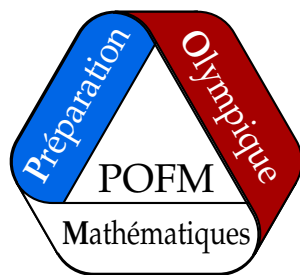


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 15 JANVIER 2025

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

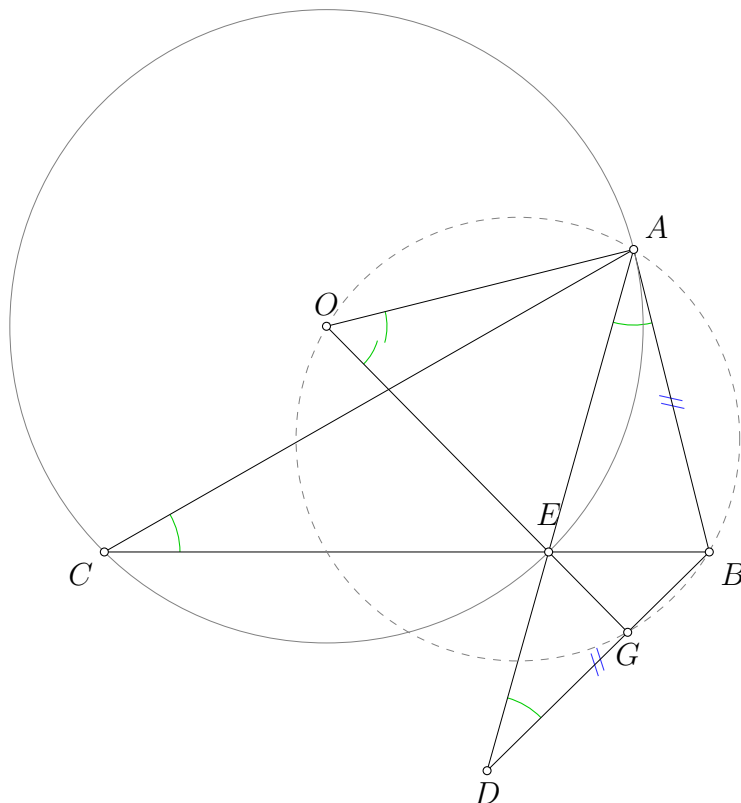
Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit ACE un triangle avec $AE < AC$, Ω son cercle circonscrit et O le centre de Ω . La tangente à Ω au point A coupe la droite (CE) au point B . Le cercle de centre B et passant par A recoupe la droite (AE) au point D . Les droites (OE) et (BD) se coupent au point G .

Montrer que les points A, B, G et O sont situés sur un même cercle.

Solution de l'exercice 1



Puisque $DB = AB$, le triangle ABD est isocèle au point B . On a donc

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - \widehat{BDA} - \widehat{BAD} = 180^\circ - 2\widehat{BAD}.$$

Le théorème de l'angle tangent combiné au théorème de l'angle au centre donne d'autre part

$$\widehat{BDA} = \widehat{BAD} = \widehat{ECA} = \frac{1}{2}\widehat{EOA}.$$

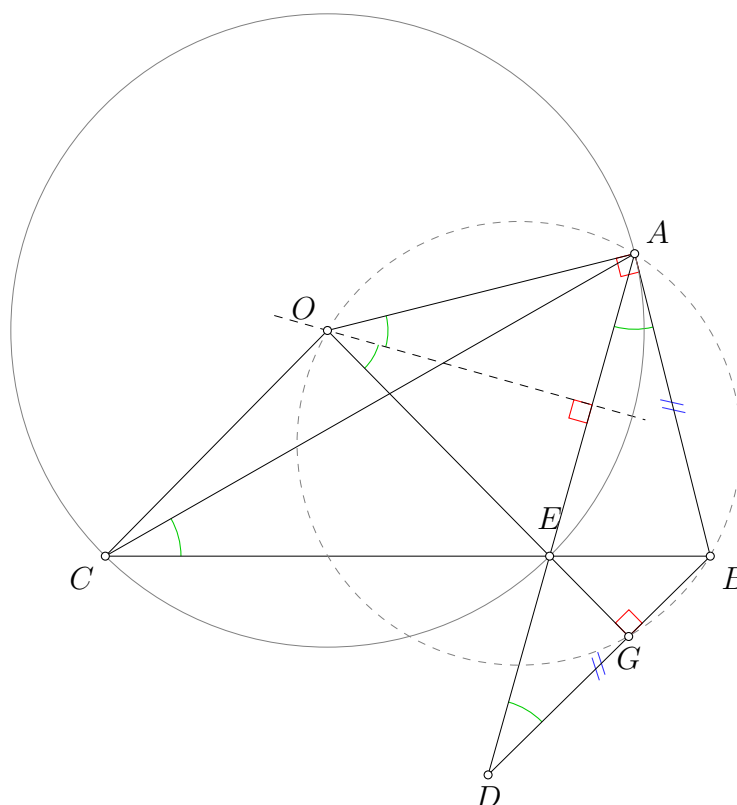
On déduit

$$\widehat{GBA} = \widehat{ABD} = 180^\circ - 2\widehat{BAD} = 180^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2}\widehat{EOA} = 180^\circ - \widehat{GOA}.$$

D'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, on déduit que les points O, A, B et G sont cocycliques.

Remarque : L'égalité $\widehat{BDA} = \widehat{BAD} = \widehat{BCA}$ permet de montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Solution alternative n°1



De même que précédemment, on montre que $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$. Pour conclure, nous allons prouver plutôt que $\widehat{OAB} = 90^\circ = \widehat{OGB}$, ce qui implique bien que les points A, B, G et O sont cocycliques par la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

Tout d'abord, puisque la droite (AB) est tangente au cercle Ω , on a bien $\widehat{OAB} = 90^\circ$. Il suffit désormais de montrer que $\widehat{OGB} = 90^\circ$, ou encore que $\widehat{GED} + \widehat{EDG} = 90^\circ$.

Puisque les points O, E et G sont alignés, on trouve $\widehat{DEG} = \widehat{AEO}$. Le triangle OEA étant isocèle en O , on a

$$\widehat{OEA} = \frac{1}{2}(\widehat{OEA} + \widehat{EAO}) = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AOE}) = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{AOE} = 90^\circ - \widehat{ACE} = 90^\circ - \widehat{BCA},$$

on a donc bien $\widehat{GED} + \widehat{GDE} = 90^\circ$.

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été correctement résolu par une large majorité d'élèves. Les principaux obstacles à la résolution de l'exercice étaient de ne pas connaître les différentes variantes du théorème de l'angle inscrit ou de chercher à introduire de nouveaux points sans exploiter les hypothèses de l'énoncé concernant les points déjà présents. On signale également que plusieurs personnes ont tracé une figure sur laquelle $AC < AE$, alors que l'énoncé indiquait le contraire. Si cela n'avait pas d'impact ici, cela pourrait en avoir pour d'autres exercices.

Exercice 2. Pour un entier strictement positif n , on note $n!$ le produit $1 \times \dots \times n$ des n premiers entiers. Un entier strictement positif c est dit *macédonien* s'il existe un entier positif m tel que $m^3 - m = c!$ et tel que $m^2 - 1$ possède 6 diviseurs positifs ou moins.

Déterminer tous les entiers macédoniens.

Solution de l'exercice 2

Réponse : les entiers macédoniens sont 3 et 4.

Pour tout entier n , on note $d(n)$ le nombre de diviseurs de n .

On rappelle le résultat suivant, que l'on utilisera tout au long de la preuve : si $n \geq 1$ est un entier et si $p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ est sa décomposition en facteur premier, alors son nombre de diviseur est donné par $d(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$. Cette formule permet notamment de vérifier que si m et n sont deux entiers premiers entre eux, $d(m)d(n) = d(mn)$.

Soit c un entier macédonien et m un entier positif tel que $m^3 - m = c!$. On observe d'emblée la factorisation $m^3 - m = m(m^2 - 1)$. On distingue alors plusieurs cas.

Cas 1 : m est impair. Observons que $m > 1$ car $1^2 - 1$ admet une infinité de diviseurs. Comme m est impair, $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$, donc 2^3 divise m . Si $m^2 - 1$ admet un autre facteur premier que 2, on a alors que $6 \geq d(m^2 - 1) \geq (3 + 1)(1 + 1) = 8$, ce qui est exclu. Ainsi, $m^2 - 1$ est une puissance de 2. On écrit $m^2 - 1 = 2^\alpha$ avec $\alpha \geq 3$. Comme $\alpha + 1 = d(m^2 - 1) \leq 6$, il suffit de traiter les cas $\alpha = 3, 4, 5$.

- Si $\alpha = 3$, alors $m^2 = 2^3 + 1 = 9$ et $m = 3$. Réciproquement, puisque $3^3 - 3 = 4!$ et $3^2 - 1$ admet moins de 6 diviseurs, 4 est bien un entier macédonien.
- Si $\alpha = 4$, alors $m^2 = 2^4 + 1 = 17$ ce qui est impossible.
- Si $\alpha = 5$, alors $m^2 = 2^5 + 1 = 33$ ce qui est impossible.

Cas 2 : m est pair. On vérifie que si $m = 2$, puisque $2^3 - 2 = 3!$ et que $2^2 - 1$ admet moins de 6 diviseurs, 3 est macédonien. On suppose dans la suite que $m \geq 4$ et qu'en particulier, $m - 1$ et $m + 1$ sont strictement plus grands que 1.

Comme m est pair, $m - 1$ et $m + 1$ sont premiers entre eux : si d est un diviseur de $m - 1$ et de $m + 1$, alors d est impair et $d \mid m + 1 - (m - 1) = 2$ donc $d = 1$, ce qui prouve bien que $m - 1$ et $m + 1$ sont premiers entre eux.

Supposons que ni $m - 1$ ni $m + 1$ n'est un nombre premier. Ils admettent donc tous les deux au moins trois diviseurs. Comme ils sont premiers entre, on a $d(m^2 - 1) = d(m - 1)d(m + 1) \geq 3 \times 3 = 9$, ce qui est exclu. Ainsi, $m - 1$ ou $m + 1$ est un nombre premier. On note p ce nombre premier.

