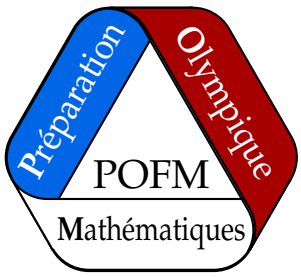
PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 14 MAI 2025

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soient a et c des réels strictement positifs tels que $ac = 9$. Déterminer le plus grand réel b vérifiant la propriété suivante : pour tous réels x et y non nuls (et non nécessairement positifs),

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy} + \frac{c}{y^2} \geqslant 0.$$

Solution de l'exercice 1

Réponse : La plus grande valeur que peut prendre b est $b = 6$.

Même si le problème est un problème d'algèbre qui rentre dans la catégorie des problèmes d'inégalité, il n'en reste pas moins un problème dans lequel on demande de trouver le plus grand réel vérifiant une propriété. Il contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si b vérifie la propriété de l'énoncé, alors $b \leqslant 6$ (cette étape s'appelle *l'analyse*). Dans un second temps, on montre que 6 vérifie bien la propriété (cette étape s'appelle *la synthèse*).

Notons avant tout que l'expression se réécrit de la façon suivante pour tous réels x et y :

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy} + \frac{c}{y^2} = \left(\frac{\sqrt{a}}{x} + \frac{\sqrt{c}}{y}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{ac}}{xy} + \frac{b}{xy} = \left(\frac{\sqrt{a}}{x} + \frac{\sqrt{c}}{y}\right)^2 + \frac{b-6}{xy},$$

où on a utilisé que $2\sqrt{ac} = 2 \cdot \sqrt{9} = 6$.

Analyse : Soit b un réel vérifiant la propriété de l'énoncé.

On choisit x et y de sorte à annuler le terme à l'intérieur du carré dans la réécriture de l'expression ci-dessus. Par exemple, prenons $x = 1$ et $y = -\sqrt{c/a}$. L'expression ci-dessus étant positive, on a alors

$$0 \leqslant \left(\frac{\sqrt{a}}{x} + \frac{\sqrt{c}}{y}\right)^2 + \frac{b-6}{xy} = 0 + \frac{b-6}{-\sqrt{c/a}}.$$

En simplifiant par $-\sqrt{c/a}$ (ce qui change le sens de l'inégalité), cette inégalité donne $0 \geqslant b-6$ et $b \leqslant 6$.

Synthèse : Réciproquement, si $b = 6$, l'expression devient

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{x} + \frac{\sqrt{c}}{y}\right)^2$$

qui est bien positive pour tous réels x et y, de sorte que $b = 6$ convient.

Solution n°2

On peut également montrer la synthèse en utilisant l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques. Supposons $b = 6$. D'après l'IAG, puisque $ac = 9$,

$$\frac{a}{x^2} + \frac{b}{xy} + \frac{c}{y^2} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{x^2}\frac{c}{y^2}} + \frac{6}{xy} = 2\frac{\sqrt{ac}}{|xy|} + \frac{6}{xy} = 6\left(\frac{1}{|xy|} + \frac{1}{xy}\right).$$

Or, pour tout réel z, on a $|z| + z \geqslant 0$ (si $|z| = -z$ l'expression est nulle, tandis que si $|z| = z$, alors z est positif et l'expression est positive). Le terme dans la parenthèse est donc toujours positif.

Remarque : Les deux solutions illustrent les méthodes efficaces en présence d'une expression de la forme $au^2 + buv + cv^2$ (où l'on a posé $u = 1/x$ et $v = 1/y$) : on peut chercher à faire apparaître un carré parfait à l'aide des termes en a et c ou on peut chercher à combiner les termes en a et en c à l'aide de l'inégalité des moyennes pour qu'il ne reste que des termes en uv. Noter que les deux méthodes sont équivalentes, puisque la preuve de l'inégalité des moyennes repose sur un réarrangement de l'expression sous la forme d'un carré. La méthode dépend donc des goûts.

Notons que le choix de $|x|$ et $|y|$ dans l'analyse correspond au cas d'égalité de l'inégalité des moyennes utilisée dans la solution alternative. Ainsi, un élève qui aurait utilisé l'inégalité des moyennes pour la synthèse peut utiliser le cas d'égalité de cette inégalité pour le guider vers l'analyse.

Solution n°3

Posons $u = \dfrac{1}{x}$ et $v = \dfrac{1}{y}$. L'expression devient

$$au^2 + buv + cv^2,$$

et l'expression de l'énoncé est positive pour tous x, y réels non nuls si et seulement si l'expression en u et v est positive pour tous réels u et v non nuls.

Il s'agit d'un polynôme du second degré en u, dont le discriminant vaut

$$\Delta = (bv)^2 - 4acv^2 = (b^2 - 36)v^2.$$

L'expression en u et v est de signe constant (et donc positive car $a \geqslant 0$) pour tous réels u et v si et seulement si $\Delta \leqslant 0$. Or Δ est du signe de $b^2 - 36$, si bien que $\Delta \leqslant 0$ si et seulement si $b \in [-6, 6]$. Ainsi, si $b = 6$, l'expression est positive, et si $b > 6$, l'expression en u et v admet deux racines distinctes dont au moins une est non nulle, ce qui entraîne que l'expression est négative pour au moins un couple (u, v). On retrouve bien que $b = 6$ est le plus grand réel recherché.

Commentaire des correcteurs

Ce problème a été globalement bien compris, mais très mal réussi pour un problème 1. Un grand nombre d'élèves a oublié que a et c étaient fixés dans l'énoncé, et qu'on ne pouvait pas les prendre tous deux égaux à 3 lorsqu'on montre que 6 est optimal.

Dans l'ensemble, sur un problème facile il n'y a pas beaucoup d'arguments à avancer, on attend donc qu'ils soient tous précis et exacts. Ainsi, beaucoup d'élèves ont précisé qu'il y avait un cas d'égalité quand $a/x^2 = c/y^2$, mais n'ont pas justifié pourquoi on pourrait trouver un couple x, y vérifiant cette égalité.

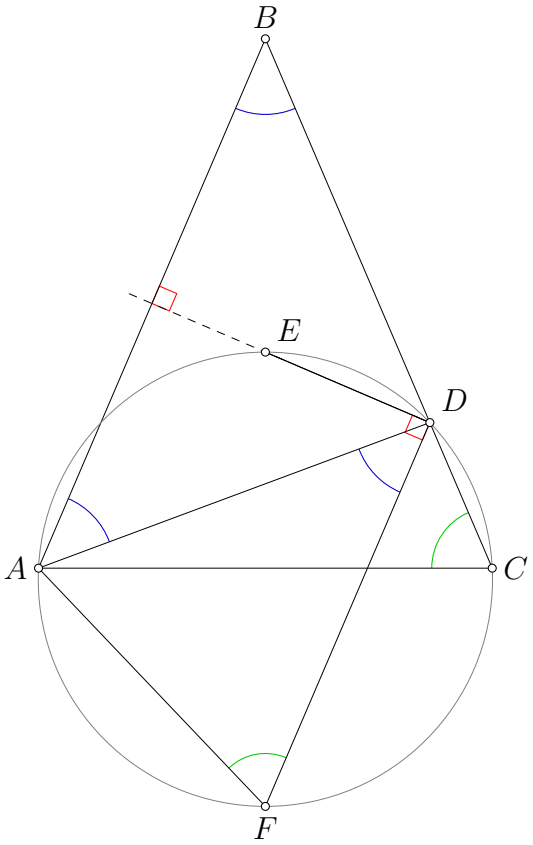
De même, la solution 3 utilisant le discriminant a elle aussi été trouvée par quelques élèves, mais le fait que le discriminant soit négatif si et seulement si le polynôme est toujours positif est un ingrédient important de la preuve qui doit être mentionné.

Enfin, certains élèves ont trouvé un résultat incohérent puisqu'ils ont oublié de prendre en compte les valeurs absolues lors du passage à la racine.

Exercice 2. Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB = BC > CA$. La médiatrice du segment $[AB]$ coupe le segment $[BC]$ au point D. On note Ω le cercle circonscrit au triangle ADC. La médiatrice du segment $[AB]$ recoupe Ω en un point E. On note F le point diamétralement opposé au point E dans Ω.

Montrer que $DB = DF$.

