Coupe Animath d'Automne

1 octobre 2025

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Soient A, B et C trois points sur un cercle de centre O, placés tels que A, O et C ne soient pas alignés, tels que B soit sur le petit arc $\overset{\frown}{AC}$ et en respectant les égalités d'angles suivantes : $\widehat{OBA} = 77°$ et $\widehat{OBC} = 33°$. Combien mesure l'angle $\widehat{AOC}$?
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 Comme A et B sont sur le cercle de centre O, le triangle AOB est isocèle en O. Ainsi $\widehat{BAO} = \widehat{OBA} = 77°$. On en déduit par somme des angles dans le triangle ABO que

$$180° = \widehat{BAO} + \widehat{OBA} + \widehat{AOB} = 2 \times 77° + \widehat{AOB},$$

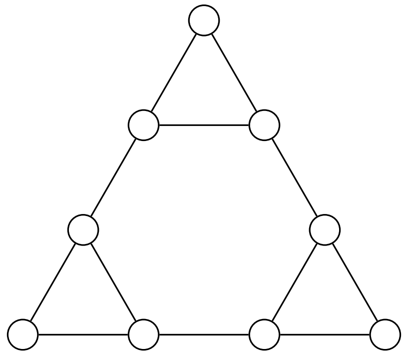
donc $\widehat{AOB} = 26°$.
Comme C et B sont sur le cercle de centre O, le triangle COB est isocèle en O. Ainsi $\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$. On en déduit par somme des angles dans le triangle ABO que

$$180° = \widehat{OBC} + \widehat{OCB} + \widehat{COB} = 2 \times 33° + \widehat{AOB},$$

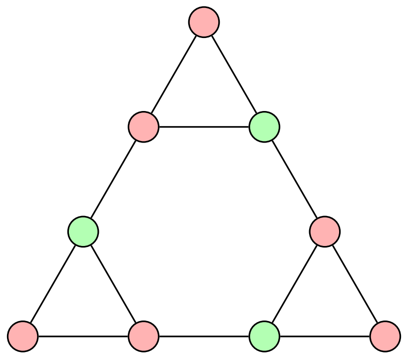
donc $\widehat{AOB} = 114°$. Ainsi $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 26° + 114° = 140°$

Commentaire des correcteurs Problème bien réussi dans l'ensemble. Les principales erreurs sont de petites erreurs de calcul ou de mauvaises lectures de l'énoncé. D'autre part, certains élèves avaient de bonnes idées mais n'aboutissaient pas à la bonne conclusion en écrivant par exemple le fait que le triangle OAB est isocèle en B alors qu'il est isocèle en O. Un nombre alarmant d'élèves ont aussi affirmé que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AOC}$ sont égaux, ce qui est faux.

Exercice 2. Sur la figure suivante se trouvent 9 cercles. On dit que deux de ces cercles sont connectés s'ils sont reliés par un segment ne passant par aucun autre cercle. Eva colorie chacun des cercles soit en vert, soit en rouge. Une fois tous les cercles coloriés, elle gagne un bonbon pour chaque paire de deux cercles de couleurs différentes étant connectés. Déterminer le nombre maximal de bonbons qu'Eva peut obtenir ainsi.



Solution de l'exercice 2 Pour chacun des petits triangles équilatéraux se trouvant aux 3 sommets du grand triangle, Eva ne peut gagner qu'au plus deux arêtes sur les trois : en effet, on dispose de deux couleurs pour colorier trois cercles, donc deux de ces cercles seront nécessairement de la même couleur et on ne gagnera pas de bonbon pour l'arête qui les relie.
Ainsi on doit nécessairement abandonner au moins trois arêtes sur les 12 disponibles, ce qui fait un maximum de 9 bonbons potentiellement obtenables. Réciproquement, on vérifie que le coloriage suivant prodigue effectivement 9 bonbons à Eva :



Commentaire des correcteurs Comme toujours avec les exercices où on demande un nombre maximal, toute preuve doit comporter deux parties distinctes et clairement délimitées, une pour donner une construction qui atteint le maximum, et une pour montrer qu'aucune construction alternative ne pourrait faire mieux, et comme toujours avec ces exercices, une grande part des élèves ont oublié de faire l'une ou l'autre de ces parties. Ils ne peuvent alors pas prétendre à plus de la moitié des points.

De plus, pour la partie "analyse" de la preuve, quand il faut montrer qu'aucune construction alternative ne pourrait faire mieux que 9, beaucoup d'élèves ont décrit des stratégies raisonnables pour faire une bonne construction, notamment alterner les couleurs le long de l'hexagone central ou encore alterner les couleurs sur la base du triangle, mais cela ne constitue pas un argument recevable. En effet, si la copie se limite à quelques stratégies avant de montrer qu'elles ne permettent pas de dépasser 9, comment s'assurer qu'aucune autre stratégie parmi toutes seules arbitrairement ignorées ne puisse mener à un résultat meilleur ?

Pour les élèves ayant ces principes bien en tête, le problème a été bien résolu. Nous rappelons que ces principes de rédaction d'un problème d'optimisation étaient expliqués dans les "conseils de rédaction" téléchargeables sur le site, et étaient donc tout à fait exigibles.

Exercice 3. Soit ABC un triangle dont le plus petit côté est $[BC]$ et soit D un point sur le segment $[BC]$. Soient E sur le segment $[AC]$ tel que $CD = CE$ et F sur le segment $[AB]$ tel que $BD = BF$. Soient de plus P le symétrique de D par rapport à B et Q le symétrique de D par rapport à C. Soit X le point d'intersection des droites (QE) et (PF). Montrer que les points D, E, F et X se trouvent sur un même cercle.

Solution de l'exercice 3 Comme P est le symétrique de D par rapport à B, on a $BP = BD = BF$: on en déduit que $[PF]$ est un diamètre du cercle circonscrit à PDF et donc que l'angle $\widehat{PFD}$ est droit. Ainsi, son complémentaire, l'angle $\widehat{XFD}$, est également droit. Cela implique que F est sur le cercle de diamètre $[XD]$.
Par symétrie des rôles, E est lui aussi sur le cercle de diamètre $[XD]$: on en déduit que les points D, E, F, X se trouvent, comme voulu, sur un même cercle (qui est le cercle de diamètre $[XD]$).

Solution alternative n°1 On aurait pu aussi prouver que $\widehat{PFD}$ est drote de la façon suivante. Comme $PB = PD = PF$, le triangle BFP est isocèle en B, en faisant la somme des angles dans BFP, on a que $180 = \widehat{PBF} + \widehat{BPF} + \widehat{BFP} = \widehat{PBF} + 2\widehat{PFB}$, ainsi $\widehat{PFB} = 90 - \dfrac{\widehat{PBF}}{2}$.

