Coupe Animath d'Automne

1 octobre 2025

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

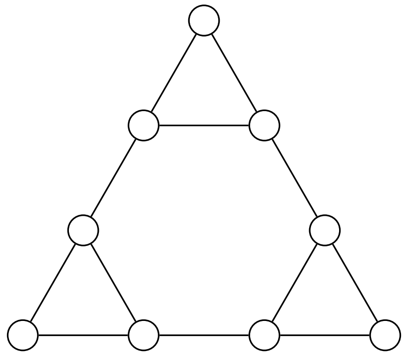
Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Soient A, B et C trois points sur un cercle de centre O, placés tels que A, O et C ne soient pas alignés, tels que B soit sur le petit arc $\overset{\frown}{AC}$ et en respectant les égalités d'angles suivantes : $\widehat{OBA} = 77°$ et $\widehat{OBC} = 33°$. Combien mesure l'angle $\widehat{AOC}$?
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Sur la figure suivante se trouvent 9 cercles. On dit que deux de ces cercles sont connectés s'ils sont reliés par un segment ne passant par aucun autre cercle. Eva colorie chacun des cercles soit en vert, soit en rouge. Une fois tous les cercles coloriés, elle gagne un bonbon pour chaque paire de deux cercles de couleurs différentes étant connectés. Déterminer le nombre maximal de bonbons qu'Eva peut obtenir ainsi.



Exercice 3. Soit ABC un triangle dont le plus petit côté est $[BC]$ et soit D un point sur le segment $[BC]$. Soient E sur le segment $[AC]$ tel que $CD = CE$ et F sur le segment $[AB]$ tel que $BD = BF$. Soient de plus P le symétrique de D par rapport à B et Q le symétrique de D par rapport à C. Soit X le point d'intersection des droites (QE) et (PF). Montrer que les points D, E, F et X se trouvent sur un même cercle.

Exercice 4. Hadriel a choisi deux nombres entiers strictement positifs a et b. Quand il fait la division euclidienne de a par b, il reste 2. Quand il fait la division euclidienne de b par a, il reste 4. Déterminer toutes les valeurs possibles que peut prendre b.

Exercice 5. Montrer que parmi quatre nombres réels strictement positifs, il en existe toujours deux dont la différence (c'est-à-dire le plus grand des deux auquel on soustrait le plus petit) est strictement inférieure au tiers de la somme des deux autres.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E un point sur le segment $[BC]$. On trace la parallèle à la droite (AE) passant par D, sur laquelle on place deux points, F et G, tels que D se situe sur le segment $[FG]$ et tels que le quadrilatère $AEFG$ est un parallélogramme. Montrer que les aires des deux parallélogrammes $ABCD$ et $AEFG$ sont égales.

Exercice 7. Aurélien remplit une grille à m lignes et n colonnes avec des nombres réels positifs ou nuls, de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne au moins un élément non nul. Il veut aussi que pour toute case contenant un élément non nul, les sommes des éléments de sa ligne et de sa colonne soient identiques. Montrer que s'il a réussi à remplir sa grille en respectant ces contraintes, alors $m = n$.

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer

$$\sqrt{\frac{12}{\sqrt{\frac{45}{\sqrt{\frac{250}{\sqrt{\frac{400}{\sqrt{16}}}}}}}}}$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. Soient B, C deux points du plan, K_1 un demi-cercle de diamètre $[BC]$ et A un point sur K_1. Soient respectivement K_2 le demi-cercle de diamètre $[CA]$ et K_3 le demi-cercle de diamètre $[AB]$ situés à l'extérieur du triangle ABC.

On note S l'aire du triangle ABC, S_1 l'aire comprise entre l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de K_1 et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de K_3, et S_2 l'aire comprise entre l'arc $\overset{\frown}{AC}$ de K_1 et l'arc $\overset{\frown}{AC}$ de K_2.
Montrer que $S = S_1 + S_2$.

Exercice 10. Hadriel a choisi x un nombre réel. Il a trouvé trois entiers positifs deux-à-deux distincts n, m et l tels que les nombres $x+n, x+m$ et $x+l$ sont en progression géométrique. Montrer x est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers tels que $b \neq 0$.
On dit que des nombres réels a, b, c sont en progression géométrique s'il existe un nombre réel non nul k tel que $c = kb = k^2a$.

Exercice 11. Il y a 20 îles à Animathland, certaines sont reliées entre elles par des voies de ferry qui vont dans les deux sens. Chaque paire d'îles est reliée par au plus une voie, et il y a au total 172 voies. Montrer qu'il est possible de se rendre d'une île à n'importe quelle autre en changeant de ferry au plus une fois (c'est-à-dire en passant par au plus une autre île).

Exercice 12. Marie écrit le nombre 2 au tableau. Ensuite, chaque minute, elle calcule le produit de tous les nombres écrits au tableau et ajoute 1. Si n est le résultat de cette opération, Marie écrit alors au tableau le plus grand diviseur premier de n. Marie n'efface jamais rien du tableau. Montrer que Marie n'écrira jamais le nombre 5 au tableau.

Exercice 13. Aurélien remplit une grille à m lignes et n colonnes avec des nombres réels positifs ou nuls, de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne au moins un élément non nul. Il veut aussi que pour toute case contenant un élément non nul, les sommes des éléments de sa ligne et de sa colonne soient identiques. Montrer que s'il a réussi à remplir sa grille en respectant ces contraintes, alors $m = n$.

Exercice 14. Soit ABC un triangle qui n'est pas isocèle en A. Soient D, E et F les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe les demi-droites $[DE)$ et $[DF)$ en P et Q respectivement. Les droites (BP) et (CQ) se coupent en X. La droite (AX) coupe les droites (DE) et (DF) en Y et Z respectivement. Montrer que le triangle DYZ est isocèle.

Exercice 15. Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Gaëtan choisit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que parmi les n nombres $\frac{x_1}{1}, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \ldots, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, la plus grande valeur prise est 1 et la plus petite valeur prise est 0.

Parmi les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on note a le plus grand et b le plus petit. Gaëtan calcule $a - b$ et écrit cette différence au tableau. Quel est le plus grand nombre que Gaëtan peut écrire au tableau ? Quel est le plus petit ?