Solution de l'exercice 2

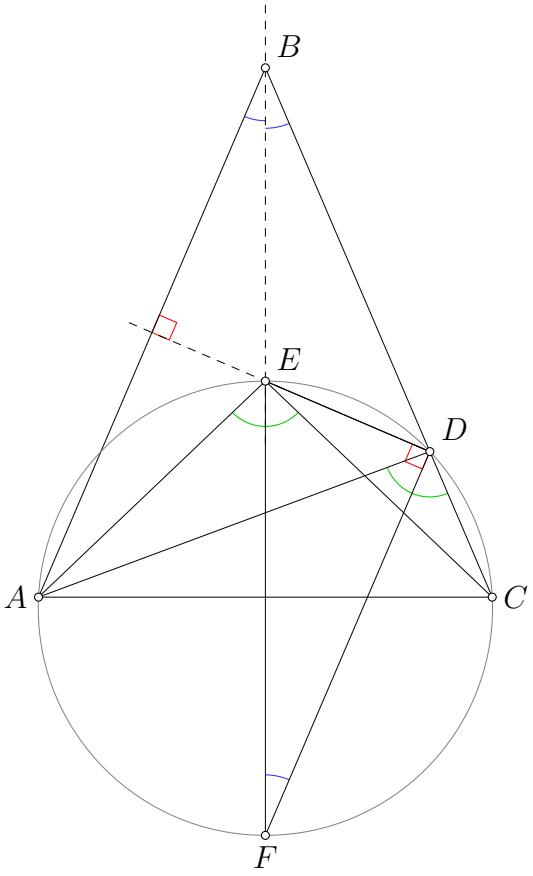


Puisqu'on sait déjà que $AD = DB$, il suffit de montrer que $DF = DA$. Puisque $[EF]$ est un diamètre de Ω, on a $\widehat{EDF} = 90°$. Comme (ED) est également la médiatrice du segment $[AB]$, (ED) est perpendiculaire à $[AB]$. Ainsi, les droites (AB) et (DF) sont perpendiculaires à une même droite et sont donc parallèles. On déduit l'égalité des angles alternes-internes :

$$\widehat{ADF} = \widehat{DAB} = \widehat{DBA} = \widehat{CBA}.$$

D'autre part, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{ACB} = \widehat{AFD}$. Les triangles ABC et ADB ont donc deux angles en commun, ils sont donc semblables, ce qui confirme que le triangle ADF est isocèle en D.

Solution n°2



Notons ℓ la médiatrice du segment $[AB]$. En traçant la figure, on s'aperçoit que le point E semble également appartenir à la médiatrice du segment $[AC]$, ce qui en ferait le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, puisqu'il serait sur deux des trois médiatrices de ce triangle. Montrons cette conjecture.

Notons E' le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Nous allons montrer que E' est sur le cercle ω. Puisque le second point d'intersection de ω avec ℓ est unique, on a aura alors montré que $E = E'$.

D'après le théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{AE'C} = 2\widehat{ABC}$. D'autre part, puisque D est sur ℓ, le triangle ADB est isocèle et on déduit

$$\widehat{ADC} = 180° - \widehat{ADB} = \widehat{DAB} + \widehat{DBA} = 2\widehat{DBA} = 2\widehat{ABC}.$$

On a donc bien $\widehat{AE'C} = \widehat{ADC}$. D'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, cela implique bien que E' appartient à ω et E est donc bien le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit O le centre du cercle ω. Les points E et O sont tous les deux sur la médiatrice du segment $[AC]$, la droite (OE) est donc la médiatrice du segment $[AC]$. Puisque $[EF]$ est un diamètre de ω, il contient O et la droite (EF) est la médiatrice du segment $[AC]$. Comme $BA = BC$, les points F, E et B sont donc alignés.

Puisque le segment $[EF]$ est un diamètre de ω, on a $\widehat{EDF} = 90°$. Les droites (DF) et (AB) sont alors perpendiculaires à ℓ et sont donc parallèle. Par égalité des angles alternes-internes, on a

$$\widehat{EFD} = \widehat{EBA} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{EBC},$$

où on a utilisé que la médiatrice de $[AC]$ est également la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ car le triangle ABC est isocèle. On a donc bien $\widehat{FBD} = \widehat{BFD}$ et $DB = DF$.

Remarque 1 : Une fois que l'on a montré que E, B et F sont alignés, on peut également conclure de la façon suivante. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{EFD} = \widehat{EAD}$. Ensuite, puisque les triangles BEA et BDA sont isocèles, on a

$$\widehat{EAD} = \widehat{BAD} - \widehat{EAB} = \widehat{ABD} - \widehat{EBA} = \widehat{EBD}.$$

On a donc à nouveau $\widehat{BFD} = \widehat{FBD}$ et $DB = DF$.

Remarque 2 : Pour montrer que E est sur la médiatrice du segment $[AC]$, on peut aussi remarquer qu'il est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ADB}$ (car ADB est isocèle en D). E est donc sur le cercle Ω et sur la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ADC}$, ce qui en fait le pôle Nord du sommet D dans le triangle ADC et ce qui permet de conclure.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été globalement très bien réussi. L'erreur la plus commune était de supposer que les points B, E, F sont alignés sans le prouver ou de tenter de le prouver par une tautologie. Beaucoup d'élèves ont néanmoins su appliquer une chasse aux angles et/ou des propriétés des médiatrices pour s'en sortir.

Exercice 3. Déterminer tous les couples (p, q) de nombres premiers tels que $p \neq q$ et q^p est un diviseur de $p + p^q + p^{(q^p)}$.

Solution de l'exercice 3

Soit (p, q) un couple solution. On calcule chaque terme de $p + p^q + p^{q^p}$ modulo q. Pour cela, le petit théorème de Fermat indique que $p^q \equiv p \mod q$. Ainsi,

$$p^{q^p} = (p^q)^{q^{p-1}} \equiv p^{q^{p-1}} = (p^q)^{q^{p-2}} \equiv p^{q^{p-2}} \equiv \ldots \equiv p^q \equiv p \mod q.$$

La relation de divisibilité implique en particulier que $q \mid p + p^q + p^{q^p}$. On déduit que

$$0 \equiv p + p^q + p^{q^p} \equiv p + p + p = 3p \mod q.$$

On déduit que $q \mid 3p$ et donc que $q \mid 3$ ou que $q \mid p$. Mais si $q \mid p$, comme p et q sont premiers, on trouve que $q = p$, ce qui est exclu par l'énoncé. On a donc $q \mid 3$ et $q = 3$. La relation de divisibilité devient

$$3^p \mid p + p^3 + p^{3^p}.$$

Jusqu'ici, on a seulement utilisé que $q \mid p + p^q + p^{q^p}$, mais pas qu'une plus grande puissance de q divise $p + p^q + p^{q^p}$. C'est ce que l'on va faire ici. On va calculer le terme p^{3^p} modulo 3^p. Puisque p est premier et distinct de 3, il est premier avec 3. On peut donc appliquer le théorème d'Euler, qui indique que

$$1 \equiv p^{\varphi(3^p)} = p^{3^p - 3^{p-1}} \mod 3^p$$

On déduit que $p^{3^p} \equiv p^{3^{p-1}} \mod 3^p$. Le théorème d'Euler s'écrit également $p^{2 \cdot 3^{p-1}} \equiv 1 \mod 3^p$. Cela implique que

$$3^p \mid \left(p^{3^{p-1}}\right)^2 - 1 = \left(p^{3^{p-1}} - 1\right)\left(p^{3^{p-1}} + 1\right).$$

Or, ces deux facteurs ont une différence de 2, donc ils ne peuvent pas être tous les deux divisibles par 3. On a donc $3^p \mid p^{3^{p-1}} - 1$ ou $3^p \mid p^{3^{p-1}} + 1$, ce qui implique que $p^{3^p} \equiv a \mod 3^p$, avec $a = -1$ ou $a = 1$. Finalement, on trouve que

$$0 = p + p^3 + p^{3^p} \equiv p + p^3 + a \mod 3^p.$$

Or, on a pour tout $p \geqslant 5$,

$$0 < p^3 + p - 1 < p^3 + p + 1 < 3^p.$$

La preuve de la dernière inégalité se trouve en annexe. Cet encadrement contredit que 3^p est un diviseur de $p^3 + p + a$. On déduit que $p = 2$. Réciproquement, si $p = 2$ et $q = 3$, on a bien

$$3^2 = 9 \mid 522 = 2 + 2^3 + 2^{3^2}.$$

Le seul couple solution est donc $(2, 3)$.

Annexe : Preuve de l'inégalité $p^3 + p + 1 < 3^p$.

Nous allons montrer par récurrence sur n que $n^3 + n + 1 < 3^n$ pour tout entier $n \geqslant 5$.

