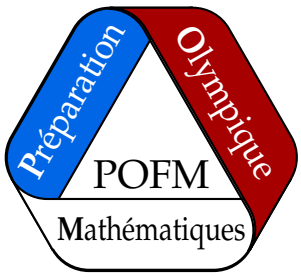
PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 20 NOVEMBRE 2024

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

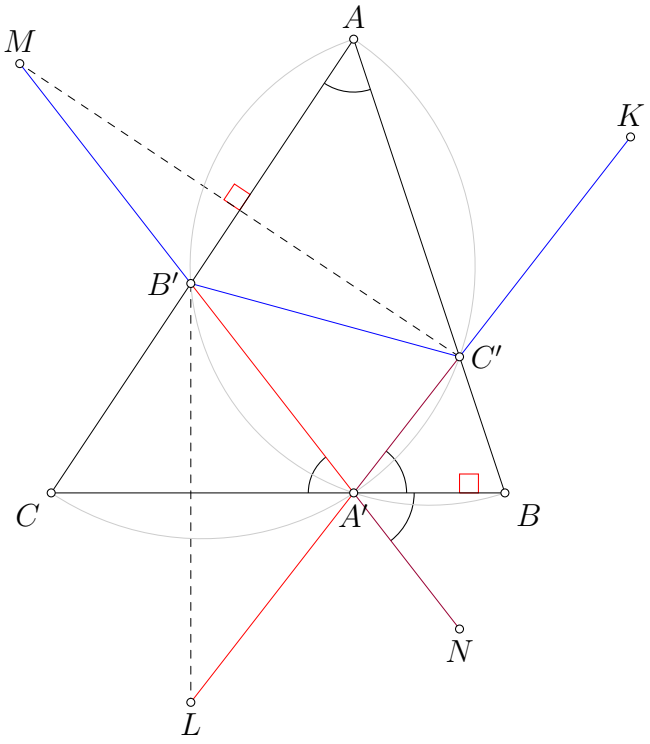
Énoncés Senior

Exercice 1. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. On note B' et C' les pieds respectifs des hauteurs issues des sommets B et C. Soient K et L les symétriques respectifs du point B' par rapport aux droites (AB) et (BC). Soient M et N les symétriques respectifs du point C' par rapport aux droites (AC) et (BC).

Démontrer que $KL = MN$.

Solution de l'exercice 1

L'exercice contient trois preuves. Dans la première preuve, on introduit le troisième pied de la hauteur et on montre que KL et MN sont égaux au périmètre du triangle reliant les trois pieds des hauteurs. La deuxième preuve s'appuye sur un découpage des segments $[KL]$ et $[MN]$ pour les comparer morceaux par morceaux, sans introduire de nouveau point, mais sans obtenir de valeur explicite pour KL et MN. La dernière preuve montre comment calculer explicitement KL et MN en fonction des paramètres du triangle ABC à l'aide d'égalités de rapports.



En traçant les segments $[KL]$ et $[MN]$, on s'aperçoit qu'ils passent respectivement par les points C' et B' et qu'ils se coupent sur le segment $[BC]$. Nous entreprenons de le démontrer.

Soit A' le pied de la hauteur issue du sommet A. Puisque $\widehat{AB'B} = \widehat{AA'B} = 90°$, les points A, B', A' et B sont cocycliques. D'après le théorème de l'angle inscrit, on déduit que

$$\widehat{B'A'C} = 180° - \widehat{B'A'B} = \widehat{CAB}.$$

De la même manière, on montre que les points A, C', A' et C sont cocycliques. et que $\widehat{BA'C'} = \widehat{BAC}$.

Puisque les points N et C' sont symétriques par rapport à la droite (BC) et que A' est sur cette droite, on a $\widehat{BA'N} = \widehat{BA'C'}$. Ainsi,

$$\widehat{BA'N} = \widehat{BA'C'} = \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C}.$$

On déduit que les points B', A' et N sont alignés. On prouve de même que les points B', A' et M sont alignés : les points B, C', B' et C étant cocycliques, on retrouve

