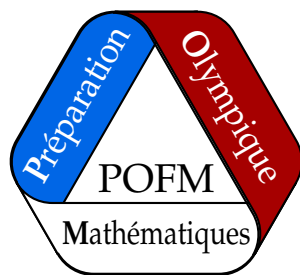


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 2 AVRIL 2025

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers strictement positifs tels que le nombre $|4^m - 7^n|$ est un nombre premier.

Solution de l'exercice 1

Réponse : Le seul couple est $(m, n) = (1, 1)$.

Soit (m, n) un couple solution.

On vérifie que $4^m - 7^n \equiv 1^m - 1^n \equiv 0 \pmod{3}$, le nombre $|4^m - 7^n|$ est donc divisible par 3 et comme il est premier, il vaut 3.

On a donc $4^m - 7^n = \pm 3$. Si $m \geq 2$, en regardant l'équation modulo 8, on obtient

$$\pm 3 = 4^m - 7^n \equiv -(-1)^n \pmod{8},$$

qui n'a pas de solutions. Ainsi, $m \leq 1$ et donc $m = 1$. Si $4 - 7^n = 3$, alors $-7^n = -1$, ce qui n'a pas de solutions pour $n > 0$. Si $4 - 7^n = -3$, alors $7^n = 7$ et $n = 1$. Réciproquement, le couple $(1, 1)$ est bien solution du problème, et c'est le seul.

Solution alternative n°1

On propose une façon alternative de conclure dans le cas où $4^m - 7^n = 3$. En regardant l'équation modulo 4, on trouve $3 \equiv -7^n \equiv (-1)^{n+1} \pmod{4}$. Ceci implique que n est pair. On dispose donc d'un entier k tel que $n = 2k$. On peut alors factoriser l'expression sous la forme

$$3 = 2^{2m} - 7^{2k} = (2^m - 7^k)(2^m + 7^k).$$

Comme $2^m + 7^k > 0$, on a aussi $2^m - 7^k > 0$ et on déduit $2^m + 7^k > 2^m - 7^k > 0$. Comme 3 est premier, on déduit que $2^m + 7^k = 3$ et $2^m - 7^k = 1$. En sommant les deux équations, on trouve $2 \times 2^m = 3 + 1 = 4$, ce qui donne $m = 1$. On retrouve alors de même qu'à la solution 1 le couple solution $(1, 1)$.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été beaucoup résolu par les élèves l'ayant traité. Plusieurs écueils subsistent cependant :

- Certains élèves n'ont pas fait attention à la valeur absolue, ou l'ont mal utilisée : ce n'est pas parce que a et b sont congrus modulo un certain nombre que $|a|$ et $|b|$ le sont aussi.
- Certains élèves ont affirmé que la solution était unique sans le justifier intégralement.
- Enfin, il est important d'être précis dans les factorisations, qui marchent parfois seulement quand les exposants sont de la bonne parité.

Exercice 2. Déterminer le plus petit entier strictement positif k vérifiant la propriété suivante : pour tout sous-ensemble S de $\{1, \dots, 2024\}$ de taille k , il existe deux entiers distincts $a, b \in S$ tels que $ab + 1$ est un carré parfait.

Solution de l'exercice 2

Réponse : $k = 1013$.

Remarque : Une façon simple de former un carré avec la condition est de tirer parti de l'identité $n(n+2) + 1 = (n+1)^2$. Cette identité nous dit que si S contient les entiers n et $n+2$ (pour un certain entier n , alors S vérifie la condition de l'énoncé. On cherche alors un entier k suffisamment grand pour que tout ensemble S de taille k contienne nécessairement deux entiers dont la différence vaut 2. Cela nous guide également pour construire un ensemble S ne vérifiant pas la propriété.

Le problème demande de déterminer le plus petit entier k vérifiant une certaine propriété, sa solution contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que tout sous-ensemble de taille 1013 vérifie la propriété, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre qu'il existe un sous-ensemble de taille 1012 ne vérifiant pas la propriété, cette étape s'appelle *la construction*.

Analyse :

Montrons que tout sous-ensemble S de $\{1, \dots, 2024\}$ de taille 1013 possède deux éléments a et b tels que $ab + 1$ est un carré parfait.

Pour $0 \leq k \leq 505$, considérons les paires de la forme $(4k, 4k+2)$, $(4k+1, 4k+3)$, qui constituent une partition de $\{1, \dots, 2024\}$ en 1012 paires disjointes de la forme $(n, n+2)$. D'après le principe des tiroirs, l'une de ces paires est incluse dans l'ensemble S . Autrement dit, il existe un entier $n \leq 2022$ tel que n et $n+2$ sont dans S . Alors $n(n+2) + 1 = (n+1)^2$ est bien un carré parfait.

Construction :

Construisons un ensemble S de taille 1012 ne vérifiant pas la condition de l'énoncé. L'argument précédent nous indique que S ne peut pas contenir deux entiers dont la différence vaut 2, mais cela n'est pas suffisant. Une façon de s'assurer qu'aucun nombre de la forme $ab + 1$ est un carré parfait est de construire un ensemble S tel que les nombres de la forme $ab + 1$ avec a et b dans S ne sont jamais congrus à 0 ou à 1 modulo 4.

Soit S l'ensemble composé de tous les nombres de $\{1, \dots, 2024\}$ qui sont congrus à 1 ou à 2 modulo 4. S est bien de taille 1012. Soient a et b deux éléments quelconques de S .

- Si $a \equiv b \equiv 1 \pmod{4}$, alors $ab + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, ce ne peut donc pas être un carré parfait, car les carrés parfaits sont congrus à 0 ou à 1 modulo 4.
- Si $a \equiv 1 \pmod{4}$ et $b \equiv 2 \pmod{4}$, alors $ab + 1 \equiv 3 \pmod{4}$, ce ne peut donc pas être un carré parfait non plus.
- Si $a \equiv 2$ et $b \equiv 2 \pmod{4}$, alors on dispose des deux entiers k et k' tels que $a = 4k + 2$ et $b = 4k' + 2$. Alors

$$ab + 1 = (4k + 2)(4k' + 2) + 1 = 16kk' + 8(k + k') + 5 \equiv 5 \pmod{8},$$

ce qui l'empêche d'être un carré parfait puisque les carrés sont congrus à 0, 1 ou 4 modulo 8.

Dans tous les cas $ab + 1$ n'est jamais un carré parfait, donc S ne vérifie pas les conditions de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été bien résolu par une bonne moitié des élèves. La plupart ont compris qu'il fallait séparer en deux l'étude du problème : 1) montrer qu'il existe un ensemble à 1012 qui ne respecte pas la condition de l'énoncé et 2) qu'un ensemble à 1013 éléments respecte toujours la solution, d'où $k = 1013$.

Une erreur qui est revenue pour la première partie était d'affirmer qu'il suffit qu'il n'y ait jamais deux nombres a, b à distance 2 pour ne pas avoir que $ab + 1$ est un carré parfait, ce qui n'est pas vrai : par exemple $3 \times 8 + 1 = 25 = 5^2$. Ainsi, un ensemble qui respecte de ne jamais avoir a, b à distance 2 ne respecte pas d'office l'énoncé.

Pour la deuxième partie, trop d'élèves affirment sans vraiment d'argument que si l'on rajoute un élément à la construction à 1012 éléments, on aura forcément deux entiers a, b à distance deux. Certains invoquent des arguments de "dans le pire des cas, on aura cette configuration" ou "de construction optimale" qui sont des arguments à éviter autant que possible. En effet, comment prouver que c'est vraiment le pire des cas? Ou que la construction est optimale? Même si cet argument est très tentant car il rejoint l'intuition faite sur le problème, il est très rare de pouvoir le rendre rigoureux et l'utiliser dans un problème. De manière générale, il faut justifier toute affirmation (dans la mesure du raisonnable), même si celle-ci peut paraître "évidente".

Dans tous les cas, même si l'exercice a été relativement bien réussi, nous encourageons tous les élèves à relire attentivement la correction pour voir comment bien formaliser les différents arguments.

Exercice 3. Soient a, b et c des réels vérifiant $a + b + c = 0$ et $abc = -16$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$W = \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}.$$

Solution de l'exercice 3

Réponse : La valeur minimale de W est 18.