En utilisant de même que le triangle BDF est isocèle en B, on a que $\widehat{DFB} = 90 - \dfrac{\widehat{DBF}}{2}$. On obtient alors en sommant :

$$\widehat{PFD} = \widehat{PFB} + \widehat{BFD} = 90 + 90 - \frac{(\widehat{PFB} + \widehat{DBF}}{2} = 180 - \frac{\widehat{FBD}}{2} = 180 - 90 = 90.$$

Commentaire des correcteurs Dans l'ensemble, l'exercice a été bien abordé, mais moins bien résolu qu'espéré. Beaucoup d'élèves sont parvenus à démontrer que $\widehat{QEC} = \widehat{PFD} = 90°$, avec parfois des chasses aux angles assez laborieuses alors qu'il suffisait de repérer la caractérisation des triangles rectangles mentionnée dans les prérequis.
En revanche, beaucoup d'élèves ont pensé que les points D, E et F étaient les points de contact du cercle inscrit au triangle ABC, ce qui est bien sûr impossible puisque le point D est un point arbitraire sur le segment $[BC]$. Il est malheureux que tant d'élèves ne soient pas rendus compte d'un tel paradoxe.
Un dernier souci pas si éloigné des précédents est l'absence de figure propre dans pas mal de tentatives de solutions, ce qui aurait pu accompagner les élèves dans la relecture de leurs preuves.

Exercice 4. Hadriel a choisi deux nombres entiers strictement positifs a et b. Quand il fait la division euclidienne de a par b, il reste 2. Quand il fait la division euclidienne de b par a, il reste 4. Déterminer toutes les valeurs possibles que peut prendre b.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> L'idée est de remarquer que si $a > b$, alors la division euclidienne de b par a s'écrit $b = 0 \times a + b$ et est donc de reste b : on aurait alors $b = 4$ par hypothèse.
De même, si $a < b$ alors le reste de la division euclidienne de a par b est a et donc $a = 2$, ce qui signifie que le reste de la division euclidienne de b par 2 est 4, mais c'est absurde car le reste doit être inférieur à 2.
Finalement $a = b$ n'est pas possible, car dans ce cas le reste de la division euclidienne de a par b (ou de b par a) vaudrait 0.
On en déduit que b ne peut que valoir 4. Réciproquement, si $b = 4$ et $a = 6$ alors la division euclidienne de a par b vaut bien 2 et celle de b par a vaut bien 4.
On en déduit que 4 est la seule valeur possible que peut prendre b.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice a été résolu de manière mitigée. Quelques remarques :

- ▷ Certains élèves n'avaient pas compris la notion de division euclidienne : si a et b sont deux entiers, avec $b > 0$, la division euclidienne de a par b est l'écriture de a sous la forme $bq + r$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, \ldots, q - 1\}$ comme définie dans les prérequis. Il ne faut pas écrire $\frac{a}{b} = q + r$, puisqu'on n'a pas $a = bq + br$.
- ▷ Les quotients des divisions n'ont pas de raison d'être égaux. Donc on ne peut pas à priori les appeler tous les deux q, sinon ils seraient forcément égaux. On obtiendrait alors des équations fausses.
- ▷ Il y a eu régulièrement des problèmes de manipulations algébriques : attention à celles-ci.
- ▷ Certains élèves n'ont pas compris ce que donnait la division euclidienne de a par b lorsque $a < b$: le reste ne vaut pas 0, c'est le quotient qui vaut 0. Le cas où le quotient vaut 0 a d'ailleurs régulièrement été oublié.
- ▷ Pas mal d'élèves ont été bloqués par le cas $a = 2$. Il est dommage de ne pas avoir vu que 4 ne peut pas être un reste dans la division par 2.
- ▷ Pas mal d'élèves ont oublié le cas $a = b$ dans leurs affirmations. A priori le contraire de $a < b$ n'est pas $a > b$.
- ▷ Ici l'énoncé sous-entendait plus ou moins l'existence de a et b, donc ne pas donner explicitement de couple (a, b) convenant ne coûtait pas de point (et n'en rapportait pas sans argument de preuve qu'il ne pouvait y avoir d'autres b). Cependant, si deux valeurs de b étaient possibles, il aurait fallu donner des exemples pour chaque valeur de b pour avoir tous les points.
- ▷ Certains élèves utilisent les modulos. Cette notion n'est pas dans les prérequis ni dans le programme de cinquième ou avant, donc pas nécessaire pour résoudre l'exercice. Ici, c'était même un désavantage : en effet, on peut avoir $a \equiv b \pmod 2$ et $b \equiv a \pmod 4$ sans avoir $b = 4$. Par exemple, si $a = b = 2$ ou $a = b = 1$.

Exercice 5. Montrer que parmi quatre nombres réels strictement positifs, il en existe toujours deux dont la différence (c'est-à-dire le plus grand des deux auquel on soustrait le plus petit) est strictement inférieure au tiers de la somme des deux autres.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Soient $0 < a \leq b \leq c \leq d$ quatre nombres réels strictement positifs ordonnés. On raisonne par l'absurde en supposant que pour chaque paire de deux d'entre eux, leur différence est supérieure ou égale à la somme des deux autres.
Alors en particulier

$$b - a \geq \frac{c+d}{3} \tag{1}$$
$$c - b \geq \frac{a+d}{3} \tag{2}$$

d'où, en sommant :

$$c - a = c - b + b - a \geq \frac{a+c+2d}{3} \geq \frac{a+c+2c}{3} = c + \frac{a}{3}$$

ce qui est contradictoire car $a > 0$.
Cela conclut.

<u>*Solution alternative n°1*</u> Soient $0 < a \leq b \leq c \leq d$ quatre nombres réels strictement positifs ordonnés. On raisonne par l'absurde en supposant que pour chaque paire de deux d'entre eux, leur différence est supérieure ou égale à la somme des deux autres.
Alors en particulier

$$b - a \geq \frac{c+d}{3} \tag{3}$$
$$c - b \geq \frac{a+d}{3} \tag{4}$$

En particulier, la première équation donne que $b > b - a \geq \frac{c+d}{3} \geq \frac{2c}{3}$. La seconde équation donne que $c - b > \frac{d}{3} \geq \frac{c}{3}$, donc $\frac{2c}{3} > b$. On a donc obtenu deux inégalités qui se contredisent, ce qui conclut.

