Comment manier une hypothèse d'angles ?

Martin Rakovsky

L'objectif du présent TD est de se concentrer sur des problèmes de géométrie au caractère repoussant : des problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles. Pourquoi cela est repoussant ? Parce que bien souvent il n'est pas évident de tracer directement une figure exacte. Super, on peut donc se débarasser de son compas et de son équerre et réfléchir complètement à main levée ? Rien n'est moins sûr ! Bien souvent dans ce genre de problème, c'est au contraire en cherchant comment tracer la figure exacte que l'on progresse dans sa résolution. En effet, pour tracer la figure, on est amené à chercher diverses propriétés sur les points présentés, à rajouter soi-même des objets géométriques, à effectuer des transformation, à reconnaître des configurations classiques... Vous l'aurez compris, le travail de recherche pour une construction exacte est déjà un travail de résolution de l'exercice.

Il est à penser, au vu des IMO des années précédentes, que de tels problèmes vont apparaître de plus en plus souvent, une raison de plus de traiter ce genre de problèmes en particulier.

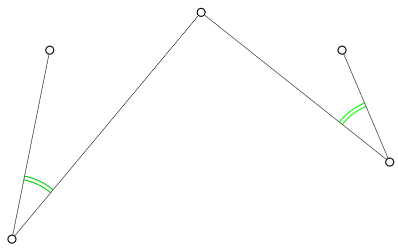
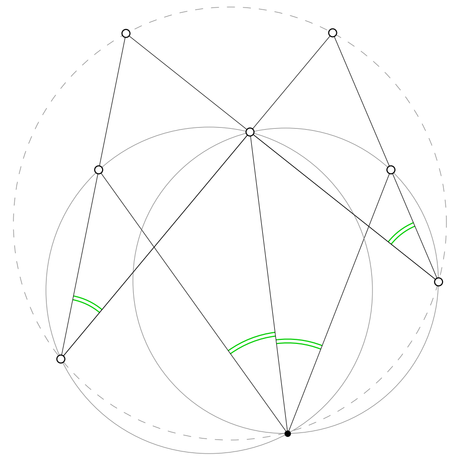
En gage de ma bonne foi, toutes les figures du présent corrigé ont été tracées de façon exacte.

1 Quelques conseils

Pour traiter les problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles, voici quelques conseils :

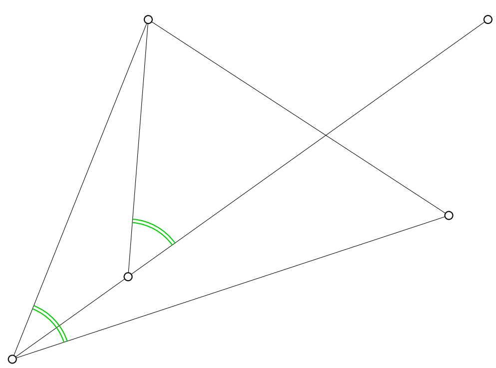
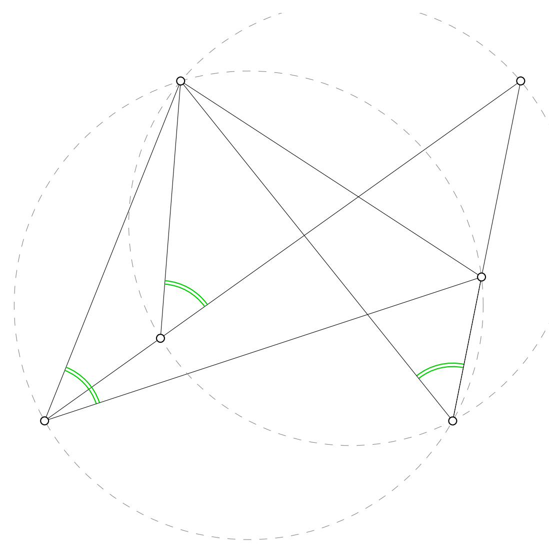
- Chercher comment tracer la figure exacte. Bien souvent, les idées déployées pour tracer la figure exacte sont également utiles pour la résolution de l'exercice. On va par exemple naturellement introduire des points intermédiaires, des cercles supplémentaires, des droites nouvelles et ces objets révèlent souvent les informations qui étaient cachées derrière la condition d'angles.
- Manipuler algébriquement l'hypothèse donnée. En rajoutant une quantité de chaque côté de l'équation, en soustrayant l'équation à 180°...l'objectif est de transformer l'hypothèse d'angle donnée en une hypothèse géométrique.
- **Introduire des points intermédiaires.** Voyons deux exemples.

  Supposons tout d'abord qu'on se trouve dans la situation de gauche :

Deux angles de même mesure concernent deux segments disjoints. On peut compléter la figure pour avoir un cercle dont un arc est couvert par les deux angles (cercle en pointillé de la figure de droite) ou on peut chercher à introduire un point intermédiaire qui transporte l'information d'un angle à l'autre. Un point intermédiaire est par exemple le second point d'intersection des deux cercles portant les deux angles verts (cercles noirs de la figure de droite. L'introduction d'un tel point peut également permettre, dans certains cas, de construire la figure.

<u>Regardons à présent la situation suivante :</u>

On désire construire, étant donné un triangle et une droite issue de l'un des sommets, un point sur la droite définissant un angle de même mesure que l'un des angles du triangle (voir situation de gauche). Un point intermédiaire intéressant est, encore une fois, le second point d'intersection des deux cercles circonscrits portant les deux arcs. Ici, en construisant d'abord le point d'intermédiaire, on peut construire de façon exacte le point désiré sur la droite : en traçant le cercle circonscrit au triangle puis en traçant le cercle passant par le point intermédiaire et les deux points ayant l'ordonnée la plus grande (voir les cercles en pointillé sur la figure de droite).

En présence d'une hypothèse d'égalité de deux angles, un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux tri-

angles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle, comme cela a été montré dans les deux exemples précédents. L'intérêt du point intermédiaire est qu'il "transporte" d'une certaine manière les diverses égalités d'angles, car il est sur plusieurs cercles en même temps.

Penser point intermédiaire !

- Rechercher les configurations connues faisant intervenir des égalités d'angles (configuration de la symédiane par exemple). Quelques problèmes ne sont que des déguisements de certaines configuration par une redéfinition des divers points.
- L'inversion permet d'échanger des points et donc d'échanger des angles. Certaines hypothèses d'angles compliquées admettent une version analogue simple dans la figure inversée.

2 Exercices

Exercice 1. *(Russie 2013)* Soit ABC un triangle et C_1 un point sur le segment $[AB]$. Soient A_1 et B_1 des points situés respectivement sur les segments $[BC]$ et $[CA]$ tels que $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1} = \widehat{ACB}$. Les droites (AA_1) et (BB_1) se coupent au point C_2. Soit C' le symétrique du point C par rapport au segment $[AB]$. Montrer que les points C', A, B et C_2 sont cocycliques. (L'énoncé original demande de montrer que la droite (C_1C_2) passe par un point fixe quand le point C_1 varie)

Exercice 2. *(Canada 2013)* Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Exercice 3. *(IMO SL 2018 G2)* Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

Exercice 4. *(USAMO 2021 P1)* Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Exercice 5. *(IMO 2020 P1)* Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 6. *(IMO SL 2023 G3)* Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $\widehat{BAD} < \widehat{ADC}$. On not M le milieu de l'arc CD contenant A. On suppose qu'il existe un point P à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$ tel que $\widehat{ADB} = \widehat{CPD}$ et $\widehat{ADP} = \widehat{PCB}$.
Montrer que $(AD), (PM)$ et (BC) sont concourantes.

Exercice 7. *(IMO SL 2007 G3)* Soit $ABCD$ un trapèze avec les côtés AD et BC parallèles et dont les diagonales se coupent au point P. Le point Q est compris entre les droites (AD) et (BC) de telle sorte que $\widehat{AQD} = \widehat{BQC}$ et de telle sorte que les points P et Q sont situés de part et d'autre de la droite (CD). Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Exercice 8. *(IMO 2014 P3)* Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

Exercices moins prioritaires

Exercice 9. *(BXMO 2012)* Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{CPM} = \widehat{PAB}$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle PAB. Soit Q le second point d'intersection de la droite (PM) avec le cercle Γ. Soit R le symétrique du point P par rapport à la tangente au cercle Γ en B. Montrer que quand P varie, la distance QR reste constante.