Comme $p \mid m^2 - 1 \mid c!$, $p \leq c$. D'autre part, comme $m - 1 \leq p$, on a $(m - 1)m(m + 1) \leq p(p + 1)(p + 2)$. On déduit que $p! \leq p(p + 1)(p + 2)$. Mais si $p \geq 7$, alors

$$p! \geq p(p - 1)(p - 2) \cdot 2 \cdot 3 \geq p \times \underbrace{2(p - 1)}_{>p+1} \times \underbrace{3(p - 2)}_{>p+2} > p(p + 1)(p + 2).$$

Ainsi, $p \leq 5$. Comme p est impair, on a finalement $p = 3$ ou $p = 5$.

- Si $p = 3$. Si $m - 1 = p = 3$ alors $m = 4$. Mais $4^3 - 4 = 60$ et $4! < 60 < 5!$ donc il n'y a pas de solution pour $m = 4$. Si $m + 1 = p = 3$, alors $m = 2$, ce qui est exclu.

- Si $p = 5$. Si $m - 1 = p = 5$, alors $m = 6$. Mais $6^3 - 6 = 210$ et $5! < 210 < 6!$ donc 6 n'est pas macédonien. Si $m + 1 = p = 5$, alors $m = 4$, ce qui nous ramène au cas précédent.

En conclusion, les seuls entiers macédoniens sont $c = 3$ et $c = 4$.

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été relativement mal réussi par rapport à sa position dans le sujet. De nombreux élèves ont essayé de raisonner par disjonction de cas sur la décomposition en facteurs premiers de $m^2 - 1$, mais celle-ci est souvent mal faite, en oubliant des cas ou en oubliant que certains facteurs premiers de $m - 1$ et $m + 1$ peuvent être les mêmes, ou que $m - 1$ peut ne pas être premier sans pour autant avoir deux facteurs premiers distincts (c'est le cas lorsque $m - 1$ est une puissance d'un nombre premier), ce qui réduit le nombre de diviseurs potentiels. Beaucoup d'élèves ont par exemple oublié de vérifier que les diviseurs qu'ils exhibaient étaient bien distincts deux-à-deux.

Par ailleurs, l'exercice demandait de trouver tous les nombres satisfaisant une certaine propriété, et beaucoup d'élèves ont essayé de tester les petits cas (ce qu'il faut toujours faire dans ce genre de problème!), en oubliant malheureusement parfois de vérifier *toutes* les conditions de l'énoncé. En particulier, un bon nombre d'élève a dit que $c = 5$ était macédonien pour $m = 5$ sans vérifier que 24 a trop de diviseurs, et de même pour $c = 6, m = 9$ dans une moindre mesure. Attention donc à l'avenir à ne pas oublier de condition au moment de la vérification!

Exercice 3. On dit de trois réels $a \leq b \leq c$ qu'ils sont en *progression arithmétique* s'il existe un réel r tel que $c = b + r$ et $b = a + r$. Un ensemble d'entiers est dit *joli* s'il contient trois éléments distincts qui sont en progression arithmétique. On note N le nombre de sous-ensembles de $\{1, \dots, 2024\}$ et M le nombre de ces sous-ensembles qui sont jolis. Montrer que $\frac{M}{N} \geq \frac{51}{100}$.

Solution de l'exercice 3

On procède en deux temps. Dans un premier temps, on montre qu'au moins la moitié des sous-ensembles est joli. Dans un second temps, on prouve l'énoncé.

On note $E = \{1, \dots, 2024\}$.

Si $X \subset E$ est un sous-ensemble de E , on note X^c son complémentaire, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à X . Pour montrer que la moitié des sous-ensembles de E sont jolis, on montre le lemme suivant :

Lemme : Pour tout sous-ensemble X de E , au moins l'un des deux ensembles X et X^c est joli.

Puisque les sous-ensembles de $\{1, \dots, 2024\}$ peuvent être regroupés par paires de la forme (X, X^c) et que chaque paire contient au moins un ensemble joli, on déduit bien qu'au moins la moitié des sous-ensembles de E est joli.

Preuve du Lemme : Soit $X \subset E$. Supposons que ni X ni X^c n'est arithmétique. Parmi les entiers 1, 2, 3, 4, 5 et 6, on en trouve deux qui sont consécutifs et appartiennent au même sous-ensemble, sans quoi on aurait $\{2, 4, 6\}$ qui est inclus dans X ou dans X^c , or ces entiers sont en progression arithmétique. Notons alors x et $x + 1$ les deux entiers consécutifs en question et supposons, par symétrie des rôles de X et X^c , que x et $x + 1$ sont dans X .

- Si $x + 3 \in X$: comme les ensembles $\{x + 1, x + 3, x + 5\}$ et $\{x, x + 3, x + 6\}$ sont arithmétiques, on déduit que $x + 5, x + 6 \in X^c$. Mais comme $\{x + 4, x + 5, x + 6\}$ et $\{x + 5, x + 6, x + 7\}$ sont arithmétiques, on déduit que $x + 4$ et $x + 7$ sont dans X . Mais alors $x + 1, x + 4, x + 7$ sont en progression arithmétique et sont dans le même ensemble, ce qui est exclu.

$$x, \underline{x + 1}, x + 2, \underline{x + 3}, \underline{x + 4}, \underline{x + 5}, x + 6, \underline{x + 7}.$$

- Si $x + 3 \in X^c$: comme $\{x, x + 1, x + 2\}$ est arithmétique, on déduit que $x + 2 \in X^c$. Mais alors $x + 4 \in X$. Comme $x + 1, x + 4$ et $x + 7$ sont en progression arithmétique, on déduit que $x + 7 \in X^c$. Comme $x + 3, x + 5$ et $x + 7$ sont en progression arithmétique, cela force $x + 5 \in X$. Comme $x + 4$ et $x + 5$ sont dans X , $x + 6 \in X^c$. Enfin, puisque $x + 6$ et $x + 7$ sont dans X^c , on déduit que $x + 8 \in X$. Mais alors $x, x + 4$ et $x + 8$ sont dans X et forment une progression arithmétique.

$$\underline{x}, \underline{x + 1}, \underline{x + 2}, \underline{x + 3}, \underline{x + 4}, \underline{x + 5}, \underline{x + 6}, \underline{x + 7}, \underline{x + 8}.$$

Revenons à présent au problème. E possède 2^{2024} sous-ensembles, et on a mis en évidence 2^{2023} sous-ensembles jolis. On cherche désormais des paires de la forme (X, X^c) telles que X et X^c sont tous les deux jolis, puisque chaque paire de cette forme permet de mettre en évidence un nouvel ensemble arithmétique.

Pour cela, on considère toutes les paires de la forme

$$(\{1, 2, 3\} \cup Y, \{4, 5, 6\} \cup (\{7, \dots, 2024\} \setminus Y)), \quad Y \subset \{7, \dots, 2024\}.$$

Ces paires sont bien de la forme voulue, et comme il y a 2^{2024-6} choix de $Y \subset \{7, \dots, 2024\}$, on obtient 2^{2018} ensembles jolis supplémentaires.

On a mis en évidence $2^{2023} + 2^{2018}$ ensembles jolis, la proportion d'ensembles jolis est donc supérieure à

$$\frac{2^{2023} + 2^{2018}}{2^{2024}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^6} > 0.5 + 0.01 = 0.51.$$

Solution alternative n°1

On propose une autre solution, montrant que le nombre de sous-ensembles contenant trois entiers consécutifs est lui-même en proportion supérieure à 0.51%.

Soit Y un sous-ensemble qui n'est pas joli. Pour $0 \leq k \leq 673$, on note $B_k = \{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\} \cup Y$. Comme $\{3k + 1, 3k + 2, 3k + 3\}$ n'est pas inclus dans Y , il y a au plus 7 choix pour B_k . Comme les choix des B_k sont indépendants et qu'il y a 4 choix pour $Y \cap \{2023, 2024\}$, on trouve qu'il y a au plus $7^{673} \times 4$ ensembles Y qui ne sont pas jolis. La proportion de sous-ensembles qui ne sont pas jolis est donc inférieure à

$$\frac{7^{673} \times 4}{2^{2024}} = \left(\frac{7}{8}\right)^{673}.$$

Pour montrer que $\left(1 - \frac{1}{8}\right)^{673} = \left(\frac{7}{8}\right)^{673} < 0.49$, on peut utiliser l'inégalité de Bernoulli $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ pour $x \geq 0$ et $k \geq 1$ et obtenir

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{673} = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^{673} \geq 1 + \frac{673}{7} > \frac{100}{49}.$$

Ceci conclut.

Solution alternative n°2

Dans cette solution, on cherche un entier $1 \leq k \leq 2024$ tel que 51/100 des sous-ensembles de $\{1, \dots, k\}$ sont jolis, et on en déduit que 51/100 des sous-ensembles de $\{1, \dots, 2024\}$. Cette solution est également calculatoire, mais la méthode n'en reste pas moins intéressante.

Soit $k \geq 1$. Notons E_k le nombre de sous-ensembles jolis de l'ensemble $\{1, \dots, k\}$. On suppose que la proportion $\frac{|E_k|}{2^k}$ d'ensembles jolis de $\{1, \dots, k\}$ est supérieure à $\frac{51}{100}$. Si Y est un sous-ensemble joli de $\{1, \dots, k\}$ et Z un sous-ensemble de $\{k + 1, \dots, 2024\}$, alors $Y \cup Z$ est un sous-ensemble joli de $\{1, \dots, 2024\}$. Comme il y a $|E_k|$ choix pour Y et 2^{2024-k} choix pour Z , on déduit que la proportion d'ensembles jolis de $\{1, \dots, 2024\}$ vérifie

$$\frac{|E|}{2^{2024}} \geq \frac{|E_k| \times 2^{2024-k}}{2^{2024}} = \frac{|E_k|}{2^k} \geq \frac{51}{100}.$$

Ainsi, si on trouve un entier $k \leq 2024$ tel que la proportion d'ensembles jolis de $\{1, \dots, k\}$ est supérieure à 51/100, on aura le résultat voulu.