Initialisation : Si $n = 5$, on a bien $5^3 + 5 + 1 = 131 < 243 = 3^5$.

Hérédité : On suppose l'inégalité vraie pour un $n \geqslant 5$ fixé et on montre que l'inégalité est vraie pour $n + 1$. L'hypothèse de récurrence donne en effet

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(n^3 + n + 1).$$

Pour montrer que $3(n^3 + n + 1) > (n + 1)^3 + (n + 1) + 1$, il suffit, après développement et simplification, de montrer que $2n^3 > 3n^2 + n$. Or on a, puisque $n \geqslant 5$,

$$2n^3 \geqslant 2 \cdot 5n^2 = 3n^2 + 7n^2 > 3n^2 + 4n^2 \geqslant 3n^2 + n.$$

On a donc bien l'inégalité pour $n + 1$, ce qui achève la récurrence et conclut l'exercice.

Remarque : Pour montrer que $p^{3^p} = \pm 1 \mod 3^p$, on peut également avoir recours au lemme "Lifting The Exponent" de la façon suivante. Comme $p \neq 3$, $p = \pm 1 \mod 3$. Supposons par exemple que $p = 1 \mod 3$. D'après le lemme LTE, on a

$$v_3(p^{3^p} - 1) = v_3(p) + v_3(3^p) = p + 1,$$

si bien que $3^p \mid p^{3^p} - 1$. On montre de même que $3^p \mid p^{3^p} + 1$ lorsque $p = -1 \mod 3$.

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été très mal réussi : seuls 5 élèves ont essentiellement une solution complète. Voici quelques défauts récurrents :

- Face à un tel problème, il est important de localiser rapidement les solutions. Certes les calculs sont assez pénibles, mais il est souvent nécessaire de traiter les cas où p et q sont entre 1 et 10 (donc ici entre 2 et 5) pour avoir probablement trouvé toutes les solutions. Ici trouver la solution ne rapportait pas de points, mais c'était un bon départ.
- Avant de faire compliqué, il faut faire simple. Plutôt que de se demander si q^p divise l'affreuse quantité de l'énoncé, on peut déjà se demander si q le divise (et en faisant les tests mentionnés précédemment, c'est la première chose naturelle à faire pour ne pas faire trop de calculs). Et en faisant cela, et en appliquant Petit Fermat, on tombe alors naturellement sur $q = 3$.
- Certains élèves n'ont pas compris ce que valait p^{q^p}. Cela ne vaut pas $(p^q)^p = p^{qp}$.
- Beaucoup d'élèves ont écrit des versions totalement erronées du petit théorème de Fermat ou du théorème d'Euler. En effet, on a eu le droit à "si a est premier avec n, $a^{n-1} \equiv 1 \pmod n$" (qui ne marche que si n est premier), ou à des calculs totalement faux de $\phi(p^q)$ qui ne vaut ni $p^q - p$, ni $p^q - q$.
- Une fois obtenu que p divise $p + p^3 + p^{3^{p-1}}$, certains ont eu du mal à poursuivre. Dans ce cas, les modulos sont une arme de choix, on a alors $p + p^3 \equiv -p^{3^{p-1}} \pmod{3^p}$. Et là, il est très naturel d'élever au carré chaque côté, pour obtenir que $p^6 + 2p^4 + p^2 \equiv 1 \pmod{3^p}$. Ensuite on peut montrer par une récurrence pénible que $p^6 + 2p^4 + p^2 - 1 < 3^p$ pour p assez grand, et traiter les autres cas à la fin (par exemple, en calculant $p^6 + 2p^4 + p^2$).

Exercice 4. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Déterminer, en fonction de n, le plus grand entier strictement positif M vérifiant la propriété suivante : pour tout $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers positifs vérifiant $a_1 + \ldots + a_n = M$, il existe n entiers $b_1, \ldots, b_n$ appartenant tous à l'ensemble $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, non tous nuls et vérifiant

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = 0.$$

Solution de l'exercice 4

Réponse : $M = \dfrac{3^n - 3}{2}$.

Le problème demande de trouver le plus grand entier M vérifiant une certaine propriété, il contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si M vérifie la propriété de l'énoncé, alors $M \leqslant \dfrac{3^n - 3}{2}$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre que $M = \dfrac{3^n - 3}{2}$ vérifie la propriété de l'énoncé. Cette étape s'appelle *la construction* ou encore *la synthèse*.

Construction :

Une fois n'est pas coutume, nous commençons par montrer que si $M = \dfrac{3^n - 3}{2}$, alors l'énoncé est satisfait. En réalité, nous allons effectuer un raisonnement pour un M générique, et l'issue de ce raisonnement fera apparaître la valeur de M à choisir pour que l'énoncé fonctionne.

Fixons un $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers de somme M. Notons

$$E = \{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n, b_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \text{ pour } i = 1, \ldots, n\}$$

et

$$F = \{a_1 c_1 + \ldots + a_n c_n, c_i \in \{-1, 0, 1\} \text{ pour } i = 1, \ldots, n\}.$$

La clé est que la différence de deux éléments de F est un élément de E. Ainsi, si l'on trouve deux éléments de F qui sont égaux, alors on aura bien $0 \in E$.

D'une part, il y a 3 choix pour le coefficient c_i pour chaque i, de sorte que $|F| = 3^n$. D'autre part, puisque les a_i sont positifs, on a pour tout $(c_1, \ldots, c_n) \in \{-1, 0, 1\}^n$,

$$-M = -(a_1 + \ldots + a_n) \leqslant a_1 c_1 + \ldots + a_n c_n \leqslant a_1 + \ldots + a_n = M,$$

de sorte que les éléments de F sont dans l'intervalle $[\![-M, M]\!]$. Ainsi, il y a $2M + 1$ valeurs possibles pour les éléments de F. D'après le principe des tiroirs, si $3^n > 2M + 1$, F contient bien deux éléments égaux. En particulier, pour $M = \dfrac{3^n - 3}{2}$, l'énoncé est vérifié.

Analyse :

Il s'agit ici de montrer que si M est trop grand, on peut trouver un $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ mettant l'énoncé en défaut. L'écriture $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n$ où les b_i sont des coefficients dans $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ fait penser à une écriture en base 3, pour laquelle on sait qu'il y a unicité

de l'écriture (et en particulier, si une écriture est nulle, les coefficients sont tous nuls). Ceci nous guide vers la construction suivante : posons $d = M - \dfrac{3^n - 1}{2}$ et supposons que $d \geqslant 0$. Posons $a_i = 3^{i-1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $a_n = 3^{n-1} + d$. Supposons par l'absurde qu'il existe $(b_1, \ldots, b_n) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^n$ tel que $a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = 0$.

Considérons j le plus grand indice tel que $b_j \neq 0$. Quitte à multiplier tous les b_i par -1, on peut supposer que $b_j > 0$. On a alors

$$0 = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \geqslant 3^0 b_1 + \ldots + 3^{j-1} b_j \geqslant 3^{j-1} - (3^0 \cdot 2 + \ldots + 3^{j-2} \cdot 2) = 3^{j-1} - (3^{j-1} - 1) > 0.$$

Cette absurdité conclut que $d < 0$, et donc que $M \leqslant \dfrac{3^n - 3}{2}$.

Commentaire des correcteurs

Aucun élève n'a su avancer sur la partie la plus difficile, à savoir la construction. En revanche, plusieurs élèves ont su montrer que $M \leqslant \dfrac{3^n - 3}{2}$.
Voici deux erreurs importantes rencontrées dans les solutions proposées :

- Des élèves ont montré que $\dfrac{3^n - 1}{2}$ ne vérifiait pas la propriété, sans rien dire sur les entiers plus grands.
- D'autres ont construit par récurrence le plus petit terme suivant, tel qu'il n'y ait aucune combinaison linéaire respectant les conditions qui vale 0, afin de trouver la plus petite somme ne vérifiant pas la propriété. Ce raisonnement est incorrect : peut-être que prendre un plus grand terme permettra ensuite d'en choisir un plus petit sans qu'il y ait de combinaison linéaire qui vale 0, et au final d'obtenir une somme plus petite.

Exercice 5. Déterminer tous les entiers strictement positifs n vérifiant la propriété suivante : pour tout diviseur positif d de n, $d+1$ est soit un nombre premier, soit un diviseur de n.

Solution de l'exercice 5

Réponse : Les entiers solutions sont $1, 2, 4, 12$.