Exercice 10. *(EGMO 2024 P2)* Soit ABC un triangle dans lequel $AC > AB$, et soient Ω son cercle circonscrit, ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA et AB. Soient X et Y des points sur les petits arcs DE et DF de ω tels que $\widehat{BXD} = \widehat{DYC}$. On note K le point d'intersection des droites (XY) et (BC). La tangente à Ω issue de K touche l'arc BC contenant A en T. Montrer que les droites (TD) et (AI) se coupent sur Ω.

Exercice 11. *(EGMO 2021 P3)* Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

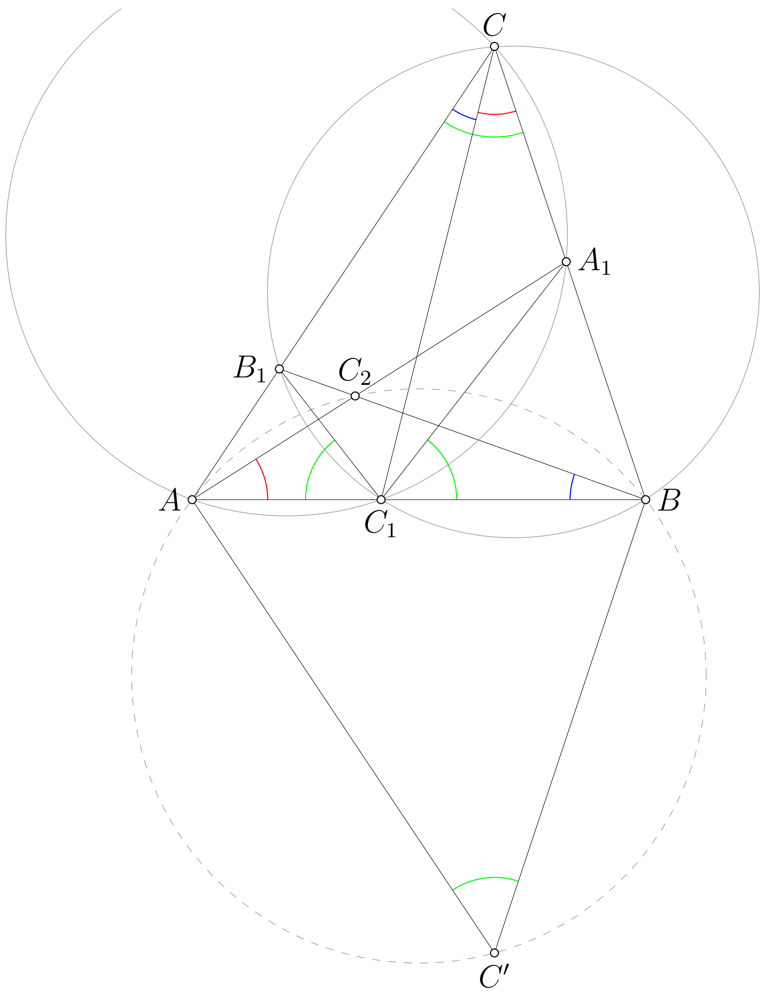
Exercice 12. *(MEMO 2021 P7)* Soit ABC un triangle, M le milieu du segment $[BC]$, on note E et F deux points des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ de telle sorte que $2\widehat{AEC} = \widehat{AMC}$ et que $2\widehat{AFB} = \widehat{AMB}$. On note X et Y les intersections du cercle circonscrit au triangle AEF avec la droite (BC). Montrer que $XB = YC$.

3 Solutions

3.1 Russie 2013

Exercice 1. *(Russie 2013)* Soit ABC un triangle et C_1 un point sur le segment $[AB]$. Soient A_1 et B_1 des points situés respectivement sur les segments $[BC]$ et $[CA]$ tels que $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1} = \widehat{ACB}$. Les droites (AA_1) et (BB_1) se coupent au point C_2. Soit C' le symétrique du point C par rapport au segment $[AB]$. Montrer que les points C', A, B et C_2 sont cocycliques. (L'énoncé original demande de montrer que la droite (C_1C_2) passe par un point fixe quand le point C_1 varie)

Solution 1.



Les conditions d'angles données par l'énoncé nous donnent, d'après le théorème de l'angle inscrit, que les points A, C_1, A_1 et C sont cocycliques. Cela nous permet notamment de construire le point A_1. De même, on peut construire le point B_1 comme le point d'intersection du cercle (CC_1B) avec le côté $[AC]$.
En appliquant le théorème de l'angle inscrit dans ces cercles :

$$\widehat{C_2BC_1} = \widehat{B_1BC_1} = \widehat{B_1CC_1} = \widehat{ACC_1}$$

et de même

$$\widehat{C_2AB} = \widehat{C_1CB}$$

si bien que

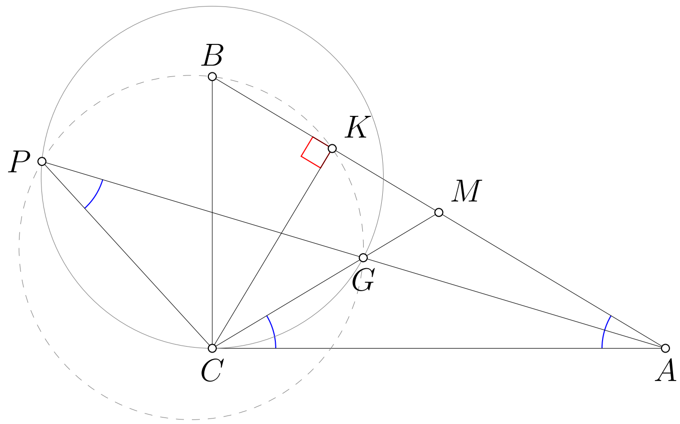
$$\widehat{BAC_2} + \widehat{C_2BA} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B}$$

donc $\widehat{AC'B} = 180° - \widehat{AC_2B}$ donc les points annoncés sont bien cocycliques.

3.2 Canada 2013

Exercice 2. *(Canada 2013)* Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Solution 2.



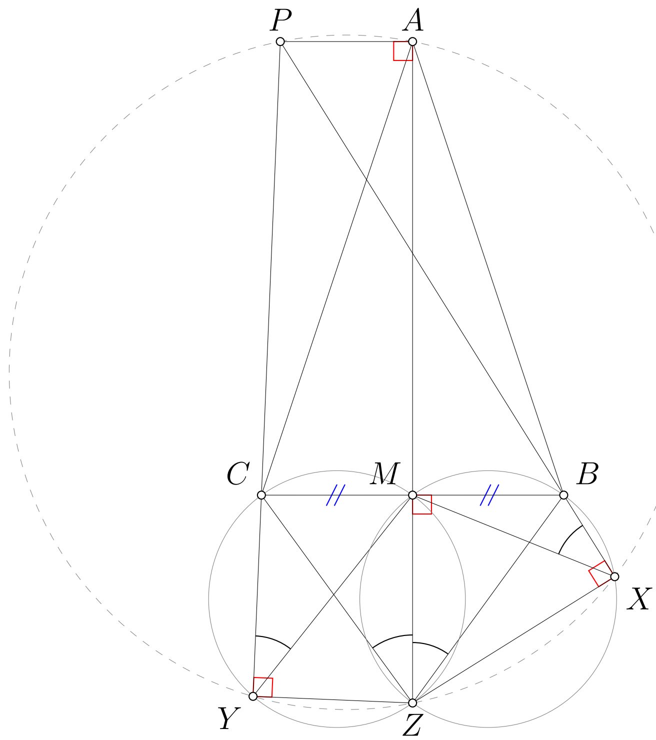
Commençons par tracer la figure et tracer de façon exacte le point P. Pour cela, on cherche un angle plus commode qui vaut $\widehat{BAC}$ pour appliquer le théorème de l'angle inscrit. La médiane (CG) étant déjà présente sur la figure, on la prolong pour qu'elle coupe le segment $[AB]$ au poin M et comme le triangle ABC est rectangle en C, $\widehat{BAC} = \widehat{MCA}$. La droite (AC) est donc tangente au cercle circonscrit au triangle PCG. On peut tracer le cercle tangent à la droite (AC) passant par G, donc on peut tracer le point P.

