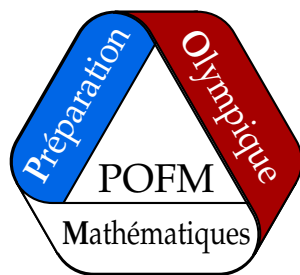


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 20 NOVEMBRE 2024
à destination des élèves du groupe Senior

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

<http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/>

Énoncés Senior

Exercice 1. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. On note B' et C' les pieds respectifs des hauteurs issues des sommets B et C . Soient K et L les symétriques respectifs du point B' par rapport aux droites (AB) et (BC) . Soient M et N les symétriques respectifs du point C' par rapport aux droites (AC) et (BC) .

Démontrer que $KL = MN$.

Exercice 2. Déterminer tous les ensembles S finis non vides d'entiers strictement positifs ayant la propriété suivante :

Pour tout choix de deux entiers a et b dans S , il existe un entier c dans S tel que a divise $b+2c$.

Exercice 3. Soit $d \geq 1$ un entier fixé. Anna et Baptiste jouent au jeu suivant. Chacun à leur tour, en commençant par Anna, ils choisissent un entier k tel que $0 \leq k \leq 2d-1$ et qui n'a pas encore été choisi par un des deux joueurs, et un réel strictement positif qu'ils notent a_k . Lorsque tous les entiers ont été choisis, Anna écrit le polynôme $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{2d-1}X^{2d-1} + X^{2d}$. Anna gagne s'il existe un réel c tel que $P(c) = 0$. Sinon c'est Baptiste qui gagne.

Déterminer, en fonction de d , lequel des deux joueurs possède une stratégie lui permettant de gagner quels que soient les coups de son adversaire.

Exercice 4. On considère une grille carrée de taille $n \times n$ composée de n^2 cases. Pour tout diviseur positif d de n , la d -division de la grille est définie comme la division de la grille en $(n/d)^2$ sous-grilles carrées, toutes de taille $d \times d$, de sorte que chaque case appartient à exactement une sous-grille.

On dit qu'un entier n est *régulier* s'il est possible d'écrire les entiers $1, 2, \dots, n^2$ dans les cases de la grille en vérifiant les conditions suivantes :

- ▷ chaque case contient exactement un entier,
- ▷ chacun des entiers $1, 2, \dots, n^2$ est écrit dans exactement une case,
- ▷ pour tout diviseur d de n tel que $1 < d < n$ et pour toute sous-grille de la d -division de la grille, la somme des entiers écrits dans les cases de la sous-grille n'est pas divisible par d .

Déterminer tous les entiers pairs réguliers.