Puisque $a + b + c = 0$, on a l'identité $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = -2(ab + bc + ca)$. En utilisant cette identité et l'égalité $abc = -16$, on trouve

$$\begin{aligned} W &= \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} \\ &= -\frac{1}{16} (ab(a^2 + b^2) + bc(b^2 + c^2) + ca(a^2 + c^2)) \\ &= -\frac{1}{16} (ab(-2(ab + bc + ca) - c^2) + bc(-2(ab + bc + ca) - a^2) + ca(-2(ab + bc + ca) - b^2)) \\ &= -\frac{1}{16} (-2(ab + bc + ca)^2 - abc \underbrace{(a + b + c)}_{=0}) \\ &= \frac{(ab + bc + ca)^2}{8} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{32}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de minimiser l'expression $I = a^2 + b^2 + c^2$.

L'expression et les hypothèses sont symétriques en a, b et c , on peut donc supposer sans perte de généralité que $a \geq b \geq c$. Nous allons remplacer c par $-a - b$ dans l'expression de W pour obtenir une expression ne contenant que deux variables.

Puisque $a + b + c = 0$, le plus petit des trois réels, à savoir c , est négatif. On a donc $a + b = -c \geq 0$. L'hypothèse $abc = -16$ devient $ab(a + b) = 16$. D'après l'inégalité des moyennes, $(a + b)^2 \geq 4ab$. Ainsi, et puisque $a + b \geq 0$, on déduit

$$16 = ab(a + b) \leq \frac{(a + b)^2}{4}(a + b) = \frac{(a + b)^3}{4}.$$

Ceci se réécrit $(a + b)^3 \geq 64$, ce qui implique $a + b \geq 4$. En revenant à l'expression de I et en appliquant l'inégalité $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$, on obtient

$$I = a^2 + b^2 + (a + b)^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2 + (a + b)^2 \geq \frac{1}{2}4^2 + 4^2 = 24.$$

En revenant à W , on a $W \geq \frac{24^2}{32} = 18$.

Pour montrer qu'il s'agit bien de la valeur minimale, on donne un exemple de triplet (a, b, c) satisfaisant les hypothèses et pour lequel $W = 18$. Un tel triplet peut être trouvé en remontant le raisonnement précédent et en cherchant le cas d'égalité des inégalités utilisées. Pour $(a, b, c) = (2, 2, -4)$, on a bien $a + b + c = 0$, $abc = -16$ et

$$W = \frac{2^2 + 2^2}{-4} + \frac{(-4)^2 + 2^2}{2} + \frac{2^2 + (-4)^2}{2} = -2 + 10 + 10 = 18.$$

La valeur minimale est bien 18.

Remarque : On a employé l'inégalité des moyennes $(a + b)^2 \geq 4ab$ ainsi que l'inégalité $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}(a + b)^2$. Ces inégalités sont usuellement invoquées pour des réels a et b positifs, ce qui n'est pas nécessairement le cas ici. Toutefois, cette inégalité reste vraie pour des réels quelconques puisqu'elles sont équivalentes à l'inégalité $(a - b)^2 \geq 0$.

Remarque 2 : Dans la même veine, une fois obtenu $W = \frac{(ab + bc + ca)^2}{8}$, on pouvait chercher à minimiser W en **maximisant** $ab + bc + ca$ (car cette quantité, égale à $-\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$, est négative et pour minimiser son carré il faut bien la maximiser).

Remarque 3 : En notant que

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2)^2 &= a^4 + b^4 + c^4 + 2((ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + 2((ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2,\end{aligned}$$

on trouve que $W = \frac{a^4 + b^4 + (a + b)^4}{16}$. On peut alors minorer W à l'aide de l'inégalité des moyennes d'une manière similaire à celle plus haut, par exemple en utilisant l'inégalité $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{16}(a + b)^4$.

Remarque 4 : Une fois l'expression I réécrite en fonction des deux variables a et b , on peut aussi chercher à écrire cette expression uniquement en fonction de ab qui vérifie $ab = \frac{16}{a + b} \leq 4$.

Solution alternative n°1

Puisque $abc = -16$, on a

$$\begin{aligned}
W &= \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b} \\
&= \frac{(a+b)^2 - 2ab}{c} + \frac{(b+c)^2 - 2bc}{a} + \frac{(c+a)^2 - 2ac}{b} \\
&= \frac{(-c)^2 + 32/c}{c} + \frac{(-a)^2 + 32/a}{a} + \frac{(-b)^2 + 32/b}{b} \\
&= c + \frac{32}{c^2} + a + \frac{32}{a^2} + b + \frac{32}{b^2} \\
&= \underbrace{(a+b+c)}_{=0} + 32 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \\
&= 32 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).
\end{aligned}$$

De même que dans la solution précédente, on suppose que $a \geq b \geq c$ et on établit que les hypothèses impliquent $a + b \geq 4$. L'égalité $ab(a+b) = 16$ implique alors que $ab = \frac{16}{a+b} \leq 4$.

En remplaçant c par $-a-b$ dans l'expression de W , on trouve avec l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques,

$$\begin{aligned}
\frac{W}{32} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \\
&= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4b^2} + \frac{1}{(a+b)^2} \\
&\geq 9 \sqrt[9]{\frac{1}{(4a^2)^4(4b^2)^4(a+b)^2}} \\
&= 9 \sqrt[9]{\frac{1}{2^{16}(ab)^8(a+b)^2}} \\
&= 9 \sqrt[9]{\frac{1}{2^{16}(ab)^6 16^2}} \\
&\geq 9 \sqrt[9]{\frac{1}{2^{16} 4^6 16^2}} \\
&= 9 \cdot 2^{-36/9} = 9/16.
\end{aligned}$$

On trouve alors à nouveau $W \geq 18$.

Remarque : Le découpage de $\frac{1}{a^2}$ et de $\frac{1}{b^2}$ en quatre morceaux $\frac{1}{4a^2}$ et $\frac{1}{4b^2}$ avant l'utilisation de l'égalité des moyennes est pensé pour que le cas d'égalité de l'inégalité des moyennes soit atteint (et donc que la valeur minimale obtenue au bout de l'inégalité soit bien atteinte par un couple (a, b)). On cherche un découpage pour lequel, dans le cas d'égalité, chaque

morceau est égal à $\frac{1}{(a+b)^2}$. Lorsque $a = b$, $\frac{1}{(a+b)^2} = \frac{1}{4a^2}$, ce qui nous invite à découper chaque fraction en quatre morceaux.

Solution alternative n°2

Notons que comme $abc = -16$, ni a ni b ni c n'est nul, et 1 ou 3 d'entre eux sont strictement négatifs. Comme $a + b + c = 0$, on obtient qu'exactly un d'entre eux est strictement négatif, disons c sans perte de généralité, par symétrie de W . Ainsi a et b sont strictement positifs. Tâchons de montrer que $W \geq 18$, on a donc $c = -a - b$, donc on veut montrer que

$$-\frac{a^2 + b^2}{(a+b)} + \frac{b^2 + (a+b)^2}{a} + \frac{(a+b)^2 + a^2}{b} \geq 18.$$

Ceci est équivalent à montrer que $(a+b)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + \frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geq 18 + \frac{a^2+b^2}{a+b}$.

Or

$$(a+b)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = (a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 2ab \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = (a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 2a + 2b.$$

De même que précédemment, on a $a+b \geq 4$, donc en utilisant l'inégalité des mauvais élèves

$$(a+b)^2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq (a^2 + b^2) \frac{4}{a+b} + 8.$$

Pour montrer l'inégalité voulue, il suffit donc de montrer que

$$\frac{3(a^2 + b^2)}{a+b} + \frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geq 10.$$

Pour cela, par inégalité des mauvais élèves, $\frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geq \frac{(a+b)^2}{a+b} = a+b \geq 4$, et comme $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ par inégalité arithmético-quadratique, on a $\frac{3(a^2+b^2)}{a+b} \geq \frac{3(a+b)}{2} \geq 6$. En sommant les deux équations précédentes on obtient le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été résolu par uniquement deux élèves, voici quelques commentaires :

