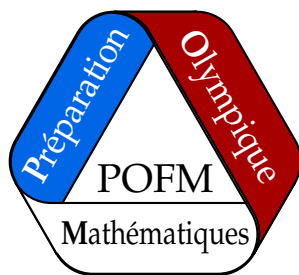


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 19 FÉVRIER 2025

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Quatre réels $a \leq b \leq c \leq d$ sont dits en *progression arithmétique* si $d - c = c - b = b - a$. Aurélien écrit 2025 réels au tableau ; certains réels peuvent être égaux entre eux. Théo remarque que, dès que l'on choisit quatre réels écrits au tableau qui prennent quatre valeurs distinctes, ces quatre réels sont en progression arithmétique.

Montrer qu'il existe un nombre réel qui est écrit au moins 507 fois au tableau.

Solution de l'exercice 1

Posons $n = 507$, de sorte que $2025 = 4n - 3$.

S'il existe au plus quatre valeurs distinctes écrites au tableau, d'après le principe des tiroirs il existe un réel écrit au moins $\left\lceil \frac{4n - 3}{4} \right\rceil = n$ fois.

Supposons à présent par l'absurde que parmi les réels écrits au tableau, il en existe au moins 5 qui sont deux à deux distincts. On les note $a < b < c < d < e$. Par hypothèse, les quadruplets (a, b, c, d) et (a, b, d, e) sont en progression arithmétique. Ceci implique que $c - b = b - a = d - b$, ce qui impliquerait $d = c$, ce qui est absurde. Ainsi, il y a au plus quatre valeurs distinctes parmi les nombres écrits au tableau, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs

Les enjeux de l'exercice ont été compris par une écrasante majorité des élèves, mais le nombre de notes maximales n'y correspond pas, car trop d'élèves n'ont pas été suffisamment précis dans leurs explications et dans leurs estimations de ce qui mérite une explication. Cet exercice est le premier exercice, consistant essentiellement d'une unique idée (et d'une application du principe des tiroirs), cette idée doit donc être justifiée très proprement. Les fautes de rédaction les plus fréquentes ont été d'affirmer que les raisons de a, b, c, d et de b, c, d, e sont égales sans argument concret, et de supposer qu'on a $a < b < c < d$ en progression arithmétique puis d'affirmer que pour tout autre choix de e , a, b, c, e ne peuvent pas être en progression arithmétique (qu'en est-il du cas $a < b < e < c$ par exemple? Il manque une phrase). Si vous choisissez les nombres tels qu'ils aient un certain ordre (par exemple $a < b < c < d$ puis $d < e$), précisez-le et n'attendez pas qu'on le devine! Car ça mène à des justifications qui ne sont pas rigoureuses. Un conseil de rédaction ici était de directement prendre a, b, c, d, e des réels distincts, puisqu'on peut maintenant directement les ordonner sans que cela pose de problèmes, puis de bien justifier pourquoi ces 5 réels sont bien en progression arithmétique.

Exercice 2. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $ab + bc + ca = 3$. Montrer que

$$\frac{a^4 + b^4 + (a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4 + c^4 + (b+c)^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^4 + a^4 + (c+a)^4}{c^2 + a^2 + ca} \geq 18.$$

Solution de l'exercice 2

On présente quatre solutions. La première solution utilise une factorisation astucieuse, les solutions alternatives 1 et 2 utilisent l'inégalité des mauvais élèves et la quatrième solution minore chaque fraction respectivement par $6ab$, $6bc$ et $6ca$.

Une solution astucieuse consiste à remarquer la factorisation suivante :

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = 2a^4 + 2b^4 + 4a^3b + 4ab^3 + 6a^2b^2 = 2(a^2 + ab + b^2)^2.$$

On a bien sûr les égalités analogues pour les expressions en b et c et en c et a .

L'inégalité à démontrer devient alors, après simplification,

$$2(a^2 + ab + b^2) + 2(b^2 + bc + c^2)^2 + 2(c^2 + ca + a^2) \geq 18.$$

On peut alors conclure, soit en remarquant comme dans la solution 1 que, d'après l'inégalité des moyennes, $a^2 + b^2 + ab \geq 3ab$ (est les inégalités analogues en b et c et en c et a), soit utiliser le lemme du tourniquet :

$$\begin{aligned} 2(a^2 + ab + b^2) + 2(b^2 + bc + c^2) + 2(c^2 + ca + a^2) &= 4(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \\ &\geq 4(ab + bc + ca) + 2(ab + bc + ca) = 18. \end{aligned}$$

Remarque : Il est possible de trouver la factorisation à l'aide d'outils plus avancés, que l'on n'attend pas de la part d'un junior. Après avoir homogénéisé les expressions $a^4 + b^4 + (a+b)^4$ et $a^2 + ab + b^2$, on se ramène à devoir factoriser le polynôme $x^4 + 1 + (x+1)^4$ par le polynôme $x^2 + x + 1$. Ceci peut se faire à l'aide d'une division euclidienne polynomiale.

Solution alternative n°1

La forme de l'inégalité invite à employer l'inégalité des mauvais élèves.

Découpons l'expression en deux :

$$\begin{aligned} &\underbrace{\frac{a^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^4}{c^2 + a^2 + ca} + \frac{a^4}{c^2 + a^2 + ca}}_{=I} \\ &+ \underbrace{\frac{(a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{(b+c)^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{(c+a)^4}{c^2 + a^2 + ca}}_{=II} \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité des mauvais élèves à l'expression I , on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{a^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^4}{c^2 + a^2 + ca} + \frac{a^4}{c^2 + a^2 + ca} \\
& \geq \frac{(a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2)^2}{2(a^2 + b^2 + ab) + 2(b^2 + c^2 + bc) + 2(c^2 + a^2 + ca)} \\
& = \frac{2(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca}
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité des mauvais élèves à l'expression II, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{(b+c)^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{(c+a)^4}{c^2 + a^2 + ca} & \geq \frac{((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca} \\
& = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca}
\end{aligned}$$

En sommant ces deux inégalités, on voit qu'il suffit de montrer que

$$\frac{2(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)^2}{2(a^2 + b^2 + c^2) + ab + bc + ca} \geq 18. \quad (1)$$

Posons $s = a^2 + b^2 + c^2$. En utilisant la condition $ab + bc + ca = 3$ et après suppression du numérateur, l'inégalité (1), en fonction de s , se réécrit

$$s^2 + 2(s+3)^2 \geq 18s + 27.$$

En développant le terme de gauche et en simplifiant, l'inégalité devient

$$3s^2 \geq 6s + 9.$$

Or, d'après l'inégalité du réordonnement, $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, ce qui donne $s \geq 3$. On a donc bien

$$3s \cdot s \geq 9s = 6s + 3s \geq 6s + 9.$$

Remarque : Notons que, dépendant de comment l'on appliquait l'inégalité des mauvais élèves, on n'aboutissait pas toujours à la solution. En effet, si on découpe par exemple en les neuf termes suivants

$$\begin{aligned}
& \frac{a^4}{a^2 + b^2 + ab}, \frac{b^4}{a^2 + b^2 + ab}, \frac{(a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab}, \\
& \frac{b^4}{b^2 + c^2 + bc}, \frac{c^4}{b^2 + c^2 + bc}, \frac{(b+c)^4}{b^2 + c^2 + bc}, \\
& \frac{c^4}{c^2 + a^2 + ca}, \frac{a^4}{c^2 + a^2 + ca}, \frac{(c+a)^4}{c^2 + a^2 + ca},
\end{aligned}$$

et qu'on applique l'inégalité des mauvais élèves à ces neuf termes, le cas de l'inégalité n'est jamais atteint (celui-ci exigerait par exemple que les trois premiers termes soient égaux, ce qui n'est pas possible car $(a+b)^4 > a^4 + b^4$). Or, l'inégalité de l'énoncé admet un cas d'égalité

($a = b = c = 1$). Ainsi, on sait d'avancer qu'appliquer une telle inégalité des mauvais élèves produira une inégalité trop large pour permettre de résoudre l'exercice.

Solution alternative n°2

Toujours avec l'inégalité des mauvais élèves, mais en découpant chaque fraction en les 18 morceaux suivant :

$$\frac{a^4}{a^2 + b^2 + ab}, \frac{b^4}{a^2 + b^2 + ab}, \underbrace{\frac{1}{16} \frac{(a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab}, \dots, \frac{1}{16} \frac{(a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab}}_{16 \text{ termes}},$$

(et en découpant de façon similaire les deux autres termes), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{a^4 + b^4 + (a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab} \\ = & \sum_{cyc} \frac{a^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4}{a^2 + b^2 + ab} + \underbrace{\frac{1}{16} \frac{(a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab} + \dots + \frac{1}{16} \frac{(a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab}}_{16 \text{ fois}} \\ \geq & \frac{\left(\sum_{cyc} a^2 + b^2 + \underbrace{\frac{(a+b)^2}{4} + \dots + \frac{(a+b)^2}{4}}_{16 \text{ fois}} \right)^2}{18 \sum_{cyc} a^2 + b^2 + ab} \\ \geq & \frac{\left(\sum_{cyc} a^2 + b^2 + 16 \frac{(a+b)^2}{4} \right)^2}{18 \sum_{cyc} a^2 + b^2 + ab} \\ \geq & \frac{\left(\sum_{cyc} a^2 + b^2 + 4(a+b)^2 \right)^2}{18 \sum_{cyc} a^2 + b^2 + ab} \\ \geq & \frac{(10(a^2 + b^2 + c^2) + 8(ab + bc + ca))^2}{36(a^2 + b^2 + c^2) + 18(ab + bc + ca)}. \end{aligned}$$

Pour montrer l'inégalité de l'énoncé, il suffit donc de montrer que

$$\frac{(10(a^2 + b^2 + c^2) + 8(ab + bc + ca))^2}{36(a^2 + b^2 + c^2) + 18(ab + bc + ca)} \geq 18.$$

On pose alors $s = a^2 + b^2 + c^2$. En utilisant l'hypothèse $ab + bc + ca = 3$ et en multipliant des deux côtés par le dénominateur, l'inégalité à montrer s'écrit

$$(10s + 24)^2 \geq 18(36s + 54).$$

En développant le terme de gauche et en simplifiant par 4, l'inégalité devient

$$25s^2 \geq 42s + 99.$$

Or, puisque $s = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 3$ d'après l'inégalité du réordonnement, on a

$$25s^2 \geq 25 \cdot 3s = 42s + 33s \geq 42s + 99.$$

Ceci conclut à nouveau.