<u>*Solution alternative n°2*</u> Soient $0 < a \leq b \leq c \leq d$ quatre nombres réels strictement positifs ordonnés. On raisonne par l'absurde en supposant que pour chaque paire de deux d'entre eux, leur différence est supérieure ou égale à la somme des deux autres.
Alors en particulier

$$b - a \geq \frac{c+d}{3}$$

et

$$c - b \geq \frac{a+d}{3}$$

et

$$d - c \geq \frac{a+b}{3},$$

d'où, en sommant :

$$d - a = d - c + c - b + b - a \geq \frac{a+b}{3} + \frac{a+d}{3} + \frac{c+d}{3} = \frac{2a+2d+b+c}{3}.$$

En particulier, $3d - 3a \geq 2a + 2d + b + c$, donc $d \geq 5a + b + c > 0 + b + b = 2b$.

Ainsi, on a $b - a \geq \dfrac{c+d}{3} > \dfrac{b+2b}{3} = b$ ce qui est absurde. On a donc une contradiction : il existe bien une paire de nombres vérifiant la condition de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs Le problème était difficile et a été peu résolu pour sa position. Voici quelques commentaires :

- ▷ Ici ordonner les 4 réels était un point de départ crucial pour la preuve. C'est souvent un réflexe utile dans ce type de problème.
- ▷ Traiter des cas particuliers est intéressants, mais ne remplace jamais le cas général.
- ▷ A priori, il n'était pas dit que les réels étaient des entiers, supposition pourtant faite par plusieurs élèves.
- ▷ Certains élèves ont raisonné par l'absurde, et écrit toutes les inégalités qui étaient vérifiées pour que la condition de l'énoncé ne le soit pas. C'est intelligent, mais en réfléchissant un petit peu, on se rend compte que l'inégalité $c-a \geq \frac{b+d}{3}$ est impliquée par $b-a \geq \frac{c+d}{3}$, idem pour l'inégalité avec $d-a$, et celle avec $d-b$ est impliquée par celle avec $c-b$. Donc seules les 3 inégalités de la solution alternative 2 étaient utiles pour obtenir une contradiction. Cette remarque évitait de se perdre en manipulant trop d'inégalités.
- ▷ Certains élèves ont fait des différences d'inégalité : si $A \geq B$ et $C \geq D$, alors $A - C \geq B - D$. C'est faux si $A = 5$, $C = 6$, $B = D = 2$.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E un point sur le segment $[BC]$. On trace la parallèle à la droite (AE) passant par D, sur laquelle on place deux points, F et G, tels que D se situe sur le segment $[FG]$ et tels que le quadrilatère $AEFG$ est un parallélogramme. Montrer que les aires des deux parallélogrammes $ABCD$ et $AEFG$ sont égales.

Solution de l'exercice 6 Notons Y le pied de la hauteur issue de D dans le triangle AED. L'aire du parallélogramme $AEFG$ vaut $DY \times AE$ car c'est le produit de la longueur d'un côté par la hauteur correspondante. Or l'aire du triangle ADE vaut $\frac{DY \times AE}{2}$, donc l'aire de $AEFG$ vaut 2 fois celle de ADE.

Notons Z le pied de la hauteur issue de D dans le triangle AED. L'aire du parallélogramme $ABCD$ vaut $AD \times EZ$ car c'est le produit de la longueur d'un côté par la hauteur correspondante. Or l'aire du triangle ADE vaut $\frac{AD \times EZ}{2}$, donc l'aire de $ABCD$ vaut 2 fois celle de ADE.
Ainsi les aires de $ABCD$ et $AEFG$ sont égales.

Solution alternative n°1 On commence par introduire certaines notations utiles : Notons $S(O)$ l'aire de l'objet O. Introduisons X le point d'intersection de (FG) et (BC), et Y le point d'intersection de (EF) et (CD) .
Le point X est un point intéressant parce qu'il joue un rôle symétrique pour les deux parallélogrammes, donc est susceptible de faire le pont entre leurs deux aires.
La quantité énorme de paires de droites parallèles dans la figure fait qu'il y a beaucoup de triangles semblables dans la figure. Pour avancer, il faut qu'on considère des triangles semblables utiles qui vont nous permettre de faire le lien entre les aires des deux parallélogrammes.
Les triangles ABE et DCX sont semblables car $(AB) \parallel (CD)$, $(AE) \parallel (XD)$, et $(BE) \parallel (CX)$. Ils sont même égaux car $AB = CD$. De même, les triangles EXF et ADG sont égaux.
Armés de ces informations, on va conclure :

$$\begin{aligned} S(AEFG) &= S(ADG) + S(AEYD) + S(DCX) - S(YCXF) && (5)\\ &= S(EFX) + S(AEYD) + S(ABE) - S(YCXF) && (6)\\ &= S(ABCD) && (7) \end{aligned}$$

C'est ce qu'on voulait montrer.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été bien abordé malgré sa position tardive dans le sujet, mais il était difficile et peu d'élèves ont réussi à en tirer des points. Il fallait faire attention à bien justifier chacune des affirmations faites : cela peut être trompeur sur un exercice de géométrie car on peut avoir l'impression que les choses sont évidentes parce qu'elles se voient sur le dessin, mais ce n'est pas une démonstration. Par exemple ici, beaucoup d'élèves affirment que les triangles ABE et DCX sont égaux sans démonstration rigoureuse, ce qui a été pénalisé.

Certaines tentatives de preuves ont été faites plus ou moins avec les mains, en faisant par exemple "coulisser" le segment $[GF]$ pour se ramener à un cas plus simple où B, C et F sont alignés : cela pouvait fonctionner, mais il fallait faire très attention à bien justifier que les aires étaient conservées par ces transformations. Il était plus rigoureux et moins source d'erreur de simplement introduire le point X et montrer que $EFGA$ et $EXDA$ ont la même aire, sans passer par un raisonnement "dynamique".

Exercice 7. Aurélien remplit une grille à m lignes et n colonnes avec des nombres réels positifs ou nuls, de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne au moins un élément non nul. Il veut aussi que pour toute case contenant un élément non nul, les sommes des éléments de sa ligne et de sa colonne soient identiques. Montrer que s'il a réussi à remplir sa grille en respectant ces contraintes, alors $m = n$.

Solution de l'exercice 7 Soit l une ligne ou une colonne fixée, notons s sa somme. On regarde L l'ensemble des lignes de somme s, C l'ensemble des colonnes de somme s, a le nombre de lignes de somme s, et b le nombre de lignes de somme s.