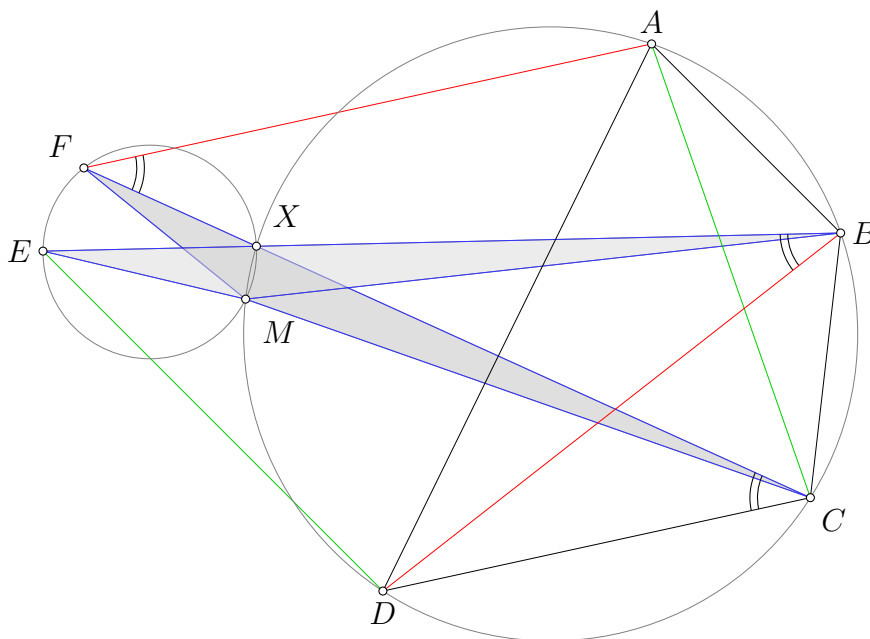
- ▷ Certains élèves ont cru que a, b, c étaient positifs ou ont appliqué sans vergogne des inégalités le supposant. A priori, comme ceux-ci ont somme 0, au moins un des trois réels est négatif.
- ▷ Très peu d'élèves se sont demandés quelle pouvait être la valeur minimale de W . Le triplet $(a, b, c) = (2, 2, -4)$ est pourtant une des premières solutions sur laquelle on tombe en cherchant des réels vérifiant la contrainte de l'énoncé (par exemple en cherchant d'abord a, b, c entiers). Et il faut bien sûr calculer la valeur de W dans ce cas pour avoir des points.
- ▷ Analyser le signe de a, b, c était une bonne idée mais cela ne rapportait pas de points. Par contre, comme le problème est à priori un problème d'inégalité, si c était la variable négative, remplacer c par $-(a+b)$ par moment dans l'expression de W était une bonne idée.
- ▷ Certains élèves se sont contentés de faire des calculs sur W . Sans faire d'inégalité, impossible d'espérer vraiment avancer.

- ▷ L'exercice rentre dans la catégorie des inégalités à deux variables (ici a et b dans le corrigé). Souvent il est intéressant d'introduire p le produit, et s la somme, qui vérifient l'inégalité $s^2 \geq 4p$, et réécrire une partie des hypothèses en fonction de s et p : cela donnait ici assez facilement le fait que $s \geq 4 \geq p$, élément clé de la résolution du problème.

Exercice 4. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique vérifiant $AC < BD < AD$ et $\widehat{DBA} < 90^\circ$. Soit E le point de la parallèle à (AB) passant par D vérifiant $AC = DE$ et tel que les points E et C sont situés de part et d'autre de la droite (AD) . Soit F le point de la parallèle à (CD) passant par A vérifiant $BD = AF$ et tel que les points F et C sont situés de part et d'autre de la droite (AD) .

Montrer que les médiatrices des segments $[BC]$ et $[EF]$ se coupent sur le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$.

Solution de l'exercice 4



Les égalités de longueurs de l'énoncé nous invitent à considérer les triangles BDE et FAC . Ils ont deux côtés égaux deux à deux. D'autre part, le parallélisme des droites (AF) et (CD) ainsi que le parallélisme des droites (AB) et (DE) conduit à

$$\widehat{FAC} = 180^\circ - \widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{ABD} = \widehat{EDB},$$

ce qui implique que les triangles FAC et BDE sont isométriques.

Notons M le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$ (on suppose que M est sur l'arc AD ne contenant pas B et C). Pour montrer que $EM = MF$, il suffit de montrer que les triangles EMB et FMC sont isométriques. Or on a déjà $MB = MC$ par définition de M et $EB = FC$ d'après l'étape précédente. Donc il suffit de montrer que $\widehat{EBM} = \widehat{FCM}$. Or,

$$\begin{aligned} \widehat{EBM} &= \widehat{EBD} - \widehat{MBD} \\ &= \widehat{CFA} - \widehat{MCD} \\ &= \widehat{FCD} - \widehat{MCD} \\ &= \widehat{FCM}, \end{aligned}$$

ce qui conclut que les triangles EMB et FMC sont isométriques. Ainsi, M est sur la médiatrice de $[EF]$, ce qui conclut.

Remarque : On pouvait également conclure de la façon suivante : en traçant le troisième côté de chaque triangle sur la figure, on observe que le point X d'intersection des droites (BE) et (CF) semble appartenir au cercle passant par A, B, C et D . C'est ce que l'on montre à présent.

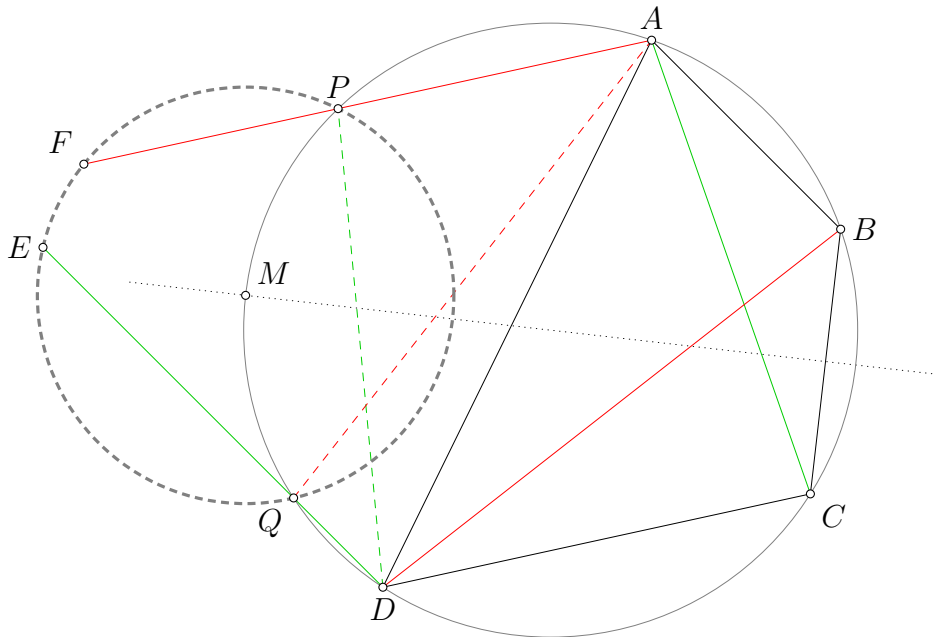
En utilisant l'isométrie des triangles BDE et FAC et le parallélisme des droites (AF) et (DC) , on trouve

$$\widehat{XBD} = \widehat{EBD} = \widehat{CFA} = \widehat{FCD} = \widehat{XCD},$$

ce qui signifie bien que le point X est sur le cercle passant par A, B, C et D .

Enfin, notons M le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles EFX et CXB (ce dernier étant le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$). M est alors le centre de la similitude envoyant E sur F et B sur C , ce qui signifie que les triangles EMB et FMC sont semblables. Comme en plus $EB = FC$, ces triangles sont isométriques, ce qui implique $ME = MF$ et $MB = MC$. M est donc le point d'intersection des médiatrices des segments $[BC]$ et $[EF]$. Comme par définition M est sur le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$, le problème est résolu.

Solution alternative n°1



Soit P le second point d'intersection de la droite (AF) avec le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$ et soit Q le second point d'intersection de la droite (DE) avec le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$). Les quadrilatères $APDC$ et $ABDQ$ sont des trapèzes inscrits dans un cercle, ce sont donc des trapèzes isocèles.

Dans ce paragraphe, on démontre que P et Q sont respectivement à l'intérieur des segments $[AF]$ et $[DE]$ à l'aide des hypothèses du début de l'énoncé. Il peut être sauté en première lecture. Puisque $\widehat{DCA} = \widehat{DBA} < 90^\circ$, on a $AP < DC$. De plus, puisque B et D sont de part et d'autre du segment $[AC]$ et que A, B et C sont dans le même demi-plan délimité par la

médiatrice de $[CD]$, on a $DC < DB$. On déduit en combinant que $AP < DC < DB = AF$, si bien que P est sur le segment $[AF]$ (car P et C sont de part et d'autre de (AD)). De la même façon, Q est sur le segment $[DE]$.

