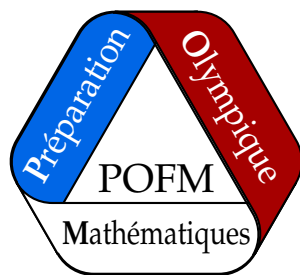


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 14 MAI 2025

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2009 ou avant. Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

<http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/>

Énoncés Junior

Exercice 1. Soient a et c des réels strictement positifs tels que $ac = 9$. Déterminer le plus grand réel b vérifiant la propriété suivante : pour tous réels x et y non nuls (et non nécessairement positifs),

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy} + \frac{c}{y^2} \geq 0.$$

Exercice 2. Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB = BC > CA$. La médiatrice du segment $[AB]$ coupe le segment $[BC]$ au point D . On note Ω le cercle circonscrit au triangle ADC . La médiatrice du segment $[AB]$ recoupe Ω en un point E . On note F le point diamétralement opposé au point E dans Ω .

Montrer que $DB = DF$.

Exercice 3. Déterminer tous les couples (p, q) de nombres premiers tels que $p \neq q$ et q^p est un diviseur de $p + p^q + p^{(q^p)}$.

Exercice 4. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer, en fonction de n , le plus grand entier strictement positif M vérifiant la propriété suivante : pour tout n -uplet $(a_1, \dots, a_n)$ d'entiers positifs vérifiant $a_1 + \dots + a_n = M$, il existe n entiers $b_1, \dots, b_n$ appartenant tous à l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, non tous nuls et vérifiant

$$a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = 0.$$

Énoncés Senior

Exercice 5. Déterminer tous les entiers strictement positifs n vérifiant la propriété suivante : pour tout diviseur positif d de n , $d + 1$ est soit un nombre premier, soit un diviseur de n .

Exercice 6. Soit N un entier strictement positif. Aline et Baptiste jouent au jeu suivant. Au départ, les entiers $1, 2, \dots, N$ sont écrits au tableau. Chacun à leur tour, en commençant par Aline, ils choisissent un couple (k, n) , où k est un entier positif et n un entier écrit au tableau, puis effacent du tableau tous les entiers s tels que 2^k divise $n - s$. Le jeu se termine lorsqu'il n'y a plus d'entiers au tableau et le perdant est le joueur qui a effacé le dernier nombre.

Déterminer les entiers N pour lesquels Aline peut s'assurer de gagner quels que soient les coups de Baptiste.

Exercice 7. Déterminer toutes les suites $a_1, a_2, \dots$ périodiques de nombres réels vérifiant les deux conditions suivantes pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_{n+2} + a_n^2 = a_n + a_{n+1}^2 \quad \text{et} \quad |a_{n+1} - a_n| \leq 1.$$

Une suite $b_1, b_2, \dots$ est dite périodique s'il existe un entier $T \geq 1$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, $b_{n+T} = b_n$.