Dans la même veine que dans la solution 2, on va s'intéresser aux sous-ensembles de $\{1, \dots, k\}$ contenant trois entiers consécutifs. Pour les dénombrer, il est en réalité plus commode de dénombrer les ensembles qui **ne contiennent pas** trois entiers consécutifs et

montrer qu'ils représentent une proportion inférieure à 0.49. Appelons *mauvais* un ensemble qui ne contient pas trois entiers consécutifs et notons f_k le nombre de sous-ensembles mauvais de $\{1, \dots, k\}$. On va établir une relation de récurrence sur les f_k .

Soit $k \geq 3$ et X un sous-ensemble mauvais de $\{1, \dots, k\}$.

- Si k n'appartient pas à X , alors X est également un sous-ensemble mauvais de $\{1, \dots, k-1\}$. Il y a f_{k-1} tels sous-ensembles.
- Si X contient k mais ne contient pas $k-1$, alors $X \setminus \{k\}$ est un sous-ensemble mauvais de $\{1, \dots, k-2\}$. Il y a f_{k-2} tels sous-ensembles.
- Si X contient k et $k-1$, il ne peut contenir $k-2$. Alors $X \setminus \{k-1, k\}$ est un sous-ensemble mauvais de $\{1, \dots, k-3\}$. Il y a f_{k-3} tels sous-ensembles.

On obtient alors la relation

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} + f_{k-3}.$$

Comme on a de plus $f_0 = 0$, $f_1 = 2$ et $f_2 = 4$, on peut calculer successivement les termes de la suite f_k ainsi que les quantités $f_k/2^k$. Finalement, on trouve $\frac{f_{11}}{2^{11}} = \frac{927}{2048} < \frac{49}{100}$, ce qui conclut.

Remarque : Le plus petit entier k tel que la proportion d'ensembles jolis de $\{1, \dots, k\}$ est supérieure à 0.51 est $k = 8$.

Commentaire des correcteurs

L'exercice n'a été résolu que par 1 élève (et bien avancé par un autre), et très peu ont réussi à avoir de vraies avancées sur le problème. Voici quelques commentaires :

- Certains élèves n'ont pas réussi à calculer N alors que c'est un comptage à connaître : comme chaque élément peut être présent ou non dans un ensemble il y a 2^{2024} possibilités.
- Certains élèves se sont focalisés sur les ensembles de petite taille. Malheureusement il n'y en avait vraiment pas assez pour atteindre une proportion de 51/100. En fait, si on prend une suite u_n , telle que $\frac{u_n}{\sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$ (i.e. pour toute C aussi grand qu'on veut, $u_n > C\sqrt{n}$ pour n assez grand), la proportion d'ensembles de taille plus petit que $\frac{n}{2} - u_n$ tend vers 0, idem pour celle de taille plus grande que $\frac{n}{2} + u_n$. Pour faire plus simple, en comptant tous les sous-ensembles de $\{1, \dots, 2024\}$, les ensembles ont pour la plupart une taille proche de 1012.
- Certains élèves ont essayé de montrer que les ensembles assez grands contenaient une progression arithmétique. En fait, on peut montrer avec preuve que les ensembles de taille 1014 ont une progression arithmétique, mais il n'est pas clair qu'il existe des ensembles de taille 1012 et 1013 sans progression arithmétique. Par exemple, si on remplace 2024 par 8, alors $\{1, 4, 5, 8\}$ ne contient pas de progression arithmétique, et est bien de taille $4 = 8/2$.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer, en fonction de n , la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$S = 2^0 x_0^2 + 2^1 x_1^2 + \dots + 2^n x_n^2$$

parmi tous les $(n+1)$ -uplets $(x_0, \dots, x_n)$ d'entiers positifs ou nuls vérifiant $x_0 + \dots + x_n = n$.

Solution de l'exercice 4

Réponse : La plus petite valeur est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque : On peut conjecturer ce minimum, par exemple en cherchant à résoudre l'énoncé pour des petites valeurs de n . La stratégie est de démontrer que cette valeur est bien la plus petite en procédant par récurrence sur n .

Preuve : Puisque l'ensemble des $n+1$ -uplets $(x_0, \dots, x_n)$ d'entiers naturels dont la somme vaut n est non vide et que la somme prend des valeurs entières, l'expression admet bien un minimum. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose S_n la valeur minimale recherchée. On prouve que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ par récurrence forte sur $n \geq 0$ (où on étend la définition de S_n à $n = 0$ par $S_0 = 0$). On notera A_n l'ensemble des $n+1$ -uplets $(x_0, \dots, x_n)$ d'entiers naturels dont la somme vaut n .

Initialisation : Si $n = 0$, on a $S_0 = 0$.

Hérédité : On suppose que $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. Considérons alors un $n+1$ -uplet $(x_0, \dots, x_n)$ réalisant la valeur minimale S_n . Notons que $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n$: en effet, si $x_i < x_{i+1}$, alors la suite obtenue en échangeant x_i et x_{i+1} donne une somme strictement plus petite. En particulier, $x_0 \geq 1$. On a alors

$$S_n = 2^0 x_0^2 + 2^1 x_1^2 + \dots + 2^n x_n^2 = 2^0 x_0^2 + 2(2^0 x_1^2 + 2^1 x_2^2 + \dots + 2^{n-1} x_n^2),$$

Montrons alors que

$$S_{n-x_0} = \min \{ 2^0 x_1^2 + 2^1 x_2^2 + \dots + 2^{n-1} x_n^2 \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \dots + x_n = n - x_0 \}.$$

Notons T_{n-x_0} le membre de droite. La subtilité vient du fait que S_{n-x_0} est un minimum parmi les expressions ayant $n - x_0 + 1$ termes, tandis que T_{n-x_0} est un minimum parmi les sommes de n termes. D'une part, si $(y_0, \dots, y_{n-x_0})$ est un $n - x_0 + 1$ -uplet réalisant S_{n-x_0} , alors le n -uplet $(y_0, \dots, y_{n-x_0}, 0, \dots, 0)$ est bien de somme $n - x_0$, ce qui implique que $S_{n-x_0} \geq T_{n-x_0}$.

D'autre part, si $(y_0, \dots, y_n)$ réalise le minimum T_{n-x_0} , on a à nouveau l'inégalité $y_0 \geq \dots \geq y_n$. En particulier, $y_{n-x_0} = 0$ (si $y_{n-x_0} > 0$, on aurait $y_0 + \dots + y_n > n - x_0$). Ainsi, $(y_0, \dots, y_{n-x_0})$ est dans A_{n-x_0} , de sorte que $T_{n-x_0} \geq S_{n-x_0}$. Ceci conclut l'égalité annoncée.

On déduit que $S_n \geq x_0^2 + 2S_{n-x_0}$. Ainsi,

$$S_n \geq \min_{x_0=1, \dots, n} x_0^2 + 2S_{n-x_0}.$$

Notons qu'on a en fait égalité puisque, si $(x_1, \dots, x_{n-x_0+1})$ réalise S_{n-x_0} , alors $(x_0, x_1, \dots, x_{n-x_0+1}, 0, \dots, 0)$ est bien dans A_n . Or, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $x_0 \geq 1$,

$$x_0^2 + 2S_{n-x_0} = x_0^2 + (n - x_0)(n - x_0 + 1)$$

et l'inégalité $x_0^2 + (n - x_0)(n - x_0 + 1) \geq \frac{n(n+1)}{2}$ est équivalente à $(2x_0 - n)(2x_0 - n - 1) \geq 0$, qui est vraie parce que deux entiers consécutifs sont toujours de même signe. On a donc bien $S_n \geq \frac{n(n+1)}{2}$, avec égalité en prenant $x_0 = \frac{n-1}{2}$ si n est impair et $x_0 = \frac{n}{2}$ si n est pair et en complétant la suite par l'élément de A_{n-x_0} réalisant T_{n-x_0} . Ceci achève la récurrence.

Solution alternative n°1

On propose une deuxième solution, plus astucieuse, basée sur l'idée suivante : pour tout entier naturel $k \geq 1$, il existe un unique couple (α, β) d'entiers positifs tel que $k = (2\alpha - 1)2^\beta$.

En utilisant l'identité $x^2 = 1 + 3 + \dots + (2x - 1)$ pour tout entier naturel $x \geq 1$, la somme à minimiser se réécrit

$$\sum_{i=0}^n x_i^2 2^i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^{x_i} (2k - 1) 2^i.$$

Cette double somme contient $x_0 + x_1 + \dots + x_n = n$ termes, qui sont tous des entiers strictement positifs deux à deux distincts. Ainsi, cette somme est supérieure à la somme des n premiers entiers, à savoir $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour montrer que cette borne est bien atteinte, on remarque que à i fixé, il existe un unique entier x_i tel que $(2k - 1)2^i \leq n$ si et seulement si $k \leq x_i$. Une fois encore, comme les entiers $(2k - 1)2^i$ sont deux à deux distincts lorsque le couple (k, i) parcourt $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la somme $\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^{x_i} (2k - 1) 2^i$ correspond bien à la somme des n premiers entiers. Comme cette somme contient $x_0 + \dots + x_n$ entiers, on a bien $x_0 + \dots + x_n = n$ avec ce choix de x_i . Ceci justifie que $\frac{n(n+1)}{2}$ est bien atteint.

Remarque : La preuve précédente nous permet de calculer explicitement les x_i vérifiant le cas d'égalité. Il s'agit de $x_i = \left\lfloor \frac{n + 2^i}{2^{i+1}} \right\rfloor$. On obtient alors la formule suivante, qui avait fait l'objet de l'exercice 6 des Olympiades Internationales de Mathématiques de 1968 :

$$n = \sum_{i=0}^n \left\lfloor \frac{n + 2^i}{2^{i+1}} \right\rfloor$$

Solution alternative n°2

On propose une troisième solution qui va utiliser la remarque précédente.