Remarque : Le découpage du terme $(a+b)^4$ en 16 morceaux $\frac{(a+b)^4}{16}$ n'est pas dû au hasard. Ce nombre de morceaux est choisi afin que le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves que l'on applique soit aussi le cas d'égalité de l'inégalité que l'on cherche à résoudre, qui est vraisemblablement $a = b = c$. Par exemple, si l'on avait laissé $(a+b)^4$ en un seul morceau et appliqué l'inégalité des mauvais élèves aux trois termes a^4 , b^4 et $(a+b)^4$, le cas d'égalité aurait été atteint pour $a^2 = b^2 = (a+b)^2$, qui n'est jamais vrai. Si les inégalités que l'on emploie n'ont pas le même cas d'égalité que l'inégalité du problème, elles ne peuvent permettre de montrer l'inégalité du problème.

En découpant le terme $(a+b)^4$ en 16 morceaux, le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves se produit lorsque $a^2 = b^2 = \frac{(a+b)^2}{4}$, qui a lieu lorsque $a = b$. Cela ne signifie pas que cette inégalité va nécessairement permettre de conclure, mais qu'elle a une chance d'aboutir. C'est donc en regardant le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves que l'on peut penser à un tel découpage.

Solution alternative n°3

Dans cette dernière solution, on minore séparément chaque terme du membre de gauche, ce qui est tentant au vu de la forme de l'inégalité. Montrons que pour tous réels a et b ,

$$\frac{a^4 + b^4 + (a+b)^4}{a^2 + b^2 + ab} \geq 6ab.$$

Après multiplication des deux côtés par $a^2 + b^2 + ab$ et développement, l'inégalité est équivalente à

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 \geq 6a^3b + 6ab^3 + 6a^2b^2.$$

Après développement de $(a+b)^4$ et simplification, l'inégalité à montrer devient

$$2a^4 + 2b^4 \geq 2a^3b + 2ab^3.$$

Cette inégalité est bien vérifiée pour tous réels $a, b > 0$. On peut par exemple supposer par symétrie que $a \geq b$ et invoquer l'inégalité de réordonnement (puisque $a^3 \geq b^3$ et $a \geq b$), invoquer l'inégalité de Muirhead ou employer l'inégalité des moyennes de la façon suivante :

$$a^4 + b^4 \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}(a^2 + b^2) \geq ab(a^2 + b^2) = a^3b + ab^3.$$

On a donc montré l'inégalité annoncée pour a et b . De la même façon, on a

$$\frac{b^4 + c^4 + (b+c)^4}{b^2 + c^2 + bc} \geq 6bc,$$

$$\frac{c^4 + a^4 + (c + a)^4}{c^2 + a^2 + ca} \geq 6ca.$$

En sommant ces trois inégalités et en utilisant que $ab + bc + ca = 3$, on a bien

$$\frac{a^4 + b^4 + (a + b)^4}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^4 + c^4 + (b + c)^4}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^4 + a^4 + (c + a)^4}{c^2 + a^2 + ca} \geq 6(ab + bc + ca) = 18.$$

Commentaire des correcteurs

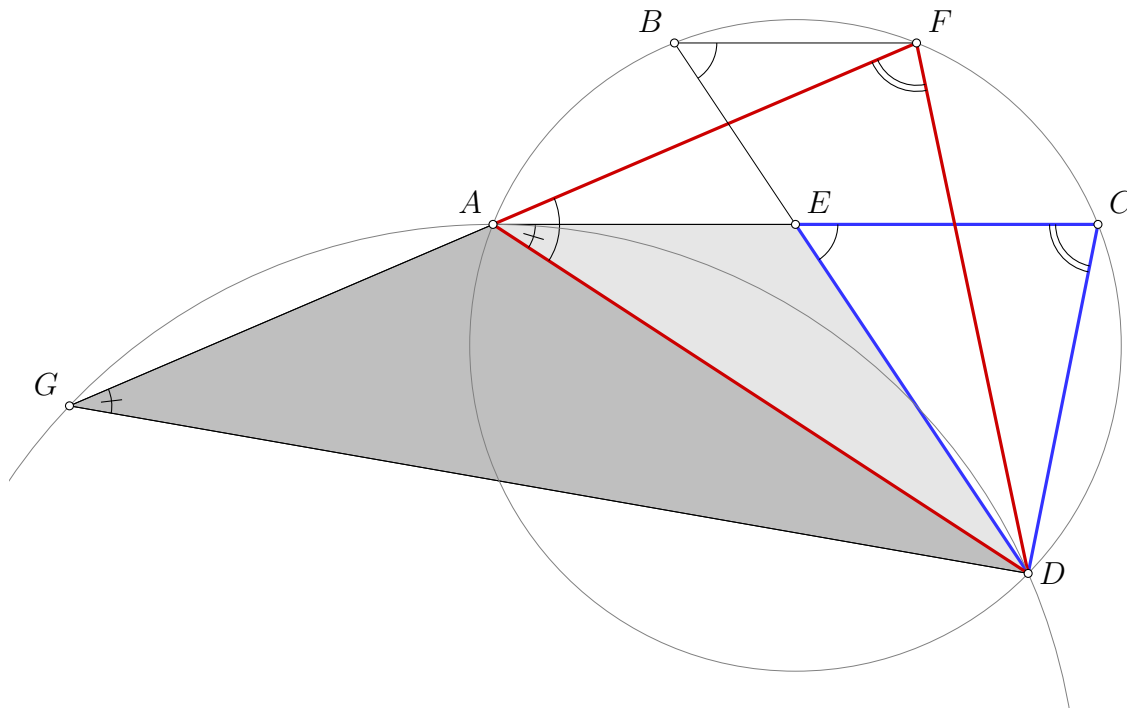
L'exercice est plutôt bien résolu, voici quelques commentaires :

- La solution la plus trouvée est probablement celle de la solution 1, bravo aux élèves qui ont vu cette factorisation pas facile à voir.
- Les inégalités de base (celles qui sont normalement vues au collège), principalement le passage à l'inverse, ne sont pas acquises. Par exemple, on a pu régulièrement voir des élèves affirmer que si $A \geq B$ et $C \geq D$ alors $A/C \geq B/D$ lorsque les 4 réels sont strictement positifs. C'est faux : $(A, B, C, D) = (4, 3, 4, 1)$ donne un contre-exemple à cette proposition. Passer à l'inverse change de sens les inégalités : si $C \geq D > 0$, alors $\frac{1}{C} \leq \frac{1}{D}$. Donc pour minorer une fraction, il faut majorer son dénominateur, *i.e.* trouver une quantité plus grande que celui-ci.
- Plusieurs élèves ont tenté d'utiliser des inégalités dans le mauvais sens, comme par exemple l'inégalité des mauvais élèves. En cas de doute sur le sens d'une inégalité, il faut vérifier que l'inégalité est vraie sur des exemples.
- On pouvait voir dès le début qu'on avait égalité lorsque $a = b = c = 1$. Toute inégalité employée qui n'était pas une égalité pour $a = b = c = 1$ empêche de prouver l'inégalité de départ.
- L'erreur la plus souvent commise est de faire des inégalités trop brutales et de se retrouver à devoir prouver une inégalité fausse. Par exemple, en appliquant plusieurs fois l'inégalité arithmético-géométrique sur les numérateurs du terme de gauche, on pouvait dire que si $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^2a^2}{c^2+a^2+ca} \geq 1$, alors l'inégalité de base était vérifiée. Or cette inégalité est fausse : on peut montrer assez facilement que $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^2c^2}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^2a^2}{c^2+a^2+ca} \leq 1$. Il faut donc essayer de tester régulièrement si l'inégalité à laquelle on s'est ramené est vraie, par exemple en testant des valeurs précises de a, b, c . Ici on pouvait tester l'inégalité sur $a = 1, b = 2$ et c très petit par rapport à a et b (puisque même si on ne peut pas prendre $c = 0$, on peut prendre c très petit, ce qui revient à quasiment à remplacer $c = 0$ dans l'inégalité tout en restant dans les conditions de l'énoncé).

Exercice 3. Soient A et C deux points distincts d'un cercle ω et E le milieu du segment $[AC]$. Une droite passant par E coupe le cercle ω en deux points B et D . La parallèle à la droite (AC) passant par B recoupe le cercle ω au point F . Soit G le symétrique du point F par rapport au point A .

Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle circonscrit au triangle ADG .

Solution de l'exercice 3



Une façon commode de montrer que la droite (AC) est tangente au cercle circonscrit au triangle ADG est de montrer l'égalité d'angle $\widehat{DGA} = \widehat{DAC}$.

D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{AFD} = \widehat{ACD}$. Ainsi, si l'énoncé est vrai, les triangles GFD et ACD sont semblables. On va montrer réciproquement que ces deux triangles sont semblables, ce qui impliquera l'égalité d'angles que l'on veut démontrer.