Une fois la figure tracée, on peut conjecturer que le point K d'intersection des deux cercles est le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On note K le pied de la hauteur et on montre que K appartient au cercle circonscrit au triangle BPG.
Utilisons les informations que nous a apportées notre construction : d'après la puissance du point A par rapport au cercle (PCG), $AC^2 = AG \cdot AP$ et on sait que $AC^2 = AK \cdot AB$. On a donc $AB \cdot AK = AG \cdot AP$ et l'on peut conclure avec la réciproque de la puissance d'un point.

3.3 IMO SL 2018 G2

Exercice 3. *(IMO SL 2018 G2)* Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

Solution 3.



Le problème est le suivant : étant donné le point X placé sur la droite (PB), comment construire le point Y. Une première réponse serait de dire "étant donné l'énoncé, je n'ai qu'à tracer le cercle (APX) et prendre le point d'intersection de ce cercle avec la droite (PC)", mais cela ne nous apporterait pas beaucoup d'informations.

Penser point intermédiaire ! On va rajouter un point Z intermédiaire, qui vérifierait $\widehat{CZM} = \widehat{CYM}$ et $\widehat{MZB} = \widehat{MXB}$. **On sait qu'un point intermédiaire souvent utile est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle.**

Ici, on considère donc le point Z, second point d'intersection des cercles (MXB) et (MYC). On le note Z. Puisque $\widehat{MZB} = \widehat{MXB} = \widehat{MYC} = \widehat{MZC}$, la droite (MZ) est la médiane et la bissectrice issue du sommet Z dans le triangle BZC. Donc le point Z est sur la médiatrice du segment $[BC]$.

Pour construire la figure on procède donc comme suit : on choisit un point Z sur la médiatrice du segment $[BC]$, on choisit X comme le second point d'intersection du cercle (ZMB) et de la droite (PB) et on construit le point Y de la même façon.

On peut imaginer que le point Z va nous servir dans la démonstration. Comme l'angle $\widehat{ZMB}$ est droit et que les points M, B, X et Z sont cocycliques, $\widehat{ZXB} = 90°$. De même, $\widehat{ZYC} = 90°$. les points A, X et Y sont donc suer le cercle de diamètre $[PZ]$ donc en particulier les points P, A, X, Z et Y sont cocycliques.

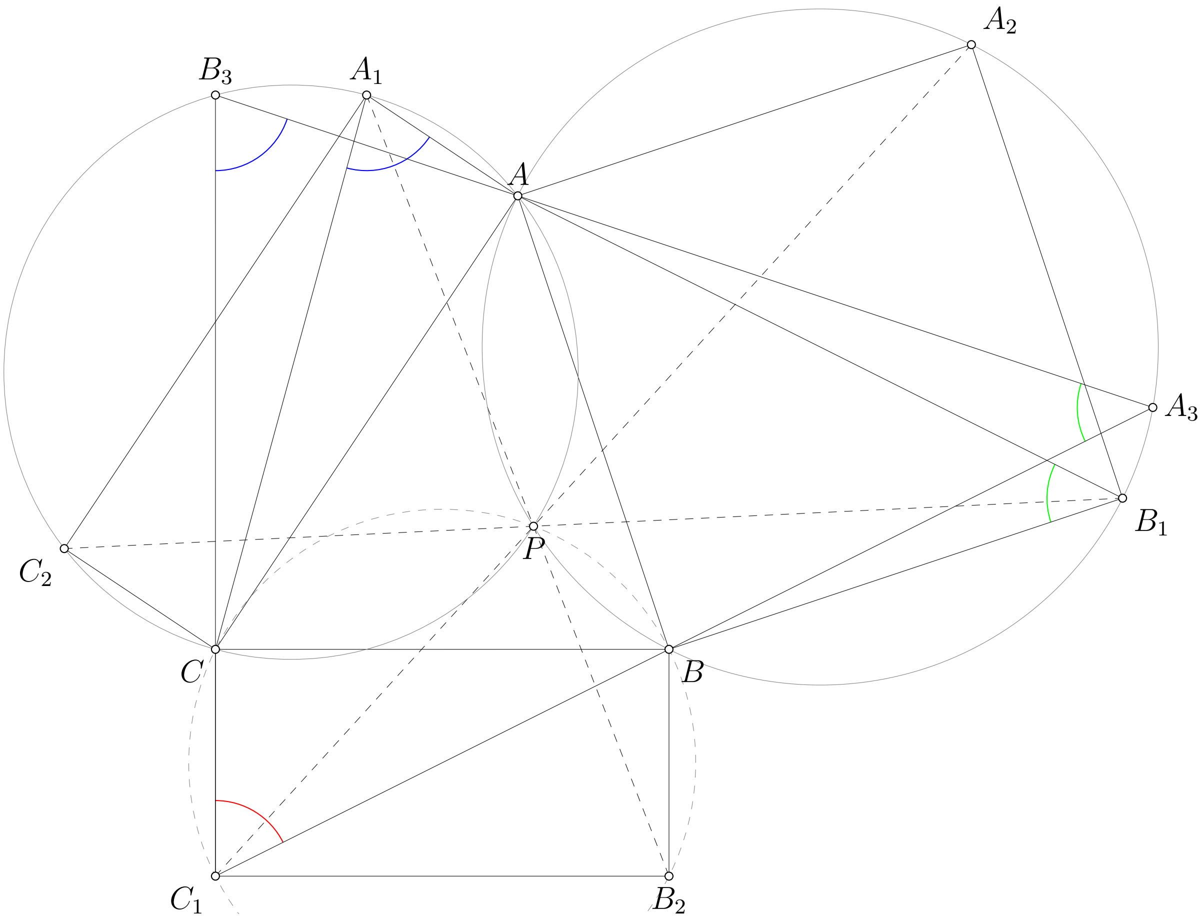
3.4 USAMO 2021 P1

Exercice 4. *(USAMO 2021 P1)* Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Solution 4.



Ici aussi, comprendre comment construire la figure permet de terminer rapidement l'exercice.
Le fait que la somme des angles vaut 180° nous fait penser à un triangle. On doit donc essayer de créer un triangle ayant les $\widehat{BC_1C}, \widehat{CA_1A}$ et $\widehat{AB_1B}$. Pourcela on part du rectangle CBB_2C_1 et du rectangle AA_1C_2, C. On souhaite construire un point B_3 sur la droite (C_1C) tel que $\widehat{CB_3A} = \widehat{CA_1A}$. Le théorème de l'angle inscrit est tout indiqué, on choisit B_3 comme le second point d'intersection de la droite (CC_1) et du cercle (AA_1C_2C). On Prolonge ensuite les droites (B_3A) et (BC_1) pour obtneir un point A_3 vérifiant $\widehat{AA_3B} = 180° - \widehat{BC_1C} - \widehat{CA_1A}$. Pour construire le point B_1, on utilise encore une fois le théorème de l'angle inscrit et le point B_1 est le point d'intersection du cercle (AA_3B) et de la perpendiculaire en B à la droite (AB). On peut alors construire A_2.

Lorsque l'on trace les trois droites qui doivent concourir, on s'aperçoit qu'elles se coupent sur le second point d'intersection des deux cercles (AA_1C_2C) et (AA_2B_1B). On note P ce second point d'intersection.

La symétrie du problème suggère que le point P appartient aussi au cercle (CBB_2C_1). Or

$$\widehat{CPB} = 360° - \widehat{BPA} - \widehat{CPA} = 180° - \widehat{BPA} + 180° - \widehat{CPA} = \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180° - \widehat{CC_1B}$$

comme voulu. On montre ensuite que P appartient aux trois droites demandées. Or

$$\widehat{A_1PB_2} = \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_2} = 90° + 90° = 180°$$

donc le point P appartient à la droite (A_1B_2). On procède de même pour les droites (C_2B_1) et (C_1A_2).