Posons $x_i = \left\lfloor \frac{n + 2^i}{2^{i+1}} \right\rfloor$. On vérifie que

$$x_0 + \dots + x_n = n.$$

Pour le montrer, on peut par exemple utiliser la formule $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$ pour effectuer le télescopage suivant :

$$\sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n \left\lfloor 2 \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor = n - \lfloor n/2^n \rfloor = n.$$

On aurait également pu montrer l'identité à l'aide de l'écriture de n en base 2.

D'autre part, on vérifie que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. En effet, si $k \leq x_i$, alors $(2k-1)2^i \leq n$, tandis que si $k > x_i$, $(2k-1)2^i > n$. On peut alors utiliser le même argument que la solution précédente : la somme

$$\sum_{i=0}^n x_i^2 2^i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^{x_i} (2k-1)2^i$$

contient n entiers deux à deux distincts qui sont tous inférieurs à n , il s'agit donc de la somme des n premiers entiers qui vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Supposons désormais qu'il existe un entier n et $y_0, \dots, y_n$ des entiers positifs de somme n tels que $2^0 y_0^2 + \dots + 2^n y_n^2 < \frac{n(n+1)}{2}$. Prenons n minimal pour cette propriété. On vérifie à l'aide de petits cas que $n > 1$. De plus, de même que dans la solution 1, on a $y_0 \geq \dots \geq y_n$ et $y_n = 0$ car $2^0 + \dots + 2^n \geq \frac{n(n+1)}{2}$. On fixe un entier k tel que $y_k \geq 1$. Alors, avec les notations de la solution 1, le $(n-1)$ -uplet $(y_0, \dots, y_k-1, \dots, y_{n-1})$ est dans A_{n-1} et par minimalité de n ,

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 2^0 y_0^2 + \dots + 2^k (y_k-1)^2 + \dots + 2^{n-1} y_{n-1}^2 = S_n - 2^k (2y_k-1) < \frac{n(n+1)}{2} - 2^k (2y_k-1).$$

On déduit que $2^k (2y_k-1) < n$ et donc $y_k \leq x_k$ pour tout indice k . Or $y_0 + \dots + y_n = x_0 + \dots + x_n$, on a donc $y_k = x_k$ pour tout k , ce qui contredit que $S_n < \frac{n(n+1)}{2}$.

Commentaire des correcteurs

Le problème n'a permis qu'à deux élèves de gagner des points. La plupart des élèves ont oublié que les x_i étaient entiers, ou ont montré que dans le cas où la somme est minimale, alors $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n$ mais n'ont pas réussi à aller plus loin. Seuls deux élèves ont fait la conjecture de la valeur minimale de la somme en fonction de n : le premier réflexe face à un tel problème est de tester les petits cas puis d'essayer de construire une conjecture sur la valeur du minimum en fonction de n . Pour des remarques vis à vis de la solution du problème, n'hésitez pas à vous référer au commentaire du problème 5.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer, en fonction de n , la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$S = 2^0 x_0^2 + 2^1 x_1^2 + \dots + 2^n x_n^2$$

parmi tous les $(n+1)$ -uplets $(x_0, \dots, x_n)$ d'entiers positifs ou nuls vérifiant $x_0 + \dots + x_n = n$.

Solution de l'exercice 5

Réponse : La plus petite valeur est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Remarque : On peut conjecturer ce minimum, par exemple en cherchant à résoudre l'énoncé pour des petites valeurs de n . La stratégie est de démontrer que cette valeur est bien la plus petite en procédant par récurrence sur n .

Preuve : Puisque l'ensemble des $n+1$ -uplets $(x_0, \dots, x_n)$ d'entiers naturels dont la somme vaut n est non vide et que la somme prend des valeurs entières, l'expression admet bien un minimum. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose S_n la valeur minimale recherchée. On prouve que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ par récurrence forte sur $n \geq 0$ (où on étend la définition de S_n à $n = 0$ par $S_0 = 0$). On notera A_n l'ensemble des $n+1$ -uplets $(x_0, \dots, x_n)$ d'entiers naturels dont la somme vaut n .

Initialisation : Si $n = 0$, on a $S_0 = 0$.

Hérédité : On suppose que $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$ pour tout $0 \leq k \leq n-1$. Considérons alors un $n+1$ -uplet $(x_0, \dots, x_n)$ réalisant la valeur minimale S_n . Notons que $x_0 \geq x_1 \geq \dots \geq x_n$: en effet, si $x_i < x_{i+1}$, alors la suite obtenue en échangeant x_i et x_{i+1} donne une somme strictement plus petite. En particulier, $x_0 \geq 1$. On a alors

$$S_n = 2^0 x_0^2 + 2^1 x_1^2 + \dots + 2^n x_n^2 = 2^0 x_0^2 + 2(2^0 x_1^2 + 2^1 x_2^2 + \dots + 2^{n-1} x_n^2),$$

Montrons alors que

$$S_{n-x_0} = \min \{ 2^0 x_1^2 + 2^1 x_2^2 + \dots + 2^{n-1} x_n^2 \mid (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \dots + x_n = n - x_0 \}.$$

Notons T_{n-x_0} le membre de droite. La subtilité vient du fait que S_{n-x_0} est un minimum parmi les expressions ayant $n - x_0 + 1$ termes, tandis que T_{n-x_0} est un minimum parmi les sommes de n termes. D'une part, si $(y_0, \dots, y_{n-x_0})$ est un $n - x_0 + 1$ -uplet réalisant S_{n-x_0} , alors le n -uplet $(y_0, \dots, y_{n-x_0}, 0, \dots, 0)$ est bien de somme $n - x_0$, ce qui implique que $S_{n-x_0} \geq T_{n-x_0}$.

D'autre part, si $(y_0, \dots, y_n)$ réalise le minimum T_{n-x_0} , on a à nouveau l'inégalité $y_0 \geq \dots \geq y_n$. En particulier, $y_{n-x_0} = 0$ (si $y_{n-x_0} > 0$, on aurait $y_0 + \dots + y_n > n - x_0$). Ainsi, $(y_0, \dots, y_{n-x_0})$ est dans A_{n-x_0} , de sorte que $T_{n-x_0} \geq S_{n-x_0}$. Ceci conclut l'égalité annoncée.

On déduit que $S_n \geq x_0^2 + 2S_{n-x_0}$. Ainsi,

$$S_n \geq \min_{x_0=1, \dots, n} x_0^2 + 2S_{n-x_0}.$$

Notons qu'on a en fait égalité puisque, si $(x_1, \dots, x_{n-x_0+1})$ réalise S_{n-x_0} , alors $(x_0, x_1, \dots, x_{n-x_0+1}, 0, \dots, 0)$ est bien dans A_n . Or, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout $x_0 \geq 1$,

$$x_0^2 + 2S_{n-x_0} = x_0^2 + (n-x_0)(n-x_0+1)$$

et l'inégalité $x_0^2 + (n-x_0)(n-x_0+1) \geq \frac{n(n+1)}{2}$ est équivalente à $(2x_0-n)(2x_0-N-1) \geq 0$, qui est vraie parce que deux entiers consécutifs sont toujours de même signe. On a donc bien $S_n \geq \frac{n(n+1)}{2}$, avec égalité en prenant $x_0 = \frac{n-1}{2}$ si n est impair et $x_0 = \frac{n}{2}$ si n est pair et en complétant la suite par l'élément de A_{n-x_0} réalisant T_{n-x_0} . Ceci achève la récurrence.

Solution alternative n°1

On propose une deuxième solution, plus astucieuse, basée sur l'idée suivante : pour tout entier naturel $k \geq 1$, il existe un unique couple (α, β) d'entiers positifs tel que $k = (2\alpha - 1)2^\beta$.

En utilisant l'identité $x^2 = 1 + 3 + \dots + (2x - 1)$ pour tout entier naturel $x \geq 1$, la somme à minimiser se réécrit

$$\sum_{i=0}^n x_i^2 2^i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^{x_i} (2k-1) 2^i.$$

Cette double somme contient $x_0 + x_1 + \dots + x_n = n$ termes, qui sont tous des entiers strictement positifs deux à deux distincts. Ainsi, cette somme est supérieure à la somme des n premiers entiers, à savoir $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour montrer que cette borne est bien atteinte, on remarque que à i fixé, il existe un unique entier x_i tel que $(2k-1)2^i \leq n$ si et seulement si $k \leq x_i$. Une fois encore, comme les entiers $(2k-1)2^i$ sont deux à deux distincts lorsque le couple (k, i) parcourt $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, la somme $\sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^{x_i} (2k-1)2^i$ correspond bien à la somme des n premiers entiers. Comme cette somme contient $x_0 + \dots + x_n$ entiers, on a bien $x_0 + \dots + x_n = n$ avec ce choix de x_i . Ceci justifie que $\frac{n(n+1)}{2}$ est bien atteint.

Remarque : La preuve précédente nous permet de calculer explicitement les x_i vérifiant le cas d'égalité. Il s'agit de $x_i = \left\lfloor \frac{n+2^i}{2^{i+1}} \right\rfloor$. On obtient alors la formule suivante, qui avait fait l'objet de l'exercice 6 des Olympiades Internationales de Mathématiques de 1968 :

$$n = \sum_{i=0}^n \left\lfloor \frac{n+2^i}{2^{i+1}} \right\rfloor$$

Solution alternative n°2

On propose une troisième solution qui va utiliser la remarque précédente.

Posons $x_i = \left\lfloor \frac{n+2^i}{2^{i+1}} \right\rfloor$. On vérifie que

$$x_0 + \dots + x_n = n.$$

Pour le montrer, on peut par exemple utiliser la formule $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor x + 1/2 \rfloor$ pour effectuer le télescopage suivant :

$$\sum_{i=0}^n x_i = \sum_{i=0}^n \left\lfloor 2 \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{i+1}} \right\rfloor = n - \lfloor n/2^n \rfloor = n.$$

On aurait également pu montrer l'identité à l'aide de l'écriture de n en base 2.

