PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 26 NOVEMBRE 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe senior est constitué des élèves nés en 2010 ou avant, ou étant en terminale. Les autres élèves sont dans le groupe junior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soit S le second point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ABO. Montrer que les droites (OS) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 2. Soient un cercle ω et une droite ℓ tangente à ω en Y. Soit X un point sur ℓ. Une tangente à ω, perpendiculaire à ℓ, rencontre ℓ au point A et est tangente à ω au point D, de telle sorte que A et X soient du même côté de ℓ par rapport à Y. Soit B un point sur ℓ, de tel sorte que A, Y et B soient alignés dans cet ordre et tel que $AX = BY$. La seconde tangente à ω passant par B touche ω au point C. Montrer que $\widehat{XDA} = \widehat{YDC}$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle acutangle avec $AB < AC < BC$. Soit Γ_1 son cercle circonscrit et O le centre de Γ_1. Soit Γ_2 le cercle de centre A et de rayon AC. Γ_2 recoupe la droite (BC) au point D et le cercle Γ_1 au point E. Soit F la seconde intersection de la droite (AD) et du cercle Γ_1. Montrer que B est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF.

Exercice 4. Soit ABC un triangle rectangle en B. On pose M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. Soit P un point sur le segment $[AC]$. On nomme K le point d'intersection des tangentes en P et en B au cercle circonscrit à BPC. Montrer que M, N et K sont alignés.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) est parallèle à (CD). On pose X le point d'intersection des droites (AC) et (BD). On suppose que les cercles de diamètre $[AD]$ et $[BC]$ s'intersectent en deux points, que l'on nomme P et Q. Montrer que les points P, Q et X sont alignés.

Exercice 6. Soit ABC un triangle acutangle, et D, E et F des points sur les côtés respectifs $[BC]$, $[AC]$, et $[AB]$ tels que $BF = BD$ et $CD = CE$. On suppose de plus que (EF) est parallèle à (BC). On pose P le point d'intersection de la droite (AD) avec la tangente en F au cercle circonscrit au triangle DEF. On pose Q le point d'intersection de la médiatrice du segment $[EF]$ avec la droite (AC). Montrer que (PQ) est parallèle à (BC).

Exercice 7. Soit ABC un triangle et soient D, E et F les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets A, B et C. Soit P le point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC en B et C. La perpendiculaire à (EF) passant par P coupe (AD) au point Q. Soit R le projeté orthogonal de A sur (EF). On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que (DR) et (OQ) sont parallèles.

Exercice 8. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles tangents extérieurement en X. Soient A, B, C et D quatre points tels que A, B sont sur ω_1 et C, D sont sur ω_2 et tels que (AC) et (BD) sont les tangentes communes à ω_1 et ω_2. La droite (CX) coupe (AB) au point E et recoupe ω_1 au point F. La droite (AF) recoupe le cercle circonscrit au triangle EBF au point G. La droite (AX) coupe (CD) au point H. Montrer que les points G, E et H sont alignés.

Exercice 9. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit D un point du plan tel que les points C et D sont de part et d'autre de la droite (AB) et tel que $\widehat{ADB} = 90°$. Soit E un point du plan tel que les points B et E sont de part et d'autre de la droite (AC) et tel que $\widehat{AEC} = 90°$. On suppose que $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. On note A_1, B_1 et C_1 les pieds respectifs des hauteurs issues des sommets A, B et C dans le triangle ABC. Soit K le milieu du segment $[BC_1]$ et L le milieu du segment $[CB_1]$. Montrer que les centres des cercles circonscrits aux triangles AKL, $A_1B_1C_1$ et DEA_1 sont alignés.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient ABC un triangle, D et E les pieds des hauteurs issues de A et B. Les projetés orthogonaux du point D sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ sont notés respectivement P et Q. On note M le point d'intersection de (PQ) avec (DE). Montrer que M est le milieu du segment $[DE]$.

Exercice 11. Soit ABC un triangle, H son orthocentre et Ω son cercle circonscrit. Soit ℓ une droite passant par H. On nomme ℓ_A, ℓ_B et ℓ_C les symétriques de ℓ par rapport aux droites $(BC), (AC)$ et (AB). Montrer que les droites ℓ_A, ℓ_B et ℓ_C sont concourantes en un point appartenant à Ω.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) est parallèle à (CD). On pose X le point d'intersection des droites (AC) et (BD). On suppose que les cercles de diamètre $[AD]$ et $[BC]$ s'intersectent en deux points, que l'on nomme P et Q. Montrer que les points P, Q et X sont alignés.

Exercice 13. Soit ABC un triangle. Le cercle C-exinscrit du triangle ABC touche les droites $(AB), (AC)$ et (BC) respectivement aux points M, N et K. Les points P, Q sont sur la droite (NK) et vérifient $AN = AP$ et $BK = BQ$. Montrer que le rayon du cercle circonscrit au triangle MPQ est égal à celui du cercle inscrit dans ABC.

Exercice 14. Soit ABC un triangle acutangle, tel que $AB < AC$. On nomme K le milieu de l'arc BC ne contenant pas A et P le milieu du segment $[BC]$. Soient I_B et I_C les centres respectifs des cercles B-exinscrits et C-exinscrits du triangle ABC. Soit Q le symétrique du point K par rapport à A. Montrer que les points P, Q, I_B et I_C sont cocycliques.

Exercice 15. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que C appartient à la bissectrice de $\widehat{BAD}$. Soient E et F des points respectivement sur les droites (BC) et (CD) de sorte que (EF) est parallèle à (BD). Soient P et Q des points sur les droites (FA) et (EA) respectivement tels que le cercle ω_1 circonscrit au triangle ABP et le cercle ω_2 circonscrit au triangle ADQ sont tous les deux tangents à (AC). Montrer que les points B, P, Q et D sont cocycliques.

Exercice 16. Soit un triangle ABC dont les trois côtés sont de longueurs différentes. La bissectrice extérieure à l'angle $\widehat{BAC}$ rencontre (BC) en X. Les droites ℓ_b et ℓ_c sont les tangentes issues de B et C par rapport au cercle circonscrit à ABC. Une droite passant par X coupe ℓ_b et ℓ_c aux points Y et Z respectivement. On pose N le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AYB et AZC et D le point d'intersection des droites ℓ_b et ℓ_c. Montrer que la droite (ND) est une bissectrice de $\widehat{YNZ}$.

Exercice 17. Soit ABC un triangle, k son cercle circonscrit et H son orthocentre. Soit P un point arbitraire dans le triangle ABC. Les droites (AP), (BP) et (CP) recoupent le cercle k aux points A_1, B_1 et C_1. Les points A_2, B_2 et C_2 sont les projections orthogonales de P sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB). Les points A_3, B_3 et C_3 sont les symétriques de A_1, B_1 et C_1 par rapport aux points A_2, B_2 et C_2. Montrer que les points H, A_3, B_3 et C_3 sont cocycliques.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On note respectivement A_1, B_1 et C_1 les points de tangence des cercles A-exinscrit,B-exinscrit et C-exinscrit avec (BC), (CA) et (AB). Enfin, on définit D le point de (BC) tel que $\widehat{AID} = 90°$. Montrer que si A appartient au cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$, alors (AD) est tangente au cercle circonscrit à DB_1C_1.