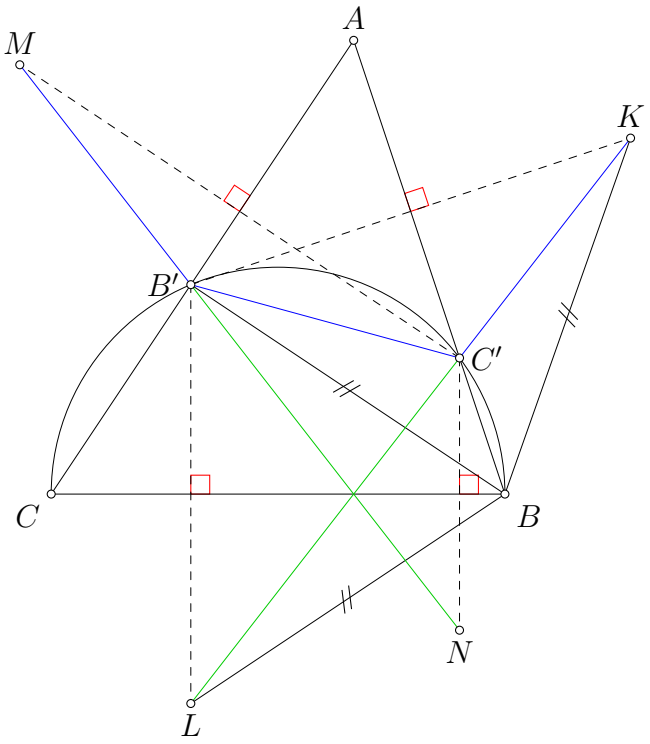
$$\widehat{AB'M} = \widehat{AB'C'} = \widehat{ABC} = \widehat{CB'A'},$$

ce qui donne l'alignement voulu. Les points M, B', A' et N sont donc sur une même droite.
Puisque C' et M sont symétriques par rapport à la droite (AC), on trouve $MB' = B'C'$. Puisque C' et N sont symétriques par rapport à la droite (BC), on trouve $NA' = C'A'$. Ainsi,

$$MN = MB' + B'A' + NA' = B'C' + B'A' + C'A'.$$

De la même manière on prouve que $KL = B'C' + B'A' + C'A'$. On a donc bien $KL = MN$.

Solution alternative n°1



On commence par montrer l'alignement des points K, C' et L, d'une façon différente de la solution 1.
Puisque les points K et B' sont symétriques par rapport à (AB), on a $B'C' = C'K, BB' = BK$ et $\widehat{ABK} = \widehat{B'BA}$. De même, $B'C' = B'M, BB' = BL$ et $\widehat{CBL} = \widehat{CBB'}$. On déduit que le triangle BLK est isocèle en B avec

$$\widehat{KBL} = \widehat{KBA} + \widehat{ABB'} + \widehat{B'BC} + \widehat{CBL} = 2\widehat{B'BA} + 2\widehat{B'BC} = 2\widehat{ABC}.$$

Il vient, en regardant la somme des angles du triangle isocèle KBL, que $\widehat{BKL} = 90° - \widehat{ABC}$.

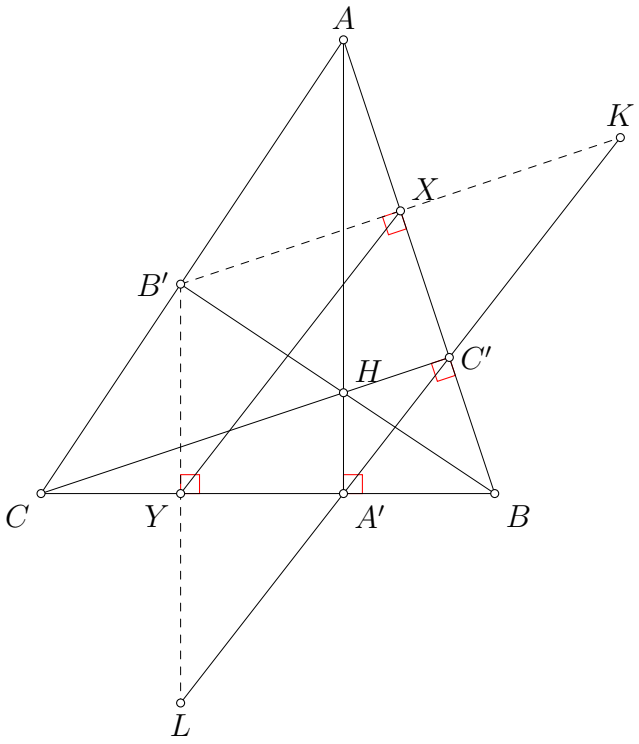
D'autre part, puisque (BC') est la médiatrice de $[B'K]$, $\widehat{C'KB} = \widehat{C'B'B}$. Ensuite, puisque $\widehat{CB'B} = 90° = \widehat{CC'B}$, les points C, B', C' et B sont cocycliques, ce qui implique notamment

que $\widehat{C'B'B} = \widehat{BCC'} = 90° - \widehat{CBA}$. On a montré que $\widehat{BKC'} = \widehat{BKL}$, les points K, C' et L sont donc bien alignés. On montre de la même façon que les points M, B' et N sont alignés.

Puisque (BC) est la médiatrice commune des segments $[B'L]$ et $[C'N]$, le quadrilatère $B'C'NL$ est un trapèze isocèle, ce qui implique que $B'N = C'L$. Finalement

$$KL = KC' + C'L = MB' + B'N = MN.$$

Solution alternative n°2



Notons A' le pied de la hauteur issue du sommet A. Nous allons calculer KL en fonction des paramètres du triangle ABC.