D'autre part, on vérifie que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$. En effet, si $k \leq x_i$, alors $(2k-1)2^i \leq n$, tandis que si $k > x_i$, $(2k-1)2^i > n$. On peut alors utiliser le même argument que la solution précédente : la somme

$$\sum_{i=0}^n x_i^2 2^i = \sum_{i=0}^n \sum_{k=1}^{x_i} (2k-1)2^i$$

contient n entiers deux à deux distincts qui sont tous inférieurs à n , il s'agit donc de la somme des n premiers entiers qui vaut $\frac{n(n+1)}{2}$.

Supposons désormais qu'il existe un entier n et $y_0, \dots, y_n$ des entiers positifs de somme n tels que $2^0 y_0^2 + \dots + 2^n y_n^2 < \frac{n(n+1)}{2}$. Prenons n minimal pour cette propriété. On vérifie à l'aide de petits cas que $n > 1$. De plus, de même que dans la solution 1, on a $y_0 \geq \dots \geq y_n$ et $y_n = 0$ car $2^0 + \dots + 2^n \geq \frac{n(n+1)}{2}$. On fixe un entier k tel que $y_k \geq 1$. Alors, avec les notations de la solution 1, le $(n-1)$ -uplet $(y_0, \dots, y_k-1, \dots, y_{n-1})$ est dans A_{n-1} et par minimalité de n ,

$$\frac{n(n-1)}{2} \leq 2^0 y_0^2 + \dots + 2^k (y_k-1)^2 + \dots + 2^{n-1} y_{n-1}^2 = S_n - 2^k (2y_k-1) < \frac{n(n+1)}{2} - 2^k (2y_k-1).$$

On déduit que $2^k (2y_k-1) < n$ et donc $y_k \leq x_k$ pour tout indice k . Or $y_0 + \dots + y_n = x_0 + \dots + x_n$, on a donc $y_k = x_k$ pour tout k , ce qui contredit que $S_n < \frac{n(n+1)}{2}$.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été relativement peu résolu pour son numéro (seul une vingtaine d'élèves l'ont essentiellement résolu), voici quelques commentaires :

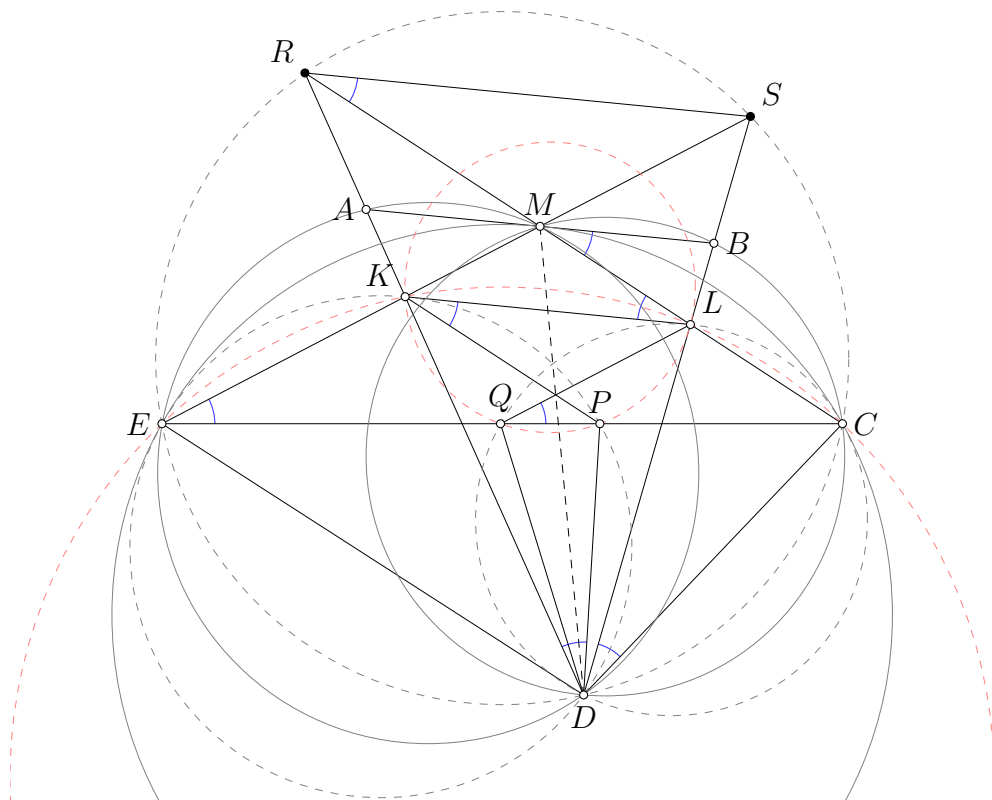
- Certains élèves ont mal lu l'énoncé et n'ont pas vu que les x_i étaient entiers. C'est dommage, et comme rien n'était réutilisable malheureusement ceux-ci n'ont pas eu de point.
- La plupart des élèves ayant eu un point avaient conjecturé que la valeur minimale est $\frac{n(n+1)}{2}$, et une bonne partie des élèves n'ayant pas eu de points n'ont pas fait cette conjecture. Dans un problème où la réponse est une fonction de n , il est crucial de comprendre les petits cas. Ici tester l'énoncé pour n allant de 1 à 10 était relativement faisable (surtout si on passe 4 heures à ne pas avancer sur le problème), donc il faut passer du temps à essayer de savoir ce qu'on veut prouver.
- Avec ces petits cas, on pouvait essayer de comprendre quelle était la suite (x_n) minimisante, pour montrer que la valeur minimale était atteinte. Plusieurs élèves n'ont pas réussi la suite de la preuve, mais ont réussi cette étape qui leur a permis de gagner de précieux points.

- Souvent il est tentant de croire que le minimiseur avec la contrainte $n + 1$ ressemble à celui avec la contrainte n . Ici c'était vrai : le minimiseur avec la contrainte $n + 1$ consiste à rajouter 1 à un des x_i du minimiseur de S_n (en posant $x_{n+1} = 0$). Mais de manière générale ça n'a aucune raison d'être vrai, donc dans une récurrence on ne peut évidemment pas supposer cela dans l'hérédité sans preuve, ni même dire que $S_{n+1} = S_n + 2^j((x_j + 1)^2 - x_j^2)$ avec j minimisant le terme de droite (où $(x_0, \dots, x_n)$ donne le minimum pour n).
- Certains élèves ont vu qu'augmenter x_i de 1 ajoutait $2^i(2x_i + 1)$, et vu apparaître une décomposition d'un nombre en produit d'une puissance de 2 par un impair. C'était là l'idée clé de la solution alternative 1. Mais faire une récurrence ici était une très mauvaise idée : en effet, on tombait dans le piège du point précédent.
- Le fait que tout entier strictement positif s'écrit de manière unique $2^k \times (2n + 1)$ avec $(k, n) \in \mathbb{N}^2$ est connu, et ne méritait pas d'être reprouvé.
- La justification que $T_{n-x_0} = S_{n-x_0}$ (cf la solution 1 du corrigé) était très rarement présente alors que c'était pourtant un point important : attention donc à ne pas passer à côté de petits détails quand on a une solution complète, et il est important de se relire.

Exercice 6. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe et M le milieu du segment $[AB]$. On suppose que le segment $[AB]$ est tangent au cercle circonscrit au triangle CME au point M et que le point D appartient aux cercles circonscrits aux triangles AME et BMC . Soit K le point d'intersection des droites (AD) et (ME) et soit L le point d'intersection des droites (BD) et (MC) . Soient P et Q deux points situés sur la droite (CE) et vérifiant $\widehat{PDC} = \widehat{EDQ} = \widehat{ADB}$.

Montrer que les droites (KP) , (LQ) et (MD) sont concourantes.

Solution de l'exercice 6



Commeçons par signaler qu'il est plus aisé de commencer par tracer le triangle MEC puis les points A , B et D .

Le problème est découpé en quatre étapes. La première étape, en plus d'avancer dans le problème, permet de tracer avec exactitude les points P et Q .

Étape 1 : Les quadrilatères $DEKP$ et $DQLC$ sont cocycliques.

La condition d'angle $\widehat{PDC} = \widehat{ADB}$ se réécrit $\widehat{BDC} = \widehat{PDA}$. Or,

$$\widehat{BDC} = \widehat{CMB} = \widehat{CEM}.$$

On déduit que $\widehat{KDP} = \widehat{PDA} = \widehat{CEM} = \widehat{PEK}$. Le quadrilatère $DEKP$ est donc cyclique. De la même façon, le quadrilatère $DQLC$.

Étape 2 : $(KP) \parallel (MC)$ et $(QL) \parallel (ME)$.

Cela vient du fait que, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le quadrilatère $DQLC$ et les calculs précédents,

$$\widehat{CQL} = \widehat{CDL} = \widehat{CEM}.$$

Les droites (QL) et (EM) sont donc parallèles. De même, on obtient que $(KP) \parallel (MC)$.

Étape 3 : Les droites (AB) et (KL) sont parallèles.

L'égalité d'angles $\widehat{CDL} = \widehat{CEM}$ pousse à prolonger les droites (EM) et (DL) . On note S le point d'intersection des droites (EM) et (DL) . On a alors $\widehat{SEC} = \widehat{MEC} = \widehat{CDL} = \widehat{SDC}$. Les points S, E, D et C sont donc cocycliques. De même si on introduit R le point d'intersection des droites (DA) et (MC) , le point R est cocyclique avec les points S, E, D et C .

D'après le théorème de l'angle inscrit puis le théorème de l'angle tangent, on a alors

$$\widehat{CRS} = \widehat{CES} = \widehat{CEM} = \widehat{CMB}.$$

Les droites (AB) et (RS) sont donc parallèles par égalité des angles correspondants (cette chasse aux angles et son résultat sont également connus sous le nom de théorème de Reim).

D'après le théorème de Thalès (pour les paires de droites (AM) et (RS) puis (BM) et (RS)), on a alors

$$\frac{AK}{AR} = \frac{AM}{RS} = \frac{BM}{RS} = \frac{BL}{BS}.$$

Avec le théorème de Thalès pour les droites (AB) et (RS) , on récupère

$$\frac{BL}{AK} = \frac{BS}{AR} = \frac{BD}{AD}.$$

Ceci implique que $(AB) \parallel (KL)$.