On a alors $PD = AC = DE$ et $QA = DB = AF$. Les triangles FAQ et PDE sont donc isocèles respectivement en A et D . Soit maintenant M le milieu de l'arc BC contenant A . M correspond au point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec le cercle circonscrit à $ABCD$. Prouvons que M est le milieu de l'arc PQ . Puisque les trapèzes $PACD$ et $QDBA$ sont isocèles, on a

$$\widehat{PAC} = \widehat{APD} = \widehat{DQA} = \widehat{QDB}.$$

Puisque, par définition de M , $\widehat{MDB} = \widehat{MCB} = \widehat{MBC} = \widehat{MAC}$, on trouve

$$\widehat{PAM} = \widehat{PAC} - \widehat{MAC} = \widehat{QDB} - \widehat{MDB} = \widehat{MDQ} = \widehat{MAQ}.$$

M est donc bien le milieu de l'arc PQ . On a en particulier $MP = MQ$. De plus, M appartient alors à la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$ et donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{FAD}$, qui est également la médiatrice du segment $[FQ]$. On a donc $MF = MQ$. De même, $ME = MP$. En combinant, on trouve que $ME = MP = MQ = MF$, et le point M est sur la médiatrice du segment $[EF]$, ce qui conclut le problème.

Commentaire des correcteurs

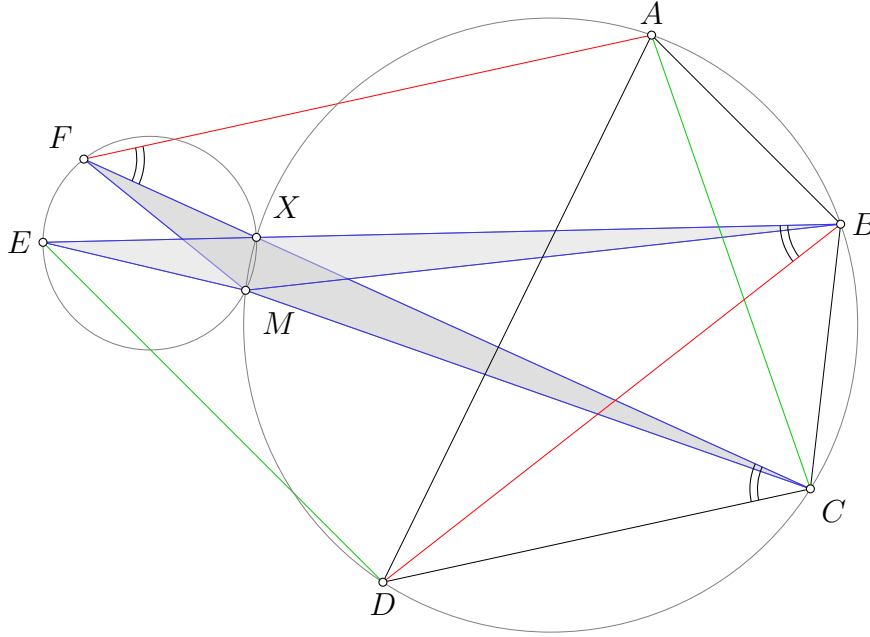
Le problème était difficile et peu peu d'élèves ont essayé de résoudre le problème. Quelques élèves ont fait de bonnes avancées dans la résolution cependant personne n'a réussi à obtenir la totalité des points. On notera que plusieurs élèves ont mal compris l'énoncé, pensant que l'angle $\widehat{DBA}$ valait 90° ce qui est dommage.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique vérifiant $AC < BD < AD$ et $\widehat{DBA} < 90^\circ$. Soit E le point de la parallèle à (AB) passant par D vérifiant $AC = DE$ et tel que les points E et C sont situés de part et d'autre de la droite (AD) . Soit F le point de la parallèle à (CD) passant par A vérifiant $BD = AF$ et tel que les points F et C sont situés de part et d'autre de la droite (AD) .

Montrer que les médiatrices des segments $[BC]$ et $[EF]$ se coupent sur le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$.

Solution de l'exercice 5



Les égalités de longueurs de l'énoncé nous invitent à considérer les triangles BDE et FAC . Ils ont deux côtés égaux deux à deux. D'autre part, le parallélisme des droites (AF) et (CD) ainsi que le parallélisme des droites (AB) et (DE) conduit à

$$\widehat{FAC} = 180^\circ - \widehat{ACD} = 180^\circ - \widehat{ABD} = \widehat{EDB},$$

ce qui implique que les triangles FAC et BDE sont isométriques.

Notons M le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$ (on suppose que M est sur l'arc AD ne contenant pas B et C). Pour montrer que $EM = MF$, il suffit de montrer que les triangles EMB et FMC sont isométriques. Or on a déjà $MB = MC$ par définition de M et $EB = FC$ d'après l'étape précédente. Donc il suffit de montrer que $\widehat{EBM} = \widehat{FCM}$. Or,

$$\begin{aligned} \widehat{EBM} &= \widehat{EBD} - \widehat{MBD} \\ &= \widehat{CFA} - \widehat{MCD} \\ &= \widehat{FCD} - \widehat{MCD} \\ &= \widehat{FCM}, \end{aligned}$$

ce qui conclut que les triangles EMB et FMC sont isométriques. Ainsi, M est sur la médiatrice de $[EF]$, ce qui conclut.

Remarque : On pouvait également conclure de la façon suivante : en traçant le troisième côté de chaque triangle sur la figure, on observe que le point X d'intersection des droites (BE) et (CF) semble appartenir au cercle passant par A, B, C et D . C'est ce que l'on montre à présent.

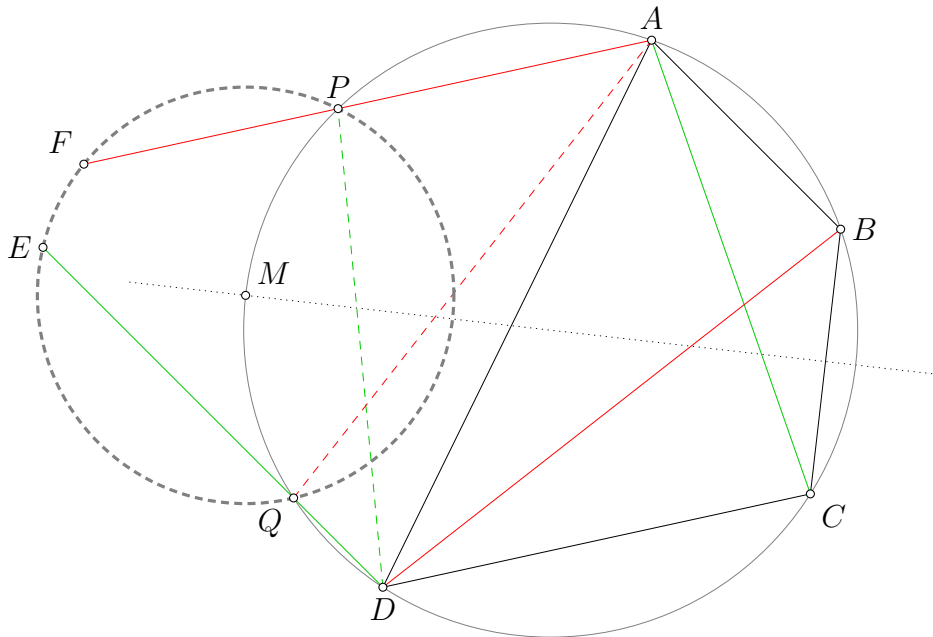
En utilisant l'isométrie des triangles BDE et FAC et le parallélisme des droites (AF) et (DC) , on trouve

$$\widehat{XBD} = \widehat{EBD} = \widehat{CFA} = \widehat{FCD} = \widehat{XCD},$$

ce qui signifie bien que le point X est sur le cercle passant par A, B, C et D .

Enfin, notons M le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles EFX et CXB (ce dernier étant le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$). M est alors le centre de la similitude envoyant E sur F et B sur C , ce qui signifie que les triangles EMB et FMC sont semblables. Comme en plus $EB = FC$, ces triangles sont isométriques, ce qui implique $ME = MF$ et $MB = MC$. M est donc le point d'intersection des médiatrices des segments $[BC]$ et $[EF]$. Comme par définition M est sur le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$, le problème est résolu.

Solution alternative n°1



Soit P le second point d'intersection de la droite (AF) avec le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$ et soit Q le second point d'intersection de la droite (DE) avec le cercle circonscrit au quadrilatère $ABCD$). Les quadrilatères $APDC$ et $ABDQ$ sont des trapèzes inscrits dans un cercle, ce sont donc des trapèzes isocèles.