Remarque : On aurait également pu tracer les cercles circonscrits aux rectangles données dans l'espoir d'introduire un point intermédiaire intéressant.

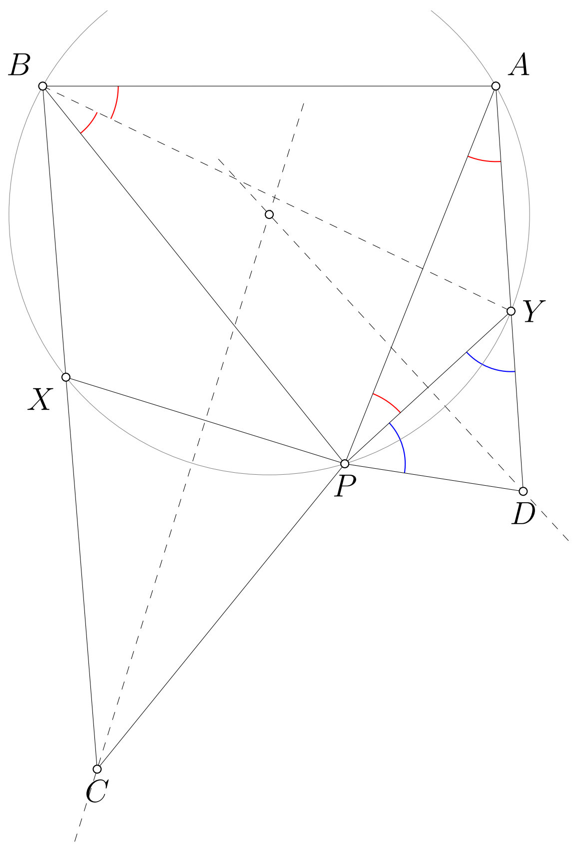
3.5 IMO 2020 P1

Exercice 5. *(IMO 2020 P1)* Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Solution 5.



Résoudre l'exercice consiste à trouver comment tracer la figure.

Pour cela on prend le problème à l'envers en notant que l'angle $\widehat{PBA}$ détermine la position du point D. Ceci nous conduit à construire le triangle PBA puis construire les points C et D à partir de ce triangle. Pour construire le point D, il faut déterminer l'angle $\widehat{PBA} = 2\widehat{PAD}$. Ceci conduit à couper l'angle $\widehat{PBA}$ en deux et à tracer sa bissectrice.

Supposons le point D construit. Le point Y d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{PBA}$ avec la droite (AD) vérifie par hypothèse

$$\widehat{YAP} = \widehat{DAR} = \frac{1}{2}\widehat{PBA} = \widehat{YBA}$$

donc les points Y, A, B et P sont cocycliques. Le point Y est donc le pôle Sud du sommet B dans le triangle ABP. A l'inverse, le point D appartient donc à la droite (AY) avec Y le pôle Sud du sommet B dans le triangle PAB. On a alors

$$\widehat{DPY} = \widehat{DPA} - \widehat{YPA} = 3\widehat{PAD} - \widehat{PAD} = 2\widehat{PAD} = \widehat{PYD}$$

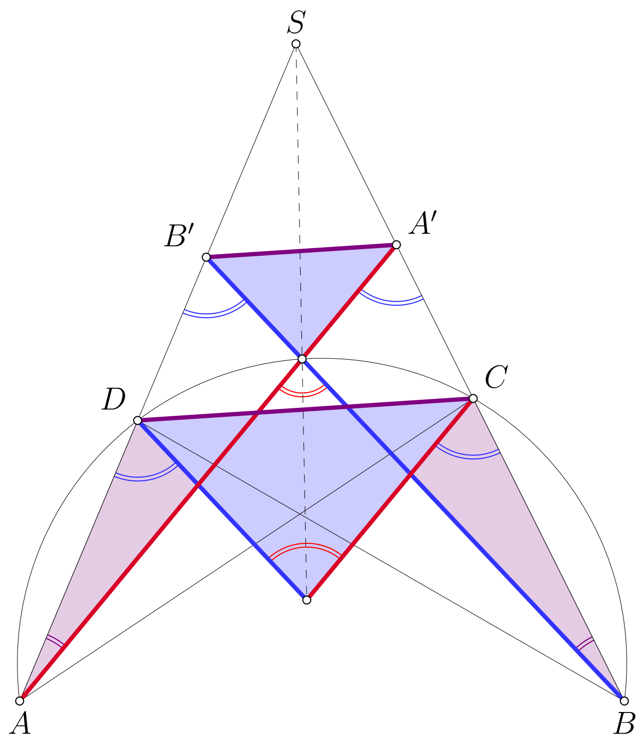
Le triangle PDY est donc isocèle en D. Le point D est donc le point d'intersection de la droite (AY) et de la médiatrice du segment $[PY]$. La bissectrice de l'angle $\widehat{PDA}$ est donc la médiatrice du segment $[PY]$.

De même la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ est la médiatrice du segment $[PX]$, où X est le pôle Sud du sommet A dans le triangle APB. Les bissectrices des angles $\widehat{PCB}$ et $\widehat{PDA}$ se coupent donc au point O le centre du cercle circonscrit au triangle APB. Celui-ci appartient bien à la médiatrice $[AB]$.

3.6 IMO SL 2023 G3

Exercice 6. *(IMO SL 2023 G3)* Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $\widehat{BAD} < \widehat{ADC}$. On note M le milieu de l'arc CD ne contenant pas A. On suppose qu'il existe un point P à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$ tel que $\widehat{ADB} = \widehat{CPD}$ et $\widehat{ADP} = \widehat{PCB}$.
Montrer que $(AD), (PM)$ et (BC) sont concourantes.

Solution 6.



On commence par une chasse aux angles. On note X et Y les points d'intersection des droites (DP) et (AM) et des droites (CP) et (BM). Puisque M est le milieu de l'arc DC, $\widehat{DAM} = \widehat{CBM}$. Puisqu'en plus $\widehat{ADP} = \widehat{PCB}$, il vient que $\widehat{CYB} = \widehat{DXA}$. Autrement dit, puisqu'on a aussi $\widehat{AMB} = \widehat{ADB} = \widehat{DPC}$, le quadrilatère $XMYP$ a ses côtés opposés égaux deux à deux. C'est donc un parallèlogramme et on déduit $(BM)||(DP)$ et $(AM)||(CP)$.

On pose S le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Soit également A' le point d'intersection des droites (AM) et (BC) et B' le point d'intersection des droites (BM) et (AD). Par parallélisme, $\widehat{AA'B} = \widehat{PCB} = \widehat{PDA} = \widehat{AB'B}$, ce qui implique que les points B', A', B et A sont cocycliques. On a donc par puissance d'un point

$$\frac{SA'}{SC} \cdot \frac{SD}{SB'} = \frac{SA}{SB} \cdot \frac{SC}{SD} = 1.$$

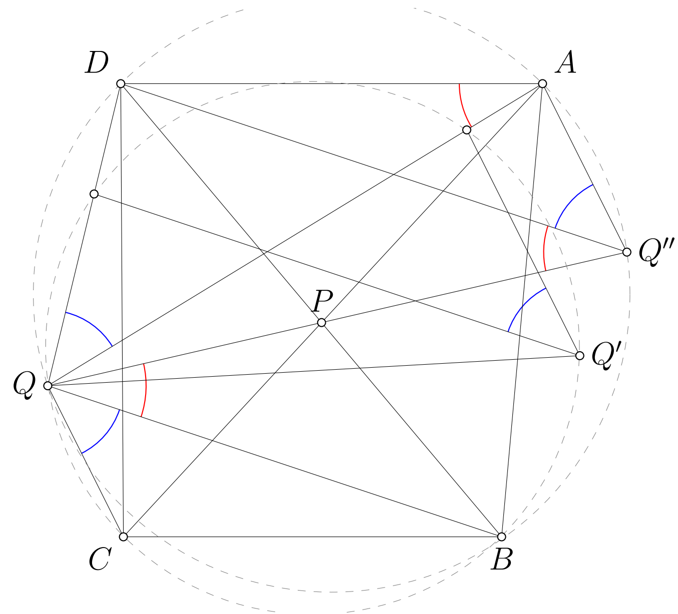
On déduit par Thalès que les droites $(B'A')$ et (CD) sont parallèles. Les triangles $B'A'M$ et DCP ont leurs côtés deux à deux parallèles, le théorème de Thalès permet donc de conclure que les droites $(B'D), (PM)$ et (CA') sont concourantes.