Notons X le projeté orhtogonal de B' sur $[AB]$ et Y le projeté orthgonal de B' sur $[BC]$. Les points X et Y sont les milieux respectifs des segments $[B'K]$ et $[B'L]$. On a donc $KL = 2XY$.

Puisque les droites $(B'X)$ et (CC') sont parpendiculaires à (AB), elles sont parallèles. De même, les droites $(B'Y)$ et (HA') sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, on trouve

$$\frac{BX}{BC'} = \frac{BB'}{BH} = \frac{BY}{BA'},$$

donc les droites (XY) et $(A'C')$ sont parallèles. On a alors

$$\frac{XY}{A'C'} = \frac{BX}{BC'} = \frac{BB'}{BH}.$$

Il est classique que les triangles $\Delta BA'C'$ et ΔBAC sont semblables, ce qui donne l'égalité de rapports

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{BA'}{BA}.$$

De même, puisque les triangles $BA'H, BCB'$ et $AA'C$ sont rectangles avec un angle valant $90° - \widehat{BCA}$, ils sont semblables et

$$\frac{BA'}{BH} = \frac{AA'}{AC}.$$

En combinant toutes ces égalités de rapport, on obtient

$$\frac{KL}{2} = XY = \frac{BB'}{BH} \times A'C' = \frac{BB' \times AC \times B'A}{BH \times AB} = \frac{2\mathcal{A}_{ABC} \times AA'}{AB \times AC}.$$

Cette expression est symétrique en B et C. On trouve de même que $MN = 4\dfrac{\mathcal{A}_{ABC} \times AA'}{AB \times AC}$, ce qui prouve que $KL = MN$.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été beaucoup abordé et très bien réussi dans l'ensemble ! Les correcteurs ont observé une belle diversité de preuves (certaines avec des lois des sinus, ou encore en remarquant des pôles Sud). La plupart des copies ont remarqué les égalités $KC' = B'C' = B'M$ et $B'N = C'L$. La principale difficulté rencontrée était ensuite de justifier que K, C', L et M, B', N sont alignés. Voici les problèmes récurrents rencontrés par les correcteurs :

- ▷ Les correcteurs soulignent l'importance de faire attention à bien invoquer les arguments utilisés, en particulier les symétries axiales : certaines copies se contentent d'affirmer « $KC' = B'C'$ » sans donner aucun argument. Il est important de justifier d'où provient cette égalité.
- ▷ L'erreur la plus fréquente qu'ont rencontré les correcteurs est celle de ne pas se rendre compte que l'alignement de K, C', L ou M, B', N n'a pas été prouvé : si l'alignement apparaît clairement sur une figure bien faite, il ne faut pas tomber dans le piège d'utiliser l'alignement dans sa preuve sans avoir au préalable démontré cette propriété.
- ▷ Enfin, il est à noter qu'un certain nombre de copies ne comportaient pas de figure. Les correcteurs tiennent à rappeler l'importance de joindre une grande figure propre à un raisonnement géométrique : c'est un support qui aide grandement à la lecture et la compréhension de la solution. C'est aussi un moyen de faire des conjectures intéressantes qu'on peut ensuite chercher à prouver (par exemple ici, l'alignement de K, C', L, et M, B', N).

Exercice 2. Déterminer tous les ensembles $\mathcal{S}$ finis non vides d'entiers strictement positifs ayant la propriété suivante :

Pour tout choix de deux entiers a et b dans $\mathcal{S}$, il existe un entier c dans $\mathcal{S}$ tel que a divise $b+2c$.

Solution de l'exercice 2

Réponse : Les seuls ensembles solutions sont les ensembles de la forme $\{k, 3k\}$ et $\{k\}$, ou k peut prendre n'importe quelle valeur entière strictement positive.

Soit $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un ensemble solution. Notons que si $n = 1$, tout singleton vérifie la propriété de l'énoncé. Dans la suite, on suppose donc $n \geqslant 2$.

On commence par remarquer que les ensembles $\{ka_1, \ldots, ka_n\}$ et $\{a_1/d, \ldots, a_n/d\}$ sont également solutions du problème pour tout entier $k \geqslant 1$ et tout diviseur d commun à chacun des a_i. Ainsi, quitte à diviser chacun des a_i par le PGCD des a_i, on peut supposer que les entiers $a_1, \ldots, a_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Montrons dans ce cas que les entiers sont tous impairs. Puisqu'ils sont premiers entre eux dans leur ensemble, les a_i ne peuvent pas tous être pairs. Supposons alors qu'il existe un entier a de $\mathcal{S}$ qui soit pair et un entier b de $\mathcal{S}$ qui est impair. D'après la propriété, il existe un entier c de $\mathcal{S}$ tel que $a \mid b + 2c$. Or, $b + 2c$ est impair et a est pair, la divisibilité est donc absurde. Ainsi, tous les entiers de $\mathcal{S}$ sont impairs.