Puisque les droites (EC) et (BF) sont parallèles, on a par égalité des angles correspondants et par le théorème de l'angle inscrit :

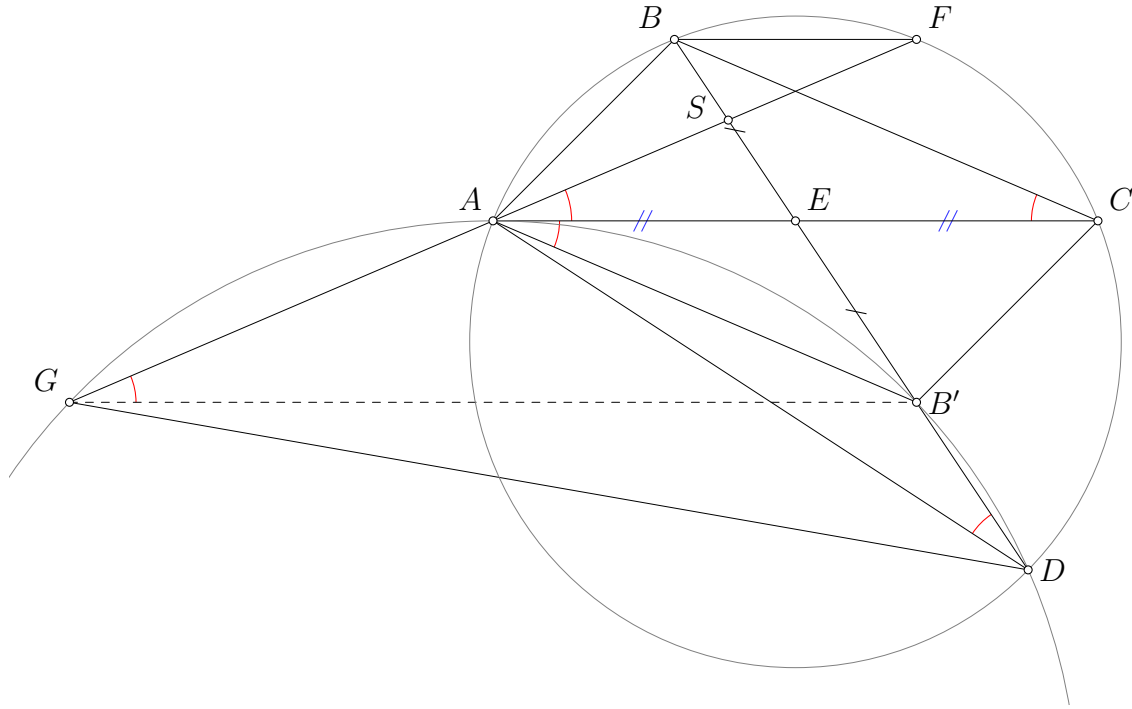
$$\widehat{DEC} = \widehat{DBF} = \widehat{DAF}.$$

Combinée avec l'égalité $\widehat{AFD} = \widehat{ECD}$, cette égalité d'angle implique que les triangles ECD et AFD sont semblables. On a donc, en utilisant que E et A sont respectivement les milieux des segments $[AC]$ et $[GF]$,

$$\frac{FG}{DF} = 2 \cdot \frac{FA}{DF} = 2 \cdot \frac{CE}{CD} = \frac{AC}{CD}.$$

Les triangles ACD et GFD sont donc semblables, ce qui implique l'égalité d'angle $\widehat{DGA} = \widehat{DAC}$ comme voulu.

Solution alternative n°1



La présence de milieux de segment nous invite à introduire un nouveau point dans le but de former un parallélogramme. Cette méthode permet de transformer l'hypothèse de milieu, qui est une hypothèse de longueur, en une hypothèse d'angle, bien plus pratique en présence de polygones cycliques.

On introduit donc B' le symétrique du point B par rapport au point E . Le quadrilatère $BAB'C$ est alors un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu.

Le point B' semble appartenir au cercle circonscrit au triangle ADG , on va commencer par démontrer ce point. Notons S le point d'intersection des droites (BE) et (AF) . Puisque les droites (BF) et (AE) sont parallèles, on a d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{SB}{SE} = \frac{SF}{SA}.$$

En ajoutant 1 des deux côtés de l'égalité, on trouve

$$\frac{EB}{SE} = \frac{AF}{SA}.$$

Finalement, en utilisant les hypothèses de milieu,

$$\frac{EB'}{SE} = \frac{AG}{SA}.$$

On conclut par la réciproque du théorème de Thalès que les droites (AE) et (BG) sont parallèles. D'autre part, puisque le quadrilatère $BFCA$ est un trapèze inscrit dans un cercle, il est isocèle. Ainsi,

$$\widehat{B'GA} = \widehat{CAF} = \widehat{BCA} = \widehat{BDA},$$

si bien que les points A, B', D et G sont bien cocycliques.

Puisque le quadrilatère $BAB'C$ est un parallélogramme, on trouve d'autre part

$$\widehat{B'GA} = \widehat{BCA} = \widehat{B'AC},$$

ce qui prouve bien que la droite (AC) est tangente au cercle circonscrit au triangle ADG .

Remarque : Une fois que l'on a montré que les points G, A, B' et D sont cocycliques, on peut également conclure de la façon suivante :

Les égalités de longueurs $AG = AF = BC = AB'$ impliquent que le point A est le pôle Sud du sommet D dans le triangle $B'DG$. La tangente au cercle circonscrit au triangle $B'DG$ au point A est alors la parallèle à $(B'G)$ passant par A , c'est-à-dire la droite (AC) .

Commentaire des correcteurs

L'exercice est plutôt bien réussi pour sa position. De nombreux élèves ont correctement identifié qu'il fallait s'intéresser aux nombreux triangles semblables sur la figure, et ont démontré une aisance très satisfaisante avec cette notion. On déplore toutefois l'absence de figure dans de nombreuses copies, ce qui est inacceptable si de nouveaux points ou de nouvelles notations sont introduits.

Quelques conseils supplémentaires :

- Si vous pensez avoir une preuve complète, vérifiez si vous avez bien utilisé toutes les hypothèses de l'énoncé. Cela permet souvent de détecter rapidement une erreur éventuelle.
- De manière générale, essayez de traduire les hypothèses de l'énoncé en quelque chose de plus maniable : ici par exemple, le parallélisme donne des égalités d'angles alternes-internes, et le milieu donne des triangles isométriques $(ABE$ et $FEC)$, donc des longueurs égales.
- Avant d'introduire de nouveaux points, commencez à travailler avec ceux qui vous sont donnés. On se retrouve souvent pris au piège en ajoutant de plus en plus de nouveaux points et en déduisant de nouvelles égalités d'angles, ce qui donne l'impression d'avancer alors qu'en réalité on s'enfonce dans des raisonnements qui tournent en rond et ne donnent pas de nouvelles informations sur les points de l'énoncé. Une règle générale simple à retenir : un nouveau point n'est utile que s'il peut être relié aux points déjà existants de deux manières différentes. C'est par exemple le cas du point B' de la solution ci-dessus : il est défini comme le symétrique de B par rapport à E , mais on conjecture également qu'il appartient au cercle circonscrit à ADG . Si on arrive à démontrer ce fait, le point B' a donc de bonnes chances de s'avérer utile.

Exercice 4. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $s(n) = 1 + 2 + \dots + n$ la somme des n premiers entiers strictement positifs. On définit la suite de nombres $a_1, a_2, \dots$ comme suit : $a_1 = 1$ et, si $n \geq 1$, a_{n+1} est le plus petit entier m tel que $s(m) - s(a_n)$ est un carré parfait strictement positif.

Déterminer a_{2024} .

Solution de l'exercice 4

Réponse : $a_{2024} = \frac{3^{2024} - 1}{2}$.

Remarque : On peut deviner que $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ par exemple en calculant les premières valeurs de la suite (a_n) .

On prouve que $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ pour tout entier $n \geq 1$ par récurrence sur $n \geq 1$.

Initialisation : Si $n = 1$, on a bien $a_1 = 1 = \frac{3^1 - 1}{2}$.

Hérédité : On suppose que $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ pour un certain $n \geq 1$ fixé. D'après la condition de l'énoncé, il existe un entier $c > 0$ tel que

$$s(a_{n+1}) = s(a_n) + c^2.$$

En utilisant la formule $s(n) = \frac{n(n+1)}{2}$, il vient

$$\frac{a_{n+1}(a_{n+1} + 1)}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^n + 1}{2} \cdot \frac{3^n - 1}{2} + c^2.$$

Cette équation se réécrit, après multiplication par 8 et en ajoutant 1 des deux côtés,

$$(2a_{n+1} + 1)^2 = 3^{2n} + 8c^2.$$

Soit $\alpha = v_3(2a_{n+1} + 1)$ et β tel que $2a_{n+1} + 1 = 3^\alpha \beta$. On a alors

$$3^{2\alpha} \beta^2 - 3^{2n} = 8c^2.$$

Supposons que $\alpha < n$. Notons que $3^{2\alpha}$ divise le côté gauche donc aussi le côté droit de l'équation. Puisque 3 et 8 sont premiers entre eux, ceci implique que $3^{2\alpha} \mid c^2$ donc que $3^\alpha \mid c$. On pose $d = c/3^\alpha$. Alors l'équation devient

$$\beta^2 - 3^{2(n-\alpha)} = 8d^2.$$

Comme 3 divise $3^{2(n-\alpha)}$ mais 3 ne divise pas β^2 , 3 ne divise pas non plus d . Ainsi, en regardant cette équation modulo 3 on trouve

$$1 \equiv \beta^2 \equiv 8d^2 \equiv 8 \equiv 2 \pmod{3}.$$

Comme c'est impossible, on déduit que $\alpha \geq n$.