Étape 4 : Conclure.

Le parallélisme des droites (BM) et (KL) donne $\widehat{MLK} = \widehat{BML} = \widehat{MEC}$. On déduit que les points E, K, L et C sont cocycliques. Si $\mathcal{C}_{XYZ}$ désigne le cercle passant par les points X, Y et Z , on déduit que les axes radicaux des cercles $\mathcal{C}_{KEL}, \mathcal{C}_{KEP}, \mathcal{C}_{CLQ}$ sont concourants, ce qui implique que M est sur l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_{KEP}$ et $\mathcal{C}_{CLQ}$.

Puisque $(LQ) \parallel (ME)$, on a de plus

$$\widehat{PQL} = \widehat{CEM} = \widehat{MLK} = \widehat{PKL}.$$

Les points K, L, P et Q sont cocycliques. Les axes radicaux des cercles $\mathcal{C}_{KLP}, \mathcal{C}_{CQL}$ et $\mathcal{C}_{EKP}$ sont concourants. Ces trois axes sont exactement les trois droites $(DM), (KP)$ et (LQ) , ce qui conclut.

Solution alternative n°1

On propose une deuxième preuve de l'étape 4.

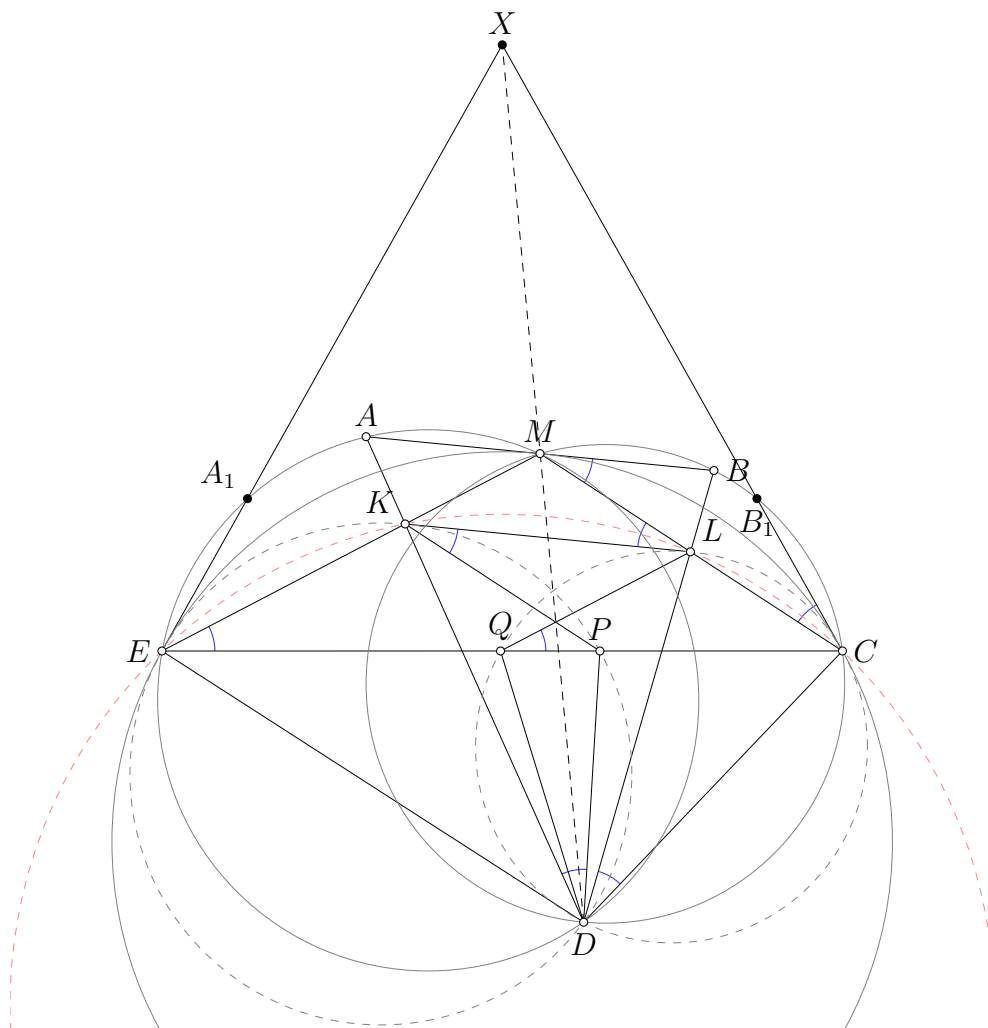
Considérons l'homothétie de centre D et qui envoie K sur R . Cette homothétie envoie également L sur S puisque les droites (KL) et (RS) sont parallèles. La droite (KP) est envoyée sur une droite passant par R et parallèle à (KP) , donc sur la droite (RC) . De même, la droite (QL) est envoyée sur la droite (ES) . Puisque les trois droites $(DM), (RC)$ et (ES) sont concourantes, leurs antécédents par l'homothétie le sont également, à savoir les droites $(DM), (KP)$ et (QL) .

Solution alternative n°2

On propose une troisième preuve de l'étape 4.

Soit X le point d'intersection des droites (KP) et (LQ) . Puisque $(LQ) \parallel (MK)$ et $(KP) \parallel (ML)$, le quadrilatère $XKML$ est un parallélogramme. Puisque $(KL) \parallel (AB)$ et que M est le milieu de $[AB]$, d'après le théorème de Thalès la droite (DM) coupe le segment $[KL]$ en son milieu. Il s'agit donc d'une diagonale du parallélogramme $XKML$, elle passe donc par X .

Solution alternative n°3



On propose une deuxième preuve de l'étape 3.

Puisque $(KP) \parallel (MC)$, il existe une homothétie de centre E envoyant K sur M et P sur C . Celle-ci envoie $\mathcal{C}_{EKP}$ sur $\mathcal{C}_{ECM}$. Ces deux cercles sont donc tangents en E . On note t_E leur tangente commune. De même, les cercles $\mathcal{C}_{CLQ}$ et $\mathcal{C}_{CME}$ sont tangents en C et on note t_C leur tangente commune.

Les axes radicaux des cercles $\mathcal{C}_{CLQ}$, $\mathcal{C}_{CME}$ et $\mathcal{C}_{EKP}$ sont concourants, donc les droites t_E, t_C se coupent sur l'axe radical de $\mathcal{C}_{EKP}$ et $\mathcal{C}_{CLQ}$. On note X ce point de concours. On note également A_1 le second point d'intersection de t_E avec $\mathcal{C}_{AEM}$ et B_1 le second point d'intersection de t_C avec $\mathcal{C}_{CDM}$.

D'après le théorème de l'angle tangent, $\widehat{BMC} = \widehat{B_1CM} = \widehat{CEM}$. Le quadrilatère inscrit $BMCB_1$ est donc un trapèze isocèle. Il en va de même pour MAA_1E , donc

$B_1C = BM = AM = A_1E$. Comme de plus $XE = XC$, on déduit que $XA_1 = XB_1$ puis que $XA_1 \times XE = XB_1 \times XC$. Le point X à la même puissance par rapport aux cercles $\mathcal{C}_{CDM}$ et $\mathcal{C}_{AEM}$, il appartient donc à leur axe radical qui est (DM) .

Mais X est aussi sur l'axe radical de $\mathcal{C}_{DEK}$ et $\mathcal{C}_{DCL}$. Comme cet axe radical contient aussi D , il contient aussi M . On a donc par puissance d'un point $ML \times MC = MK \times ME$. Les points K, L, C et E sont donc cocycliques. On a alors

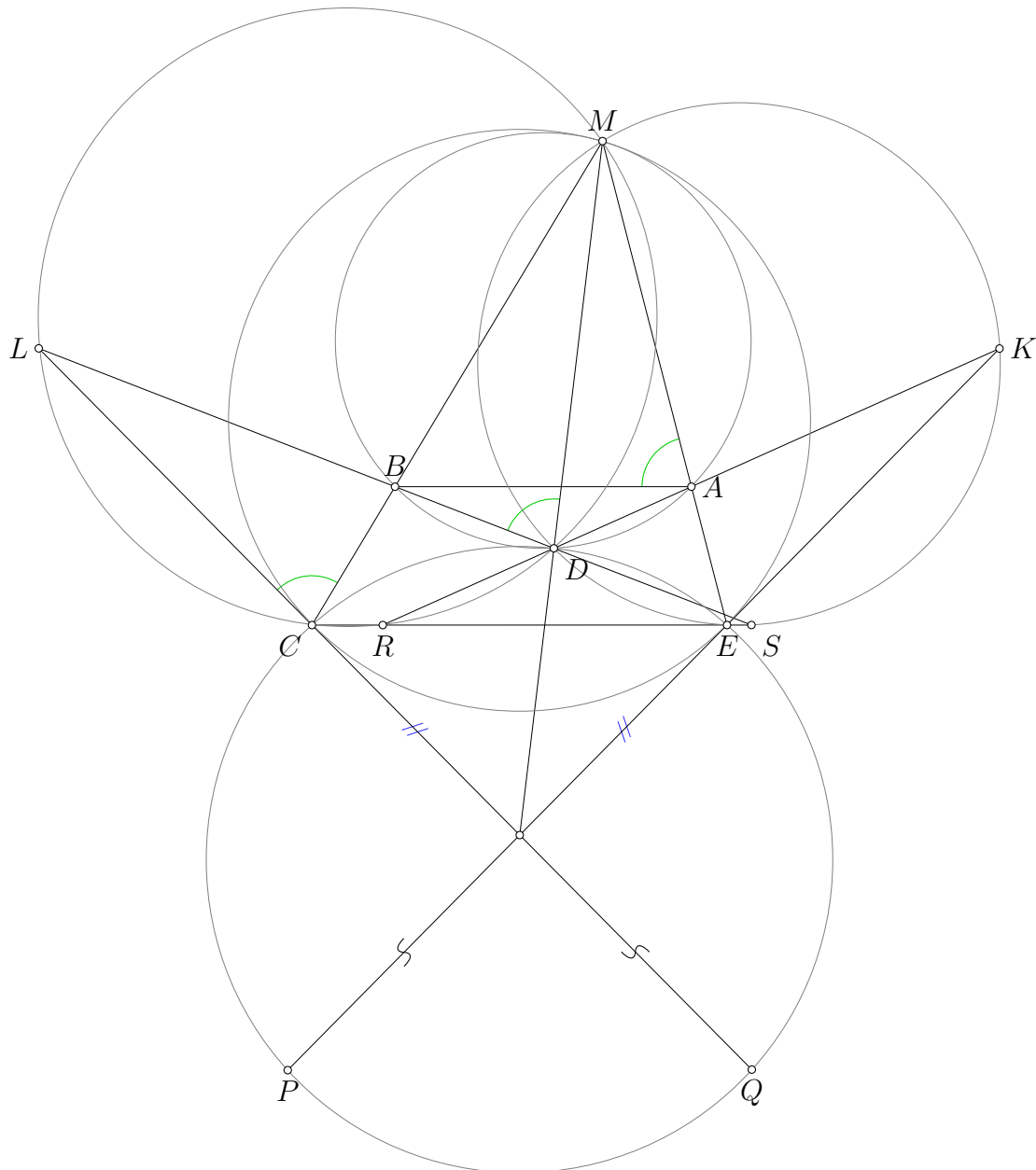
$$\widehat{MLK} = \widehat{MEC} = \widehat{CMB}.$$

Les droites (AB) et (KL) sont donc bien parallèles.