Dans ce paragraphe, on démontre que P et Q sont respectivement à l'intérieur des segments $[AF]$ et $[DE]$ à l'aide des hypothèses du début de l'énoncé. Il peut être sauté en première lecture. Puisque $\widehat{DCA} = \widehat{DBA} < 90^\circ$, on a $AP < DC$. De plus, puisque B et D sont de part et d'autre du segment $[AC]$ et que A, B et C sont dans le même demi-plan délimité par la

médiatrice de $[CD]$, on a $DC < DB$. On déduit en combinant que $AP < DC < DB = AF$, si bien que P est sur le segment $[AF]$ (car P et C sont de part et d'autre de (AD)). De la même façon, Q est sur le segment $[DE]$.

On a alors $PD = AC = DE$ et $QA = DB = AF$. Les triangles FAQ et PDE sont donc isocèles respectivement en A et D . Soit maintenant M le milieu de l'arc BC contenant A . M correspond au point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec le cercle circonscrit à $ABCD$. Prouvons que M est le milieu de l'arc PQ . Puisque les trapèzes $PACD$ et $QDBA$ sont isocèles, on a

$$\widehat{PAC} = \widehat{APD} = \widehat{DQA} = \widehat{QDB}.$$

Puisque, par définition de M , $\widehat{MDB} = \widehat{MCB} = \widehat{MBC} = \widehat{MAC}$, on trouve

$$\widehat{PAM} = \widehat{PAC} - \widehat{MAC} = \widehat{QDB} - \widehat{MDB} = \widehat{MDQ} = \widehat{MAQ}.$$

M est donc bien le milieu de l'arc PQ . On a en particulier $MP = MQ$. De plus, M appartient alors à la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$ et donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{FAD}$, qui est également la médiatrice du segment $[FQ]$. On a donc $MF = MQ$. De même, $ME = MP$. En combinant, on trouve que $ME = MP = MQ = MF$, et le point M est sur la médiatrice du segment $[EF]$, ce qui conclut le problème.

Commentaire des correcteurs

Les élèves ont eu de nombreuses idées sur comment exploiter les égalités de longueurs et les droites parallèles données dans ce problème. Il y avait plusieurs manières de procéder, soit en introduisant des parallélogrammes, soit en remarquant des triangles isométriques ou des trapèzes isocèles. Une des difficultés principales de cet exercice était de rassembler astucieusement différentes observations intermédiaires que l'on peut prouver sur cette figure de sorte à avoir une solution complète. Globalement, cet exercice a été très bien réussi et beaucoup d'élèves ont résolu le problème ou obtenu des résultats partiels intéressants.

Exercice 6. Soit $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Déterminer tous les sous-ensembles $\mathcal{S}$ de $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ pour lesquels il existe une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que

$$\mathcal{S} = \{f(a+b) - f(a) - f(b) \mid a, b \in \mathbb{N}^*\}.$$

Solution de l'exercice 6

Réponse : tous les sous-ensembles $\mathcal{S}$ de taille 1 ou 2.

Remarques préliminaires : Les diverses solutions vont utiliser l'idée suivante : si $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$, alors $\{a, b\} = \{c, d\}$ (cette égalité vient de l'unicité de l'écriture en base 2).

Soit $\mathcal{S}$ est un ensemble solution et f une fonction satisfaisant la propriété pour $\mathcal{S}$. Pour tout couple (a, b) d'entiers strictement positifs, on dispose d'un entier noté $e(a, b)$ tel que

$$f(a+b) - f(a) - f(b) = 2^{e(a,b)}.$$

On vérifie notamment que $e(a, b) = e(b, a)$. L'énoncé cherche alors les ensembles de valeurs que peut prendre la fonction $e(,)$.

Construction :

Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de $\{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$ de cardinal 1 ou 2.

- Si $|\mathcal{S}| = 1$, disons $\mathcal{S} = \{2^k\}$ avec $k \geq 0$, alors on vérifie que la fonction $f : x \mapsto 2^{k+1}x - 2^k$ va bien de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ et pour tous $a, b \geq 1$,

$$f(a+b) - f(a) - f(b) = 2^{k+1}(a+b) - 2^k - (2^{k+1}a - 2^k) - (2^{k+1}b - 2^k) = 2^k.$$

Plus généralement, toute fonction de la forme $f(x) = cx - 2^k$ vérifie la propriété.

- Supposons $|\mathcal{S}| = 2$, disons $\mathcal{S} = \{2^k, 2^\ell\}$ avec $0 \leq k < \ell$. L'idée est d'utiliser l'identité $\lfloor \alpha(x+y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor \in \{0, 1\}$ en sachant que dès que α n'est pas entier, les deux valeurs 0 et 1 sont bien atteintes chacune pour au moins un couple (x, y) (preuve en annexe). De cette façon, en posant $f : x \mapsto (2^\ell - 2^k) \lfloor \alpha x \rfloor - 2^k$, on a pour tous $a, b \geq 1$,

$$f(a+b) - f(a) - f(b) = (2^\ell - 2^k) \underbrace{(\lfloor \alpha(x+y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor)}_{\in \{0,1\}} + 2^k \in \{2^\ell, 2^k\}$$

et le fait que α soit non entier garantit que chaque valeur peut être atteinte.

En prenant $\alpha > 2$, on s'assure de plus que f est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, puisque pour tout $x \geq 1$,

$$f(x) = (2^\ell - 2^k) \lfloor \alpha x \rfloor - 2^k > (2^\ell - 2^k) \underbrace{(\alpha x - 1)}_{> 2x-1 \geq 1} - 2^k > 2^\ell - 2^k - 2^k \geq 0.$$

Ainsi, tout ensemble de taille 1 ou 2 vérifie l'exercice.

Analyse : Montrons que si $\mathcal{S}$ vérifie la propriété de l'énoncé, alors $|\mathcal{S}| = 1$ ou $|\mathcal{S}| = 2$.

Étape 1 : Si a, b et c sont des entiers, les trois entiers $e(a, b)$, $e(b, c)$ et $e(c, a)$ peuvent prendre au plus deux valeurs distinctes.

En effet, en calculant de trois manière différentes $f(a+b+c)$, on trouve

$$f(a + b + c) = f(a) + f(b + c) + 2^{e(a,b+c)} = f(a) + f(b) + f(c) + 2^{e(a,b+c)} + 2^{e(b,c)},$$

$$f(a + b + c) = f(b) + f(a + c) + 2^{e(b,a+c)} = f(a) + f(b) + f(c) + 2^{e(b,a+c)} + 2^{e(c,a)},$$

$$f(a + b + c) = f(c) + f(a + b) + 2^{e(c,a+b)} = f(a) + f(b) + f(c) + 2^{e(c,a+b)} + 2^{e(a,b)}.$$

On déduit que

$$2^{e(a,b+c)} + 2^{e(b,c)} = 2^{e(b,a+c)} + 2^{e(c,a)} = 2^{e(c,a+b)} + 2^{e(a,b)}.$$

Ceci conduit aux égalités $\{e(a, b + c), e(b, c)\} = \{e(b, a + c), e(a, c)\} = \{e(c, a + b), e(a, b)\}$. Ces égalités implique que les trois entiers $e(a, b)$, $e(b, c)$ et $e(c, a)$ ne peuvent prendre qu'au plus deux valeurs distinctes.

Intermède : Soit k un entier tel qu'il existe deux entiers a et b tels que $e(a, b) = k$. Dans les étapes suivantes, on étudie l'ensemble des couples (a, b) vérifiant $e(a, b) = k$. Pour cela, on fixe, parmi tous les couples (a, b) vérifiant $e(a, b) = k$, le couple (a_0, b_0) tel que $a_0 + b_0$ est de somme s_k minimale. Dans les étapes 2, 3 et 4, cet entier s_k est noté s pour simplifier les notations. On suppose de plus que $k \neq e(1, 1)$ (ce qui signifie que la fonction e prend au moins deux valeurs distinctes). Ainsi, $s_k > 2$.

Étape 2 : Pour tout couple (c, d) tel que $c + d = s$, on a $e(c, d) = k$.