En effet, si c'est le cas, alors, du fait des parallélismes mis en évidence, S sera le centre

3.7 IMO SL 2007 G3

Exercice 7. *(IMO SL 2007 G3)* Soit $ABCD$ un trapèze avec les côtés AD et BC parallèles et dont les diagonales se coupent au point P. Le point Q est compris entre les droites (AD) et (BC) de telle sorte que $\widehat{AQD} = \widehat{BQC}$ et de telle sorte que les points P et Q sont situés de part et d'autre de la droite (CD). Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Solution 7.



Pour construire la figure, on construit d'abord le point Q et le segment $[BC]$ et on construit le segment $[AD]$ ensuite. Pour transporter l'angle $\widehat{BQC}$, on utilise un point intermédiaire Q' sur le cercle (BCQ). On cherche à utiliser le théorème de l'angle inscrit dans ce cercle, mais pour cela il faut transporter l'angle $\widehat{BQC}$ pour obtenir un angle de même mesure issue du sommet Q'. On trace les parallèles aux droites (QB) et (QC) passant par Q'. Elles forment bien sûr un angle de mesure $\widehat{BQC}$. Elles recoupent le cercle (BQC) en deux points X et Y et d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{XQY} = \widehat{XQ'Y} = \widehat{BQC}$. Pour construire le segment $[AD]$, on choisit une parallèle quelconque à la droite (BC) passant par deux points appartenant respectivement aux droites (QX) et (QY) et ces deux points seront les points A et D.

Passons à la résolution de l'exercice. Malheureusement, notre construction ne nous aide pas beaucoup ici. Cependant, en présence d'un trapèze, il est toujours bon de considérer les deux homothéties qui envoyent une base sur la deuxième. Ici, l'homothétie à considérer est tout indiquée : il s'agit de celle de centre P envoyant B sur D et C sur A. Si Q'' est l'image de Q par cette homothétie, les paires de droites $((AQ''), (QC))$ et $((DQ''), (BQ))$ sont deux à deux parallèles. On en déduit que $\widehat{AQ''D} = \widehat{BQC} = \widehat{AQD}$ donc le point Q'' appartient au cerlce (ADQ). On en déduit par le théorème de l'angle inscrit et par le parallélisme des droites (DQ'') et (QB) que

$$\widehat{DAQ} = \widehat{DQ''Q} = \widehat{BQP}$$

comme voulu.

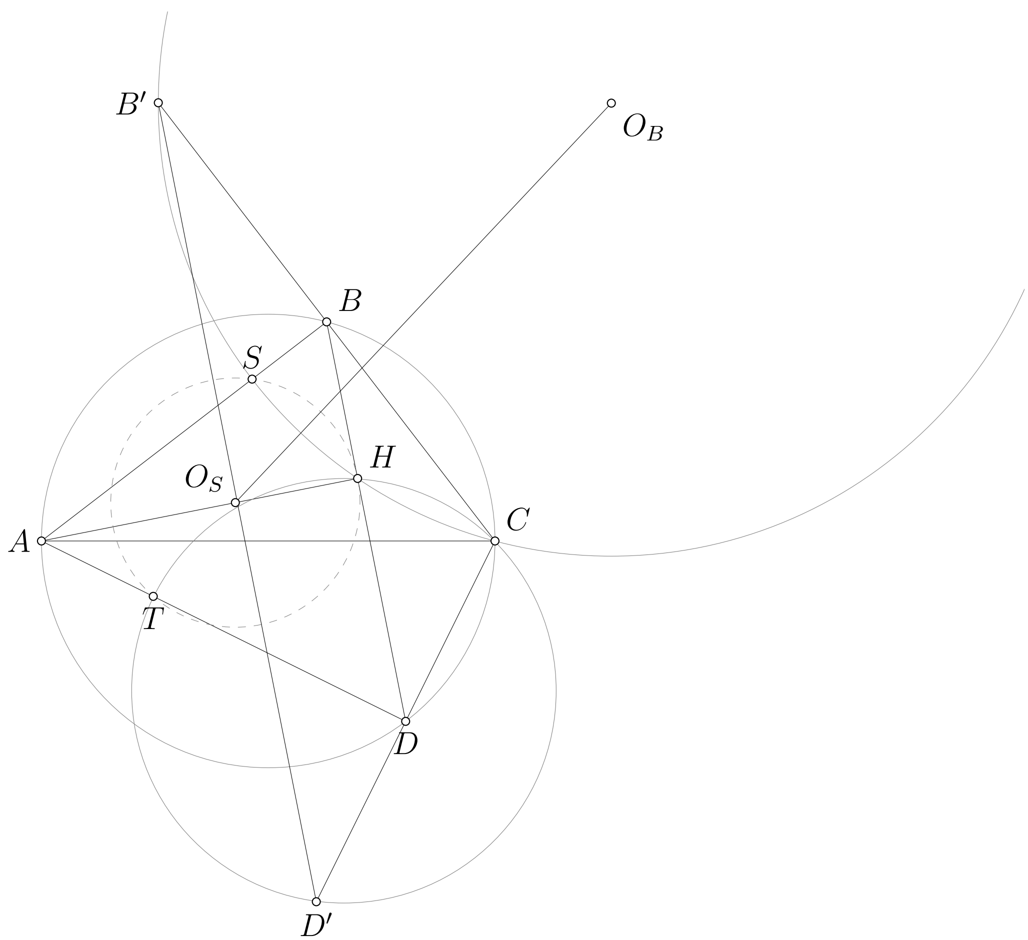
3.8 IMO 2014 P3

Exercice 8. *(IMO 2014 P3)* Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

Solution 8.



Commençons par chercher comment placer les points S et T. Pour cela il y a plusieurs façon de faire (par exemple, on peut regarder une inversion de centre C), la plus simple est de manipuler l'égalité d'angle donnée.
Si on introduit la perpendiculaire à la droite (AD) en T et si X est un point quelconque de cette perpendiculaire dans le même demi-plan délimité par (AD) que C, alors

$$\widehat{XTC} = 90° - \widehat{DTC} = 180° - \widehat{THC}$$

ce qui signifie que (XT) est tangente en T au cercle (THC). Donc la tangente au cercle (THC) est perpendiculaire à la droite (AD), donc la droite (AD) contient le centre du cercle. Cela signifie que le symétrique D' du point C par rapport au point D appartient au cercle (THC). On peut désormais tracer le point T et de même le point S, en posant B' le symétrique du point C par rapport au point B.