Soit n un nombre solution. On dispose d'un entier a et d'un entier impair b tel que $n = 2^a b$. Comme b est un diviseur de n, $b+1$ est soit premier soit un diviseur de $n+1$.

- Si $b+1$ est premier, comme b est impair, $b+1$ est pair donc $b+1 = 2$ et $n = 2^a$. Si $a \geqslant 3$, alors 2^3 est un diviseur de n mais tel que $2^3+1 = 9$ n'est pas premier et n'est pas un diviseur de n, ce qui contredit l'énoncé. Donc $a < 3$, ce qui implique que $n = 1, 2$ ou 4.

  Réciproquement, l'unique diviseur de 1 est 1 et vérifie que $1+1$ est premier donc 1 est solution. Les diviseurs de 2 sont 1 et 2 et vérifient que $1+1$ et $2+1$ sont premiers, donc 2 est solutions. Les diviseurs de 4 sont $1, 2$ et 4 et vérifient bien que $d+1$ est premier.

- Si $b+1$ est un diviseur de n, comme $b+1$ est premier avec b, c'est un diviseur de 2^a, donc on dispose de $c \leqslant a$ tel que $b = 2^c - 1$. Quitte à retourner au cas précédent, on peut supposer que $b \geqslant 2$ et donc que $c \geqslant 2$, ce qui donne que $a \geqslant 2$.

  Si $a = 2$, alors $c = 2$ et $n = 12$. Réciproquement les diviseurs de n étant $1, 2, 3, 4, 6, 12$ et puisqu'on a $1+1, 2+1, 4+1, 6+1$ et $12+1$ premiers ainsi que $3+1 \mid 12$, 12 est bien solution du problème.

  Si $a \geqslant 3$, alors on montre que $2^{a-1}+1$ et 2^a+1 ne peuvent pas être des diviseurs de n. Puisqu'ils sont impairs, ils doivent diviser 2^c-1. Or $2^a+1 > 2^c-1$ donc 2^a+1 ne peut pas diviser 2^c-1.
  D'autre part, si $2^{a-1}+1 \mid 2^c-1$, alors $2^c \geqslant 2^{a-1}+2 > 2^{a-1}$ donc $c \geqslant a$ et $c = a$. Mais $2(2^{a-1}+1) > 2^a - 1 > 2^{a-1}+1$ pour $a \geqslant 3$, donc $2^{a-1}+1$ ne peut pas diviser 2^a-1 pour $a \geqslant 3$. Ainsi, 2^a+1 et $2^{a-1}+1$ ne divisent pas n.

  Ils sont donc tous les deux premiers. Or, l'un des deux entiers a et $a-1$ est impair. Notons le $2k+1$, avec $k \geqslant 1$ (puisque $a-1 \geqslant 2$). Mais alors $3 = 2+1 \mid 2^{2k+1}+1$, et $2^{2k+1}+1 > 3$ donc ce nombre n'est pas premier, ce qui contredit l'énoncé. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

Remarque : Dans le second cas, où l'on a établi que $n = 2^a(2^c-1)$ avec $c \leqslant a$, on peut également conclure de la façon suivante. Comme 2^c est un diviseur de n, 2^c+1 est soit un diviseur de n soit un nombre premier. Or 2^c+1 est impair et strictement plus grand que la partie impaire de n, donc il ne peut pas diviseur n. Donc 2^c+1 est un nombre premier. Il est alors classique d'obtenir que c est une puissance de 2, notée 2^d.

Or $2^{2^d}-1$ n'est jamais divisible par 9, car l'ordre de 2 modulo 9 est 6 donc si $9 \mid 2^k-1$, 3 doit diviser k et k ne peut pas être une puissance de 2. Ainsi, 9 n'est pas un diviseur de n, ce qui implique que 2^3+1 n'est ni un nombre premier ni un diviseur de n, donc 2^3 n'est pas un diviseur de n, ce qui implique $a \leqslant 2$ et ce qui renvoie au premier cas.

Solution n°2

En appliquant la propriété de l'énoncé à n, on trouve que $n+1$ est premier. Ainsi, si $n \geqslant 2$, n est pair.

En appliquant la propriété à $n/2$, on trouve que $n/2+1$ est premier, donc pour $n \geqslant 4$, $n/2$ est pair et n est divisible par 4. En effet, si $n/2+1$ divisait n, il diviserait $2(n/2+1)-n=2$ ce qui donnerait $n/2+1 \leqslant 2$ et $n \leqslant 2$.

En appliquant la propriété à $n/4$, on trouve que soit $n/4+1$ est un diviseur de n, soit que $n/4+1$ est premier. Dans le premier cas, $n/4+1$ est alors diviseur de $4(n/4+1)-n=4$, ce qui donne $n/4+1 \leqslant 4$ et $n \leqslant 12$. On déduit donc que pour $n \geqslant 12$, $n/4+1$ est un nombre premier supérieur à 4, donc $n/4$ est pair et n est divisible par 8.

Supposons que $n > 12$ est une solution du problème et notons m l'entier tel que $n = 8m$. On a établi que $2m+1, 4m+1$ et $8m+1$ sont des nombres premiers. Si $m = 1 \mod 3$, alors $8m+1 \equiv 0 \mod 3$ donc $8m+1 = 3$, ce qui est impossible. Si $m = 2 \mod 3$, alors $4m+1 = 0 \mod 3$ donc $4m+1 = 3$, ce qui est impossible. On déduit que $m = 0 \mod 3$ et que 24 divise n. La propriété de l'énoncé implique $24+1 = 25$ divise également n.

Soit p le plus petit entier qui ne divise pas n. Tout comme dans la solution 2, on montre que p est premier et le raisonnement précédent a montré que $2, 3$ et 5 divisent n, donc $p \geqslant 7$. L'idée de départ est de s'intéresser au nombre $(p-1)(p+1) = p^2-1$. En effet, chacun des facteurs premiers de $p-1$ et $p+1 = 2 \cdot \dfrac{p+1}{2}$ sont inférieurs ou égaux à $p-1$. Ainsi, $p-1$ et $p+1$ divisent tous les deux n, et comme PGCD$(p-1, p+1) = 2$, on déduit que $\dfrac{(p-1)(p+1)}{2}$ divise n. Pour conclure, il suffit de montrer que $v_2((p-1)(p+1)) \leqslant v_2(n)$.

Considérons désormais la plus grand puissance de 2 inférieure ou égale à $p+1$, et notons là 2^k. On a alors $v_2((p-1)(p+1)) = v_2(p-1) + v_2(p+1) \leqslant k+1$, dans la mesure où $v_2(p-1)$ et $v_2(p+1)$ sont bornés par k et au plus l'un des deux est supérieur à 1. D'autre part, comme $p \geqslant 7$, $k \geqslant 3$. Les nombres $2^{k-1}-1$ et $2^{k-1}+1$ sont donc premiers entre eux et inférieurs ou égaux à $p-1$. Donc ils divisent n et $2^{2(k-1)}-1 = (2^{k-1}-1)(2^{k-1}+1) \mid n$. En appliquant l'énoncé à $2^{2(k-1)}-1$, on déduit que $2^{2(k-1)}$, qui n'est pas premier, divise n. Ainsi, $v_2(n) \geqslant 2(k-1) \geqslant k+1 \geqslant v_2(p^2-1)$, ce qui conclut.

Remarque : La solution présentée pour justifier que $(p-1)(p+1)$ divise n (plutôt que seulement $\dfrac{(p-1)(p+1)}{2}$) est très astucieuse. Une alternative est de distinguer plusieurs cas, selon que $q-1$ ou $q+1$ est bien divisible par $2^{v_2(n)}$. Dans chaque cas, on cherche à établir une contradiction en considérant des nombres de la forme $kp-1$ bien choisis pour qu'ils soient des diviseurs de n, ce qui force kp à diviser également n.