On développe $f(s)$ de deux façons différentes de manière à faire apparaître les entiers $e(a_0, s - a_0)$ et $e(c, s - c)$. Si $c > a_0$,

$$\begin{aligned} f(s) &= f(a_0 + (c - a_0) + s - c) = f(a_0) + f(c - a_0 + s - c) + 2^{e(a_0, s - a_0)} \\ &= f(a_0) + f(c - a_0) + f(s - c) + 2^{e(a_0, s - a_0)} + 2^{e(c - a_0, s - c)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(s) &= f(a_0 + (c - a_0) + s - c) = f(s - c) + f(a_0 + c - a_0) + 2^{e(c, s - c)} \\ &= f(s - c) + f(a_0) + f(c - a_0) + 2^{e(c, s - c)} + 2^{e(c - a_0, a_0)}. \end{aligned}$$

On déduit l'égalité $\{e(a_0, s - a_0), e(c - a_0, s - c)\} = \{e(c, s - c), e(c - a_0, a_0)\}$. Si on avait $e(a_0, s - a_0) = e(c - a_0, a_0) = k$, cela contredirait la minimalité de s puisque $c - a_0 + a_0 = c < s$. On a donc $e(a_0, s - a_0) = e(c, s - c)$.

Dans le cas où $c < a_0$, on effectue le même raisonnement avec les entiers b_0 et d .

Étape 3 : Pour tout $1 < c < s - 1$, on a $e(c, 1) = e(s - c, 1)$.

D'après l'étape 2, $e(c, s - c) = k$. D'après l'étape 1 appliquée au triplet $\{c, s - c, 1\}$, les entiers $k = e(c, s - c)$, $e(c, 1)$ et $e(s - c, 1)$ prennent au plus deux valeurs distinctes. Mais si $e(c, 1) = k$, cela contredirait encore la minimalité de s puisque $c + 1 < s$. On a donc $e(c, 1) \neq k$, et de la même façon $e(s - c, 1) \neq k$ donc $e(c, 1) = e(s - c, 1)$.

Étape 4 : Pour tout $1 \leq c < s - 1$, $e(c, 1) = e(s - c - 1, 1)$.

Tout comme dans l'étape 2, il s'agit de calculer $f(s)$ de deux façons différentes pour faire apparaître $e(c, 1)$ et $e(s - c - 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
f(s) = f(1 + c + (s - c - 1)) &= f(1 + c) + f(s - c - 1) + 2^{e(1+c, s-c-1)} \\
&= f(1) + f(c) + f(s - c - 1) + 2^{e(1+c, s-c-1)} + 2^{e(c, 1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(s) = f(1 + c + (s - c - 1)) &= f(1 + s - c - 1) + f(c) + 2^{e(c, s-c)} \\
&= f(1) + f(c) + f(s - c - 1) + 2^{e(c, s-c)} + 2^{e(s-c-1, 1)}.
\end{aligned}$$

On déduit que $2^{e(1+c, s-c-1)} + 2^{e(c, 1)} = 2^{e(c, s-c)} + 2^{e(s-c-1, 1)}$. Or d'après l'étape 2, $e(1 + c, s - c - 1) = e(c, s - c) = k$, ce qui implique que $e(c, 1) = e(s - c - 1, 1)$.

Étape 5 : $e(c, 1) = e(1, 1)$ pour tout $1 \leq c < s - 1$.

Les étapes 3 et 4 combinées impliquent, dès que $c < c + 1 < s - 1$,

$$e(c, 1) = e(s - c - 1, 1) = e(c + 1, 1).$$

Ainsi, la quantité $e(c, 1)$ pour $1 \leq c < s - 1$ ne dépend pas de c .

Étape 6 : Conclusion.

Supposons maintenant que $|\mathcal{S}| \geq 3$. On dispose de deux valeurs k et ℓ et deux entiers s_k et s_ℓ vérifiant les étapes 2, 3, 4 et 5. Supposons quitte à renommer les variables que $2 < s_k < s_\ell$. Puisque $s_k - 1 < s_\ell - 1$, l'étape 5 appliquée à s_ℓ et $c = s_k - 1$ implique

$$k = e(s_k - 1, 1) = e(1, 1),$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur k . Ainsi $|\mathcal{S}| \leq 2$.

Remarque : Dans la construction, $\alpha > 1$ suffit lorsque $\ell > k + 1$.

Annexe : Preuve que si α n'est pas entier, il existe un couple (x, y) tel que $\lfloor \alpha(x + y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor = 0$ et un couple (x, y) tel que $\lfloor \alpha(x + y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor = 1$.

Posons $g(\alpha, x, y) = \lfloor \alpha(x + y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor$. Notons que $g(\alpha, x, y) = g(\{\alpha\}, x, y)$ pour tous entiers x, y (où $\{\alpha\}$ désigne la partie fractionnaire de α). On peut donc se contenter de traiter le cas où $0 < \alpha < 1$.

- Si, $\alpha = 1/2$, alors $g(\alpha, 1, 1) = 1$ tandis que $g(\alpha, 1, 2) = 0$.
- Si $0 < \alpha < 1/2$, on note n le plus grand entier tel que $n\alpha > 1$. On a donc $n \geq 3$. Alors $g(\alpha, n - 1, 1) = 1$ tandis que $g(\alpha, n, 1) = 0$. Pour le calcul de $g(\alpha, n, 1)$, on remarque qu'on $1 = \lfloor n\alpha \rfloor < n\alpha < \lfloor n\alpha \rfloor + 1/2$, (sinon on aurait $1 < (n - 1)\alpha$, contredisant la minimalité de n), ce qui donne bien que $\lfloor (n + 1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor$ et nous permet d'obtenir la valeur de $g(\alpha, n, 1)$.
- Si $1/2 < \alpha < 1$, on dispose d'un entier n tel que $1 - 1/n \leq \alpha < 1 - 1/(n + 1)$. Alors $\lfloor n\alpha \rfloor = \lfloor n + 1\alpha \rfloor$ et $g(\alpha, n, 1) = n - 1 - (n - 1) = 0$. D'autre part, on a l'encadrement

$$n - 2 + \frac{1}{n} = \frac{(n - 1)^2}{n} \leq (n - 1)\alpha < \frac{(n - 1)n}{n + 1} < n - 1,$$

de sorte que $\lfloor (n - 1)\alpha \rfloor = n - 2$ et $g(\alpha, n - 1, 1) = n - 1 - (n - 2) - 0 = 1$.

Solution alternative n°1

On propose une solution alternative de l'analyse. Dans cette solution, on s'intéresse aux valeurs que peuvent prendre les entiers de la forme $e(a, 1)$. Cette étude est motivée par la formule suivante, obtenue par récurrence immédiate : pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f(n) = 2^{e(1,1)} + 2^{e(2,1)} + \dots + 2^{e(1,n)} + nf(1) \quad (\star)$$

L'objectif est alors de montrer que l'ensemble $\{e(a, 1), a \geq 1\}$ prend au plus deux valeurs distinctes (étapes A et B), puis de conclure (étape C).

Étape A : Réinjecter $(\star)$ dans la formule de l'énoncé.

Lemme : Pour tous entiers positifs n et $k \geq 0$,

$$\{e(1, 1), \dots, e(k, 1)\} \subset \{e(n, 1), \dots, e(n + k, 1)\}.$$

Autrement dit, tout bloc de $k + 1$ termes consécutifs de la suite $e(1, 1), e(2, 1), \dots$ contient les k premiers termes de la suite.

Remarque : Dans l'inclusion donnée, l'ensemble de gauche est considéré comme ayant k éléments (non nécessairement distincts), tandis que l'ensemble de droite est considéré comme ayant $k + 1$ éléments (non nécessairement distincts). Ainsi, l'ensemble de gauche est un sous-ensemble de taille k de l'ensemble de droite.

Preuve : On fixe $n \geq 1$ et on prouve l'inclusion pour tout k par récurrence sur k .

Initialisation : Si $k = 0$, il n'y a rien à démontrer car $\{e(1, 1), \dots, e(k, 1)\}$ est vide.