Mais alors 3^n divise c , ce qui implique que $c \geq 3^n$. On a alors

$$(2a_{n+1} + 1)^2 \geq 3^{2n} + 8 \cdot 3^{2n} = 9^{n+1}.$$

On déduit que $a_{n+1} \geq \frac{3^{n+1} - 1}{2}$. Or, le nombre $m = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ vérifie bien que

$$s(m) - s(a_n) = \frac{(3^{n+1} + 1)(3^{n+1} - 1)}{8} - \frac{(3^n + 1)(3^n - 1)}{8} = \frac{9^{n+1} - 9^n}{8} = (3^n)^2$$

est un carré parfait. C'est donc le plus petit entier avec cette propriété, et $a_{n+1} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$, ce qui achève la récurrence.

Commentaire des correcteurs

Seuls deux élèves ont su avancer substantiellement dans cet exercice difficile à attaquer. De nombreux élèves ont toutefois su traiter les petits cas et en déduire une conjecture sur la valeur de a_n pour tout n ce que nous saluons : il s'agit de la première étape incontournable pour résoudre ce genre d'exercice. Cela permettait d'avoir l'idée de procéder à une récurrence, dans laquelle on relève un écueil majeur : de nombreux élèves en manque d'inspiration ont décidé de remplacer a_{n+1} par la valeur qu'ils souhaitent obtenir, et en déduisent que les calculs fonctionnent. Cela permet simplement de vérifier que la conjecture précédente n'est pas fausse puisqu'on tombe bien sur un carré parfait, mais en aucun cas cela ne permet de déduire que la valeur conjecturée est la plus petite vérifiant l'équation. Il était bien plus judicieux d'écrire l'équation que l'on obtient en fonction de a_{n+1} dans l'hérédité, et de travailler à partir de celle-ci.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif. Une classe de n élèves participe à n courses. À l'issue de chaque course, les élèves sont classés selon leur rang d'arrivée et on suppose que deux élèves ont toujours deux rangs distincts. Lorsque a et b sont des entiers strictement positifs, un élève est dit *éligible* à la note (a, b) s'il a obtenu un rang inférieur ou égal à b à au moins a courses. Le score final d'un élève correspond au maximum des valeurs $a - b$ parmi tous les couples (a, b) auxquels l'élève est éligible.

Déterminer, en fonction de n , la plus grande valeur que peut prendre la somme des scores des n élèves de la classe.

Solution de l'exercice 5

Réponse : La plus grande valeur est $\frac{n(n-1)}{2}$.

L'énoncé demande de déterminer la plus grande valeur que peut prendre la somme des scores, sa solution contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que la somme des scores est toujours inférieure ou égale à $\frac{n(n-1)}{2}$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on fournit un exemple d'une classe dans laquelle la somme des scores vaut exactement $\frac{n(n-1)}{2}$, cette étape s'appelle *la construction*.

Analyse :

Notons que les scores des élèves sont tous positifs, puisqu'ils sont tous éligibles à la note (n, n) . Fixons un élève c de score s_c et notons $r_1^c \leq \dots \leq r_n^c$ ses rangs aux n courses, triés dans l'ordre croissant. Soit (a, b) une note telle que $s_c = a - b$. Comme l'élève est arrivé dans les b premiers aux a premières courses, donc $r_a^c \leq b$. On déduit

$$r_1^c + \dots + r_n^c \leq (r_1^c + \dots + r_a^c) + (r_{a+1}^c + \dots + r_n^c) \leq ar_a^c + (n-a)n \leq nr_a^c + (n-a)n = n^2 - ns_c.$$

En sommant cette inégalité pour tous les élèves, on trouve

$$n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \sum_c (r_1^c + \dots + r_n^c) \leq n^3 - n \sum_c s_c.$$

Après simplification, on a bien $\sum_c s_c \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Construction : Considérons une classe de n élèves dans laquelle l'élève numéro i est arrivé en i -ème position à toutes les courses. Comme il n'est jamais arrivé en $i-1$ ème position, l'élève i n'est éligible à aucune note de la forme $(a, i-1)$. Son score est donc au plus $a - i \leq n - i$. De plus, l'élève i est éligible à la note (n, i) , donc son score est exactement $n - i$. La somme des scores des élèves de la classe est alors

$$\sum_{i=1}^n n - i = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Remarque : On a en fait $r_a^c = b$: si on avait $r_a^c \leq b-1$, alors l'élève serait éligible à $(a, b-1)$, ce qui contredirait la maximalité de s_c . Cette égalité n'est pas nécessaire à la résolution de l'exercice, l'inégalité $r_a^c \leq b$ suffit.

Solution alternative n°1

On propose une deuxième façon de réaliser l'analyse. On suppose connu le résultat de chaque course. On montre par récurrence sur k la propriété suivante :

Il est possible de réordonner le classement de certaines courses, sans diminuer la somme totale des scores de la classe et de sorte que les top k de chaque course sont les mêmes (i.e, la même personne a fini première de chaque course, la même personne a fini deuxième de chaque course etc...).

Initialisation : Si $k = 0$, il n'y a rien à faire.

Hérédité : On suppose que le top $k - 1$ est le même pour chaque course, et on montre qu'il est possible de modifier le classement de certaines courses sans diminuer la somme totale des scores, de sorte que le top k est le même pour chaque course.

On dit qu'un élève a b -scoré si il existe a tel qu'il est éligible à la note (a, b) et que son score vaut $s = a - b$.

Supposons dans un premier temps qu'il existe un élève c qui a k -scoré. Par hypothèse de récurrence, l'élève a fini au mieux k -ème à chaque course. Si c n'a pas fini k -ème lors d'une course, on échange son classement avec celui de l'élève (noté c') ayant fini k -ème. Cet échange augmente le score de c de 1, tandis qu'il diminue le score de c' d'au plus 1 : pour tout couple (a, b) auquel c' est éligible, alors c' est toujours éligible à la note $(a - 1, b)$ après cet échange.

On effectue une telle opération pour chaque course à laquelle c n'a pas fini k -ème. Une fois ces modifications effectuées, le score total n'a pas diminué et l'élève c est arrivé k -ème à chaque course.

Supposons maintenant qu'aucun élève n'a k -scoré. Notons ℓ le plus petit entier supérieur à k tel qu'il existe un élève, noté c , ayant ℓ -scoré. On suppose que le score s de l'élève s'écrit $s = a - \ell$. Comme $s \geq 0$, $a \geq \ell$. Ainsi, il existe au moins ℓ courses auxquelles c a obtenu un rang compris entre k et ℓ . Pour chacune de ces courses, on réorganise le classement des élèves avec un rang compris entre k et ℓ , de sorte que c finisse k -ème (le rang des autres élèves est arbitrairement). Alors c est éligible à la note (a, k) , donc son score a augmenté d'au moins $k - \ell$. Si au cours de cette modification, le score d'un autre élève avait diminué, cela voudrait dire que l'élève a m -scoré avec $m \geq \ell + 1$, contredisant la maximalité de ℓ . On s'est ramené au cas précédent sans avoir diminué la somme totale des scores.

Notons enfin, pour achever la récurrence, que les opérations décrites précédemment n'affectent pas le top $k - 1$ de chaque course.

Lors de chaque étape de la récurrence, on construit à k fixé un élève finissant k -ème à toutes les courses. Ainsi, à l'issue de cette récurrence, on aboutit à une configuration dans laquelle chaque élève a toujours le même classement, ce qui correspond à la situation de la synthèse, pour laquelle la somme des scores vaut $\frac{n(n-1)}{2}$. Ceci conclut l'analyse.

Remarque : On présente une stratégie qui peut sembler proche de la stratégie précédente mais qui ne fonctionne pas. Supposons que deux élèves c et c' ont respectivement k -scoré et ℓ -scoré, avec $k < \ell$, mais tels qu'à une course, c s'est classé après c' . Il est tentant de vouloir échanger le classement de c et c' à cette course. Toutefois, cet échange pourrait diminuer le score de c' sans augmenter le score de c . On pourra méditer l'exemple où $k = 1, \ell = 4$, et il existe une course où c' est arrivé 3ème à une course, et c 6-ème, et où échanger leur classement à cette course diminue le score de c' sans augmenter celui de c .

Solution alternative n°2

Étant donnés deux entiers $a \geq 0$ et $b \geq 0$ on dit que l'élève E est éligible à la paire (a, b) après k courses si, au cours de ces k courses, il y en a au moins a où il a fini parmi les b élèves les plus rapides. Tout élève est donc éligible à la paire $(0, 0)$. Le score de E après ces k courses est le maximum des différences $a - b$ pour lesquelles E est éligible à la paire (a, b) .

Avant la première course, tout élève a $(0, 0)$ pour score. Ensuite, la $k^{\text{ème}}$ course augmente le score de chaque élève d'au plus 1, et ne peut le faire que pour $k - 1$ élèves au maximum. En effet, si un élève E est éligible à la paire (a, b) après cette course, il était éligible à la paire $(a - 1, b)$ avant la course, donc son score a augmenté d'au plus 1. De surcroît, si le score de E a effectivement augmenté, c'est que E est maintenant éligible à une paire (a, b) pour laquelle $a - b$ est son nouveau score; E n'était pas éligible à la paire (a, b) , donc il vient de finir parmi les b premiers. En outre, le score de E vient d'augmenter, donc $a - b$ est strictement plus grand que l'ancien score, qui valait au moins 0, de sorte que $k \geq a > b$.

En conclusion, la somme des scores des élèves augmente d'au plus $k - 1$ lors de la $k^{\text{ème}}$ course, et après n courses, cette somme vaut au plus $1 + 2 + \dots + (n - 1) = n(n - 1)/2$.