Quitte à renuméroter les entiers, on peut supposer que $a_1 < \ldots < a_n$. Pour tout indice $i < n$, en appliquant la propriété de l'énoncé à la paire (a_n, a_i), il existe un indice $f(i)$ tel que $a_n \mid a_i + 2a_{f(i)}$. On déduit que

$$a_n \leqslant a_i + 2a_{f(i)} < a_n + 2a_n = 3a_n.$$

De plus, $a_i + 2a_{f(i)}$ est impair, donc il s'agit d'un multiple impair de a_n strictement inférieur à $3a_n$, donc $a_i + 2a_{f(i)} = a_n$. En particulier, $a_{f(i)} < a_n$ donc $f(i) < n$.

Si $i < j$, on remarque que

$$2a_{f(i)} = a_n - a_i > a_n - a_j = 2a_{f(j)},$$

si bien que $f(i) > f(j)$. La fonction f est donc une bijection décroissante de $\{1, \ldots, n-1\}$, de sorte que $f(i) = n - i$ pour tout indice i. En particulier, on a

$$a_1 + 2a_{n-1} = a_1 + 2a_{f(1)} = a_n = a_{n-1} + 2a_{f(n-1)} = a_{n-1} + 2a_1,$$

si bien que $a_{n-1} = a_1$ et $n = 2$.

En appliquant la propriété de l'énoncé à la paire (a_2, a_1), on trouve que $a_2 \mid a_1 + 2a_2$ ou $a_2 \mid a_1 + 2a_1$. Dans le premier cas, on trouve que $a_2 \mid a_1$, ce qui est impossible car $0 < a_1 < a_2$. Dans le second cas, on trouve $a_2 \mid 3a_1$. Comme a_2 et a_1 sont premiers entre eux, on trouve $a_2 \mid 3$, et comme $a_2 > a_1 \geqslant 1$, on trouve $a_2 = 3$. Mais alors en appliquant la propriété de l'énoncé à la paire (a_1, a_2), on a $a_1 \mid a_2 = 3$ ou $a_1 \mid 3a_2 = 9$. Dans tous les cas, comme a_1 est premier avec a_2, on déduit que $a_1 = 1$.

Réciproquement, on vérifie que la paire $(1, 3)$ satisfait l'énoncé. Ainsi, les ensembles de la formes $\{k, 3k\}$ avec $k \geqslant 1$ entier sont les seuls ensembles solutions du problème si $n \geqslant 2$.

Solution alternative n°1

On propose une autre façon de conclure que $n \leqslant 2$ une fois que l'on a établi que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, il existe un indice $f(i)$ tel que $a_n = a_i + 2a_{f(i)}$. Notons que f est injective : si i_1 et i_2 sont deux indices tels que $f(i_1) = f(i_2)$, alors

$$a_{i_1} = a_n - 2a_{f(i_1)} = a_n - 2a_{f(i_2)} = a_{i_2}.$$

ce qui donne bien que $i_1 = i_2$. Fixons à présent un indice $j \leqslant n-1$. On construit la suite (k_m) définie par $k_0 = j$ et $k_{m+1} = f(k_m) = f^{(m)}(j)$ pour tout m. D'après le principe des tiroirs, on dispose d'une paire d'indices (m_1, m_2) avec $m_1 < m_2$ telle que $k_{m_1} = k_{m_2}$. Supposons que (m_1, m_2) vérifie que m_2 est minimal et supposons que $m_1 \neq 0$. Alors on a $f(k_{m_1-1}) = f(k_{m_2-1})$, donc par injectivité, $k_{m_1-1} = k_{m_2-1}$, ce qui contredit la minimalité de m_2. On déduit que $m_1 = 0$ et par récurrence immédiate, $k_m = k_{m+m_2}$ pour tout m. Autrement dit, la suite (k_m) est périodique.

D'autre part, pour tout indice m, on a notamment $a_n = a_{k_m} + 2a_{k_{m+1}}$. En comparant cette relation pour le rang m et le rang $m+1$, on obtient

$$a_{k_m} + 2a_{k_{m+1}} = a_n = a_{k_{m+1}} + 2a_{k_{m+2}},$$

ou encore

$$a_{k_{m+2}} = \frac{a_{k_m} + a_{k_{m+1}}}{2}.$$

Notons que si $a_{k_1} > a_{k_0}$, alors on obtient que $a_{k_m} > 0$ pour tout indice $m \geqslant 1$ par récurrence immédiate. Ceci contredit la périodicité de la suite. On obtient une contradiction similaire en supposant $a_{k_1} < a_{k_0}$. On déduit que $a_{k_1} = a_{k_0}$, ce qui signifie que la suite (a_{k_m}) est constante. On a donc $a_n = a_{k_0} + 2a_{k_1} = 3a_j$, de sorte que $a_j = a_n/3$. Comme les a_i sont deux à deux distincts, on déduit qu'il n'y a qu'un seul indice $j \leqslant n-1$, c'est-à-dire que $n \leqslant 2$. Dans le cas où $n = 2$, on récupère avec cette preuve que $a_1 = a_2/3$. c

