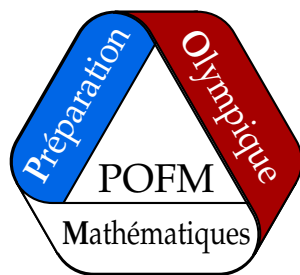


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 2 AVRIL 2025

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs tels que le nombre $|4^m - 7^n|$ est un nombre premier.

Exercice 2. Déterminer le plus petit entier strictement positif k vérifiant la propriété suivante : pour tout sous-ensemble S de $\{1, \dots, 2024\}$ de taille k , il existe deux entiers distincts $a, b \in S$ tels que $ab + 1$ est un carré parfait.

Exercice 3. Soient a, b et c des réels vérifiant $a + b + c = 0$ et $abc = -16$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$W = \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}.$$

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique vérifiant $AC < BD < AD$ et $\widehat{DBA} < 90^\circ$. Soit E le point de la parallèle à (AB) passant par D vérifiant $AC = DE$ et tel que les points E et C sont situés de part et d'autre de la droite (AD) . Soit F le point de la parallèle à (CD) passant par A vérifiant $BD = AF$ et tel que les points F et C sont situés de part et d'autre de la droite (AD) .

Montrer que les médiatrices des segments $[BC]$ et $[EF]$ se coupent sur le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique vérifiant $AC < BD < AD$ et $\widehat{DBA} < 90^\circ$. Soit E le point de la parallèle à (AB) passant par D vérifiant $AC = DE$ et tel que les points E et C sont situés de part et d'autre de la droite (AD) . Soit F le point de la parallèle à (CD) passant par A vérifiant $BD = AF$ et tel que les points F et C sont situés de part et d'autre de la droite (AD) .

Montrer que les médiatrices des segments $[BC]$ et $[EF]$ se coupent sur le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$.

Exercice 6. Soit $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Déterminer tous les sous-ensembles $\mathcal{S}$ de $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ pour lesquels il existe une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que

$$\mathcal{S} = \{f(a+b) - f(a) - f(b) \mid a, b \in \mathbb{N}^*\}.$$

Exercice 7. Soit $a_0, a_1, a_2, \dots$ une suite infinie strictement croissante d'entiers strictement positifs vérifiant que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n \in \left\{ \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \right\}.$$

Soit $b_1, b_2, \dots$ une suite infinie de lettres définie pour tout $n \geq 1$ par

$$b_n = \begin{cases} A & \text{si } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} ; \\ G & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe deux entiers $n_0, d \geq 1$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $b_{n+d} = b_n$.