De plus, si on considère un réel à l'intersection d'une ligne de L, et d'une colonne n'appartenant pas à C, si celui-ci était non nul, alors la ligne et la colonne en question aurait même somme. Comme la ligne est dans L, celle-ci vaudrait s, ce qui contredit que la colonne n'appartient pas à C. Ainsi les réels à l'intersection d'une ligne de L et d'une colonne n'appartenant pas à C sont tous nuls. Idem si la ligne n'est pas dans L, et la colonne est dans C.

On réarrange le tableau, d'abords en permutant les lignes pour mettre les lignes de L obtenues en haut du tableau, puis on met les colonnes de C à gauche du tableau. Ces opérations ne changent pas la somme des lignes/colonnes, et si on imagine qu'on met une étiquette numérotée sur chaque ligne et colonne avant permutation, le fait de permuter les lignes/colonnes ne change pas le réel à l'intersection d'une ligne et une colonne.

On obtient donc une grille de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix}$$

où T est un tableau $a \times b$, T' est un tableau $(m-a) \times (n-b)$, et le reste des cases du grand tableau sont des zéros.

Ainsi la somme des éléments des b premières colonnes, qui vaut bs, vaut aussi la somme des éléments de T. De même, la somme des éléments des a premières lignes vaut as, mais elle vaut aussi la somme des éléments de T. Ainsi $a = b$.

Pour chaque somme de ligne ou colonne, il y a autant de lignes et de colonnes ayant la même somme. Ainsi il y a le même nombre de ligne au total, donc $m = n$.

Solution alternative n°1 Fixons une ligne ℓ. On considère l'ensemble des colonnes et lignes composées de la ligne l, des colonnes dont un élément non nul est dans la ligne l, des lignes dont un élément non nul est dans une des colonnes précédentes, des colonnes dont un élément non nul est dans une ligne précédente, etc. Notons à la fin a le nombre de lignes obtenues, et b le nombre de colonnes : en particulier, par construction toutes ces lignes et colonnes ont la même somme qu'on note s.

On remarque qu'échanger deux colonnes ne change pas la propriété de l'énoncé (comme prouvé dans la solution précédente), donc on peut supposer que les a premières lignes sont celles qu'on a considéré dans le processus précédent, et que les colonnes sont les b premières colonnes. Vu le processus de construction, si un nombre écrit sur une des b premières colonnes est non nul, alors il est forcément dans les a premières lignes, sinon la ligne à laquelle il appartient aurait été considérée dans le processus précédent, et ferait donc partie des a premières lignes. On obtient donc une grille de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix}$$

où T est un tableau $a \times b$, T' est un tableau $(m-a) \times (n-b)$, et le reste des cases du grand tableau sont des zéros.

Ainsi la somme des éléments des b premières colonnes, qui vaut bs, vaut aussi la somme des éléments de T. De même, la somme des éléments des a premières lignes vaut as, mais elle vaut aussi la somme des éléments de T. Ainsi $a = b$.

On peut alors continuer le processus sur la grille en bas à droite $(m-a)\times(n-b)$, et itérer le procédé. À chaque fois, on enlève autant de lignes que de colonnes, et à la fin, on se retrouve forcément avec uniquement des colonnes ou des lignes, qui ne peuvent avoir aucun élément non nul (sinon ceux-ci seraient dans des lignes ou colonnes précédemment considérées), ce qui serait contradictoire. Donc à la fin, on a plus de colonnes ni de lignes, et comme à chaque fois, on enlève autant de colonnes que de lignes, il y avait au départ autant de colonnes que de lignes.

Commentaire des correcteurs L'exercice était très difficile et seule une petite partie des élèves ont réussi à obtenir des points sur ce problème. Attention, ici l'exercice demandait de montrer que $m \neq n$ ne fonctionnait pas, et non pas de montrer que $m = n$ pouvait fonctionner. Traiter un exemple peut être utile pour se forger une intuition sur un problème, mais traiter un exemple seul n'est pas une preuve.

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer

$$\sqrt{\frac{12}{\sqrt{\frac{45}{\sqrt{\frac{250}{\sqrt{\frac{400}{\sqrt{16}}}}}}}}}$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 8 En simplifiant successivement racines carrées et fractions, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{12}{\sqrt{\frac{45}{\sqrt{\frac{250}{\sqrt{\frac{400}{\sqrt{16}}}}}}}}} &= \sqrt{\frac{12}{\sqrt{\frac{45}{\sqrt{\frac{250}{\sqrt{\frac{400}{4}}}}}}}} \\
&= \sqrt{\frac{12}{\sqrt{\frac{45}{\sqrt{\frac{250}{\sqrt{100}}}}}}} \\
&= \sqrt{\frac{12}{\sqrt{\frac{45}{\sqrt{\frac{250}{10}}}}}} \\
&= \sqrt{\frac{12}{\sqrt{\frac{45}{\sqrt{25}}}}} \\
&= \sqrt{\frac{12}{\sqrt{\frac{45}{5}}}} \\
&= \sqrt{\frac{12}{\sqrt{9}}} \\
&= \sqrt{\frac{12}{3}} \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2
\end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs Le problème a été très bien réussi. Les fautes que nous avons pu voir sont souvent dues à de l'étourderie. Quelques rares copies inventaient des propriétés de la racine carrée comme $\sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[3]{x}$, manifestement fausses. On insiste de plus sur l'importance de toujours détailler le raisonnement effectué, même si seule une réponse numérique est demandée. En effet, en cas d'étourderie, si la réponse est incorrecte, le raisonnement peut permettre de gagner des points intermédiaires.

Exercice 9. Soient B, C deux points du plan, K_1 un demi-cercle de diamètre $[BC]$ et A un point sur K_1. Soient respectivement K_2 le demi-cercle de diamètre $[CA]$ et K_3 le demi-cercle de diamètre $[AB]$ situés à l'extérieur du triangle ABC.

On note S l'aire du triangle ABC, S_1 l'aire comprise entre l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de K_1 et l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de K_3, et S_2 l'aire comprise entre l'arc $\overset{\frown}{AC}$ de K_1 et l'arc $\overset{\frown}{AC}$ de K_2.
Montrer que $S = S_1 + S_2$.

Solution de l'exercice 9 Soit $\widehat{S_i}$ l'aire de K_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Rappelons que l'aire d'un demi-cercle de rayon R vaut $\frac{\pi}{2}R^2$
Le triangle ABC est rectangle en A car BC est un diamètre de K_1. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore au triangle ABC, ce qui donne :

$$\widehat{S_1} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}BC^2 = \frac{\pi}{8}(AB^2 + AC^2) = \widehat{S_2} + \widehat{S_3}$$

Cette relation va nous permettre de conclure :

$$S_1 + S_2 = \widehat{S_3} + \widehat{S_2} + S - \widehat{S_1} = S$$

C'est bien l'égalité qu'on voulait obtenir.