Commentaire des correcteurs

Le problème était difficile et a été plutôt bien réussi : en effet, beaucoup d'élèves ont réussi à avoir des points, et nombre d'entre eux ont réussi à bien avancer dans le problème. Voici quelques problèmes récurrents :

- ▷ Plusieurs élèves n'ont pas compris qu'un ensemble était formé d'entiers distincts. Un ensemble est pourtant une collection d'éléments distincts. Cependant, comme rien n'était précisé sur a, b et c, il est possible que ceux-ci soient non distincts.
- ▷ Certains n'ont pas compris l'énoncé, et cru que pour tout a, b, c dans S, alors a divise $b + 2c$. Or il était uniquement dit que pour tout a, b dans S, il existe c dans S tel que a divise $b + 2c$. Il n'a à priori pas de raison de diviser $c + 2b$ par exemple.
- ▷ Attention aux divisibilités et aux modulos. Déjà a divise b n'implique pas que $b \equiv a \pmod{n}$ pour différents n. De plus, souvent certains essaient de faire des calculs difficiles avec des modulos aboutissant régulièrement à des erreurs de calcul.
- ▷ Plusieurs élèves ont fait des constats sans preuve. Par exemple, certains élèves ont affirmé que tous les entiers avaient même parité, ou que pour $|S| = 2$, la seule solution était $n, 3n$. Les deux affirmations n'étant absolument pas claires, elles méritaient justification pour rapporter des points.
- ▷ Plusieurs élèves avec une solution quasiment correcte oublient des solutions. C'est dommage, puisqu'un réflexe naturel face à ce problème est de regarder ce que vaut S dans le cas où $|S|$ est petit, par exemple si $|S| = 1$ ou 2.

- ▷ Ce problème rassemble un certain nombre de réflexes très classiques en mathématiques olympiques : regarder les petits cas, regarder la parité, factoriser par le pgcd, regarder un maximum, regarder des ordres de grandeur de quantité. Il est important d'en retenir les différentes astuces.
- ▷ Certains élèves ont loupé des cas dans leur raisonnement. Souvent pour vérifier qu'un raisonnement est correct, il faut se demander pourquoi les solutions trouvées en testant les petits cas ne contredisent pas le raisonnement. Par exemple, plusieurs élèves ont fait une preuve dont l'hypothèse de départ était $|S| \geq 3$, et aboutissant à une absurdité. Il est **crucial** que soit mentionné quelque part l'utilisation de $|S| \geq 3$, puisqu'à priori, cette hypothèse était nécessaire pour arriver à une contradiction. Se demander où est-ce que l'hypothèse a été utilisée permettait souvent de détecter des oublis de cas qui pouvaient coûter de précieux points, car si rien ne semble utiliser cette hypothèse, c'est qu'il y a une erreur.

Exercice 3. Soit $d \geqslant 1$ un entier fixé. Anna et Baptiste jouent au jeu suivant. Chacun à leur tour, en commençant par Anna, ils choisissent un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 2d-1$ et qui n'a pas encore été choisi par un des deux joueurs, et un réel strictement positif qu'ils notent a_k. Lorsque tous les entiers ont été choisis, Anna écrit le polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{2d-1}X^{2d-1} + X^{2d}$. Anna gagne s'il existe un réel c tel que $P(c) = 0$. Sinon c'est Baptiste qui gagne.

Déterminer, en fonction de d, lequel des deux joueurs possède une stratégie lui permettant de gagner quels que soient les coups de son adversaire.

Solution de l'exercice 3

On propose deux solutions. Dans la première solution, on regroupe les coefficients du polynôme deux par deux et on découpe le coefficient dominant. Dans la seconde, Baptiste s'arrange pour que le dernier coefficient qu'il joue soit pair et le choisit correctement pour gagner.

Réponse : Baptiste possède une stratégie gagnante quel que soit l'entier d.

On partitionne les indices de $\{0, \ldots, 2d-1\}$ en d paires $(2k, 2k+1)$ pour $k = 0, \ldots, d-1$. Notons que le polynôme P final peut se réécrire

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d-1} X^{2k}\left(a_{2k} + a_{2k+1}X + \frac{1}{d}X^{2d-2k}\right).$$

Signalons enfin qu'une façon d'empêcher le polynôme P d'avoir une racine est de s'arranger pour qu'il soit de signe strictement positif.

