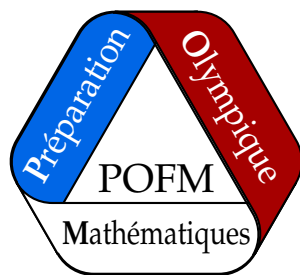


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 19 ET 20 FÉVRIER 2025

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Quatre réels $a \leq b \leq c \leq d$ sont dits en *progression arithmétique* si $d - c = c - b = b - a$. Aurélien écrit 2025 réels au tableau ; certains réels peuvent être égaux entre eux. Théo remarque que, dès que l'on choisit quatre réels écrits au tableau qui prennent quatre valeurs distinctes, ces quatre réels sont en progression arithmétique.

Montrer qu'il existe un nombre réel qui est écrit au moins 507 fois au tableau.

Exercice 2. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $ab + bc + ca = 3$. Montrer que

$$\frac{a^4 + b^4 + (a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4 + c^4 + (b+c)^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^4 + a^4 + (c+a)^4}{c^2 + a^2 + ca} \geq 18.$$

Exercice 3. Soient A et C deux points distincts d'un cercle ω et E le milieu du segment $[AC]$. Une droite passant par E coupe le cercle ω en deux points B et D . La parallèle à la droite (AC) passant par B recoupe le cercle ω au point F . Soit G le symétrique du point F par rapport au point A .

Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle circonscrit au triangle ADG .

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $s(n) = 1 + 2 + \dots + n$ la somme des n premiers entiers strictement positifs. On définit la suite de nombres $a_1, a_2, \dots$ comme suit : $a_1 = 1$ et, si $n \geq 1$, a_{n+1} est le plus petit entier m tel que $s(m) - s(a_n)$ est un carré parfait strictement positif.

Déterminer a_{2024} .

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif. Une classe de n élèves participe à n courses. À l'issue de chaque course, les élèves sont classés selon leur rang d'arrivée et on suppose que deux élèves ont toujours deux rangs distincts. Lorsque a et b sont des entiers strictement positifs, un élève est dit *éligible* à la note (a, b) s'il a obtenu un rang inférieur ou égal à b à au moins a courses. Le score final d'un élève correspond au maximum des valeurs $a - b$ parmi tous les couples (a, b) auxquels l'élève est éligible.

Déterminer, en fonction de n , la plus grande valeur que peut prendre la somme des scores des n élèves de la classe.

Exercice 6. Déterminer toutes les suites infinies $a_1, a_2, \dots$ d'entiers strictement positifs telles que, pour toute paire (m, n) d'entiers strictement positifs pour laquelle $m \leq n$, les nombres

$$\frac{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}{n - m + 1} \quad \text{et} \quad (a_m a_{m+1} \dots a_n)^{\frac{1}{n-m+1}}$$

sont tous les deux entiers.

Exercice 7. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On note Ω le cercle circonscrit au triangle BIC . Soit K un point à l'intérieur du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAK} < \widehat{KAC}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BKA}$ coupe Ω en deux points W et X , de sorte

que les points A et W sont situés dans le même demi-plan délimité par la droite (BC) . La bissectrice de l'angle $\widehat{CKA}$ coupe Ω en deux points Y et Z , de sorte que les points A et Y sont situés dans le même demi-plan délimité par la droite (BC) .

Montrer que $\widehat{WAY} = \widehat{ZAX}$.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On note ω le cercle passant par B et tangent à (AI) en I . Le cercle ω recoupe le segment $[AB]$ au point P et le segment $[BC]$ au point Q . La droite (QI) coupe la droite (AC) au point R .

Montrer que $AR \cdot BQ = PI^2$.

Exercice 9. Trois réels $a < b < c$ sont dits *en progression géométrique* s'il existe un réel k tel que $b = ka$ et $c = kb$. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer tous les triplets d'entiers en progression géométrique et appartenant tous les trois à l'ensemble $\{n^2, n^2 + 1, \dots, (n+1)^2\}$.

Exercice 10. Anna et Baptiste jouent au jeu suivant. Pour Anna, un *coup* consiste à choisir un indice $i \in \{0, 1, 2\}$ qu'elle n'a pas déjà choisi auparavant et un réel strictement positif noté a_i . Pour Baptiste, un *coup* consiste à choisir un indice $i \in \{0, 1, 2\}$ qu'il n'a pas déjà choisi auparavant et un réel strictement positif noté b_i . Chacun à leur tour, en commençant par Anna, les deux joueurs jouent un coup. Lorsque chaque joueur a joué trois coups, ils écrivent les polynômes $P_A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $P_B(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2$.

Baptiste gagne s'il existe au plus un réel c tel que $P_A(c) = 0$ ou si il existe quatre réels $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ tels que $P_A(c_1) = P_A(c_2) = P_B(c_3) = P_B(c_4) = 0$. Dans le cas contraire, Anna gagne.

Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie lui permettant de gagner la partie, quels que soient les coups de son adversaire.