Commentaire des correcteurs L'exercice est plutôt bien réussi. La plupart des élèves ont réussi à exprimer les aires en fonction de celles des demi-disques puis ont utilisé le théorème de Pythagore pour conclure. Attention aux formules, ici, il ne fallait pas oublier de diviser les longueurs des côtés par 2 pour obtenir les rayons des disques, puis de diviser encore par 2 pour avoir les aires des demi-disques. Par ailleurs, il faut être très vigilant lorsqu'on lit un énoncé : certaines copies ont mal compris la définition de S_1 et S_2 et tentent donc de prouver une propriété fausse.

Exercice 10. Hadriel a choisi x un nombre réel. Il a trouvé trois entiers positifs deux-à-deux distincts n, m et l tels que les nombres $x+n, x+m$ et $x+l$ sont en progression géométrique. Montrer x est un nombre rationnel, c'est-à-dire qu'il s'écrit sous la forme $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers tels que $b \neq 0$.
On dit que des nombres réels a, b, c sont en progression géométrique s'il existe un nombre réel non nul k tel que $c = kb = k^2a$.

Solution de l'exercice 10 Les nombres réels $x+n, x+m$ et $x+l$ étant en progression géométrique, on sait qu'il existe $k \neq 0$ et a réels tels que $x+n = a$, $x+m = ka$ et $x+l = k^2a$.
On en déduit l'égalité

$$(x+m)^2 = (ka)^2 = a \cdot k^2a = (x+n)(x+l)$$

et donc en développant

$$x^2 + 2mx + m^2 = x^2 + nx + lx + nl$$

et ainsi $x(2m-n-l) = nl - m^2$.
Il suffit donc de montrer que $2m-n-l \neq 0$: si c'est bien le cas, on peut écrire $x = \dfrac{nl-m^2}{2m-n-l}$ ce qui prouvera que x est rationnel.
Supposons donc $2m-n-l = 0$: l'équation précédente implique qu'on a aussi $nl - m^2 = 0$.
Ainsi

$$0 = m^2 - nl = \left(\frac{n+l}{2}\right)^2 - nl = \frac{n^2+2nl+l^2-4nl}{4} = \frac{n^2-2nl+l^2}{4} = \frac{(n-l)^2}{4}$$

donc $n = l$ ce qui est absurde.

Solution alternative n°1 Les nombres réels $x+n, x+m$ et $x+l$ étant en progression géométrique, on sait qu'il existe $k \neq 0$ et a réels tels que $x+n = a$, $x+m = ka$ et $x+l = k^2aa$. Ainsi $x+l = k(x+m)$.
On en déduit que

$$l - m = x + l - (x+m) = k(x+m) - k(x+n) = k(m-n).$$

Ainsi $k = \frac{l-m}{m-n}$ (car $m \neq n$). k est donc un rationnel, et k ne vaut pas 1, sinon on aurait $x+l = x+m$, donc $m = l$.
De plus, on a $x+m = k(x+n)$, donc $x(k-1) = m-kn$, ainsi $x = \frac{m-kn}{k-1}$ (car $k \neq 1$). Comme k est rationnel, $k-1$ et $m-kn$ le sont, donc $x = \frac{m-kn}{k-1}$ est aussi rationnel, car le quotient de deux rationnels est rationnel.

Commentaire des correcteurs Le problème a été peu résolu par rapport à sa position. Voici quelques commentaires :

- Beaucoup d'élèves divisent par des expressions, sans vérifier que celles-ci sont non nulles. Parfois cela se rattrape facilement (par exemple $x+m, x+n, x+l, k+1, k^2-1, k-1$ et ne coûtait qu'un point, mais le cas $2m = n+l$ était lui beaucoup plus dur, donc coûtait 3 points.
- Les élèves ont fait trop d'erreurs de calcul, engendrant des pertes de points plus ou moins importantes.
- A plusieurs reprises, les élèves font des raisonnements trop compliqués pour obtenir certaines équations du corrigé. N'hésitez pas à lire le corrigé pour voir comment obtenir plus rapidement les différentes équations.
- La compréhension de nombres irrationnels et rationnels est assez mauvaise. En effet, pour certains, un nombre irrationnel est forcément $\sqrt{n}$ ou π (il y en a d'autres). En sommant deux nombres iirrationnels,on n'obtient pas forcément de nombre irrationnel. Par exemple $\sqrt{2}+(1-\sqrt{2}) = 1$ et pourtant $\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$ sont irrationnels.

- ▷ Certains élèves ont supposé que x était rationnel, conclut qu'il n'y avait pas vraiment de contradiction, donc que x était rationnel. On ne peut pas supposer ce qu'on peut prouver pour le prouver.
- ▷ Un nombre rationnel n'est pas forcément entier.
- ▷ Certains élèves ont supposé que k est rationnel, voire entier, ce qui n'avait pas de raison d'être vrai.
- ▷ Certains élèves disent qu'une progression géométrique est forcément croissante, or $-2, 4, -8$ est une progression géométrique. Notez d'ailleurs que l'ordre de $x+n, x+m, x+l$ dans la progression géométrique était donné par l'énoncé.
- ▷ Parfois les élèves expriment x comme une fraction faisant intervenir k (voire même faisant intervenir x) et en déduisent qque,comme x est égal une fraction, x est rationnel. Ce n'est malheureusement pas vrai : $\sqrt{3} = \frac{3}{\sqrt{3}}$ par exemple, ou $\phi = \frac{2\phi+1}{\phi+1}$ si ϕ est le nombre d'or.

Exercice 11. Il y a 20 îles à Animathland, certaines sont reliées entre elles par des voies de ferry qui vont dans les deux sens. Chaque paire d'îles est reliée par au plus une voie, et il y a au total 172 voies. Montrer qu'il est possible de se rendre d'une île à n'importe quelle autre en changeant de ferry au plus une fois (c'est-à-dire en passant par au plus une autre île).