La stratégie pour Baptiste consiste, à chaque tour, si Anna a choisi l'entier $2k$ (resp. $2k+1$) et le réel a_{2k} (resp. a_{2k+1}), à compléter la paire $(2k, 2k+1)$ et de choisir le réel a_{2k+1} manquant en s'arrangeant pour que $a_{2k} + a_{2k+1}x^{2k+1} + \frac{1}{d}x^d > 0$ pour tout réel x. Pour montrer que c'est possible, on distingue deux cas. Le cas où Anna choisit l'indice $2k$ et le cas où Anna choisit l'indice $2k+1$. Chacun des deux cas repose sur le lemme suivant, prouvé à la fin de la solution :

Lemme : Soit $n \geqslant 2$ un entier pair.

1. Soit $b > 0$. Il existe un réel $a > 0$ tel que, pour tout réel x, $a + bx + \frac{1}{d}x^n > 0$.
2. Soit $a > 0$. Il existe un réel $b > 0$ tel que, pour tout réel x, $a + bx + \frac{1}{d}x^n > 0$.

Cas 1 : Si Anna choisit l'indice $2k$ et le réel a_{2k}. Pour simplifier les notations, on pose $n = 2d - 2k$. Baptiste choisit alors l'indice $2k+1$. D'après le lemme, il dispose d'un réel $a_{2k+1} > 0$ tel que le polynôme $a_{2k} + a_{2k+1}X + \frac{1}{d}X^{2d-2k}$ est bien strictement positif pour tout x.

Cas 2 : Si Anna choisit l'indice $2k+1$ et le réel a_{2k+1}. On pose à nouveau $n = 2d-2k$. Baptiste choisit alors l'indice $2k$. D'après le lemme, il dispose d'un réel $a_2 k > 0$ tel que le polynôme $a_{2k} + a_{2k+1}X + \frac{1}{d}X^{2d-2k}$ est bien strictement positif pour tout x.

En appliquant cette stratégie, le polynôme final vérifie pour tout x réel

$$P(x) = \sum_{k=0}^{d-1} x^{2k} \underbrace{\left(a_{2k} + a_{2k+1}x + \frac{1}{d}x^n\right)}_{>0} > 0.$$

Ceci garantit à Baptiste que P est sans racine. Il a donc une stratégie gagnante.

Preuve du lemme :

Montrons 1. Puisque n est pair, le polynôme $bX + \frac{1}{d}X^n$ est minoré par une constante $-M$. En prenant $a > M$, on vérifie que, pour tout réel x, $a + bX + \frac{1}{d}X^n > M - M = 0$.

Montrons 2. Notons que e polynôme $a + bX + X^n$ est strictement positif en 0. Si $x \neq 0$, l'inégalité des moyennes nous donne,

$$\begin{aligned} a + bx + \frac{1}{d}x^n &= \frac{a}{n-1} + \ldots + \frac{a}{n-1} + \frac{1}{d}x^n + bx \\ &\geqslant n\sqrt[n]{\frac{a}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{1}{d}x^n} + bx \\ &= \frac{n}{d^{1/n}}\left(\frac{a}{n-1}\right)^{(n-1)/n}|x| + bx \end{aligned}$$

En prenant $b < n\left(\frac{a^{n-1}}{d(n-1)^{n-1}}\right)^{1/n}$, l'expression ci-dessus est strictement positive pour $x \neq 0$. Ainsi, le polynôme $a + bX + \frac{1}{d}X^{2d-2k}$ est bien strictement positif pour tout x.

Remarque 1 **:** Dans le cas où le but de Baptiste est que le polynôme possède au moins une racine, il est possible de montrer que, là aussi, Baptiste possède une stratégie gagnante.

Remarque 2 **:** La preuve du point 2. du lemme s'adapte également pour montrer le point 1. Le point 2. peut également se montrer en faisant une étude de la fonction $f : x \mapsto a+bx+\frac{x^n}{d}$. En effet, on a

$$f'(x) = b + \frac{n}{d}x^{n-1},$$

de sorte que f admet un minimum global au point $x = -\left(\frac{bd}{n}\right)^{1/(n-1)}$. Ainsi, on a

$$f(x) \geqslant f\left(-\left(\frac{bd}{n}\right)^{1/(n-1)}\right) = a - \frac{n-1}{n^{n/(n-1)}}d^{1/(n-1)}b^{n/(n-1)}.$$

Il vient alors qu'en prenant b suffisamment petit, on peut bien rendre le membre de droite strictement positif.

Solution alternative n°1

On présente une stratégie alternative pour Baptiste. Pour la mise en place de cette stratégie, Anna et Baptiste écrivent tour à tour leurs coefficients au tableau. On montre que Baptiste peut jouer de sorte qu'à la fin de chacun de ses tours, le polynôme écrit au tableau vérifie la propriété suivante $(\mathcal{P})$: il existe un réel $\delta > 0$ tel que le polynôme Q écrit au tableau se factorise sous la forme $Q(X) = X^{2r}R(X)$ avec $R(x) > \delta$ pour tout réel x. Notons que $\mathcal{P}$ est vérifiée au début du jeu puisque le polynôme écrit au tableau est $Q(X) = X^{2d}$.