- ➢ Si $p+1$ est une puissance de 2, notée 2^m. Comme $p \geqslant 7$, $m \geqslant 3$. Dans ce cas, $p = 2^m-1$ et $3p-1 = 3 \cdot 2^m - 4 = 4(3 \cdot 2^{m-2}-1)$. Or $p \geqslant 5$ donc $4 \mid n$ et $3 \cdot 2^{m-2}-1 \leqslant 4 \cdot 2^m - 2 = p-1$ donc $3 \cdot 2^{m-2}-1$ divise n. Comme 4 et $3 \cdot 2^{m-2}-1$ sont premiers entre eux, leur produit divise également n. D'après l'énoncé, cela implique que $3p$ est premier ou qu'il divise n. On déduit que $3p$ divise n, donc p aussi, ce qui contredit l'hypothèse sur p.
- ➢ Si $p-1$ est une puissance de 2, notée m. On a alors $p = 2^m+1$. Comme p est premier et supérieur à 7, m est pair (sinon $2+1 \mid 2^m+1 = p$). Dans ce cas, $2p-1 = 2^{m+1}+1$, et comme $m+1$ est impair, 3 divise $2p-1$. On écrit $2p-1 = 3^a b$ avec b impair non divisible par 3. Si $b \neq 1$, alors $b \geqslant 4$ et $3^a \leqslant \dfrac{2p-1}{4} \leqslant p-1$ donc 3^a divise n et de même $b \leqslant \dfrac{2p-1}{3^a} \leqslant \dfrac{2p-1}{3} \leqslant p-1$. Ainsi, 3^a et b sont deux diviseurs de n premiers

entre eux, donc leur produit $2p-1$ est aussi un diviseur de n. D'après l'énoncé, cela implique que $2p$ est premier ou qu'il divise n. On déduit que $2p$ divise n, donc p aussi, ce qui contredit l'hypothèse sur p. Enfin, si $b=1$, l'équation devient $2^{m+1}+1=3^a$. Si $m \geqslant 1$, cette équation donne que $3^a \equiv 1 \mod 4$, ce qui implique que a est pair. On écrit $a=2d$ avec d entier. L'équation se réécrit $2^{m+1}=(3^d-1)(3^d+1)$. Les entiers 3^d-1 et 3^d+1 sont donc tous les deux des puissances de 2 dont la différence vaut 2, et ils sont pairs donc ne peuvent valoir 1. On déduit, puisque $3^d-1<3^d+1$, que $3^d-1=2$ et $3^d+1=4$, ce qui donne $d=1$ et $m=2$ donc $p=5$, ce qui est exclut.

- Si ni $p-1$ ni $p+1$ sont des puissances de 2, on peut écrire $p-1=2^{a_1}b_1$ et $p+1=2^{a_2}b_2$ avec b_1 et b_2 des entiers impairs supérieurs ou égaux à 3. On va montrer que l'entier $(p-1)(p+1)=2^{a_1+a_2}b_1b_2$ divise n. Comme p est premier, $p-1$ et $p+1$ sont pairs (de sorte que $a_1, a_2 \geqslant 1$) et leur PGCd vaut exactement 2, si bien que $a_1+a_2 \in \{a_1+1, a_2+1\}$ et b_1 et b_2 sont premiers entre eux. Or pour $i=1,2$, $2^{a_i} \leqslant \dfrac{p+1}{b_i} \leqslant \dfrac{p-1}{3}$, de sorte que $2^{a_i+1} \leqslant p-1$ et 2^{a_i+1} est bien un diviseur de n. Ainsi, $2^{a_1+a_2}, b_1$ et b_2 sont des diviseurs de n premiers entre eux, donc leur produit $p^2-1=(p-1)(p+1)$ est aussi un diviseur de n. D'après l'énoncé, p^2 est donc un diviseur de n, ce qui implique que p divise aussi n, ce qui est absurde.

SOLUTION N°3

En appliquant la propriété de l'énoncé à n, on trouve que $n+1$ est premier. Ainsi, si $n \geqslant 2$, n est pair.

Posons $n=2\cdot 3^\ell k$ où k n'est pas divisible par 3. Alors l'un des deux entiers k et $2k$ est congru à 2 modulo 3, notons-le ak.

Comme ak est un diviseur de n, $ak+1$ est soit premier soit un diviseur de n. Dans le premier cas, comme $3 \mid ak+1$, on a $ak+1=3$ donc $ak=2$ et $n=2\cdot 3^k$ ou $n=4\cdot 3^k$. Si $k \geqslant 2$, on trouve que 9 divise n mais que $9+1$ n'est ni premier ni un diviseur de n, donc $k \leqslant 1$ et on trouve $n \in \{2,4,6,12\}$, ce qui donne les solutions $2, 4$ et 12.

On suppose désormais que $ak+1$ est un diviseur de n. Comme $ak+1$ est premier avec k, $ak+1 \mid 2\cdot 3^\ell$. Comme $3 \mid ak+1$, $\ell \geqslant 1$. En appliquant la propriété de l'énoncé à 3^ℓ, on trouve que $3^\ell+1$ est soit premier soit un diviseur de n. Comme il s'agit d'un nombre pair supérieur ou égal à 4, ce n'est pas un nombre premier et $3^\ell+1 \mid n=2\cdot 3^\ell k$. On déduit que $3^\ell+1 \mid 2k$.

- Si $a=2$, en combinant les relations de divisibilités, on a $3^\ell+1 \leqslant 2k \leqslant 2\cdot 3^\ell-1<2(3^\ell+1)$, de sorte que $2k=3^\ell+1$. Mais alors $3^\ell+2 \mid 2\cdot 3^\ell$, ce qui est absurde car $3^\ell+2$ est premier avec 2 et avec 3.
- Si $a=1$, alors $3^\ell+1 \leqslant 2k \leqslant 2(2\cdot 3^\ell-1)<4\cdot(3^\ell+1)$. On a donc $2k=x\cdot(3^\ell+1)$ avec $1 \leqslant x \leqslant 3$. Or $3 \mid 2k+1$, donc $k \equiv 2 \mod 3$. On trouve alors que $x \equiv 2k \equiv 1 \mod 3$, donc $x=1$ et $2k=3^\ell+1$. Mais $3^\ell+3=2k+2 \mid 4\cdot 3^\ell$, ce qui donne que $3^{\ell-1}+1 \mid 4\cdot 3^{\ell-1}$. Comme $3^{\ell-1}+1$ est premier avec 3, on a $3^{\ell-1}+1 \mid 4$, donc $\ell-1 \leqslant 1$ et $\ell \leqslant 2$. Si $\ell=1$, alors $k=2$ et $n=2\cdot 3\cdot 2=12$ qui est solution. Si $\ell=2$, alors $k=5$ et $n=2\cdot 9\cdot 5=90$. Mais $90+1$ n'est ni diviseur de 90 ni premier, donc 90 n'est pas solution.

Commentaire des correcteurs

À l'image du corrigé, le problème possédait plusieurs approches assez différentes et plus ou moins difficiles. Il était possible de gratter des points sur des premières propriétés de n, mais il était impossible d'avoir une bonne note sans avoir avancé sur le cas général. Dans l'ensemble, la clé était d'appliquer la propriété de l'énoncé à un diviseur de n bien choisi, ce qui était plus ou moins astucieux selon les solutions, (et nous invitons les élèves à lire celles-ci). Les erreurs principales sont les suivantes :

- ➢ Ne pas vérifier que, réciproquement, les solutions trouvées fonctionnent. Une simple phrase aurait pourtant suffi.
- ➢ Oublier un cas dans la multitude de cas à traiter. Souvent ce cas était le plus difficile. Un cas régulièrement oublié est le cas où la partie impaire b vérifiait $b+1$ est une puissance de 2, ou le cas où $b=1$. Lorsque l'on s'attaque à une disjonction de cas, il est important de distinguer clairement quel cas on traite en rappelant toutes les hypothèses associées. Cela permet à la fois au lecteur de suivre la solution mais surtout à l'auteur de s'assurer qu'aucun cas n'a été oublié.
- ➢ Se persuader qu'un nombre de la forme $d+1$ était nécessairement premier (resp. un diviseur de n) et oublier de traiter l'autre possibilité.
- ➢ Quelques points se sont également perdus pour des justifications insuffisantes des diverses implications.

En conclusion, pour un problème aussi technique, qui passe par beaucoup de raisonnements simples mais nécessitatn chacun une petite justification ou un calcul, il est facile de faire une erreur en cours de route. La solution est d'accorder un temps un peu plus grand à la relecture.

Exercice 6. Soit N un entier strictement positif. Aline et Baptiste jouent au jeu suivant. Au départ, les entiers $1, 2, \ldots, N$ sont écrits au tableau. Chacun à leur tour, en commençant par Aline, ils choisissent un couple (k, n), où k est un entier positif et n un entier écrit au tableau, puis effacent du tableau tous les entiers s tels que 2^k divise $n - s$. Le jeu se termine lorsqu'il n'y a plus d'entiers au tableau et le perdant est le joueur qui a effacé le dernier nombre.

Déterminer les entiers N pour lesquels Aline peut s'assurer de gagner quels que soient les coups de Baptiste.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6

Réponse : Les N solutions sont les nombres de la forme 2^{2k+1} et $(2\ell + 1) \cdot 2^{2k}$, où $k, \ell \geqslant 0$.