Solution alternative n°3

On présente une quatrième façon de réaliser l'analyse, ici assez astucieuse. Pour chaque course, on attribue à l'élève ayant fini à la k -ème place le nombre $1 - \frac{k}{n}$. Si un élève possède un score s réalisé par le couple (a, b) , alors la somme des nombres de l'élève est supérieure à

$$a \left(1 - \frac{b}{n}\right) \geq a - b = s.$$

Ainsi, la somme des scores des élèves est inférieure à la somme des nombres distribués, qui vaut

$$n \sum_{k=1}^n 1 - \frac{k}{n} = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Commentaire des correcteurs

La construction d'une configuration permettant d'obtenir un score de $n(n - 1)/2$ a été très réussie. Néanmoins, elle était beaucoup plus facile que l'analyse, et c'est pourquoi elle a été très peu valorisée, avec seulement 1 pt sur les 7 de l'exercice.

Pour obtenir les 6 points de l'analyse, qui consistait à démontrer que nul score ne pouvait dépasser $n(n - 1)/2$, beaucoup d'élèves ont proposé des algorithmes qui échangeaient les rangs de courses entre élèves; mais cela n'était très souvent pas suffisant, et ces preuves se sont souvent soldées par des notes plus faibles que les élèves n'auraient pu l'espérer. De fait, cette partie du problème était plus difficile que sa position dans le test ne le laissait supposer.

Une proportion significative des élèves ont échoué à démontrer que leurs algorithmes ne baissaient pas le score global de la classe : par exemple, ils ne s'intéressaient qu'au score du sportif dont le rang était amélioré au cours de l'échange, mais pas à celui qui se trouvait lésé par l'échange. Beaucoup d'autres (parfois, les mêmes) ont en fait fourni des algorithmes dont la terminaison n'était pas assurée : il était possible de faire s'échanger indéfiniment les rangs de deux élèves à une même course, et toute preuve basée sur la situation à la fin de l'algorithme était donc nulle et non avenue.

Enfin, les correcteurs sont très déçus non pas du contenu mathématique des copies que de la qualité de la rédaction : en mathématiques comme en toute chose, l'important est moins d'avoir trouvé le bon résultat que d'en avoir convaincu son lecteur.

On ne compte plus le nombre de notations absconses qui rendent la correction très difficile ou bien désagréable et bien trop souvent les deux ; par exemple, quand n désigne déjà le nombre de coureurs, décider d'appeler n_n l'élève arrivé $n^{\text{ème}}$ à la $n^{\text{ème}}$ course n'est manifestement pas raisonnable. En outre, de nombreux élèves ont confondu les notions de « mieux » et de « supérieur », ce qui n'aidait bien sûr pas les correcteurs, mais pas les élèves non plus : combien de fois un élève a-t-il écrit deux inégalités opposées car il avait oublié le sens qu'il avait donné au mot « supérieur », pour ensuite conclure directement alors qu'il n'avait encore rien démontré !

Certaines descriptions étaient aussi particulièrement alambiquées, culminant avec une phrase de 61 mots.

De mauvaises notations et une rédaction peu claire ont le double désavantage de mettre les correcteurs dans de mauvaises dispositions et de vous faire faire des erreurs. En particulier, si d'infinis efforts ont ici été fournis pour décrypter l'ensemble des idées des élèves, dans d'autres circonstances (examens, concours), la plupart des correcteurs ne seront pas en mesure de fournir de tels efforts : le correcteur qui a 500 copies à corriger ne peut guère se permettre le luxe de passer jusqu'à 90 minutes sur certaines d'entre elles.

Exercice 6. Déterminer toutes les suites infinies $a_1, a_2, \dots$ d'entiers strictement positifs telles que, pour toute paire (m, n) d'entiers strictement positifs pour laquelle $m \leq n$, les nombres

$$\frac{a_m + a_{m+1} + \dots + a_n}{n - m + 1} \quad \text{et} \quad (a_m a_{m+1} \dots a_n)^{\frac{1}{n-m+1}}$$

sont tous les deux entiers.

Solution de l'exercice 6

Réponse : Seules les suites constantes sont solutions.

On vérifie que les suites constantes sont bien solutions du problème. Le problème consiste à montrer que ce sont les seules. La première étape de l'exercice est commune à toutes les solutions. On présente ensuite plusieurs façons différentes d'utiliser cette étape pour résoudre l'exercice.

Pour tout nombre premier et tout entier a , on note $v_p(a)$ la valuation p -adique de a .

Étape 1 :

Soit n un indice fixé. Montrons que, pour tout nombre premier p , les suites $(a_k)_k$ et $(v_p(a_k))_k$ sont périodiques modulo n de période n . Si $k \geq 1$, l'hypothèse de l'énoncé indique que

$$n \mid a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+n-1} \quad \text{et} \quad n \mid a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+n}.$$

Donc n divise la différence de ces deux sommes, à savoir $a_{k+n} - a_k$, ce qui signifie bien que $a_{k+n} \equiv a_k \pmod{n}$. On prouve de la même manière que $v_p(a_{k+n}) \equiv v_p(a_k) \pmod{n}$ en remarquant que la seconde hypothèse de l'énoncé se réécrit comme la propriété que $\frac{v_p(a_n) + \dots + v_p(a_m)}{n - m + 1}$ est un entier pour tous entiers $m < n$ et tout nombre premier p .

Étape 2 : Conclusion.

Soit p un nombre premier. Posons $\alpha = v_p(a_1)$. Pour tout entier m , d'après l'étape précédente, $a_{mp^{\alpha+1}+1} \equiv a_1 \equiv 0 \pmod{p^\alpha}$ et $a_{mp^{\alpha+1}+1} \equiv a_1 \not\equiv 0 \pmod{p^{\alpha+1}}$, donc $v_p(a_{mp^{\alpha+1}+1}) = \alpha$. Mais alors pour tout indice k et tout indice m , on a $mp^{\alpha+1} - k \mid v_p(a_{mp^{\alpha+1}+1}) - v_p(a_k) = \alpha - v_p(a_k)$. Comme cette divisibilité est vraie pour tout entier m , le nombre $\alpha - v_p(a_k)$ admet une infinité de diviseurs, il est donc nul et $v_p(a_k) = \alpha = v_p(a_1)$ pour tout indice k . Comme cette relation est vraie pour tout nombre premier p et tout indice k , la suite (a_n) est constante.

Solution alternative n°1

Soit m un entier fixé. Montrons que a_m divise tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. Pour cela, on pose $n_0 = \max\{v_p(a_m) + m + 1, p \text{ premier}\}$. D'après l'étape 1, si $n \geq n_0$ et p est un nombre premier, $v_p(a_n) \equiv v_p(a_m) \pmod{n - m}$, ce qui implique notamment que $v_p(a_m) \leq v_p(a_n)$. Ainsi, a_m divise a_n dès que $n_0 \geq n$.

En supposant qu'il existe au moins un terme de la suite que a_m ne divise pas, notons $k = \max\{n, a_m \text{ ne divise pas } a_n\}$. On a alors modulo a_m ,

$$0 \equiv a_k + a_{k+1} + \dots + a_{k+a_m-1} \equiv a_k \pmod{a_m},$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur k . Ainsi, a_m divise tous les termes de la suite. Mais alors en particulier $a_m \mid a_1$ et par symétrie $a_1 \mid a_m$, donc $a_1 = a_m$ et à nouveau, la suite est constante.

Solution alternative n°2

On veut montrer ici aussi que tous les termes de la suite se divisent entre eux. On suppose que la suite est non constante. On dispose donc de deux indices i et j tels que $a_i \neq a_j$. On a donc a_i qui ne divise pas a_j ou a_j qui ne divise pas a_i . Disons, quitte à inverser les rôles, que a_i ne divise pas a_j . Il existe donc un nombre premier p , un entier r et deux indices i et j tels que $p^r \mid a_i$ mais p^r ne divise pas a_j . Soit $q > \max(p^r, v_p(a_i))$ un entier non divisible par p . Alors d'après l'étape 1, $v_p(a_{i+qm}) \equiv v_p(a_i) \pmod q$ pour tout m , ce qui signifie en particulier que $v_p(a_{i+qm})$ est non nul pour tout m .

En choisissant un entier m tel que $i + qm \equiv j \pmod{p^r}$ (un tel entier existe car q est premier avec p). On déduit que

$$a_j \equiv a_{i+qm} = 0 \pmod{p^r},$$

ce qui est absurde. Ainsi, la suite (a_n) est constante, ce que nous souhaitons.

Solution alternative n°3

Dans cette solution, on commence par prouver que $a_{n+1} \mid a_n$. On suppose pour cela que ce n'est pas le cas et qu'il existe un nombre premier p tel que $v_p(a_{n+1}) > v_p(a_n)$. Notons $r = v_p(a_{n+1})$. D'après l'étape 1, pour tout entier k , on a alors $a_{n+kp^r} \equiv a_n \not\equiv 0 \pmod{p^r}$, de sorte que $v_p(a_{n+kp^r}) < r$. Mais alors, d'après l'étape 1,

$$kp^r - 1 \mid v_p(a_{n+1}) - v_p(a_{n+kp^r}).$$

Le terme de droite de cette expression est bien non nul, ce qui implique $kp^r - 1 \leq v_p(a_{n+1}) - v_p(a_{n+kp^r}) \leq r$, ce qui est absurde.