Tout comme dans la première solution on partitionne les indices en les paires $(2k, 2k+1)$. On suppose qu'au début du tour d'Anna, le polynôme Q écrit au tableau vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Cas 1 : Si Anna choisit l'indice $2k$. Le nouveau polynôme écrit au tableau se factorise sous la forme $X^{2s}S(X)$, avec $s = \min(r, k)$ et $S(x) \geqslant \min(\delta, a_{2k})$. On pose $\varepsilon = \min(\delta, a_{2k})$. Comme le polynôme $S(X) + X^{2(k-s)+1}$ est de degré pair $2(d-s)$, il est minoré par une constante $-C$. On pose alors $a_{2k+1} = \frac{1}{2(\varepsilon+C)}$, ce qui implique notamment que

$$S(x) + a_{2k+1}x^{2k+1} = (1 - a_{2k+1})S(x) + a_{2k+1}(S(x) + x^{2k+1}) \geqslant (1 - a_{2k+1})\varepsilon - a_{2k+1}C > 0,$$

de sorte qu'à la fin de son tour, le polynôme écrit au tableau vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Cas 2 : Anna choisit l'indice $2k+1$. Le polynôme $Q + a_{2k+1}X^{2k+1} + X^{2k}$ se factorise sous la forme $\tilde{Q}(X) = X^{2s}S(X)$, avec $s = \min(r, k)$ et $S(X)$ un polynôme de degré pair. On montre que Baptiste peut choisir un réel a_{2k} tel que $S(x) + (a_{2k} - 1)x^{2(k-s)} \geqslant 0$ pour tout réel x.

Comme S est de degré pair, il est minoré par un réel $-M$. Si $k = s$, alors $a_{2k} = M+1$ convient. On suppose à présent que $k \geqslant s+1$. Si S est déjà strictement positif, $a_{2k} = 2$ convient. Sinon, on note x_0 la plus grande racine réel de S. Puisque, pour $x \geqslant 0$, $S(x) \geqslant a_0 > 0$, on a $x_0 < 0$. De plus, puisque S est de coefficient dominant strictement positif, S est strictement positif sur $]x_0, +\infty[$. On pose alors $a_{2k} - 1 = M/x_0^{2(k-s)}$.

- Si $x_0 \leqslant x < 0$,

$$S(x) + (a_{2k} - 1)x^{2k} \geqslant 0 + (a_{2k} - 1)x^{2k} > 0.$$

- Si $x < x_0$,

$$S(x) + (a_{2k} - 1)x^{2k} \geqslant -M + \frac{M}{x_0^{2(k-s)}}x^{2(k-s)} = \frac{M}{x_0^{2(k-s)}}(x^{2(k-s)} - x_0^{2(k-s)}) > 0.$$

Ainsi, le polynôme S est strictement positif et à la fin du tour de Baptiste, le polynôme vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

Ainsi, en suivant cette stratégie à la fin du tour de Baptiste, le polynôme écrit au tableau vérifiera toujours la propriété $\mathcal{P}$. Comme à la fin du jeu, l'entier r dans la factorisation du polynôme inscrit au tableau est nul, le polynôme P est strictement positif sur $\mathbb{R}$, ce qui assure la victoire de Baptiste.

Commentaire des correcteurs

Exercice relativement difficile, mais qui restait abordable. Beaucoup de personnes ont eu de bonnes intuitions sur les stratégies possibles de Baptiste, mais ont eu du mal à les formaliser.

- ▷ On regrette plusieurs problèmes de lecture d'énoncé, notemment des copies qui nous expliquent comment s'assurer d'avoir une racine.
- ▷ De nombreux élèves ont été maladroits pour montrer l'existence d'un minimum des fonctions avec lesquelles ils travaillaient. Notamment, pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^\star$, il ne suffit pas de dire qu'elles tendent vers $+\infty$ en $\pm\infty$ car elles pourraient tendre vers $-\infty$ d'un côté ou de l'autre de 0 par exemple.
- ▷ Une difficulté de l'exercice était qu'entre le voisinage de 0 et le voisinage de $-\infty$, les monômes ayant le plus d'impact changent. Une bonne manière de s'en sortir que plusieurs élèves ont utilisée et dont les autres auraient pu profiter est de séparer ces deux régimes, par exemple distinguer les cas $x < -1$ et $-1 \leq x < 0$, et s'assurer par deux conditions (dont Baptiste choisirait la plus contraignante) que dans chacun de ces régimes, le polynôme est positif.