On déduit tout de suite que $AD' = AC = AB'$. Comme les droites $(D'B')$ et (DB) sont parallèles, les droites (AH) et $(D'B')$ sont perpendiculaires, donc la droite (AH) est la médiatrice du segment $[B'D']$, si bien que $HB' = HD'$.
Pour démontrer le problème, il suffit donc de montrer que les médiatrices des segments $[SH]$ et $[TH]$ se coupent sur le segment $[AH]$. On notera dans la suite O_B et O_D les centres respectifs des cercles (CSB') et (CTD'). Si on note O_S le point d'intersection de la médiatrice sur segment $[SH]$ avec le segmant $[AH]$ et que l'on définit de manière similaire le point O_T, il suffit de montrer que

$$\frac{O_S A}{O_S H} = \frac{O_T A}{O_T H}$$

On calcule $\dfrac{O_S A}{O_S H}$. D'après le théorème de la bissectrice, puisque $(O_S O_B)$ est la bissetrice de l'angle $\widehat{SO_BH}$, et d'après la loi des sinus dans le triangle AO_BC, on a

$$\frac{O_S A}{O_S H} = \frac{AO_B}{O_B H} = \frac{AO_B}{O_B C} = \frac{\sin \widehat{ACO_B}}{\sin \widehat{CAB}} = \frac{\sin(\widehat{CAB} + \widehat{CO_B B}))}{\sin \widehat{CAB}} = \cos \widehat{BO_B C} + \frac{\sin \widehat{BO_B C}}{\tan \widehat{CAB}}$$

On calcule chaque terme séparément et notre objectif est de se ramener au quadrilatère $ABCD$ pour montrer que la quantité que l'on calcule est symétrique en les paramètres du quadrliatère $ABCD$, de sorte que les deux rapports seront fatalement égaux.
D'une part, avec le théorème de l'angle au centre, on a

$$\cos \widehat{BO_B C} = \cos(180° - \widehat{B'HC}) = -\cos \widehat{B'HC}$$

Le théorème d'Al-Kashi nous donne alors

$$-\cos \widehat{B'HC} = \frac{B'C^2 - HC^2 - HB'^2}{HC \cdot HB'} = \frac{4BC^2 - HC^2 - HB'^2}{2HC \cdot HB'}$$

Puisque $HB' = HD'$, on est sur la bonne voie. D'autre part,

$$\frac{\sin \widehat{BO_B C}}{\tan \widehat{CAB}} = \frac{AB}{BC} \cdot \sin \widehat{BO_B C} = \frac{AB}{O_B C}$$

En utilisant à nouveau Al-Kashi dans le triangle $B'HO_B$ et en posant $R_B = O_B C = O_B H = O_B B'$:

$$HB'^2 = 2R_B^2 - 2R_B^2 \cos 2\widehat{B'CH} = 4R_B^2 \sin^2 \widehat{BCH}$$

donc avec la loi des sinus dans le triangle BHC :

$$\frac{AB}{O_B C} = 2\frac{AB}{HB'} \sin \widehat{BCH} = 2\frac{AB}{HB'} \cdot \frac{BH}{CH} \sin \widehat{DBC} = 2\frac{AB \cdot BH \cdot \cos \widehat{ABH}}{CH \cdot HB'} = 2\frac{BH^2}{CH \cdot HB'}$$

On somme le tout et on utilise Pythagore :

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{BO_BC}+\frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}} &= \frac{4BC^2-HC^2-HB'^2}{2HC\cdot HB'}+2\frac{BH^2}{CH\cdot HB'}\\
&= \frac{2}{HB'\cdot HC}(BC^2+BH^2)-\frac{HC^2+HB'^2}{2HC\cdot HB'}\\
&= \frac{2}{HB'\cdot HC}(AC^2-AH^2)-\frac{HC^2+HB'^2}{2HC\cdot HB'}
\end{aligned}$$

De même on trouvera :

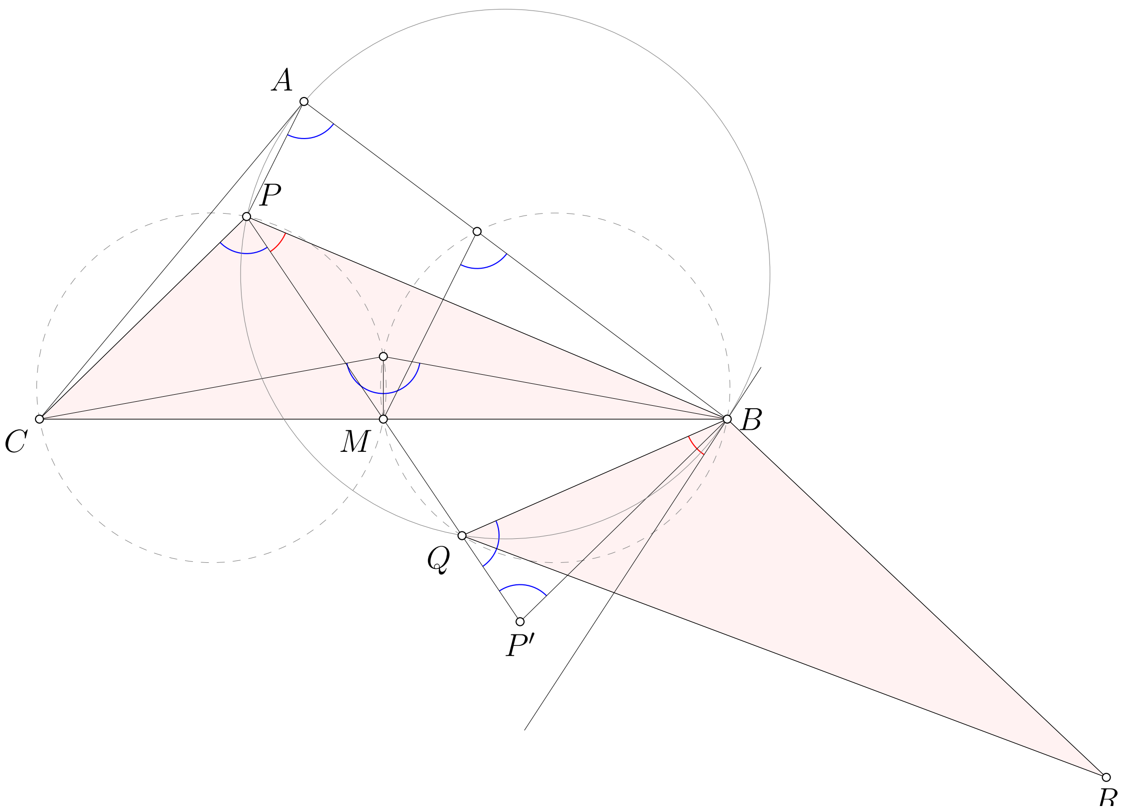
$$\frac{O_TA}{O_TH}=\frac{2}{HD'\cdot HC}(AC^2-AH^2)-\frac{HC^2+HD'^2}{2HC\cdot HD'}$$

et comme$HB'=HD'$, on a bien $\frac{O_SA}{O_SH}=\frac{O_TA}{O_TH}$ et le problème est terminé.

3.9 BXMO 2012

Exercice 9. *(BXMO 2012)* Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC vérifiant que $\widehat{CPM} = \widehat{PAB}$. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle PAB. Soit Q le second point d'intersection de la droite (PM) avec le cercle Γ. Soit R le symétrique du point P par rapport à la tangente au cercle Γ en B. Montrer que quand P varie, la distance QR reste constante.

Solution 9.



Commençons par tracer la figure exacte, pour pouvoir faire des conjectures et avancer dans l'exercice.
Pour construire un tel point P, il va falloir rajouter des points intermédiaires pour avoir des angles intermédiaires. Il y a plusieurs pistes à explorer et plusieurs façons de faire, en voici une. On comme par tracer une droite issue du sommet A, sur laquelle nous placerons notre point P. Soit D un point sur cette droite à l'intérieur du triangle ABC. Une façon de créer un angle commode égal à $\widehat{DAB}$ est de tracer la parallèle à (AD) passant par M. On note E le point d'intersection de cette parallèle avec le segment $[AB]$. On a donc $\widehat{MEB} = \widehat{DAB}$. Pour passer au point P, on rajoute un point intermédiaire X sur la médiatrice du segment $[BC]$ et appartenant au cercle (MEB). Alors $\widehat{CXM} = \widehat{MXB} = \widehat{MEB} = \widehat{DAB}$. Donc il ne reste plus qu'à choisir P comme le point d'intersection de la droite (AD) et du cercle (CXM). On peut ensuite tracer le reste de la figure.

Une fois cette figure tracée, on peut conjecturer que les triangles CPB et QBR sont semblables et puisque $BR = BP$, ils sont isométriques et en particulier $QR = BC$, ce qui terminaerait l'exercice. On va donc montrer que $\widehat{QBR} = \widehat{CPB}$ et $QB = CP$.