Ainsi, $a_{n+1} \mid a_n$ pour tout n . En particulier, $a_{n+1} \leq a_n$. La suite (a_n) est donc une suite décroissante d'entiers strictement positifs, ce qui implique qu'à partir d'un certain rang, cette suite est constante égale à c . Mais alors pour tout entier m et tout entier n , il existe un entier k suffisamment grand tel que $a_{n+km} = c$. Comme $a_n \equiv a_{n+km} = c \pmod m$, m est un diviseur de $a_n - c$. L'entier $a_n - c$ admet une infinité de diviseurs, il est donc nul et la suite est constante égale à c .

Solution alternative n°4

D'après l'étape 1, pour tout n et tout p , $v_p(a_{i+n}) \equiv v_p(a_i) \pmod n$, ce qui signifie que a_{i+n}/a_i est une puissance n -ème d'un nombre rationnel.

Soit p un nombre premier et soit a_i et a_j deux entiers non divisibles par p . Puisque $i + p(j-i) \equiv j \pmod{p-1}$, le nombre $a_{i+p(j-i)}/a_i$ est une puissance $p-1$ -ème d'un rationnel. Il existe donc trois entiers t, u et v tels que $a_{i+p(j-i)} = tu^{p-1}$ et $a_j = tv^{p-1}$. Notons que p ne divise ni u et v car p ne divise ni a_i ni $a_{i+p(j-i)}$. Comme de plus $i + p(j-i) \equiv i \pmod p$, on a d'après l'étape 1 et le petit théorème de Fermat :

$$a_j \equiv t \equiv a_{i+p(j-i)} \equiv a_i \pmod p.$$

Ainsi, tous les entiers de la suite qui ne sont pas divisibles par p admettent tous le même reste t modulo p . En sommant sur p termes consécutifs, on trouve

$$0 = a_i + \dots + a_{i+p-1} \equiv t \cdot |\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, a_{i+k} \not\equiv 0 \pmod p\}|.$$

Ceci implique que $t \equiv 0 \pmod p$ (ce qui contredit que $a_i \not\equiv 0 \pmod p$) ou que $|\{k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, a_{i+k} \not\equiv 0 \pmod p\}| = p$. On obtient donc que, soit tous les a_i sont divisibles

par p , soit qu'ils ont tous le même reste modulo p . Ainsi, pour un tout q ne divisant pas a_1 et tout indice i , $a_i \equiv a_1 \pmod{q}$. Le nombre $a_i - a_1$ admet alors une infinité de diviseur et est donc nul, ce qui implique que la suite est constante.

Remarque : Si l'on se restreint uniquement à l'hypothèse que les moyennes arithmétiques sont entières, il existe des suites (a_n) non constantes vérifiant la propriété, par exemple la suite définie par $a_n = 2n$ pour tout n .

Si l'on se restreint uniquement à l'hypothèse que les moyennes géométriques sont entières, la suite a_n définie par $a_n = 2^{2^n}$ vérifie la propriété de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs

Le problème comportait deux étapes. La première étape a été attaquée par beaucoup d'élèves, la deuxième étape a été sensiblement moins réussie et seule une dizaine d'élèves y ont fait des progrès. On relève les observations suivantes :

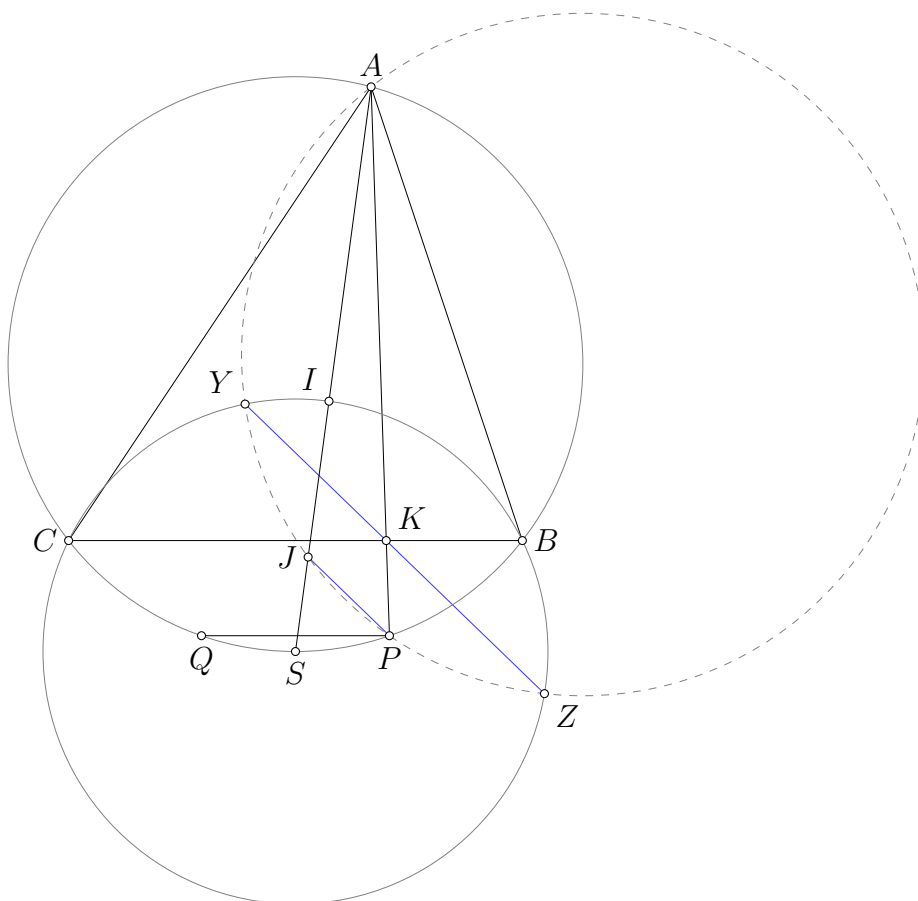
- Le premier réflexe de ce problème est de trouver les suites vérifiant le problème. De nombreux élèves se sont intéressés aux suites arithmétiques et géométriques vérifiant l'énoncé, ou ont juste expliqué pourquoi les suites constantes étaient solution. C'est un très bon réflexe, mais cela ne rapportait ici aucun point. En effet, cette étape était bien plus facile que le reste du problème. Mais certains élèves n'ont même pas vu que les suites constantes étaient solution : si on ne sait pas qu'on veut prouver (ici que toute suite vérifiant l'énoncé est constante), il est très difficile de trouver des éléments pertinents pour la preuve.
- Une difficulté était d'être capable de combiner les deux hypothèses : celle que les moyennes arithmétiques sont entières, et celle que les moyennes géométriques sont entières. Une bonne partie des élèves s'est retrouvée bloquée parce qu'elle n'exploitait que l'une de ces deux hypothèses.
Plus précisément, on peut construire des suites non constantes vérifiant la première hypothèse, ou vérifiant la seconde par récurrence en utilisant le lemme chinois. Toute preuve n'utilisant qu'une des deux hypothèses était donc vouée à l'échec.
- Peu d'élèves ont pensé à regarder les valuations p -adiques dans les différentes moyennes géométriques. C'est dommage car il est connu qu'un entier est une puissance k -ème si et seulement si k divise toutes ses valuations p -adiques. Réécrire l'hypothèse de moyenne géométrique ainsi était un vrai pas vers la solution (sans pour autant rapporter de points).
- Une autre difficulté était d'être capable d'exploiter le fait que ces moyennes étaient entières pour tous m et tout n . Quelques élèves se sont cantonnés à exploiter l'énoncé en prenant $m = 1$, mais surtout beaucoup d'élèves ont seulement travaillé avec des moyennes de deux éléments ($n = m + 1$), obtenant donc que les nombres sont de même parité, sans pouvoir avancer plus loin.
- Une erreur croisée plusieurs fois était de vouloir trop simplifier l'énoncé : quelques élèves ont affirmé que si la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ était solution, alors la suite $(a_n/d)_{n \geq 1}$ (où d serait un éventuel diviseur commun de tous les termes de la suite) était également solution. Malheureusement, une telle suite ne vérifie plus forcément que les moyennes arithmétiques de termes consécutifs sont entières. Par exemple, la suite définie par $a_n = 2n$ vérifie l'hypothèse que les moyennes arithmétiques de termes consécutifs sont entières, mais la suite définie par $a_n = n$ ne le vérifie plus.
- De nombreuses copies ont fait des erreurs arithmétiques basiques : un produit de n termes peut être une puissance n -ème sans que tous les termes soient égaux, être

divisible par un carré n'implique pas être un carré, simplifier par un terme non premier avec le modulo, etc. Avant d'écrire une affirmation, il est important de bien vérifier qu'elle est correcte, par exemple en testant l'affirmation dans certains cas.

Exercice 7. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On note Ω le cercle circonscrit au triangle BIC . Soit K un point à l'intérieur du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAK} < \widehat{KAC}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BKA}$ coupe Ω en deux points W et X , de sorte que les points A et W sont situés dans le même demi-plan délimité par la droite (BC) . La bissectrice de l'angle $\widehat{CKA}$ coupe Ω en deux points Y et Z , de sorte que les points A et Y sont situés dans le même demi-plan délimité par la droite (BC) .

Montrer que $\widehat{WAY} = \widehat{ZAX}$.

Solution de l'exercice 7



Le point clé de ce problème est de parvenir à montrer que $\widehat{ZAK} = \widehat{IAY}$ que $\widehat{WAK} = \widehat{IAX}$. Si ces deux égalités sont vraies, on aura alors

$$\widehat{WAY} = \widehat{WAK} + \widehat{KAI} + \widehat{IAY} = \widehat{IAX} + \widehat{KAI} + \widehat{ZAK} = \widehat{ZAX}.$$

Les différentes solutions correspondent aux différentes façons de montrer ces deux égalités.

Soit S le pôle Sud du sommet A dans le triangle ABC , qui est également le centre du cercle circonscrit au triangle BIC . On note également P le second point d'intersection de la droite (AK) avec le cercle circonscrit au triangle ABC . Par puissance d'un point, $KA \cdot KP = KB \cdot KC = KY \cdot KZ$, les points A, Y, P et Z sont donc cocycliques.