La solution suit la méthode dite de l'étude "des positions gagnantes-perdantes". Cette méthode consiste à considérer le problème plus général suivant : quels sont les sous-ensembles finis E de $\mathbb{N}^\star$ pour lesquels, avec les mêmes règles de jeu que pour l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$, le premier joueur a une stratégie gagnante. Pour résoudre ce problème plus général, on établit entre les sous-ensembles finis E de $\mathbb{N}^\star$ des relations de la forme "si le joueur i a une stratégie gagnante pour E, alors le joueur j a une stratégie gagnante pour E'".

Notations : On ne parlera que d'ensembles finis. Dans la suite, on dit d'un ensemble E qu'il est *gagnant* si, lorsque l'ensemble des entiers écrits au tableau correspond à l'ensemble E, le joueur qui commence avec ces nombres possède une stratégie gagnante. On dira que E est *perdant* sinon.

Étant donné un ensemble $E = \{e_1, \ldots, e_r\}$ et deux entiers a et b, on note $aE + b = \{ae_1 + b, \ldots, ae_r + b\}$. On note $\emptyset$ l'ensemble ne contenant aucun élément. Par convention, $\emptyset$ est gagnant.

Tout sous-ensemble d'entier peut-être partitionné en l'union de ses éléments pairs et de ses éléments impairs. Pour deux ensembles E et F d'entiers, on note $\mathcal{C}(E, F) = (2E - 1) \sqcup 2F$, et tout ensemble d'entiers admet donc une unique écriture sous cette forme.

Un *coup* (k, n) correspond au choix du joueur dont c'est le tour de jouer le couple (k, n).

Lemme 1 : Pour tout ensemble E, E est gagnant si et seulement si $\mathcal{C}(E, \emptyset)$ est gagnant et si et seulement si $\mathcal{C}(\emptyset, E)$ est gagnant.

Preuve : Soit E un ensemble. Supposons que F soit l'ensemble obtenu après avoir appliqué le coup (k, n) à E. Alors on vérifie que le coup $(k + 1, 2n - 1)$ permet d'obtenir l'ensemble $\mathcal{C}(F, \emptyset)$ à partir de l'ensemble $\mathcal{C}(E, \emptyset)$.

Inversement, considérons un coup (k, n) appliqué à l'ensemble $\mathcal{C}(E,)$. L'ensemble obtenu ne contient toujours que des nombres impairs, ce que signifie qu'il s'écrit sous la forme $\mathcal{C}(F, \emptyset)$ pour un certain ensemble F. De plus, comme $n \in \mathcal{C}(E,)$, n est impair. Alors le coup $\left(\max(k - 1, 0), \dfrac{n + 1}{2}\right)$ appliqué à l'ensemble E a pour résultat l'ensemble F.

En conclusion, on a une bijection entre les parties dont l'ensemble de départ est E et les parties dont l'ensemble de départ est $\mathcal{C}(E, \emptyset)$. Ceci permet de prouver le lemme.

Lemme 2 : Si E ou F est perdant, alors $\mathcal{C}(E, F)$ est gagnant.

Preuve : Pour tout $n \in \mathcal{C}(E, F)$, le coup $(1, n)$ consiste à effacer tous les entiers de la même parité que n. Ainsi, si E est perdant, le joueur 1 peut jouer le coup $(1, n)$ avec $n \in 2F - 1$ pour réduire l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$ en l'ensemble $\mathcal{C}(E, \emptyset)$ qui est perdant. De même, si F est

perdant, le joueur 1 peut jouer le coup $(1, n)$ avec $n \in 2E$ pour réduire l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$ en l'ensemble $\mathcal{C}(\emptyset, F)$ qui est perdant.

Supposons E est perdant. D'après le lemme 1, l'ensemble $\mathcal{C}(E, \emptyset)$ est également perdant. Pour tout $n \in 2F$, le coup $(1, n)$ permet d'effacer tous les entiers pairs du tableau et donc d'obtenir l'ensemble $\mathcal{C}(E, \emptyset)$ à partir de l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$. Ainsi $\mathcal{C}(E, F)$ est gagnant.

De même, si F est perdant, l'ensemble $\mathcal{C}(\emptyset, F)$ est perdant et le coup $(1, n)$ pour $n \in 2E - 1$ permet d'effacer tous les entiers impairs du tableau et donc d'obtenir l'ensemble $\mathcal{C}(\emptyset, F)$ à partir de l'ensemble $\mathcal{C}(E, F)$. Ainsi, $\mathcal{C}(E, F)$ est gagnant.

Lemme 3 : Si E est gagnant, alors l'ensemble $\mathcal{C}(E, E)$ est perdant.

Preuve : La preuve se fait par récurrence forte sur $|E|$.

Initialisation : Si $|E| = 0$, alors $E = \emptyset$ qui est perdant par convention.

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour tout ensemble de cardinal inférieur ou égal à un r fixé. Supposons que le premier coup soit de la forme $(k, 2n + 1)$. Si $k = 0$, tous les nombres sont effacés et le joueur 1 a perdu. Sinon, seuls des nombres impairs du tableau sont effacés, donc l'ensemble obtenu est de la forme $\mathcal{C}(F, E)$.

- ➢ Si $F = \emptyset$, alors l'ensemble obtenu est $\mathcal{C}(\emptyset, E)$ qui est gagnant d'après le lemme 1, donc le joueur 2 dispose d'une stratégie gagnante et le joueur 1 perd la partie.
- ➢ Si F est perdant, alors le joueur 2 peut appliquer le coup $(1, m)$ pour $m \in E$, ce qui laisse au tableau l'ensemble $\mathcal{C}(F, \emptyset)$ qui est perdant, de sorte que le joueur 2 remporte la partie.
- ➢ Si F est gagnant, le joueur 2 peut appliquer le coup $(k, 2n + 1)$ qui a pour résultat l'ensemble $\mathcal{C}(F, F)$ qui est perdant par hypothèse de récurrence. Le joueur 2 remporte là encore la partie.

Ceci achève la récurrence.

Un conséquence des lemmes 2 et 3 est que, pour tout entier N, l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ est gagnant si et seulement si l'ensemble $\{1, \ldots, 2N\} = \mathcal{C}(\{1, \ldots, N\}, \{1, \ldots, N\})$ est perdant. En effet, si $\{1, \ldots, N\}$ est gagnant, alors $\{1, \ldots, 2N\}$ est perdant par le lemme 3, tandis que si $\{1, \ldots, N\}$ est perdant, alors $\{1, \ldots, 2N\}$ est gagnant par le lemme 3.

En particulier, comme $\{1\}$ est perdant, un récurrence immédiate donne que l'ensemble $\{1, \ldots, 2^n\}$ est gagnant si et seulement si n est pair.

Enfin, on remarque que $\{1, \ldots, 2N+1\} = \mathcal{C}(\{1, \ldots, N+1\}, \{1, \ldots, N\})$ est gagnant pour tout entier $N \geqslant 1$. En effet, si $\{1, \ldots, N\}$ est perdant, alors $\{1, \ldots, 2N + 1\}$ d'après le lemme 2. Si en revanche $\{1, \ldots, N\}$ est gagnant, alors $\{1, \ldots, 2N\}$ est perdant. Dans ce cas, en présence de l'ensemble $\{1, \ldots, 2N + 1\}$, le joueur 1 peut jouer le coup $(k, 2N + 1)$ avec $2^k > 2N + 1$, de sorte que l'ensemble obtenu est $\{1, \ldots, 2N\}$ qui est perdant pour le joueur 2.

Finalement, une récurrence immédiate donne que l'ensemble $\{1, \ldots, (2\ell+1)\cdot 2^n\}$ est gagnant si et seulement n est pair.