Pour la première égalité d'angle, on utilise l'angle tangentiel et le fait que (BP) et (BR) sont symétriques par rapport à la tangente en B à Γ. On note Y un point quelconque sur cette tangente dans le même demi-plan délimité par la droite (AB) que le point Q :

$$\widehat{QBR} = \widehat{QBY} + \widehat{YBR} = \widehat{QPB} + \widehat{YBP} = \widehat{QPB} + \widehat{PAB} = \widehat{CPM} + \widehat{MPB} = \widehat{CPB}$$

Pour montrer que $CP = BQ$, il reste encore à utiliser que le point M est le milieu du segment $[BC]$. La fçon la plus commode de procéder est donc de compléter le triangle CPB en un parallélogramme en introduisant P' le symétrique du point P par rapport au point M. Il suffit alors de montrer que $QB = BP'$, soit $\widehat{P'QB} = \widehat{QP'B}$. Or

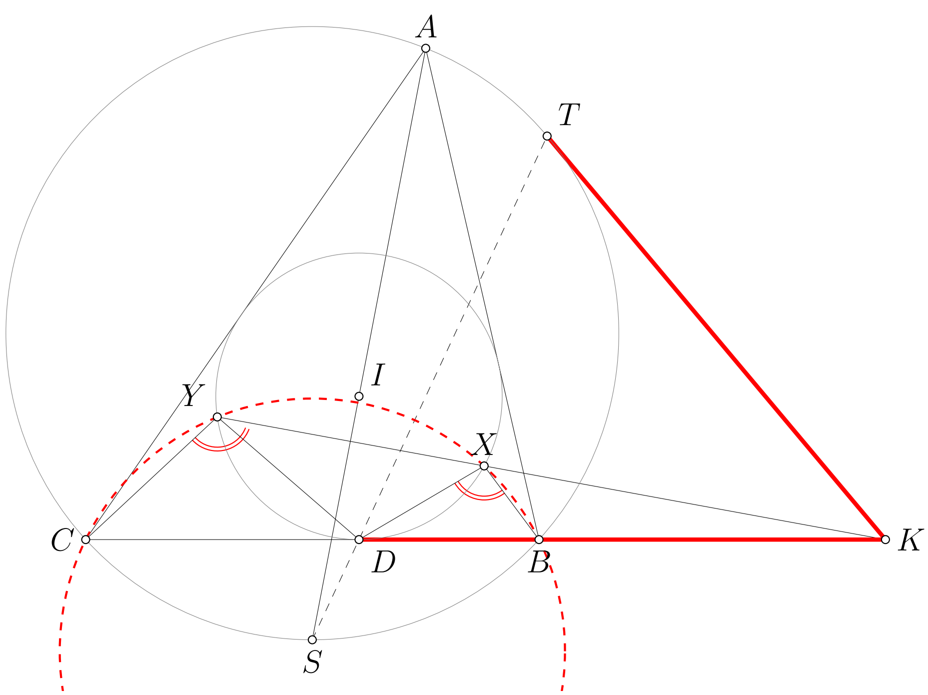
$$\widehat{QP'B} = \widehat{MPC} = \widehat{PAB} = \widehat{P'QB}$$

ce qui permet de conclure.

3.10 EGMO 2024 P4

Exercice 10. *(EGMO 2024 P2)* Soit ABC un triangle dans lequel $AC > AB$, et soient Ω son cercle circonscrit, ω son cercle inscrit et I le centre de ω. Soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés BC, CA et AB. Soient X et Y des points sur les petits arcs DE et DF de ω tels que $\widehat{BXD} = \widehat{DYC}$. On note K le point d'intersection des droites (XY) et (BC). La tangente à Ω issue de K touche l'arc BC contenant A en T. Montrer que les droites (TD) et (AI) se coupent sur Ω.

Solution 10.



Une fois n'est pas coutume, partons de la fin : notons S le pôle Sud issue du sommet A. Le point d'intersection de (AI) avec Ω est S, donc il s'agit de montrer que S, D et T sont alignés. Il suffit donc, puisque S est le milieu de l'arc BC, de montrer que la droite (DT) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BTC}$. Or on a, d'après le théorème de l'angle tangent,

$$\widehat{BTD} - \widehat{DTC} = (\widehat{TDK} - \widehat{TCK}) - (\widehat{DTK} - \widehat{BTK}) = \widehat{TDK} - \widehat{DTK}.$$

Pour que le membre de gauche soit nul, il suffit donc de montrer que le membre de droite est nul, c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que le triangle TDK est isocèle en K.

En réalité, ce calcul ne sort pas de nulle part : il s'agit d'une configuration appelée "lemme du bocal" : soit PQR un triangle et la tangente à $\mathcal{C}_{PQR}$ en P coupe (QR) en Z. On note D un point du segment $[QR]$. Alors D est le pied de la bissectrice de $\widehat{QPR}$ si et seulement si $PZ = DZ$.

Continuons de remonter le problème : d'après la puissance du point K par rapport aux cercles Ω et ω,

$$KD^2 - TK^2 = KX \cdot KY - KB \cdot KC.$$

Ainsi, pour montrer que $KD = TK$, il suffit de montrer que B, X, Y et C sont cocycliques.

Or on a :

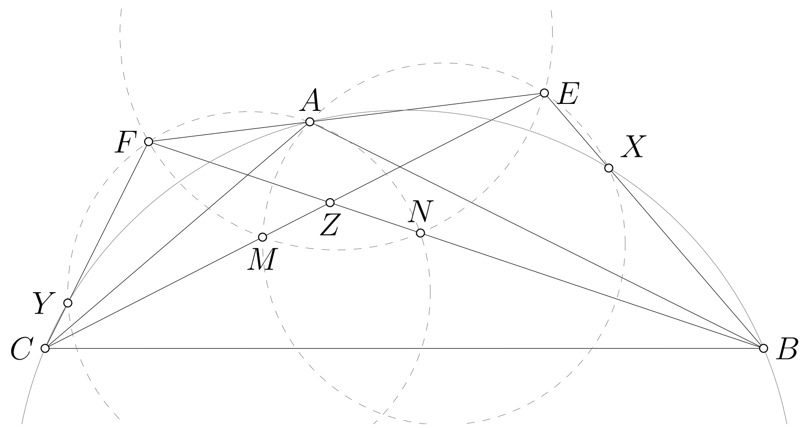
$$\widehat{YXB} = \widehat{YXD} + \widehat{DXB} = \widehat{YDC} + \widehat{CYD} = 180^\circ - \widehat{YCB},$$

ce qui implique bien que les points X, Y, B et C sont cocycliques.

3.11 EGMO 2021 P3

Exercice 11. *(EGMO 2021 P3)* Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Solution 11.



Pour tracer le point M, on introduit un point intermédiaire.

Penser point intermédiaire ! Un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'égalité d'angle

Ici, on considère donc le point X, second point d'intersection des cercles (ABC) et (AEM). En pratique, on choisit X comme le second point d'intersection de la droite (EB) et du cercle (ABC). Alors on a bien par théorème de l'angle inscrit $\widehat{AXE} = \widehat{ACB}$. On choisit alors le point M comme le point d'intersection de la droite (CE) et du cercle (AXE).
On construit de même le point N à l'aide du point intermédiaire Y défini comme le second point d'intersection du cercle (ABC) avec la droite (CF).

Cette construction nous a apporté deux points et deux cercles. On constate que démontrer que les points E, M, N et F sont cocycliques revient à montrer que le point Z d'intersection des droites (BF) et (CE) appartient à l'axe radical des cercle (AME) et (ANF). En effet, on aura alors $ZM \cdot ZE = ZN \cdot ZF$.
Cette caractérisation est facile à exprimer en coordonnées barycentriques. Puisqu'il y a peu de points, on peut s'essayer au calcul.
On choisit ABC comme repère et a, b et c désignent les longueurs usuelles. On adopte également les notations de Conway pour les quantités S_A, S_B et S_C.