Solution de l'exercice 11 Supposons par l'absurde qu'il existe deux îles A et B telles qu'on ne peut pas se déplacer de l'une à l'autre en deux trajets ou moins.
Cela signifie deux choses : d'une part A et B ne sont pas connectées par ferry, et d'autre part il n'existe pas d'île connectée à la fois à A et à B.
Notons N le nombre de paires d'îles n'étant pas connectées par ferry. Comme chacune des 18 îles différentes de A et B ne peut pas être connectée à la fois à A et à B, elle est soit non connectée à A soit non connectée à B. En rajoutant la paire (A, B), cela fait au moins 19 paires d'îles non connectées : ainsi $N \geq 19$.
Comptons d'autre part le nombre total de paires d'îles. Si on numérote $I_1, ..., I_{20}$ les îles, il y a 19 paires associées à I_{20}, puis 18 associées à I_{19} mais pas à I_{20}, puis 17 associées à I_{18} mais pas à I_{19} ou I_{20}, et ainsi de suite, ce qui fait au total $19 + 18 + ... + 1 = \frac{19 \times 20}{2} = 190$ paires. Le nombre de paires connectées par ferry étant 172 par hypothèse, on en déduit $N = 190 - 172 = 18$. Cela contredit $N \geq 19$ et conclut.

Commentaire des correcteurs Le problème a été beaucoup traité, mais relativement peu réussi pour sa position. On note plusieurs écueils notables. En premier lieu, de trop nombreux élèves ont mal interprété l'énoncé. On demandait de prouver l'énoncé pour toutes les configurations possibles, certains élèves se sont contentés de donner une façon de choisir les voies de ferry et de montrer qu'elle vérifiait la propriété.
D'autres élèves ont considéré à tort qu'il suffisait de montrer la propriété pour une paire de villes.
Enfin, certains élèves ont seulement montré que toutes les paires de villes étaient reliées par un certain nombre de changements de ferry, en oubliant que l'énoncé imposait au plus un changement de ferry. Il est important de relire l'énoncé pour s'assurer de sa bonne compréhension et éviter ce genre d'erreur.

De plus, un grand nombre d'élèves a exhibé une "pire" configuration et a montré qu'elle vérifiait l'énoncé. Cependant, sans un argument rigoureux justifiant que cette construction était bien la "pire", ce type de preuve ne pouvait pas conclure.
On note également un nombre élevé d'erreurs sur le calcul du nombre total de voies de ferry qui pouvaient exister. Il est important de relire ses calculs et, au besoin, de les tester sur de plus petites valeurs pour s'assurer de la validité des formules.
Enfin, certains élèves se sont contenté d'obtenir une contradiction en considérant les villes voisines de deux îles A et B quelconques. C'était la bonne idée, mais il était nécessaire de supposer en premier lieu que A et B n'étaient pas reliées par une voie maritime (sans quoi il était impossible d'obtenir une contradiction sur le nombre de ferrys).

Exercice 12. Marie écrit le nombre 2 au tableau. Ensuite, chaque minute, elle calcule le produit de tous les nombres écrits au tableau et ajoute 1. Si n est le résultat de cette opération, Marie écrit alors au tableau le plus grand diviseur premier de n. Marie n'efface jamais rien du tableau. Montrer que Marie n'écrira jamais le nombre 5 au tableau.

Solution de l'exercice 12 Notons $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite des nombres écrits au tableau par Marie, c'est-à-dire que son premier nombre est $p_1 = 2$, puis p_2 est le plus grand facteur premier de $p_1 + 1 = 3$ donc $p_2 = 3$, et ainsi de suite. Déjà notons que on ne peut pas avoir $j \geq 2$ tel que $p_j = 2$, sinon 2 diviserait $p_1 \dots p_n + 1$. Or il divise p_1, donc divise $p_1 \dots p_n$, donc il diviserait $p_1 \dots p_n + 1 - p_1 \dots p_n = 1$ ce qui est absurde.
Supposons que 5 apparaisse au tableau, c'est-à-dire qu'il existe $n \geq 1$ tel que $p_n = 5$.
Comme $p_1 = 2 \neq 5$ et $p_2 = 3 \neq 5$, on sait $n \geq 3$ et que 5 est le plus grand facteur premier de $p_1p_2...p_{n-1} + 1$.
Cependant, on sait déjà que $2 \mid p_1p_2...p_{n-1}$ et $3 \mid p_1p_2...p_{n-1}$ car $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$, ce qui signifie que ni 2 ni 3 ne divisent $p_1p_2...p_{n-1} + 1$, sinon ils diviseraient 1 ce qui est faux.
Comme 5 est le troisième plus petit nombre premier après 2 et 3, 5 est à la fois le plus grand mais aussi le plus petit facteur premier de $p_1p_2...p_{n-1} + 1$: on en déduit que ce nombre admet 5 comme unique facteur premier et est donc nécessairement une puissance de 5.
Il existe donc $m \geq 1$ tel que $p_1p_2...p_{n-1} + 1 = 5^m$, ou encore $p_1p_2...p_{n-1} = 5^m - 1$.
La contradiction vient alors du fait que le membre de droite de l'équation précédente est divisible par 4 : cela peut se voir de nombreuses façon, par exemple en utilisant les sommes des premières puissances d'un réel : $\dfrac{5^m - 1}{5 - 1} = (1 + 5 + ... + 5^{m-1}) = 1 + 5 + ... + 5^{m-1}$ qui est bien un entier.
Ainsi, on en déduit que $p_1...p_{n-1}$ est aussi divisible par 4. Or on a prouvé que tous les p_k pour $k \geq 2$ sont impairs, et donc $p_1...p_{n-1}$ s'écrit sous la forme $2 \times$ impair et n'est ainsi pas divisible par 4, contradiction.
On en déduit, comme voulu, que le nombre 5 ne sera jamais écrit au tableau.

Commentaire des correcteurs Le problème a été traité par un nombre significatif d'élèves (autant que le problème 10) qui l'ont assez mal réussi. Rectifions quelques erreurs courantes :

- Il convient de distinguer un nombre et son plus grand facteur premier : en effet, de nombreux élèves ont affirmé que $p_{n+1} = p_1p_2 \cdots p_n + 1$. Cela n'est vrai que si le membre de droite est premier, or, bien que beaucoup aient pensé l'avoir prouvé, ceci n'est pas vrai (à la troisième minute notamment). L'erreur souvent observée se rapproche de la démonstration de l'infinité des nombres premiers : certes $p_1p_2 \dots p_n + 1$ n'est divisible par aucun $p_1, \dots, p_n$, mais il existe d'autres nombres premiers qui n'ont pas nécessairement été écrits au tableau.
- Si un nombre finit par le chiffre 4 il n'est pas nécessairement divisible par 4 (14 montre le contraire).
- Le produit des nombres au tableau peut avoir comme dernier chiffre 4 (à la quatrième minute notamment).
- La suite des nombres au tableau n'est pas strictement croissante (le nombre écrit à la 8ème minute est plus grand que celui de la 9ème minute).
- Trop d'élèves oublient de justifier clairement que 2 n'apparaît qu'une seule fois sur le tableau pour obtenir la contradiction finale et perdent des points qui étaient à leur portée. De même, certains oublient de mentionner clairement que 3 est écrit au tableau pour obtenir que $3 \nmid p1 \cdots pn - 1 + 1$.
- Traiter les petits cas est toujours une bonne idée : de nombreux élèves ont calculé les premiers nombres écrits au tableau et ont eu raison de le faire. Cependant, observer une propriété sur les premiers cas (que le résultat de l'opération est un nombre premier) ne suffit pas à la prouver en général.