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été plutôt bien traité vu sa position : une dizaine d'élèves ont une solution quasiement complète. Quelques remarques :

- Une moitié des élèves n'ont rien rendu pour cet exercice. C'est l'exercice 6, il est dommage de ne rendre aucune copie sur celui-ci. Logiquement, il faut passer du temps sur le second problème : avoir une solution complète est certes difficile, mais avoir 1 point est relativement faisable.
- La première idée sur le problème était de voir que ce qui se passait sur les nombres pairs et sur les impairs écrits était à peu près indépendant. Ainsi on obtenait rapidement que si n était perdant, alors $2n-1, 2n, 2n+1$ étaient gagnants, ce qui permettait d'obtenir un point, car cette partie était relativement simple comparée au reste.
- Parmi les élèves qui avaient trouvé l'étape précédente, nombreux sont ceux qui ont conjecturé que si n était gagnant, alors $2n$ est perdant. Peu ont essayé de généraliser leur argument, en disant par exemple que si à tout moment une des moitiés est perdante, alors Baptiste peut effacer l'autre et gagner : c'est dommage car cette idée est valorisée.
- L'idée permettant de finir la preuve est de faire un miroir entre les pairs et les impairs. Même si l'idée d'un jeu miroir est assez courante, il était atypique de l'appliquer ainsi, et de montrer qu'à partir d'un sous-jeu gagnant, on obtenait un jeu perdant.
- Certains élèves ont eu des problèmes avec la notion de position perdante/gagnante dans un jeu fini. Une position gagnante ne mène pas forcément qu'à des positions perdantes : elle peut mener aussi à une position gagnante. Une position perdante ne mène qu'à des positions gagnantes.

Exercice 7. Déterminer toutes les suites $a_1, a_2, \ldots$ périodiques de nombres réels vérifiant les deux conditions suivantes pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$a_{n+2} + a_n^2 = a_n + a_{n+1}^2 \quad \text{et} \quad |a_{n+1} - a_n| \leqslant 1.$$

Une suite $b_1, b_2, \ldots$ est dite périodique s'il existe un entier $T \geqslant 1$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $b_{n+T} = b_n$.

Solution de l'exercice 7

Réponse : Les seuls suites solutions sont les suites de la forme $a, a, a, \ldots$ avec a réel et de la forme $a, -a, a, -a, \ldots$ avec $a \in [-1/2, 1/2]$.

On vérifie tout d'abord que pour tout a, la suite constante égale à a vérifie bien la condition de l'énoncé et est bien solution. D'autre part, si $a \in [-1/2, 1/2]$ et si (a_n) est définie par $a_{2k-1} = a$ et $a_{2k} = -a$ pour tout $k \geqslant 1$, alors pour tout indice k, on a

$$a_{2k+1} + a_{2k-1}^2 = a + a^2 = a_{2k-1} + a_{2k}^2 \quad \text{et} \quad |a_{2k} - a_{2k-1}| = |-2a| \leqslant 1,$$

$$a_{2k+2} + a_{2k}^2 = -a + a^2 = a_{2k} + a_{2k+1}^2 \quad \text{et} \quad |a_{2k+1} - a_{2k}| = |2a| \leqslant 1,$$

donc la suite (a_n) est bien solution du problème.

Soit (a_n) une suite solution du problème et soit T sa période. L'idée est de réécrire la relation de récurrence pour faire apparaître une expression dont on peut facilement calculer le produit sous toute une période. En ajoutant a_{n+1} des deux côtés de l'équation, on trouve $a_{n+2} + a_n^2 = a_n + a_{n+1}^2 + a_{n+1}$, ce qui se réécrit

$$a_{n+2} + a_{n+1} = a_n + a_{n+1} + (a_{n+1}^2 - a_n^2) = (a_{n+1} + a_n)(1 + a_{n+1} - a_n).$$

Pour peu que l'on puisse diviser par $a_n + a_{n+1}$, c'est-à-dire si $a_n + a_{n+1} \neq 0$ pour tout n, on trouve que pour tout entier n,

$$\frac{a_{n+2} + a_{n+1}}{a_{n+1} + a_n} = (1 + a_{n+1} - a_n).$$

En effectuant le produit de cette relation sur toute une période, c'est-à-dire pour k entre n et $n + T - 1$, on trouve

$$\prod_{k=n}^{n+T-1} (1 + a_{k+1} - a_k) = \prod_{k=n}^{n+T-1} \frac{a_{k+2} + a_{k+1}}{a_{k+1} + a_k} = \frac{a_{n+T+1} + a_{n+T}}{a_{n+1} + a_n} = 1.$$

D'autre part, puisque $|a_{k+1} - a_k| \leqslant 1$ pour tout k, chaque facteur $1 + a_{k+1} - a_k$ est positif. On peut donc appliquer l'inégalité des moyennes qui donne

$$1 = \prod_{k=n}^{n+T-1} (1 + a_{k+1} - a_k) \leqslant \left(\frac{\sum_{k=n}^{n+T-1} (1 + a_{k+1} - a_k)}{T} \right)^T = \left(\frac{T + a_{n+T} - a_n}{T} \right)^T = 1.$$

Les facteurs $1 + a_{k+1} - a_k$ vérifient donc le cas d'égalité de l'inégalité des moyennes, c'est-à-dire qu'ils sont tous égaux, ce qui implique que $a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_n$ pour $k = n, \ldots, n+T-1$.

Cette égalité étant vraie pour tout entier n, on trouve que $a_{n+1} - a_n = a_2 - a_1$ pour tout n. On déduit par récurrence immédiate que $a_{n+1} = n(a_2 - a_1) + a_1$ pour tout entier n. On a alors

$$(n+T)(a_2 - a_1) + a_1 = a_{n+T+1} = a_{n+1} = n(a_2 - a_1) + a_1,$$

ce qui implique $T(a_2 - a_1) = 0$ et $a_2 = a_1$ sont $a_{n+1} = a_1$ pour tout n et la suite (a_n) est constante.

Supposons finalement qu'il existe un indice n tel que $a_{n+1} + a_n = 0$. La relation $\frac{a_{n+2}+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} = (1 + a_{n+1} - a_n)$ implique que $a_{n+2} + a_{n+1} = 0$ et, par récurrence immédiate, $a_{k+1} + a_k = 0$ pour tout $k \geqslant n$. Mais alors $a_{k+1} = -a_k$ pour tout $k \geqslant n$. Poour $\ell < n$, il existe un entier r tel que $\ell + rT \geqslant n$. On a alors $a_{\ell+1} = a_{rT+\ell+1} = -a_{rT+\ell} = -a_\ell$, de sorte que $a_{k+1} = -a_k$ pour tout indice k. On a donc $a_{2k-1} = a_1$ et $a_{2k} = -a_1$ pour tout indice k. Enfin, $|-2a_1| = |a_2 - a_1| \leqslant 1$, ce qui implique que $a_1 \in [-1/2, 1/2]$, ce qui conduti à la deuxième solution annoncée.

SOLUTION N°2

On introduit les suites auxiliaires (s_n) et (d_n) définie par $s_n = a_n + a_{n+1}$ et $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout entier n. Comme (a_n) est périodique, s_n et d_n sont également périodiques. La relation de l'énoncé implique

$$s_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+1} = a_n + a_{n+1} + (a_{n+1}^2 - a_n^2) = (a_{n+1} + a_n)(1 + a_{n+1} - a_n) = s_n(1 + d_n),$$

$$d_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1} = a_n - a_{n+1} + (a_{n+1}^2 - a_n^2) = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n - 1) = d_n(s_n - 1).$$

Si $s_n = 0$ pour un certain rang n, on montre de même que dans la solution précédente que (a_n) correspond à la suite $a, -a, \ldots$ avec $a \in [-1/2, 1/2]$. De même, si $d_n = 0$ pour un certain rang n, on conclut que la suite (a_n) est constante.

On suppose à présent que $d_n, s_n \neq 0$ pour tout indice n. On étudie les signes possibles pour d_n et s_n.

- ➢ Soit n un indice quelconque. Puisque $s_{n+1} \neq 0$, on a $1 + d_n \neq 0$. Puisque $|d_n| \leqslant 1$, $1 + d_n \geqslant 0$, donc s_{n+1} et s_n sont de même signe. Mais si s_n est négatif, $|d_{n+1}| = |d_n||s_n - 1| > |d_n|$, de sorte que la suite $(|d_n|)$ est strictement croissante, ce qui l'empêche d'être périodique. Ainsi, $s_n > 0$ pour tout indice n.
- ➢ Soit n un indice tel que $d_n > 0$. On suppose que $s_n \geqslant 1$. Alors $d_{n+1} = d_n(s_n - 1) \geqslant 0$, donc $d_{n+1} > 0$ et $s_{n+1} = s_n + d_{n+1} + d_n > s_n \geqslant 1$. Mais alors on a par une récurrence immédiate que $d_k \geqslant 0$ pour tout k et que (s_n) est strictement croissante, ce qui contredit la périodicité de (s_n). Ainsi, pour tout indice n, si $d_n > 0$, alors $0 < s_n < 1$.

