PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Préparation Olympique
POFM
Mathématiques

TEST DU 15 JANVIER 2025
à destination des élèves du groupe Senior

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit ACE un triangle avec $AE < AC$, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω. La tangente à Ω au point A coupe la droite (CE) au point B. Le cercle de centre B et passant par A recoupe la droite (AE) au point D. Les droites (OE) et (BD) se coupent au point G.

Montrer que les points A, B, G et O sont situés sur un même cercle.

Exercice 2. Pour un entier strictement positif n, on note $n!$ le produit $1 \times \ldots \times n$ des n premiers entiers. Un entier strictement positif c est dit *macédonien* s'il existe un entier positif m tel que $m^3 - m = c!$ et tel que $m^2 - 1$ possède 6 diviseurs positifs ou moins.

Déterminer tous les entiers macédoniens.

Exercice 3. On dit de trois réels $a \leqslant b \leqslant c$ qu'ils sont *en progression arithmétique* s'il existe un réel r tel que $c = b + r$ et $b = a + r$. Un ensemble d'entiers est dit *joli* s'il contient trois éléments distincts qui sont en progression arithmétique. On note N le nombre de sous-ensembles de $\{1, \ldots, 2024\}$ et M le nombre de ces sous-ensembles qui sont jolis. Montrer que $\dfrac{M}{N} \geqslant \dfrac{51}{100}$.

Exercice 4. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer, en fonction de n, la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$S = 2^0 x_0^2 + 2^1 x_1^2 + \ldots + 2^n x_n^2$$

parmi tous les $(n+1)-$uplets $(x_0, \ldots, x_n)$ d'entiers positifs ou nuls vérifiant $x_0 + \ldots + x_n = n$.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer, en fonction de n, la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$S = 2^0 x_0^2 + 2^1 x_1^2 + \ldots + 2^n x_n^2$$

parmi tous les $(n+1)-$uplets $(x_0, \ldots, x_n)$ d'entiers positifs ou nuls vérifiant $x_0 + \ldots + x_n = n$.

Exercice 6. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe et M le milieu du segment $[AB]$. On suppose que le segment $[AB]$ est tangent au cercle circonscrit au triangle CME au point M et que le point D appartient aux cercles circonscrits aux triangles AME et BMC. Soit K le point d'intersection des droites (AD) et (ME) et soit L le point d'intersection des droites (BD) et (MC). Soient P et Q deux points situés sur la droite (CE) et vérifiant $\widehat{PDC} = \widehat{EDQ} = \widehat{ADB}$.

Montrer que les droites $(KP), (LQ)$ et (MD) sont concourantes.

Exercice 7. Soit n un entier strictement positif. $2n$ chevaliers sont assis autour d'une table ronde. Chaque chevalier possède exactement un frère parmi les chevaliers assis autour de la table et souhaite lui serrer la main. Deux chevaliers ne peuvent se serrer la main que s'ils sont assis côte-à-côte. Un *coup* consiste à choisir deux chevaliers assis côte-à-côte et à échanger leur place.

Déterminer, en fonction de n, le plus petit entier k tel que, quelle que soit la disposition initiale des chevaliers, il est possible d'effectuer k coups au bout desquels chaque paire de frères se sera serrée la main au moins une fois au cours de la réunion.