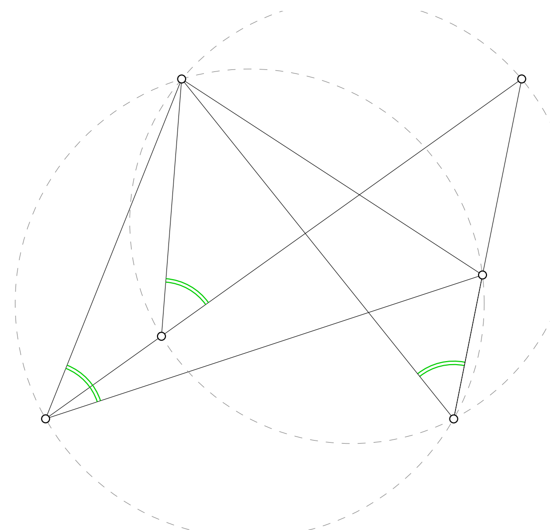




Deux angles de même mesure concernent deux segments disjoints. On peut compléter la figure pour avoir un cercle dont un arc est couvert par les deux angles (cercle en pointillé de la figure de droite) ou on peut chercher à introduire un point intermédiaire qui transporte l'information d'un angle à l'autre. Un point intermédiaire est par exemple le second point d'intersection des deux cercles portant les deux angles verts (cercles noirs de la figure de droite. L'introduction d'un tel point peut également permettre, dans certains cas, de construire la figure.

Regardons à présent la situation suivante :





On désire construire, étant donné un triangle et une droite issue de l'un des sommets, un point sur la droite définissant un angle de même mesure que l'un des angles du triangle (voir situation de gauche). Un point intermédiaire intéressant est, encore une fois, le second point d'intersection des deux cercles circonscrits portant les deux arcs. Ici, en construisant d'abord le point d'intermédiaire, on peut construire de façon exacte le point désiré sur la droite : en traçant le cercle circonscrit au triangle puis en traçant le cercle passant par le point intermédiaire et les deux points ayant l'ordonnée la plus grande (voir les cercles en pointillé sur la figure de droite).

En présence d'une hypothèse d'égalité de deux angles, un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux tri-

angles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle, comme cela a été montré dans les deux exemples précédents. L'intérêt du point intermédiaire est qu'il "transporte" d'une certaine manière les diverses égalités d'angles, car il est sur plusieurs cercles en même temps.

Penser point intermédiaire !

- Rechercher les configurations connues faisant intervenir des égalités d'angles (configuration de la symédiane par exemple). Quelques problèmes ne sont que des déguisements de certaines configuration par une redéfinition des divers points.
- L'inversion permet d'échanger des points et donc d'échanger des angles. Certaines hypothèses d'angles compliquées admettent une version analogue simple dans la figure inversée.

2 Exercices

Exercice 1. (Russie 2013) Soit ABC un triangle et C_1 un point sur le segment $[AB]$. Soient A_1 et B_1 des points situés respectivement sur les segments $[BC]$ et $[CA]$ tels que $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1} = \widehat{ACB}$. Les droites (AA_1) et (BB_1) se coupent au point C_2. Soit C' le symétrique du point C par rapport au segment $[AB]$. Montrer que les points C', A, B et C_2 sont cocycliques. (L'énoncé original demande de montrer que la droite (C_1C_2) passe par un point fixe quand le point C_1 varie)

Exercice 2. (Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Exercice 3. (G2 2018) Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

Exercice 4. (USAMO 2021 P1) Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Exercice 5. (IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 6. (IMO SL 2023 G3) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $\widehat{BAD} < \widehat{ADC}$.

On not M le milieu de l'arc CD contenant A. On suppose qu'il existe un point P à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$ tel que $\widehat{ADB} = \widehat{CPD}$ et $\widehat{ADP} = \widehat{PCB}$.

Montrer que $(AD), (PM)$ et (BC) sont concourantes.

Exercice 7. (IMO SL 2007 G3) Soit $ABCD$ un trapèze avec les côtés AD et BC parallèles et dont les diagonales se coupent au point P. Le point Q est compris entre les droites (AD) et (BC) de telle sorte que $\widehat{AQD} = \widehat{BQC}$ et de telle sorte que les points P et Q sont situés de part et d'autre de la droite (CD). Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Exercice 8. (IMO 2014 P3) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

Exercices moins prioritaires

Exercice 9. (BXMO 2012) Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{CPM} = \widehat{PAB}$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle PAB. Soit Q le second point d'intersection de la droite (PM) avec le cercle Γ. Soit R le symétrique du point P par rapport à la tangente au cercle Γ en B. Montrer que quand P varie, la distance QR reste constante.

Exercice 10. (EGMO 2024 P2) Soit ABC un triangle dans lequel $AC > AB$, et soient Ω son cercle circonscrit, ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA et AB. Soient X et Y des points sur les petits arcs DE et DF de ω tels que $\widehat{BXD} = \widehat{DYC}$. On note K le point d'intersection des droites (XY) et (BC). La tangente à Ω issue de K touche l'arc BC contenant A en T. Montrer que les droites (TD) et (AI) se coupent sur Ω.

Exercice 11. (EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Exercice 12. (MEMO 2021 P7) Soit ABC un triangle, M le milieu du segment $[BC]$, on note E et F deux points des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ de telle sorte que $2\widehat{AEC} = \widehat{AMC}$ et que $2\widehat{AFB} = \widehat{AMB}$. On note X et Y les intersections du cercle circonscrit au triangle AEF avec la droite (BC). Montrer que $XB = YC$.