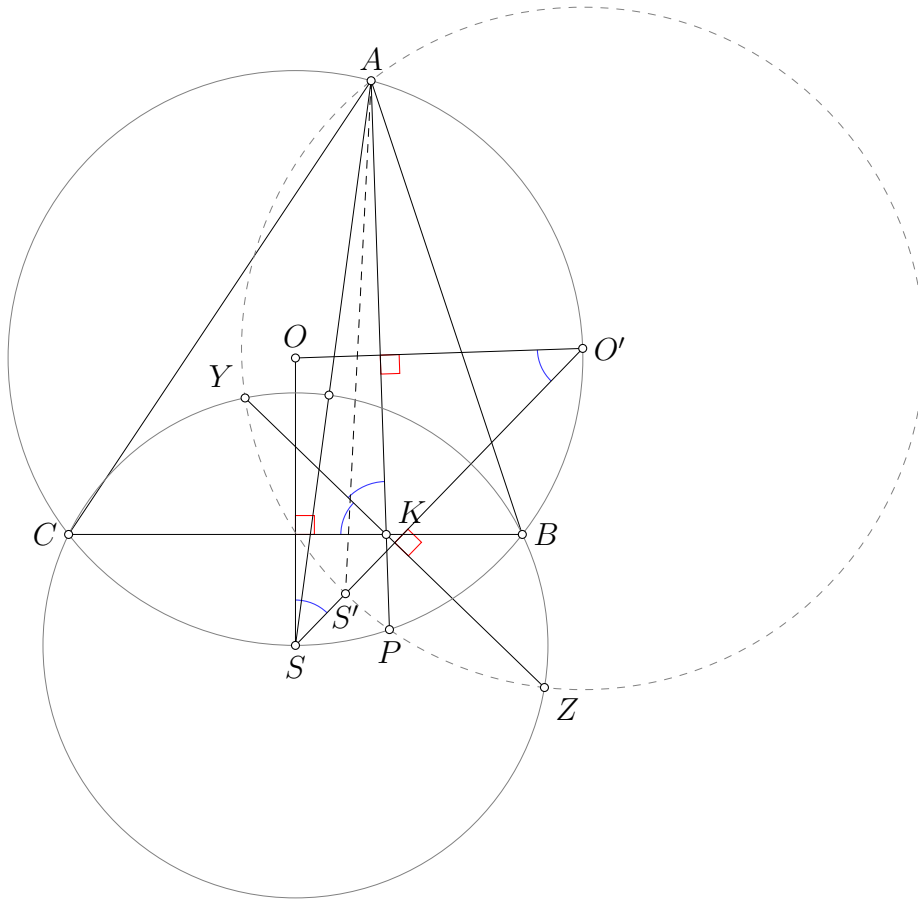
Soit Q le point d'intersection de la parallèle à (BC) passant par P avec le cercle circonscrit au triangle ABC . On note J le centre du cercle inscrit au triangle APQ . Puisque les droites (PJ) et (KY) sont les bissectrices des angles $\widehat{CKA}$ et $\widehat{QPA}$ et que (PQ) et (BC) sont parallèles, les droites (PJ) et (YZ) sont parallèles. De plus, S est le pôle Sud du sommet A dans le

triangle APQ , ce qui implique $SJ = SP$. Donc S est sur la médiatrice de $[PJ]$ et sur la médiatrice de $[YZ]$. Comme les deux segments sont parallèles, leurs médiatrices sont soit parallèles soit confondues, donc elles sont confondues et le quadrilatère $YJPZ$ est un trapèze isocèle, inscrit dans le cercle circonscrit à AYZ . Il vient que $\widehat{YAJ} = \widehat{PAZ}$, ce qui signifie que $\widehat{IAY} = \widehat{KAZ}$.

De la même façon, en introduisant J' le centre du cercle A -exinscrit au triangle APQ , on montre que $\widehat{WAI} = \widehat{XAK}$.

Remarque : Le point J n'est pas introduit par hasard. Le raisonnement plus naturel consiste plutôt à définir J comme le second point d'intersection de (AI) avec le cercle circonscrit à ABC . Pour montrer l'égalité $\widehat{IAY} = \widehat{KAZ}$, il suffit alors de montrer que $YJPZ$ est un trapèze isocèle. Ceci signifierait que (JP) et (YZ) sont parallèles, donc que (PJ) est parallèle à la bissectrice de $\widehat{AKC}$, et donc que (PJ) est elle-même la bissectrice de $\widehat{APQ}$, ce qui implique bien que J est le centre du cercle inscrit à APQ . Une fois ce raisonnement effectué, il est beaucoup plus commode de redéfinir J comme cela est fait dans la solution présentée.

Solution alternative n°1



Dans cette solution, on montre de même que précédemment que P est sur le cercle passant par A, Y et Z et on note O son centre. Dans la suite, on note $\mathcal{C}_{TUV}$ le cercle passant par trois points T, U et V . Comme (YZ) est l'axe radical de $\mathcal{C}_{BCI}$ et $\mathcal{C}_{AYZ}$, $(YZ) \perp (SO')$. Comme (AP) est l'axe radical de $\mathcal{C}_{ABC}$ et $\mathcal{C}_{AYZ}$, $(AP) \perp (OO')$. Enfin, on a aussi $(BC) \perp (OS)$. Ainsi, en appliquant le théorème de l'angle inscrit dans le cercle de diamètre $[KS]$, on déduit que $\widehat{YKC} = \widehat{OSO'}$. De même, $\widehat{OO'S} = \widehat{AKY}$. Ainsi, $\widehat{OO'S} = \widehat{OSO'}$, ce qui signifie que O' est sur $\mathcal{C}_{ABC}$.

Soit S' le pôle Sud du sommet A dans le triangle AYZ . Puisque $\widehat{YAS'} = \widehat{S'AZ}$, il suffit de montrer que $\widehat{SAS'} = \widehat{S'AP}$. Or,

$$\widehat{S'AP} = \frac{1}{2}\widehat{S'O'P} = \frac{1}{2}\widehat{SO'P} = \frac{1}{2}\widehat{SAP}.$$

On déduit l'égalité voulue.

Commentaire des correcteurs

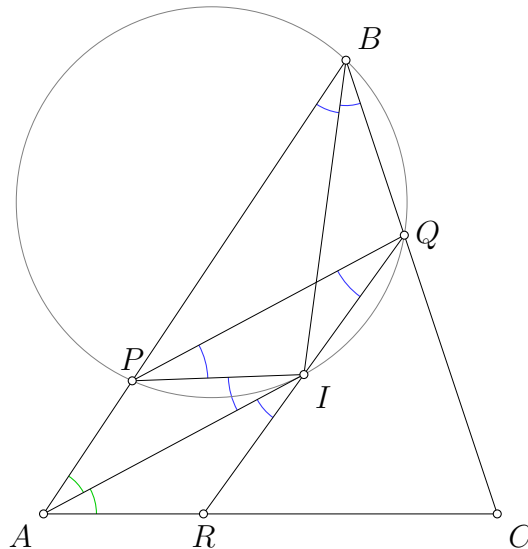
Ce problème était très difficile à démarrer, parce que toutes les premières observations utiles nécessitaient d'introduire un point supplémentaire. Les élèves ayant abordé le problème ont tenté de regarder l'involution de centre A fixant Ω , mais celle-ci ne laissait malheureusement pas W, X, Y, Z stable. D'autres ont proposé de regarder le point de Miquel associé aux quatre points W, X, Y et Z , sans prouver de résultat significatif sur ce point.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On note ω le cercle passant par B et tangent à (AI) en I . Le cercle ω recoupe le segment $[AB]$ au point P et le segment $[BC]$ au point Q . La droite (QI) coupe la droite (AC) au point R .

Montrer que $AR \cdot BQ = PI^2$.

Solution de l'exercice 8



Puisque I est sur la bissectrice de $\widehat{PBQ}$ et sur le cercle circonscrit à PBQ , I est le pôle Sud du sommet B dans le triangle PBQ . On déduit que la tangente (AI) au cercle circonscrit au triangle PBQ en I est parallèle à (PQ) . On a alors $\widehat{PIA} = \widehat{IPQ} = \widehat{IQP} = \widehat{AIR}$. Comme en plus $\widehat{RAI} = \widehat{IAP}$, les triangles API et ARI sont semblables (ils ont deux angles en commun). Comme ils ont en plus le côté AI en commun, ils sont isométriques. On a donc

$$\frac{AR}{PI} = \frac{AP}{PI}.$$

D'autre part, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{BQI} = \widehat{BIA}$. Comme on a aussi $\widehat{IBA} = \widehat{IBQ}$, les triangles BQI et BIA sont semblables. On a alors

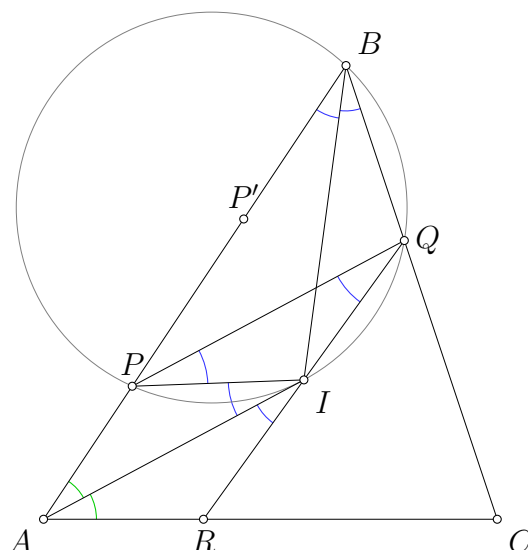
$$\frac{PI}{BQ} = \frac{QI}{BQ} = \frac{AI}{BI}.$$

Enfin, puisque $\widehat{IBA} = \widehat{PQI} = \widehat{PIA}$, les triangles API et AIB ont deux angles en commun et sont donc semblables, ce qui donne

$$\frac{AI}{BI} = \frac{AP}{PI}.$$

En combinant les trois égalités de rapport, on trouve bien $AR \cdot BQ = PI^2$.