Exercice 13. Aurélien remplit une grille à m lignes et n colonnes avec des nombres réels positifs ou nuls, de sorte que chaque ligne et chaque colonne contienne au moins un élément non nul. Il veut aussi que pour toute case contenant un élément non nul, les sommes des éléments de sa ligne et de sa colonne soient identiques. Montrer que s'il a réussi à remplir sa grille en respectant ces contraintes, alors $m = n$.

Solution de l'exercice 13 Soit l une ligne ou une colonne fixée, notons s sa somme. On regarde L l'ensemble des lignes de somme s, C l'ensemble des colonnes de somme s, a le nombre de lignes de somme s, et b le nombre de lignes de somme s.

De plus, si on considère un réel à l'intersection d'une ligne de L, et d'une colonne n'appartenant pas à C, si celui-ci était non nul, alors la ligne et la colonne en question aurait même somme. Comme la ligne est dans L, celle-ci vaudrait s, ce qui contredit que la colonne n'appartient pas à C. Ainsi les réels à l'intersection d'une ligne de L et d'une colonne n'appartenant pas à C sont tous nuls. Idem si la ligne n'est pas dans L, et la colonne est dans C.

On réarrange le tableau, d'abords en permutant les lignes pour mettre les lignes de L obtenues en haut du tableau, puis on met les colonnes de C à gauche du tableau. Ces opérations ne changent pas la somme des lignes/colonnes, et si on imagine qu'on met une étiquette numérotée sur chaque ligne et colonne avant permutation, le fait de permuter les lignes/colonnes ne change pas le réel à l'intersection d'une ligne et une colonne.

On obtient donc une grille de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix}$$

où T est un tableau $a \times b$, T' est un tableau $(m-a) \times (n-b)$, et le reste des cases du grand tableau sont des zéros.

Ainsi la somme des éléments des b premières colonnes, qui vaut bs, vaut aussi la somme des éléments de T. De même, la somme des éléments des a premières lignes vaut as, mais elle vaut aussi la somme des éléments de T. Ainsi $a = b$.

Pour chaque somme de ligne ou colonne, il y a autant de lignes et de colonnes ayant la même somme. Ainsi il y a le même nombre de ligne au total, donc $m = n$.

Solution alternative n°1 Fixons une ligne ℓ. On considère l'ensemble des colonnes et lignes composées de la ligne l, des colonnes dont un élément non nul est dans la ligne l, des lignes dont un élément non nul est dans une des colonnes précédentes, des colonnes dont un élément non nul est dans une ligne précédente, etc. Notons à la fin a le nombre de lignes obtenues, et b le nombre de colonnes : en particulier, par construction toutes ces lignes et colonnes ont la même somme qu'on note s.

On remarque qu'échanger deux colonnes ne change pas la propriété de l'énoncé (comme prouvé dans la solution précédente), donc on peut supposer que les a premières lignes sont celles qu'on a considéré dans le processus précédent, et que les colonnes sont les b premières colonnes. Vu le processus de construction, si un nombre écrit sur une des b premières colonnes est non nul, alors il est forcément dans les a premières lignes, sinon la ligne à laquelle il appartient aurait été considérée dans le processus précédent, et ferait donc partie des a premières lignes. On obtient donc une grille de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix}$$

où T est un tableau $a \times b$, T' est un tableau $(m-a) \times (n-b)$, et le reste des cases du grand tableau sont des zéros.

Ainsi la somme des éléments des b premières colonnes, qui vaut bs, vaut aussi la somme des éléments de T. De même, la somme des éléments des a premières lignes vaut as, mais elle vaut aussi la somme des éléments de T. Ainsi $a = b$.

On peut alors continuer le processus sur la grille en bas à droite $(m-a) \times (n-b)$, et itérer le procédé. À chaque fois, on enlève autant de lignes que de colonnes, et à la fin, on se retrouve forcément avec uniquement des colonnes ou des lignes, qui ne peuvent avoir aucun élément non nul (sinon ceux-ci seraient dans des lignes ou colonnes précédemment considérées), ce qui serait contradictoire. Donc à la fin, on a plus de colonnes ni de lignes, et comme à chaque fois, on enlève autant de colonnes que de lignes, il y avait au départ autant de colonnes que de lignes.

Commentaire des correcteurs L'exercice est difficile et en conséquent a été mal résolu. Attention, ici l'exercice demandait de montrer que $m \neq n$ ne fonctionnait pas, et non pas de montrer que $m = n$ pouvait fonctionner. Traiter un exemple peut être utile pour se forger une intuition sur un problème, mais traiter un exemple seul n'est pas une preuve. Il faut faire attention lorsqu'on fait un exercice de combinatoire de bien maîtriser les détails de son raisonnement pour éviter de perdre des points en oubliant quelque chose d'important (par exemple ici, il y a beaucoup d'élèves qui ont perdu des points parce qu'ils n'ont pas justifié pourquoi les cases contenant un réel non nul se trouvent à l'intersection d'une ligne et d'une colonne appartenant aux lignes et colonnes de même somme pour la première solution, ou obtenus lors du processus pour la seconde.

Exercice 14. Soit ABC un triangle qui n'est pas isocèle en A. Soient D, E et F les milieux des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe les demi-droites $[DE)$ et $[DF)$ en P et Q respectivement. Les droites (BP) et (CQ) se coupent en X. La droite (AX) coupe les droites (DE) et (DF) en Y et Z respectivement. Montrer que le triangle DYZ est isocèle.