Solution alternative n°4

On propose une cinquième façon de résoudre le problème, à l'aide d'une inversion.

Puisque D appartient à plusieurs cercles, on peut considérer l'inversion de centre D et de rayon quelconque.



Notons $\mathcal{C}_{XYZ}$ le cercle passant par les points X, Y et Z . Notons également dans un premier temps X^* l'image du point X par l'inversion.

Puisque la droite (AB) est tangente au cercle $\mathcal{MEC}$ en M , les cercles $\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*\mathcal{D}^*$ et $\mathcal{C}^*\mathcal{E}^*\mathcal{M}^*$ sont tangents en M^* . Puisque D est sur $\mathcal{AME}$ et $\mathcal{MBC}$, les points M^*, A^* et E^* sont alignés, ainsi que M^*, B^* et C^* . En particulier, les droites (A^*B^*) et (C^*E^*) sont parallèles. De plus, on a $K^* \in \mathcal{C}_{D^*C^*M^*}$ et $L^* \in \mathcal{D}^*\mathcal{E}^*\mathcal{A}^*$. Enfin, puisque M est le milieu de $[AB]$ et que la similitude envoyant A^* sur A et B^* sur B est indirecte, M^* est sur la D^* -symédiane du triangle $D^*A^*B^*$. On déduit que D^* est sur la M^* -symédiane du triangle $M^*A^*B^*$, et donc sur la M^* -symédiane du triangle $M^*C^*E^*$.

Dans la suite, on considère la figure inversée, et le point X correspond au point précédemment noté X^* . Les calculs sont effectués en angles de droite.

Notons que par angles inscrits,

$$(CL, CM) = (DL, DM) = (DB, DM) = (AB, AM),$$

si bien que (LC) est tangente en C au cercle $\mathcal{CEM}$. De même, la droite (KE) est tangente en E à $\mathcal{CEM}$. D'autre part, par définition du point P , celui-ci appartient au cercle $\mathcal{DEC}$ et vérifie

$$(ME, MC) = (MA, MB) = (DA, DB) = (DP, DC) = (EP, CP),$$

La droite (PE) est donc également tangente au cercle $\mathcal{CEM}$. Les points K, E et P sont alignés, de même que les points L, C et Q .

Soit désormais R le point d'intersection des droites (KD) et (EC) et S le point d'intersection des droites (LD) et (EC) . On vérifie que

$$(DL, DR) = (DB, DA) = (MB, MA) = (MC, ME) = (CL, CE) = (CL, CR),$$

ce qui signifie que le point R est sur $\mathcal{C}_{MDC}$, de même que le point S est sur $\mathcal{C}_{MDE}$.

On désire à présent montrer que la droite (MD) est concourante avec les cercles $\mathcal{C}_{DLQ}$ et $\mathcal{C}_{KDP}$, autrement dit que la droite (MD) est l'axe radical de $\mathcal{C}_{DLQ}$ et $\mathcal{C}_{KDP}$. Notons X le point d'intersection des droites (LC) et (KE) , qui sont aussi les tangentes à $\mathcal{CEM}$. Par propriété de la symédiane, X est sur (MD) . Il suffit donc de montrer que X a même puissance par rapport à $\mathcal{C}_{DLQ}$ et $\mathcal{C}_{KDP}$, ou encore que $XQ \cdot XL = XP \cdot XK$.

Or, X est sur l'axe radical de $\mathcal{C}_{DCM}$ et $\mathcal{C}_{DEM}$, donc $XE \cdot XK = XC \cdot XL$. Ainsi, il suffit de montrer que $\frac{XQ}{XP} = \frac{XC}{XE}$. Mais on a $XC = XE$ et $XC \cdot XQ = XE \cdot XP$ par puissance du point X par rapport à $\mathcal{C}_{DEC}$, donc $XQ = XP$ et on a bien l'égalité de rapports voulue.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été résolu par assez peu d'élèves. Une partie satisfaisante des élèves a su réaliser, une, deux voire trois des étapes 1, 2 et 4 de la solution 1. C'est très encourageant de voir que, même sans avoir une résolution complète, les élèves sont capables d'utiliser à bon escient les hypothèses de l'énoncé pour explorer la figure et de réduire le problème.

Pour ce qui est des pistes d'améliorations : de trop nombreux élèves ont utilisé des nouveaux points qu'ils n'ont pas pris le soin de définir proprement. Il ne suffit pas de placer un point sur une figure pour le définir, s'ils ne sont pas définis dans l'énoncé il faut les définir proprement dans le texte de la preuve. On rappelle d'ailleurs que si l'on conjecture une

propriété, il ne faut pas seulement chercher à montrer cette conjecture mais aussi montrer que cette conjecture implique bien le résultat du problème (cela peut rapporter des points).

Montrer le parallélisme de (KL) et (AB) constituait le coeur du problème. Pour y arriver, les élèves ont employé les diverses tactiques présentes dans le corrigé. Plusieurs élèves ont effectué des inversions, toujours de centre M , mais même si quelques personnes ont réussi à en tirer quelques petits résultats, une autre inversion était bien plus intéressante (cf solution alternative 4). Il est judicieux de bien réfléchir à son centre d'inversion avant de faire l'inversion et de ne pas partir sur la première option alléchante.

Exercice 7. Soit n un entier strictement positif. $2n$ chevaliers sont assis autour d'une table ronde. Chaque chevalier possède exactement un frère parmi les chevaliers assis autour de la table et souhaite lui serrer la main. Deux chevaliers ne peuvent se serrer la main que s'ils sont assis côte-à-côte. Un *coup* consiste à choisir deux chevaliers assis côte-à-côte et à échanger leur place.

Déterminer, en fonction de n , le plus petit entier k tel que, quelle que soit la disposition initiale des chevaliers, il est possible d'effectuer k coups au bout desquels chaque paire de frères se sera serrée la main au moins une fois au cours de la réunion.

Solution de l'exercice 7

Réponse : Le plus petit nombre de coups nécessaire est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Le problème demande de déterminer le plus petit entier k vérifiant une certaine propriété. La solution contient donc nécessairement deux parties. Dans un second temps, on montre qu'il est toujours possible de réaliser $\frac{n(n-1)}{2}$ coups de sorte à satisfaire l'énoncé, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on donne un exemple de configuration initiale dans laquelle $\frac{n(n-1)}{2}$ coups sont nécessaires, cette étape s'appelle *la construction* ou *la synthèse*.

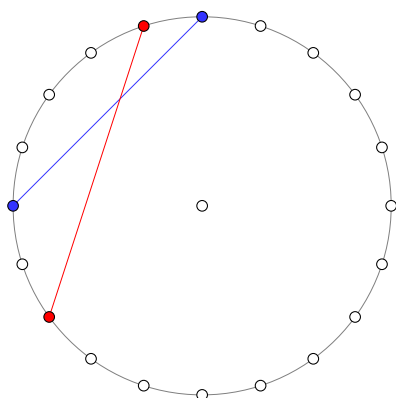
Analyse :

Nous allons prouver un résultat plus fort : quelle que soit la configuration initiale, il est toujours possible d'aboutir à une configuration où tous les frères sont assis côte-à-côte en $\frac{n(n-1)}{2}$ coups ou moins.

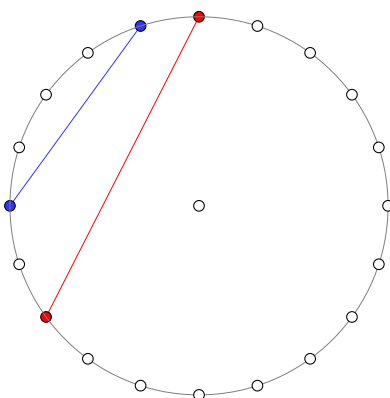
Pour chaque paire de frère, on trace une corde les reliant. On appelle *longueur* de la corde le nombre de chevalier compris entre les deux frères lorsqu'on parcourt le plus petit arc. La longueur d'une corde est donc un entier compris entre 0 et $n-1$.

On distingue trois types de paires de cordes : une paire (C, C') de corde est *croisée* si les cordes s'intersectent sur la table, *séparée* si les deux cordes ne se croisent pas et que le centre et l'une des deux cordes sont situés des demi-plans différents délimités par la deuxième corde, et *fade* sinon.