Solution alternative n°1



De la même façon que dans la solution 1, on montre que $IQ = IP = IR$. On note P' le second point d'intersection du cercle de centre I avec le segment $[AB]$.

D'après la puissance du point A par rapport au cercle passant par B, Q et P , on a $AI^2 = AP \cdot AB$. La puissance du point A par rapport au cercle de centre I donne de plus $AI^2 - IP^2 = AP \cdot AP'$. En soustrayant ces deux égalités, on trouve $IP^2 = AP \cdot (AB - AP') = AP \cdot BP'$. Il reste donc à montrer que $BP' = BQ$.

Or la symétrie d'axe (BI) envoie (BC) sur (AB) et le cercle de centre I sur lui-même, elle envoie donc Q sur P ou sur P' . Mais si P était l'image de Q par cette symétrie, on aurait $BP = BQ$ et $(AI) \parallel (PQ)$. Si A' est le point d'intersection de (AI) avec (BC) , on déduit que le triangle BAA' est également isocèle, ce qui donne

$$180^\circ = \widehat{ABC} + \widehat{A'AB} + \widehat{AA'B} = \widehat{ABC} + 2 \cdot \frac{1}{2} \widehat{IAB} < 180^\circ.$$

Ainsi, Q est envoyé sur P' et $BQ = BP'$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs

Globalement, l'exercice a été assez bien réussi. Parmi les quelques copies qui n'ont pas eu les points, plusieurs élèves ont réussi à conjecturer certaines des égalités de longueurs de l'exercice, mais les affirmaient sans les démontrer. L'exercice nécessitait de bien maîtriser la chasse aux angles et les triangles semblables et isométriques, qui sont des outils essentiels dans de nombreux problèmes de géométrie.

Exercice 9. Trois réels $a < b < c$ sont dits *en progression géométrique* s'il existe un réel k tel que $b = ka$ et $c = kb$. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer tous les triplets d'entiers en progression géométrique et appartenant tous les trois à l'ensemble $\{n^2, n^2 + 1, \dots, (n+1)^2\}$.

Solution de l'exercice 9

Réponse : Il existe un unique triplet, à savoir $\{n^2, n(n+1), (n+1)^2\}$.

Dans la suite, on appelle *raison* d'un triplet (a, b, c) de réels non nuls en progression géométrique le réel $k = \frac{b}{a}$. On vérifie que $\{n^2, n(n+1), (n+1)^2\}$ est bien en progression géométrique de raison $\frac{n+1}{n}$.

Soient $a < b < c$ trois entiers de $\{n^2, n^2 + 1, \dots, (n+1)^2\}$ en progression géométrique et k leur raison. Comme $k = \frac{b}{a}$, k est rationnel. On note $\frac{p}{q}$ l'écriture de k sous forme de fraction irréductible. De plus, $k > 1$. On a $b = ka$ et $c = k^2a$. Du fait des inégalités $n^2 \leq a$ et $c^2 \leq (n+1)^2$, on trouve

$$k^2 n^2 \leq k^2 a = c \leq (n+1)^2,$$

ce qui implique que $k \leq \frac{n+1}{n}$. Supposons que $q \leq n-1$. Comme $k > 1$, on a $p > q$. Mais alors

$$1 + \frac{1}{n} \geq \frac{p}{q} = 1 + \frac{p-q}{q} \geq 1 + \frac{p-q}{n-1} \geq 1 + \frac{1}{n-1},$$

ce qui est absurde. Ainsi, $q \geq n$.

D'autre part, comme $k^2 a$ est entier et que q^2 est premier avec p^2 , q^2 divise a . En particulier, $a \geq q^2$. Comme $p > q \geq n+1$, il vient

$$(n+1)^2 \geq p^2 \frac{a}{q^2} \geq p^2 \geq (n+1)^2.$$

On déduit que les inégalités utilisées sont des égalités, ce qui signifie que $q = n$, $a = q^2 = n^2$ et $p = n+1$. On trouve donc bien $(a, b, c) = (n^2, n(n+1), (n+1)^2)$.

Solution alternative n°1

Soit (a, b, c) une progression géométrique. La condition de progression géométrique se réécrit $b^2 = ac$, qui se réécrit encore $(c-b)a = (b-a)b$. Posons $d = b-a$. Comme $b > a$, on a $c-b = \frac{b}{a}d > d$, de sorte que $c-b \geq d+1$. Mais alors $db = (c-b)a \geq (d+1)a$. On déduit

$$d^2 = d(b-a) \geq (d+1)a - da = a \geq n^2,$$

ce qui donne $d \geq n$. Mais alors

$$(n+1)^2 - n^2 \geq c-a = c-b+b-a \geq 2d+1 \geq 2n+1 = (n+1)^2 - n^2,$$

ce qui implique que les inégalités sont toutes des égalités. En particulier, on a $c = (n+1)^2$, $a = n^2$ et $b = a+n = n(n+1)$.

Commentaire des correcteurs

La plupart des élèves ont émis la bonne conjecture. Même s'il était intéressant, traiter le cas où k est entier ne rapportait pas de points. Certaines affirmations, telles que $k > 1$ (car $a < b$) ne méritaient pas de longues justifications mais d'autres (telles que si $\frac{p}{q} < (n+1)/n$ alors $q > n$) n'étaient pas toujours suffisamment rigoureusement justifiées.

Exercice 10. Anna et Baptiste jouent au jeu suivant. Pour Anna, un *coup* consiste à choisir un indice $i \in \{0, 1, 2\}$ qu'elle n'a pas déjà choisi auparavant et un réel strictement positif noté a_i . Pour Baptiste, un *coup* consiste à choisir un indice $i \in \{0, 1, 2\}$ qu'il n'a pas déjà choisi auparavant et un réel strictement positif noté b_i . Chacun à leur tour, en commençant par Anna, les deux joueurs jouent un coup. Lorsque chaque joueur a joué trois coups, ils écrivent les polynômes $P_A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $P_B(X) = b_0 + b_1X + b_2X^2$.

Baptiste gagne s'il existe au plus un réel c tel que $P_A(c) = 0$ ou si il existe quatre réels $c_1 < c_2 < c_3 < c_4$ tels que $P_A(c_1) = P_A(c_2) = P_B(c_3) = P_B(c_4) = 0$. Dans le cas contraire, Anna gagne.

Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie lui permettant de gagner la partie, quels que soient les coups de son adversaire.

Solution de l'exercice 10

Réponse : Anna dispose d'une stratégie gagnante.

La stratégie d'Anna est la suivante : pendant ses deux premiers coups, Anna choisit un coefficient dominant a et un coefficient constant c quelconques.

Montrons maintenant qu'il existe un réel $r < 0$ dépendant uniquement des deux premiers coups de Baptiste tel qu'au moins l'une des racines de P_B est inférieure à r . Notons déjà que toute racine réelle x de P_B vérifie $b_1x = -b_0 - b_2x^2 < 0$, soit $x < 0$. On va distinguer trois cas.

- Si Baptiste choisit les deux coefficients b_1 et b_2 pendant ses deux premiers coups, alors $r = -b_1/2b_2$ fonctionne. En effet, les racines de P_B ont pour somme $-b_1/b_2$ (d'après les relations de Viète), donc leur moyenne vaut r et l'une des deux racines est inférieure ou égale à cette moyenne.
- Si Baptiste choisit les deux coefficients b_0 et b_2 pendant ses deux premiers coups, alors $r = -\sqrt{b_0/b_2}$ fonctionne. Ici, r correspond à la moyenne géométrique des deux racines de P_B (d'après les relations de Viète), et l'une des deux racines de P_B est plus petite que cette moyenne.
- Si Baptiste choisit les deux coefficients b_0 et b_1 pendant ses deux premiers coups, alors $r = -2b_0/b_1$ fonctionne. Ici, r correspond à la moyenne harmonique des deux racines de P_B . En effet, d'après les relations de Viète, si x et y sont les deux racines de P_B , on vérifie que

$$\frac{1}{r} = -\frac{b_1}{2b_0} = \frac{x+y}{2xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

Ainsi, l'une des deux racines x et y est inférieure à cette moyenne.

Montrons à présent qu'Anna peut choisir a_1 de sorte que P_A ait deux racines réelles dont l'une est inférieure à r . En prenant $a_1 > -\frac{a_2r^2 + a_0}{r}$, a_1 satisfait $a_2r^2 + a_1r + a_0 < 0$. Puisque P_A tend vers $+\infty$ en $-\infty$, ceci implique par le théorème des valeurs intermédiaires que P_A admet une racine dans $]-\infty, r[$ et une deuxième dans $]r, +\infty[$ par le même principe puisque P_A tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Ainsi, Anna a empêché Baptiste de gagner, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs

L'exercice n'a été résolu que par une personne. Beaucoup d'élèves ont eu le réflexe de regarder les inégalités issues de l'expression du discriminant, et beaucoup d'élèves ont identifié que les racines étaient strictement négatives. Pour avancer dans le problème, il

aurait fallu distinguer les différents cas : examiner les possibilités de Baptiste selon les coefficients qu'Anna choisit lors des deux premiers tours aurait permis de deviner lequel des deux possédait une stratégie gagnante.