Notons à présent T la période de la suite (a_n). Alors $d_1 + \ldots + d_T = a_{T+1} - a_1 = 0$, donc l'un au moins des d_i est positif (et donc strictement positif. Soit k un indice tel que $d_k > 0$. D'après le point précédent, $0 < s_k < 1$. Montrons par récurrence que $s_n < 2$ pour tout $n \geqslant k$.

Initialisation : pour $n = k$, on a bien $s_k < 1 < 2$.

Hérédité : Supposons que $s_n < 2$ pour un indice $n \geqslant k$ fixé.

Si $d_n < 0$, on a $0 < 1 + d_n < 1$, d'où $s_{n+1} = s_n(1 + d_n) < s_n < 2$.

Si $d_n > 0$, on a $0 < s_n < 1$. Mais alors, puisque $d_n < 1$, $s_{n+1} = s_n(1 + d_n) \leqslant 2s_n < 2$.

Dans les deux cas $s_{n+1} < 2$, ce qui achève la récurrence.

On déduit que pour tout indice $n \geqslant k$, $|s_n - 1| < 1$ et $|d_{n+1}| = |d_n||s_n - 1| < |d_n|$, donc la suite (d_n) est strictement décroissante, ce qui contredit encore sa périodicité et conclut l'exercice.

SOLUTION N°3

On suppose une fois de plus que $a_n + a_{n+1}$ et $a_{n+1} - a_n$ sont non nuls pour tout n. Notons que cela implique que $a_{n+2} \neq a_n$ pour tout n (sinon, $a_n^2 = a_{n+1}^2$, ce qui implique $a_n \pm a_{n+1} = 0$). De même que dans la solution 2, on déduit de l'énoncé la relation suivante :

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n - 1). \qquad (\bigstar)$$

Notons T la période de la suite (a_n). La suite de la preuve se divise en plusieurs étapes :

Étape 1 : $a_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout indice n.

Tout d'abord, si $a_n > \dfrac{1}{2}$ pour tout n, alors $a_{n+1} + a_n - 1 > 0$ pour tout n. En reprenant l'égalité ($\bigstar$), cela implique que les différences $a_{n+1} - a_n$ sont de même signe (et non nuls d'après notre supposition de début de solution), donc la suite (a_n) est strictement monotone, ce qui contredit sa périodicité.

Supposons désormais qu'il existe deux indices i et j tels que $a_i \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $a_j > \dfrac{1}{2}$. Quitte à regarder a_{j+kT} avec k suffisamment grand, on peut supposer que $j > i$. Quitte à regarder a_{j-1}, on peut supposer que $j = i + 1$. Autrement dit, on considère un indice i tel que $a_i \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $a_{i+1} > \dfrac{1}{2}$. Comme $a_{i-1}^2 - a_{i-1} \geqslant -\dfrac{1}{4}$ (cette inégalité est équivalente à l'inégalité $\left(a_{i-1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$), on trouve

$$a_i^2 = a_{i+1} + a_{i-1}^2 - a_{i-1} \geqslant a_{i+1} - \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > \frac{1}{4}.$$

On trouve $|a_i| > \dfrac{1}{2}$. Comme de plus $a_{i+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, on déduit que $a_i \geqslant a_{i+1} - |a_i - a_{i+1}| \geqslant -\dfrac{1}{2}$, ce qui force $a_i > \dfrac{1}{2}$, d'où la contradiction.

On déduit bien que $a_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout indice n. En particulier, $a_{n+1} + a_n - 1 \leqslant 0$ pour tout n, de sorte qu'en réinjectant dans ($\bigstar$), on trouve que $a_{n+2} - a_{n+1}$ et $a_{n+1} - a_n$ sont toujours de signe contraire.

Étape 2 : La suite (a_n) alterne de signe : $a_n > 0$ si et seulement si $a_{n+1} \leqslant 0$.

Tout d'abord, si $a_n > 0$ pour tout indice n, on trouve en utilisant l'étape 1 que pour tout indice n, $0 < 1 - a_{n+1} - a_n < 1$, de sorte que $|a_{n+2} - a_{n+1}| = |a_{n+1} - a_n| \cdot |1 - a_{n+1} - a_n| < |a_{n+1} - a_n|$, et la suite $(|a_{n+1} - a_n|)$ est strictement décroissante, ce qui contredit sa périodicité.

De même, on ne peut pas avoir $a_n \leqslant 0$ pour tout indice n. Si c'est le cas, alors pour tout indice n, $a_{n+1} + a_n \leqslant 0$, donc $a_{n+1} + a_n < 0$ d'après notre supposition faite en début de solution. Ainsi, $1 - a_{n+1} - a_n > 1$, de sorte que $|a_{n+2} - a_{n+1}| = |a_{n+1} - a_n| \cdot |1 - a_{n+1} - a_n| > |a_{n+1} - a_n|$, et la suite $(|a_{n+1} - a_n|)$ est strictement croissante, ce qui contredit sa périodicité.

On suppose maintenant qu'il existe un indice n tel que $a_n > 0$ et $a_{n+1} > 0$. Au vu de la discussion précédente, il existe un indice $i \geqslant n+2$, pris minimal, tel que $a_i \leqslant 0$. Quitte à changer n, on peut supposer $i = n+2$. Mais alors

$$a_n^2 - a_n = a_{n+1}^2 - a_{n+2} \geqslant 0,$$

ce qui donne $a_n \geqslant 1$ après simplification par a_n qui est strictement positif. Ceci contredit l'étape 1.

De même, s'il existe un indice n tel que $a_n > 0$ et $a_{n+1}, a_{n+2} \leqslant 0$, on trouve par le même calcul que $a_n \geqslant 1$, ce qui est absurde.

On conclut donc que a_n change de signe à chaque indice.

Étape 3 : Conclusion

Considérons k un indice tel que $|a_k|$ est maximal (la suite (a_n) étant périodique, elle est bornée, ce qui justifie l'existence d'un tel k). On distingue différents cas selon les tailles de $|a_{k-2}|, |a_{k-1}|$ et $|a_k|$.

- ➢ Si $|a_{k-2}| = |a_k|$, alors $a_{k-2} = a_k$ d'après l'étape 2, mais cela contredit la supposition faite en début de solution.
- ➢ Si $|a_{k-1}| < |a_{k-2}| < |a_k|$. En particulier, $|a_k| > 0$. Si $a_k > 0$, alors $a_k - a_{k-2} = a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 < 0$, ce qui implique $a_{k-2} > a_k$, contredisant la maximalité de $|a_k|$. Si $a_k < 0$, alors $a_k - a_{k+2} = a_k^2 - a_{k+1}^2 > 0$, ce qui implique $a_{k+2} < a_k < 0$, contredisant la maximalité de $|a_k|$.
- ➢ Si $|a_{k-2}| \leqslant |a_{k-1}| \leqslant |a_k|$. On commence par supposer $a_k > 0$. D'après l'étape 2, on a $a_{k-2} < -a_{k-1} < a_k$. En réinjectant dans (★), on trouve

  $$a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 = a_k - a_{k-2} > -a_{k-1} - a_{k-2},$$

  ce qui se réécrit $(a_{k-2} + a_{k-1})(a_{k-1} - a_{k-2} + 1) > 0$. Puisque $a_{k-2} + a_{k-1} < 0$, on trouve $a_{k-1} - a_{k-2} > -1$, ce qui contredit la condition de l'énoncé.

  Si maintenant on suppose que $a_k < 0$, on trouve d'après l'étape 2 que $a_{k-2} > -a_{k-1} > a_k$ et en réinjectant dans (★),

  $$a_{k-2}^2 - a_{k-1}^2 = a_{k-2} - a_k > a_{k-2} + a_{k-1},$$

  ce qui se réécrit $(a_{k-2} + a_{k-1})(a_{k-2} - a_{k-1} - 1) > 0$. Puisque $a_{k-2} + a_{k-1} > 0$, on trouve $a_{k-2} - a_{k-1} > 1$ ce qui contredit à nouveau l'énoncé.

On n'a donc pas de solution avec les suppositions de de début de solution, ce qui nous permet de conclure.

Commentaire des correcteurs

Un exercice très difficile et très mal réussi. Beaucoup d'élèves ont réécrit l'égalité en factorisant sous une forme télescopable, pour faire un produit sur toute la période, malheureusement la manière la plus naturelle de le faire ne fonctionnait pas du tout, et il fallait chercher une autre manière de s'y prendre. Même si cela n'a pas été recompensé si il n'y avait rien d'autre dans la copie, les correcteurs ont apprécié les copies qui ont trouvé toutes les suites solutions et qui ont montré que c'était les seules suites de période 1 et 2 qui convenaient.