Hérédité : On suppose l'inclusion vraie pour un certain $k \geq 0$ fixé. D'après la formule $(\star)$, on a

$$\begin{aligned} f(n + k + 1) - f(n) - f(k + 1) &= 2^{e(1,1)} + \dots + 2^{e(n+k+1,1)} + (n + k + 1)f(1) \\ &\quad - (2^{e(1,1)} + \dots + 2^{e(n,1)} + nf(1)) \\ &\quad - (2^{e(1,1)} + \dots + 2^{e(k+1,1)} + (k + 1)f(1)) \\ &= 2^{e(n,1)} + \dots + 2^{e(n+k+1,1)} - (2^{e(1,1)} + \dots + 2^{e(k+1,1)}). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait déjà que

$$\{e(1, 1), \dots, e(k, 1)\} \subset \{e(n, 1), \dots, e(n + k, 1)\}.$$

Notons a l'unique entier appartenant à l'ensemble de droite mais pas à l'ensemble de gauche. Autrement dit, a vérifie

$$\{e(n, 1), \dots, e(n + k, 1)\} = \{e(1, 1), \dots, e(k, 1)\} \cup \{a\}.$$

Ainsi,

$$2^{e(n,k)} = 2^a + 2^{e(n+k+1,1)} - 2^{e(k+1,1)}.$$

On déduit que $\{e(n, k), e(k + 1, 1)\} = \{a, e(n + k + 1, 1)\}$. Ainsi, $e(k + 1, 1) \in \{a, e(n + k + 1, 1)\} \subset \{e(n, 1), \dots, e(n + k, 1), e(n + k + 1, 1)\}$, ce qui conclut l'hérédité et la preuve du lemme.

Étape B : La suite $e(1, 1), e(2, 1), \dots$ prend au plus deux valeurs distinctes.

Soit k le plus petit entier tel que $e(k, 1) \neq e(1, 1)$ (si k n'existe pas la suite prend une seule valeur) et supposons par l'absurde qu'il existe un entier $\ell > k$ tel que $e(\ell, 1) \neq e(k, 1), e(1, 1)$. On va mettre en évidence un bloc de k termes consécutifs ne contenant pas $e(k, 1)$.

D'après le lemme appliqué à $\ell - (k - 1)$ et $k - 1$ puis à ℓ et $k - 1$, on a les deux inclusions

$$\underbrace{\{e(1, 1), \dots, e(1, 1)\}}_{k-1 \text{ fois}} = \{e(1, 1), \dots, e(k-1, 1)\} \subset \{e(\ell - (k-1), 1), \dots, e(\ell-1, 1), e(\ell, 1)\},$$

$$\underbrace{\{e(1, 1), \dots, e(1, 1)\}}_{k-1 \text{ fois}} = \{e(1, 1), \dots, e(k-1, 1)\} \subset \{e(\ell, 1), \dots, e(\ell-1, 1), e(\ell+k-1, 1)\}.$$

On déduit, comme $e(\ell, 1) \neq e(1, 1)$, que $e(\ell-1, 1) = e(\ell+1, 1) = \dots = e(\ell+k-1, 1) = e(1, 1)$. Mais alors on n'a pas l'inclusion

$$\{e(1, 1), \dots, e(k, 1)\} \subset \{e(\ell-1, 1), \dots, e(\ell+k-1, 1)\}$$

puisque $e(k, 1)$ appartient à l'ensemble de gauche mais pas à l'ensemble de droite. Cette contradiction conclut l'affirmation de l'étape B.

Étape C : L'ensemble S contient au plus deux éléments distincts.

Soient a et b deux entiers quelconques. Le même calcul que la preuve du lemme nous donne

$$2^{e(a,b)} = f(a+b) - f(a) - f(b) = 2^{e(a,1)} + \dots + 2^{e(a+b,1)} - (2^{e(1,1)} + \dots + 2^{e(b,1)}).$$

D'après le lemme, puisque $\{e(1, 1), \dots, e(b, 1)\} \subset \{e(a, 1), \dots, e(a+b, 1)\}$, il existe un entier i tel que

$$2^{e(a,b)} = f(a+b) - f(a) - f(b) = 2^{e(a,1)} + \dots + 2^{e(a+b,1)} - (2^{e(1,1)} + \dots + 2^{e(b,1)}) = 2^{e(i,1)}.$$

Ainsi, S est inclus dans $\{e(a, 1), a \geq 1\}$ qui est de taille au plus 2, ce qui conclut à nouveau.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été très peu réussi : seuls 2 élèves ont une solution complète, et 2 élèves ont **bien** avancé. Certes le problème était difficile, mais il est dommage qu'aussi peu d'élèves aient obtenu des points ou au moins des idées allant dans le bon sens, puisque beaucoup d'idées naturelles pouvaient permettre d'aller dans la bonne direction. Quelques commentaires :

- Certains élèves n'ont même pas cherché les ensembles S solution. Face à un énoncé aussi obscur à première vue, c'était un passage obligé. Sans comprendre à quoi ressemblaient les solutions, il était très difficile d'avancer.
- Beaucoup ont noté que les singletons étaient solutions (et cela ne rapportait aucun point), mais peu se sont intéressés aux ensembles de taille 2. Certains ont probablement passé plus de deux heures sur le problème : dans une telle plage de temps, il est important de consacrer du temps à la vérification des solutions, pour être sûr de ne pas passer à côté de solutions importantes.

- Plusieurs élèves ont fourni des exemples faux pour les ensembles de taille 2, ou affirmé des choses hâtivement. C'est dommage de bâcler cette partie et perdre donc le point attribué pour avoir trouvé toutes les solutions.
- Certains élèves ont abouti à une équation du type $2^a + 2^b = 2^c + 2^d$. Ceux-ci ont ensuite conclu que $\{a, b\} = \{c, d\}$ avec plus ou moins de succès. Même si cet argument était important, il ne rapportait pas de points tel quel.
- Très peu d'élèves ont essayé d'écrire des équations faisant intervenir $g(a, b) = f(a + b) - f(a) - f(b)$: la base de l'exercice était d'avoir des relations de la forme $g(a, b) + g(c, d) = g(e, f) + g(h, i)$ et de montrer ensuite que cela impliquait $g(a, b) = g(e, f)$ ou $g(a, b) = g(h, i)$. Même si cette observation générale ne rapportait pas de points, il est dommage que beaucoup d'élèves n'aient pas essayé cela, ou uniquement dans des cas très particuliers.
- Exprimer $f(n)$ en fonction des $f(a + 1) - f(a) - f(1)$ était une idée très naturelle et importante sur ce problème, même si cela ne rapportait pas directement de points. On pouvait montrer que tout $f(a + b) - f(a) - f(b)$ était de la forme $f(c + 1) - f(c) - f(1)$ ou que les $f(c + 1) - f(c) - f(1)$ prenaient au plus deux valeurs, ce qui constituait des vraies avancées valorisées.
- Certains élèves se sont retrouvés à avoir des preuves fausses, soit par paresse de détailler un argument, soit par des arguments manifestement faux. Il est important de se relire, et de faire preuve d'honnêteté : essayer d'arnaquer le correcteur ne paie pas.

Exercice 7. Soit $a_0, a_1, a_2, \dots$ une suite infinie strictement croissante d'entiers strictement positifs vérifiant que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n \in \left\{ \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \right\}.$$

Soit $b_1, b_2, \dots$ une suite infinie de lettres définie pour tout $n \geq 1$ par

$$b_n = \begin{cases} A & \text{si } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}; \\ G & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer qu'il existe deux entiers $n_0, d \geq 1$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $b_{n+d} = b_n$.

Solution de l'exercice 7

Tout d'abord, notons qu'en réécrivant la condition de l'énoncé, pour tout $n \geq 1$, si $b_n = A$, alors $a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1}$ et si $b_n = G$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}}$. Le rapport $c_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ évolue donc de la façon suivante : pour tout $n \geq 1$, si $b_n = G$ alors $c_n = c_{n-1}$, tandis que si $b_n = A$ alors $c_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 - \frac{a_{n-1}}{a_n} = 2 - \frac{1}{c_{n-1}}$.

Posons $a = a_0, b = a_1 - a_0 > 0, d = \text{PGCD}(b, a), A = a/d$ et $B = b/d$. On a donc $a_0 = Ad$ et $a_1 = a + b = (A + B)d$. Ainsi $c_0 = \frac{a_1}{a_0} = \frac{A + B}{A}$.

Notons que si $b_n = G$ à partir d'un certain rang, l'énoncé est vérifié. Dans la suite, on suppose donc qu'il y a une infinité de n tels que $b_n = A$. On pose pour tout $i \geq 1$, n_i le i -ème indice tel que $b_{n_i} = A$ et $n_0 = 0$.

Montrons par récurrence sur j que si $n_j \leq k < n_{j+1}$, alors $c_k = \frac{A + (j+1)B}{A + jB}$.

Initialisation : Pour $j = 0$, on a $c_0 = \frac{A+B}{A}$, et comme avant l'indice n_1 , tous les b_i valent G , on a $c_0 = \dots = c_{n_1-1}$, d'où le résultat.