Solution de l'exercice 14 Pour commencer, on va essayer de ramener l'hypothèse de l'énoncé à quelque chose de plus simple. Pour montrer que DYZ est isocèle (si on fait une bonne figure, on voit que DYZ va être isocèle en D) il suffit de montrer que les angles $\widehat{DYZ}$ et $\widehat{DZY}$ sont égaux. Puisque $(ZD) \parallel (AC)$, on a $\widehat{DZY} = \widehat{CAX}$. Le fait que $(YD) \parallel (AB)$ donne que $\widehat{DYZ} = \widehat{BAX}$ par angles alternes internes. Il suffit donc de montrer que (AX) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Pour montrer cela, on va montrer que X n'est pas seulement sur la bissectrice de (XA), mais est en fait le centre du cercle inscrit de ABC. On va donc montrer que (BX) et (CX) sont les bissectrices respectives de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

Montrons donc que (BX) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$. Les angles alternes internes nous disent que $\widehat{ABX} = \widehat{BPD}$. Or D est le centre du cercle de diamètre BC. P et B sont sur ce cercle, donc le triangle BDP est isocèle en D, donnant $\widehat{BPD} = \widehat{DBP} = \widehat{DBX} = \widehat{CBX}$. Finalement, $\widehat{ABX} = \widehat{CBX}$, donc (BX) est bien la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Un raisonnement analogue montre que (CX) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$. X est donc le centre du cercle inscrit de ABC, ce qui nous donne que (AX) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et donc DYZ isocèle en D, ce qui termine la preuve.

Commentaire des correcteurs Un exercice plutôt bien réussi pour sa position. Beaucoup d'élèves ont réussi à se ramener à montrer que (AX) était une bissectrice, et beaucoup ont aussi conjecturé que X était le centre du cercle inscrit, des avancées qui ont été valorisées. On déplore simplement que beaucoup d'élèves affirment que X est le centre du cercle inscrit sans voir que cette affirmation, cruciale, nécessite une preuve rigoureuse.

Exercice 15. Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Gaëtan choisit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que parmi les n nombres $\frac{x_1}{1}, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \ldots, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$, la plus grande valeur prise est 1 et la plus petite valeur prise est 0.

Parmi les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on note a le plus grand et b le plus petit. Gaëtan calcule $a-b$ et écrit cette différence au tableau. Quel est le plus grand nombre que Gaëtan peut écrire au tableau ? Quel est le plus petit ?

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>

Commençons par déterminer la valeur maximale que peut prendre $a-b$. Intéressons-nous à présent à la valeur maximale que peut prendre $a-b$.

Soient k et l deux indices (entre 1 et n) tels que $x_k = a$ et $x_l = b$. Si $k = l$, alors tous les x_i sont égaux, et donc les n nombres $\frac{x_1}{1}, \frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \ldots, \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ sont, eux aussi, égaux, ce qui est absurde.

Ainsi $k \neq l$. Par hypothèse, on sait que $x_1 + \ldots + x_{k-1} \geq 0$ et $x_1 + \ldots + x_k \leq k$, donc

$$a = x_k = (x_1 + \ldots + x_k) - (x_1 + \ldots + x_{k-1}) \leq k.$$

De même, on sait que $x_1 + \ldots + x_{l-1} \leq l-1$ et $x_1 + \ldots + x_l \geq 0$, donc

$$b = x_l = (x_1 + \ldots + x_l) - (x_1 + \ldots + x_{l-1}) \geq 1 - l.$$

On en déduit $a - b \leq k + l - 1 \leq n + (n-1) - 1 = 2n - 2$ car l et k sont des entiers distincts inférieurs ou égaux à n.

Réciproquement, on vérifie que $x_1 = \ldots = x_{n-2} = 1$, $x_{n-1} = -(n-2)$ et $x_n = n$ vérifient bien les hypothèses. En effet, si $1 \leq i \leq n-2$, $\frac{x_1+\cdots+x_i}{i} = \frac{i}{i} = 1$, $\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}}{n-1} = 0$ et $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

Pour ces réels, on a $a - b = n - (-(n-2)) = 2n-2$: on a donc bien trouvé la valeur maximale que peut prendre $a-b$.

Intéressons-nous à présent à la valeur minimale que peut prendre $a-b$.

On sait par hypothèse qu'il existe l et k (distincts) entre 1 et n vérifiant $x_1+\ldots+x_l = 0$ et $x_1+\ldots+x_k = k$.

Il est facile de vérifier que les réels $y_i = 1 - x_i$ vérifient également les conditions de l'énoncé, que le maximum des (y_i) est $1-b$ et le minimum $1-a$, de sorte que la différence entre ces quantités est également $a-b$. La seule différence est qu'on a $y_1 + \ldots + y_l = l$ et $y_1 + \ldots + y_k = 0$: cela signifie qu'on peut supposer sans perdre de généralité que $k > l$ (quitte à remplacer les x_i par les y_i).

Forts de ce constat, on remarque par définition du minimum et du maximum que $lb \leq x_1+\ldots+x_l = 0$ donc $b \leq 0$ et que $(k-l)a \geq x_{l+1} + \ldots + x_k = (x_1 + \ldots + x_k) - (x_1 + \ldots + x_l) = k$ donc

$$a \geq \frac{k}{k-l} \geq \frac{k}{k-1} = 1 + \frac{1}{k-1} \geq 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}.$$

On en déduit $a - b \geq \frac{n}{n-1}$.

Réciproquement, on vérifie que $x_1 = 0$ et $x_2 = x_3 = \ldots = x_n = \frac{n}{n-1}$ vérifient bien les hypothèses :

en effet $\dfrac{x_1}{1} = 0$, et si $2 \leq i \leq n$, $\frac{x_1+\cdots+x_i}{i} = \frac{i-1}{i} \times \frac{n}{n-1}$, qui est une quantité positive, et on a $\frac{i-1}{i} = 1 - \frac{1}{i} \leq 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$, donc $0 \leq \frac{x_1+\cdots+x_i}{i} \leq 1$, et la quantité vaut 1 pour $i = n$.
Pour ces réels on a $a - b = \dfrac{n}{n-1} - 0 = \dfrac{n}{n-1}$: on a donc bien trouvé la valeur minimale que peut prendre $a - b$.

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile et a été peu abordé et encore moins résolu. Cependant, une grande proportion des copies parvient à obtenir des points partiels pour avoir prouvé une des deux bornes seulement, ou avoir donné des constructions valides par exemple : il est de ce fait important de rédiger tout ce qui peut paraître pertinent à la résolution de l'exercice, même si la preuve n'est pas complète.
Une erreur fréquente a été, dans la preuve que le maximum de $a-b$ est $2n-2$, de déduire directement des encadrements que le maximum est $2n-1$, sans faire attention au fait que a et b doivent survenir à des indices distincts : les élèves ayant fait cette erreur ont souvent donné la bonne construction pour $2n-2$, c'est dommage car il leur aurait suffi de vérifier soigneusement leur construction pour se rendre compte du problème.
Beaucoup d'élèves intuitent aussi dans ce même cas qu'il est optimal pour les extremums de la suite de se situer aux indices finaux : c'est vrai, mais toute affirmation de ce genre doit être soigneusement justifiée et les élèves ne l'ayant pas fait ont été sanctionnés.