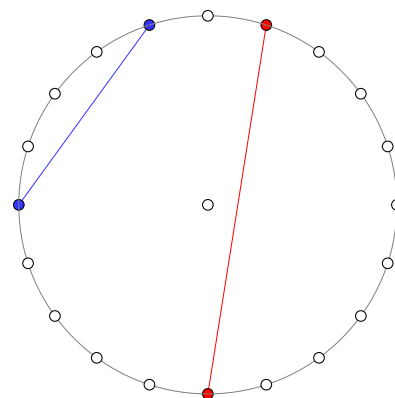
Note : Dans le cas où le centre est sur l'une des deux cordes et les cordes ne se croisent pas, la paire est considérée comme séparée.



paire croisée



paire séparée



paire fade

Dans une paire séparée, on distinguera la corde *séparée* et la corde *séparante*, qui sépare la corde séparée du centre. Sur l'exemple de la figure, la corde séparante est la corde rouge.

On note c le nombre de paires croisées, s le nombre de paires séparées et f le nombre de paires fades. Comme il y a n cordes, on a l'égalité

$$c + s + f = \frac{n(n-1)}{2}.$$

L'exercice tient aux deux lemmes suivants :

Lemme 1 : $s \leq f$.

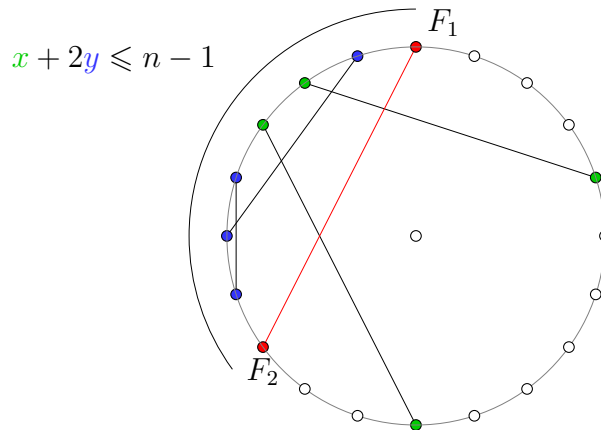
Lemme 2 : $c + 2s$ échanges suffisent à aboutir à la configuration où tous les frères sont adjacents.

En combinant ces deux lemmes, on trouve bien que $\frac{n(n-1)}{2}$ échanges suffisent.

Preuve du Lemme 1 : On procède par récurrence sur n .

Initialisation : Si $n = 2$, l'unique paire de cordes est soit croisée soit fade.

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour toute configuration à $2n - 2$ chevalier. Considérons alors une corde C de longueur maximale, reliant deux frères F_1 et F_2 . On note x le nombre de cordes qui coupent C et y le nombre de cordes C' telles que (C, C') est séparée et C est séparante. Si (C, C') est croisée, l'un des chevaliers de la paire C' est sur le plus petit arc reliant F_1 à F_2 . Si (C, C') est séparée, alors C est la corde séparante par maximalité de sa longueur, donc les deux chevaliers de C' sont sur le plus petit arc reliant F_1 à F_2 . Comme ce petit arc est de longueur au plus $n - 1$, on a $x + 2y \leq n - 1$.



Le nombre de cordes formant une paire fade avec C est alors $n - 1 - x - y \geq y$. Ainsi, le nombre s_C de paires séparées incluant C est inférieur au nombre f_C de paires fades incluant C .

D'après l'hypothèse de récurrence, si on note s' et f' le nombre de paires séparées et fades dans la configuration obtenue en retirant les chevaliers F_1 et F_2 , on a $s' \leq f'$. Montrons qu'une paire séparée avant de retirer les chevaliers reste séparée après avoir retiré les chevaliers. Si ce n'est pas le cas pour une paire (C_1, C_2) avec C_2 séparante, alors le centre de la nouvelle table et le centre de l'ancienne table ne sont pas du même côté de C_2 . Cela signifie que les chevaliers F_1 et F_2 étaient tous les deux sur le plus petit arc reliant les extrémités de C_2 , ce qui contredit la maximalité de la corde C . Ainsi, une paire séparée avant retrait de C reste séparée après. Ainsi, $s \leq s' + s_C$. Par contraposée, si une paire est fade, c'est qu'elle était fade avant de retirer F_1 et F_2 , d'où $f' + f_C \leq f$. On a donc $s \leq s' + s_C \leq f' + f_C \leq f$, ce qui achève la récurrence.

Preuve du Lemme 2 : On procède par récurrence sur le nombre $c + 2s$.

Initialisation : Si $c + 2s = 0$, alors $c = s = 0$. Dans ce cas, sur le plus petit arc contenant deux frères, il n'y a pas de chevalier séparé de son frère par la corde (car il n'y a pas de corde croisée) et il n'y a pas une fratrie complète (sinon cela formerait une paire de cordes séparée). Donc il n'y a aucun chevalier sur ce plus petit arc et les deux frères sont systématiquement adjacents. Il n'y a donc besoin d'aucun mouvement.

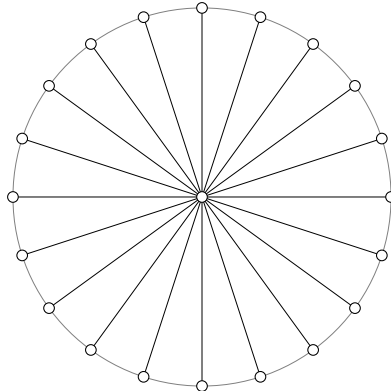
Hérédité : Considérons une corde C de longueur $\ell \geq 1$ reliant deux frères F_1 et F_2 (dans le cas $2c + s \geq 1$, une telle corde existe). Notons $F_1 = A_0, A_1, \dots, A_{\ell+1} = F_2$ les chevaliers situés sur le plus petit arc reliant F_1 à F_2 . Considérons la corde C_1 issue du chevalier A_1 .

- Si (C, C_1) est séparée avec C séparante, alors en échangeant A_0 et A_1 , la paire (C, C_1) passe de séparée à croisée, ce qui réduit de 1 la quantité $c + 2s$.
- Si C_1 intersecte C avec F_1 sur le plus petit arc reliant les extrémités de C_1 , alors en échangeant A_0 et A_1 , la paire (C, C_1) passe de croisée à fade, ce qui réduit d'au moins 1 la quantité $c + 2s$ et permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure.
- Si C_1 intersecte C avec F_2 sur le plus petit arc reliant les extrémités de C_1 : on note C_i la corde issue du sommet A_i . Si il existe un indice i tel que la paire (C_i, C_{i+1}) vérifie l'un des deux cas précédents, alors l'échange de A_i et A_{i+1} diminue la quantité $c + 2s$ de 1. Sinon, on a par récurrence immédiate que F_2 est sur le petit arc de toutes les cordes C_i , et en particulier sur celui de C_ℓ . L'échange de chevaliers F_2 et A_ℓ fait alors passer la paire (C, C_ℓ) de croisée à fade, ce qui diminue $c + 2s$ de 1.

Dans tous les cas, on a trouvé comment réduire la quantité $c + 2s$ avec un échange, on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à la configuration obtenue, ce qui montre qu'on peut aboutir à la configuration voulue en au plus $c + 2s$ échanges, ce qui achève la récurrence.

Construction :

Montrons que dans le cas où les frères sont opposés l'un à l'autre, il faut au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ échanges pour satisfaire l'énoncé.



Dans cette configuration, deux frères sont toujours éloignés de $n - 1$ places. Comme un échange déplace un chevalier d'au plus une place, il faut au moins $n - 1$ échanges pour que deux frères puissent être adjacents. Comme il y a n paires de frères, il faut au moins $n(n-1)$ échanges (pas forcément distincts) pour amener toutes les paires adjacentes. Chaque échange a alors été compté deux fois, de sorte qu'il faut au moins $\frac{n(n-1)}{2}$ échanges.

Solution alternative n°1

On propose une deuxième preuve du Lemme 2.

Plutôt que d'échanger un à un les chevaliers, on laisse les chevaliers se déplacer librement autour de la table. On demande à chaque paire de frères de se rendre tous les deux au point de la table situé au milieu du plus petit arc les reliant (si deux paires ont la même destination, on décale légèrement la destination de l'un des deux paires). Si plusieurs paires de chevaliers doivent se croiser en même temps en un même point, on choisit un ordre arbitraire de passage de chacun des chevaliers au point en question. De cette façon, chaque fois que deux chevaliers se croisent, cela correspond à un échange de places entre deux chevaliers dans le problème initial. Montrons que cela crée au plus $c + 2s$ échanges. En effet, une paire de cordes croisées engendre un échange de deux chevaliers. Une paire de cordes fade n'engendre pas d'échange, et une paire de cordes séparée engendre deux échanges. Ainsi, entre la situation initiale et la situation finale, il y aura eu au plus $c + 2s$ échanges.

Commentaire des correcteurs

Ce problème a été peu abordé, on ne compte aucune solution complète même si certains élèves s'en sont rapproché. Dans les copies rendues beaucoup d'entre vous ont trouvé la bonne borne $n(n - 1)/2$ en donnant une configuration dans laquelle il semblerait que le nombre de coup soit maximal. Malheureusement, très peu ont réussi à donner une justification suffisante. La manière la plus simple de procéder dans ce cas était de trouver un monovariant (cf. les cours de la POFM), il ne peut pas être suffisant de donner une stratégie qui "semble" être optimal.

Dans un second temps, il fallait démontrer qu'il était toujours possible d'effectuer $n(n - 1)/2$ coups au plus. Cette partie était la plus difficile, la problème principal étant que le monovariant le plus simple, la somme des distance entre les fratries de chevaliers (on appelle distance entre deux chevaliers d'une même fratrie le nombre minimal de chevaliers entre les deux frères), ne pouvait pas nécessairement être diminué de 1 à chaque fois. Par exemple, considérons la configuration suivante pour $n = 3$: 1; 2; 2; 1; 3; 3, où on a affiché un numéro pour chaque chevalier de la même fratrie et 'brisé' le cercle en deux. Ici la distance totale est 2 mais après un premier coup on obtient la configuration 1; 2; 1; 2; 3; 3 qui a toujours distance 2. Après un deuxième coup on peut maintenant obtenir 1; 1; 2; 2; 3; 3 et la distance est maintenant 0. En fait les paires qui sont séparées (cf. corrigé) comptent double ! Ce raisonnement était le coeur du problème et très peu d'élèves ont réussi à le comprendre.