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain $j \geq 0$. Comme $c_{n_{j+1}} = A$, on a

$$c_{n_{j+1}} = 2 - \frac{1}{c_{n_{j+1}-1}} = 2 - \frac{A + jB}{A + (j+1)B} = \frac{A + (j+2)B}{A + (j+1)B}$$

par hypothèse de récurrence. De plus, comme $b_k = G$ pour $n_{j+1} < k < n_{j+2}$, on a $c_k = c_{n_{j+1}} = \frac{A + (j+2)B}{A + (j+1)B}$ pour tout k vérifiant $n_{j+1} \leq k < n_{j+2}$, ce qui conclut la récurrence.

Posons $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour $n \geq 0$. Pour tout $n \geq 1$, si $b_n = A$, alors $d_n = d_{n-1}$, si $b_n = G$, alors $d_n = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} - a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) = c_{n-1}d_{n-1}$. On obtient par récurrence immédiate que pour tout j ,

$$d_{n_{j+1}} = d_{n_j} \times \left(\frac{A + (j+1)B}{A + jB} \right)^{n_{j+1} - n_j - 1}$$

ainsi que

$$d_{n_{j+1}} = d_0 \left(\frac{A + B}{A} \right)^{n_1 - n_0 - 1} \left(\frac{A + 2B}{A + B} \right)^{n_2 - n_1 - 1} \dots \left(\frac{A + (j+1)B}{A + jB} \right)^{n_{j+1} - n_j - 1}.$$

Posons alors $k_i = n_{i+1} - n_i - 1$ pour tout $i \geq 0$, qui est un entier positif. L'égalité ci-dessus implique que $d_{n_{j+1}}(A + jB)^{k_j} = d_{n_j}(A + (j+1)B)^{k_j}$. Or on a

$PGCD(A + (j + 1)B, A + jB) = PGCD(B, A + jB) = PGCD(A, B) = 1$, donc $(A + jB)^{k_j}$ divise d_{n_j} . Donc pour tout j , la quantité suivante est un entier :

$$f_j = \frac{d_{n_j}}{(A + jB)^{k_j}} = d_0 A^{-k_1} (A + B)^{k_1 - k_2} \dots (A + jB)^{k_{j-1} - k_j}.$$

Prouvons désormais que la suite $(k_j)_{j \geq 0}$ est stationnaire. Pour cela on procède en deux temps, en montrant que la suite (k_j) est bornée puis qu'elle est stationnaire.

Supposons que la suite $(k_j)_{j \geq 0}$ n'est pas bornée, et construisons la suite (m_i) définie par $m_0 = 0$, et pour tout $i \geq 0$, m_{i+1} est le plus petit entier $n > m_i$ tel que $k_n > k_{m_i}$. Notons que, puisque $k_{m_i+1} \leq k_{m_i}$,

$$\begin{aligned} f_{m_i} &= f_{m_i+1} (A + (m_i + 1)B)^{k_{m_i+1} - k_{m_i}} \\ &= f_{m_i+2} (A + (m_i + 2)B)^{k_{m_i+2} - k_{m_i+1}} (A + (m_i + 1)B)^{\overbrace{k_{m_i+1} - k_{m_i}}^{\leq 0}} \\ &\geq f_{m_i+2} (A + (m_i + 2)B)^{k_{m_i+2} - k_{m_i+1}} (A + (m_i + 2)B)^{k_{m_i+1} - k_{m_i}} \\ &= f_{m_i+2} (A + (m_i + 2)B)^{k_{m_i+2} - k_{m_i}} \\ &\dots \\ &\geq f_{m_i+j} (A + (m_i + j)B)^{k_{m_i+j} - k_{m_i}} \\ &\dots \\ &\geq f_{m_{i+1}} (A + m_{i+1}B)^{k_{m_{i+1}} - k_{m_i}} \\ &> f_{m_{i+1}} \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(f_{m_i})_{i \geq 0}$ est une suite d'entiers strictement positifs qui est strictement décroissante, ce qui est absurde. La suite est donc bornée.

Comme la suite (k_j) est une suite bornée d'entiers, il existe au moins un entier atteint une infinité de fois par la suite. Notons alors k le plus grand entier apparaissant infiniment souvent dans la suite $(k_j)_{j \geq 0}$. Par définition de k , à partir d'un certain rang n_0 , tous les termes k_n de la suite sont inférieurs à k . Quitte à changer ce rang, on peut supposer que $k_{m_0} = k$. On construit la suite (m_i) définie par $m_0 = n_0$, et pour tout $i \geq 0$, m_{i+1} est le plus petit entier $n > m_i$ tel que $k_n \geq k_{m_i}$.

Le même calcul que précédemment donne à nouveau $f_{m_{i+1}} < f_{m_i}$ si $m_{i+1} > m_i + 1$, et si $m_{i+1} = m_i + 1$, on a bien $f_{m_{i+1}} = f_{m_i}$. Ainsi la suite $(f_{m_i})_{i \geq 0}$ est une suite d'entiers strictement positifs qui est décroissante. Elle est donc stationnaire, donc il existe un rang N tel que $m_{i+1} = m_i + 1$ pour tout $i \geq N$. En particulier, $m_{N+i} = m_N + i$, donc $k_{m_N+i} = k$ pour tout $i \geq 0$. La suite $(k_n)_{n \geq 0}$ est donc constante à partir d'un certain rang, donc à partir d'un certain rang, la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ alterne entre k fois la lettre G et une fois la lettre A , ce qui conclut.

Solution alternative n°1

On pose

$$f_j^{(k)} = \frac{d_{n_j}}{(A + jB)^k} = d_0 A^{-k_1} (A + B)^{k_1 - k_2} \dots (A + jB)^{k_{j-1} - k_j}.$$

Comme montré précédemment, si $k \leq k_j$, alors $f_j^{(k)}$ est entier. Or on a

$$f_{j+1}^{(k)} = f_j^{(k)} \times (A + jB)^{k-k_j} \times (A + (j+1)B)^{k_j-k} = f_j^{(k)} \left(\frac{A + (j+1)B}{A + jB} \right)^{k_j-k}.$$

Désormais fixons $T > 0$ tel que $f_0^{(T)} < 1$. On montre alors par récurrence sur j que $f_j^{(T)} < 1$ et $T > k_j$.

Initialisation : Par hypothèse, $f_0^{(T)} < 1$. De plus, si $T \leq k_0$, $f_0^{(T)}$ serait un entier, ce qui est absurde.

Hérédité : Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang j , alors $f_{j+1}^{(T)} = f_j^{(T)} \left(\frac{A+(j+1)B}{A+jB} \right)^{k_j-T} < f_j^{(T)} < 1$ car $T > k_j$, et de même que dans l'hérédité, on déduit que si $T \leq k_{j+1}$, $f_{j+1}^{(T)}$ serait un entier, ce qui est absurde.

Ainsi on obtient que la suite $(k_j)_{j \geq 0}$ est bornée. Notons alors k la plus grande valeur atteinte une infinité de fois par la suite, pour j assez grand on a donc $k_j \leq k$, donc la suite $(f_j^{(k)})_{j \geq 0}$ est décroissante à partir d'un certain rang (et décroît strictement à chaque fois que $k_j < k$). Mais comme $k_j = k$ pour une infinité de j , $f_j(k)$ est entier pour une infinité de j , donc la suite $(f_j^{(k)})_{j \geq 0}$ est stationnaire. Ainsi, pour j assez grand, $k_j = k$, ce qui conclut de même que dans la première solution.

Remarque : Dans les deux preuves écrites, on prouve que la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ est éventuellement périodique, et que la période contient un certain nombre de G puis un A . Pour tout $p \geq 0$, il existe une suite ultimement périodique, de période p fois G puis un A . Pour $p = 0$ il suffit de considérer une suite arithmétique, et pour $p \geq 1$, on considère la suite obtenue en juxtaposant les motifs suivants : $k^p, (k+1)^1 k^{p-1}, (k+1)^2 k^{p-2}, \dots, k^1 (k+1)^{p-1}, (k+1)^p, (k+2)(k+1)^p$, avec le motif $(b_n)_{n \geq 0}$ correspondant valant p fois G puis une fois A .

Commentaire des correcteurs

Problème extrêmement difficile dans lequel très peu d'élèves ont substantiellement avancé. On peut simplement regretter que plusieurs d'entre eux, s'étant intéressés aux relations de récurrence mettant en jeu les ratios a_{n+1}/a_n ou les différences $a_{n+1} - a_n$, n'aient pas cherché à obtenir de formule close explicite pour ces expressions en fonction du nombre de G et de A dans la suite (b_i) , alors qu'une telle formule était à portée de main et aurait constitué un premier pas significatif vers une solution.