On calcule les coordonnées du point E. Si I_C est le centre du cercle $C-$exinscrit au triangle ABC, le point E est sur la droite (AI_C) donc ses coordonnées sont de la forme $(t, b, -c)$. Le point E appartient à la hauteur issue du sommet B donc ses coordonnées s'écrivent également de la forme (S_C, s, S_A). On en déduit que le point E a pour coordonnées $(cS_C, -bS_A, cS_A)$. De même, le point F a pour coordonnées $(bS_B, bS_A, -cS_A)$.
Le point Z a donc ses coordonnées de la forme $(bS_B, s, -cS_A)$ d'une part et $(cS_C, -bS_A, t)$ d'autre part. Ses coordonnées sont donc $(-bcS_BS_C, b^2S_AS_B, c^2S_AS_C)$.

On calcule les coordonnées du point X. Il appartient à la droite (BE), ses coordonnées sont donc de la forme (S_C, s, S_A). Il appartient au cercle (ABC) donc

$$s(a^2S_A + c^2S_C) = -b^2S_AS_C$$

Les coordonnées du point X sont donc $(S_C(a^2S_A + c^2S_C), -b^2S_AS_C, S_A(a^2S_A + c^2S_C)$. De même, les coordonnées du point Y sont $(S_B(a^2S_A + b^2S_B), S_A(a^2S_A + b^2S_B), -c^2S_AS_B)$.
On calcule à présent les paramètres du cercle (AEX). On sait déjà que $u = 0$ puisque le cercle passe par le point A. Puisque le point X appartient au cercle (ABC), $-a^2y_Xz_X - b^2z_Xx_X - c^2x_Xy_X = 0$ et donc en injectant ses coordonnées dans l'équation du cercle (AEX) on a

$$w(a^2S_A + c^2S_C) = vb^2S_C$$

On injecte à présent les coordonnées du point E dans l'équation de cercle :

$$\begin{aligned} 0 &= a^2bcS_A^2 - b^2c^2S_AS_C + bc^3S_AS_C + (-vbS_A + wcS_A)(\underbrace{cS_C + cS_A}_{cb^2} - bS_A) \\ &= bS_A\left(a^2cS_A - bc^2S_C + c^3S_C + (wc - vb)(cb - S_A)\right) \end{aligned}$$

On injecte la première équation liant v et w :

$$v\left(c\frac{b^2S_C}{a^2S_A + c^2S_C} - b\right)(cb - S_A) = bc^2S_C - c^3S_C - a^2cS_A$$

et après simplification :

$$vb(cb - S_A) = c(a^2S_A + c^2S_C)$$

On pose $V_B = v(bc - S_A) = \dfrac{c}{b}(a^2S_A + c^2S_C)$ et $W_B = (bc - S_A)w = bcS_C$.
On trouve de même $V_C = bcS_B$ et $W_C = \dfrac{b}{c}(a^2S_A + b^2S_B)$.
Il reste alors à vérifier que les coordonnées de Z satisfont

$$(V_B - V_C)y_Z + (W_B - W_C)z_Z = 0$$

Or

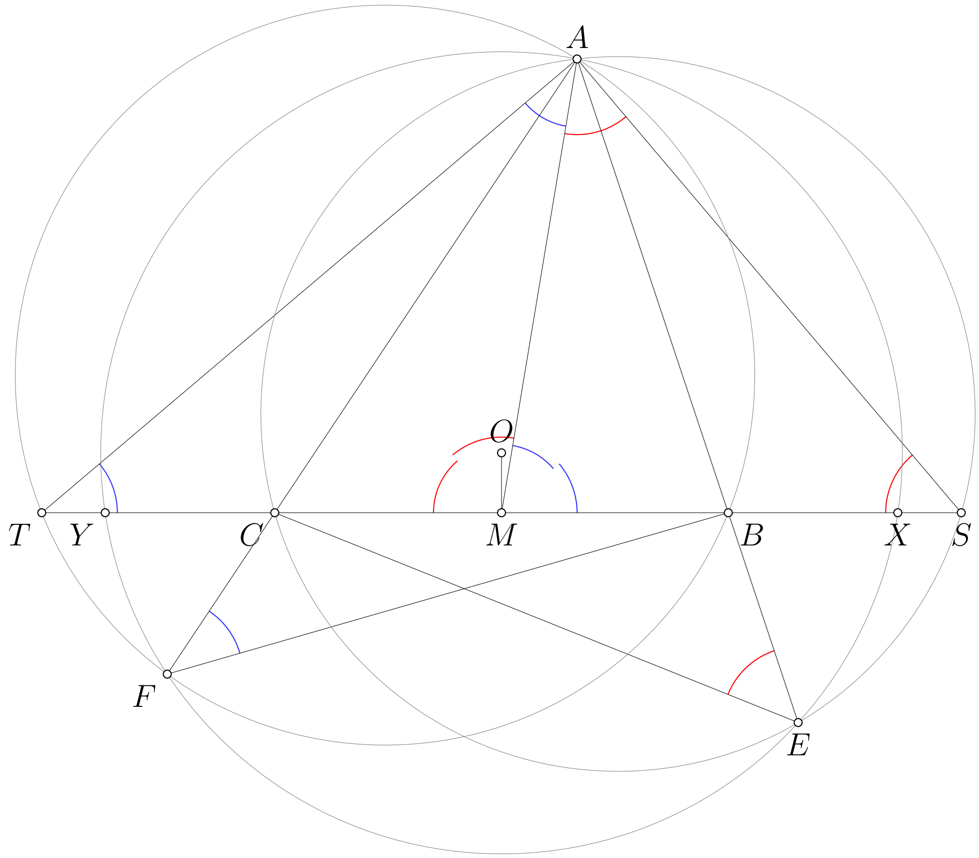
$$\begin{aligned} (V_B - V_C)b^2S_B + (W_B - W_C)c^2S_C &= cbS_B(a^2S_A + c^2S_C) - b^3cS_B^2 + c^3bS_C^2 - bcS_C(a^2S_A + b^2S_B) \\ &= cb\left(S_B(\underbrace{a^2S_A + c^2S_C - b^2S_B}_{\frac{1}{2}(b^4-(a^2-c^2)^2)}) - S_C(\underbrace{a^2S_A - b^2S_B + c^2S_C}_{\frac{1}{2}(c^4-(a^2-b^2)^2)})\right) \\ &= 2bcS_A\left(-S_BS_C + S_CS_B\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le point Z appartient bien à l'axe radical des cercles (AEX) et (BFY), comme désiré.

3.12 MEMO 2017 P7

Exercice 12. *(MEMO 2021 P7)* Soit ABC un triangle, M le milieu du segment $[BC]$, on note E et F deux points des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ de telle sorte que $2\widehat{AEC} = \widehat{AMC}$ et que $2\widehat{AFB} = \widehat{AMB}$. On note X et Y les intersections du cercle circonscrit au triangle AEF avec la droite (BC). Montrer que $XB = YC$.

Solution 12.



On va considérer le cercle passant par les points A, C et E ainsi que le cercle passant par les points A, B et F. On note leurs seconds points d'intersection avec la droite (BC) respectivement S et T. On va montrer dans un premier temps que le cercle passant par les points A, S et T est de centre M.

Mais par une courte chasse aux angles, $\widehat{AST} = \widehat{AET} = \frac{\widehat{AMT}}{2}$, on calcule également $\widehat{SAM} = 180° - \widehat{ASM} - \widehat{AMS} = 180° - \widehat{SMA} - \frac{\widehat{AMT}}{2} = \frac{\widehat{AMT}}{2}$, ainsi le triangle AMS est isocèle en M. De la même manière le triangle AMT est isocèle en M. Cela conclut le fait que le cercle circonscrit du triangle AST a pour centre M.

Pour conclure on remarque que la puissance de B par rapport au cercle circonscrit du triangle AEF est $BA \cdot BE = BC \cdot BS$ et la puissance de C par rapport à au cercle circonscrit du triangle AEF est $CA \cdot CF = CT \cdot CB = BC \cdot BS$. Donc B et C la même puissance par rapport au cercle AEF, ils sont donc à égale distance du centre du cercle circonscrit du triangle AEF. La médiatrice de $[XY]$ est donc la même que la médiatrice de $[AB]$, d'où la conclusion de l'exercice.