▷ Nous avons décidé de ne pas récompenser les copies ayant traité de cas $d = 1$, ou même $d = 1$ et $d = 2$. Cependant, nous souhaitons souligner que cette approche reste interéssante pour se forger une intuition, nous encourageons donc tous les élèves ayant traité ces petits cas à recommencer à l'avenir. Toutefois nous avons été surpris par quelques élèves qui conjecturent sans raison apparente un autre gagnant dans le cas général que le vainqueur qui avait été identifé dans les petits cas. Cela enlève l'intérêt de chercher les petits cas.

Exercice 4. On considère une grille carrée de taille $n \times n$ composée de n^2 cases. Pour tout diviseur positif d de n, la $d-$*division* de la grille est définie comme la division de la grille en $(n/d)^2$ sous-grilles carrées, toutes de taille $d \times d$, de sorte que chaque case appartient à exactement une sous-grille.

On dit qu'un entier n est *régulier* s'il est possible d'écrire les entiers $1, 2, \ldots, n^2$ dans les cases de la grille en vérifiant les conditions suivantes :

- ▷ chaque case contient exactement un entier,
- ▷ chacun des entiers $1, 2, \ldots, n^2$ est écrit dans exactement une case,
- ▷ pour tout diviseur d de n tel que $1 < d < n$ et pour toute sous-grille de la $d-$division de la grille, la somme des entiers écrits dans les cases de la sous-grille n'est pas divisible par d.

Déterminer tous les entiers pairs réguliers.

Solution de l'exercice 4

Réponse : Tous les entiers de la forme 2^k, avec $k \in \mathbb{N}^\star$.

L'exercice possède deux parties. Dans un premier temps, on montre que si n est un entier pair régulier, alors n est une puissance de 2, cette partie s'appelle *l'analyse*.Dans un second temps, on montre que réciproquement, toute puissance de 2 différente de 1 est bien un entier pair régulier, cette étape s'appelle *la construction*. Dans la suite, pour tout diviseur d de n, on appelle $d-$sous-grille une sous-grille appartenant à la $d-$ division de la grille.

Analyse : Soit n un entier pair régulier. On peut écrire n sous la forme $n = 2^k\beta$, où β est un entier impair. On suppose dans la suite que $\beta > 1$. Notons que, dans ce cas, 2^k est un diviseur strict de n, ce qui nous autorise par la suite à considérer la 2^k division de la grille. Nous allons commencer par montrer que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant s$, la somme des cases dans chaque 2^i-grille est congrue à 2^{i-1} modulo 2^i. On procède pour cela par récurrence sur i.

Initialisation : Si $i = 1$, pour toute $2-$sous-grille, la somme de ses cases n'est pas divisible par 2. Cette somme est donc congrue à 1 modulo 2.

Hérédité : On suppose que, pour un i fixé dans $[\![1, k-1]\!]$, la somme des cases dans chaque 2^i-sous-grille est congrue à 2^{i-1} modulo 2^i. On considère à présent une $2^{i+1}-$sous-grille. Elle est composée de quatre 2^i-sous-grilles. Par hypothèse de récurrence, la somme des cases de chacune de ces 2^i-sous-grilles est congrue à 2^{i-1} modulo 2^i. Ainsi, la somme des cases de la $2^{i+1}-$sous-grille est elle-même congrue à 2^i modulo 2^i, c'est-à-dire que cette somme est un multiple de 2^i. Comme cette somme n'est, par ailleurs, pas divisible par 2^{i+1}, elle est bien congrue à 2^i modulo 2^{i+1}, ce qui achève la récurrence.

En particulier, la somme des cases d'une 2^k-sous-grille est congrue à 2^{k-1} modulo 2^k. En additionnant les sommes des cases de toutes les 2^k-sous-grilles, on trouve que la somme des cases du tableau est congrue à

$$\underbrace{2^{k-1} + \ldots + 2^{k-1}}_{\beta^2 \text{ fois}} \equiv 2^{k-1}\beta^2 \equiv 2^{k-1} \mod 2^k.$$

D'autre part, cette somme correspond à la somme de tous les entiers de 1 à n^2, à savoir

$$1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2} = \frac{2^{2k}\beta^2(2^{2k}\beta^2+1)}{2} = 2^{2k-1}\beta^2(2^{2k}\beta^2+1) \equiv 0 \mod 2^k.$$

Cette contradiction implique qu'on ne peut pas avoir $\beta > 1$. Donc $\beta = 1$ et n est une puissance de 2.

Construction : Montrons que 2^k est régulier pour tout $k \geqslant 1$. On procède par récurrence sur k.

Initialisation : Si $k = 1$, le nombre 2 n'a pas de diviseur propre donc il est bien régulier.

Hérédité : On suppose que 2^k est régulier pour un entier k fixé. On considère à présent une grille de taille $2^{k+1} \times 2^{k+1}$, que l'on découpe en quatre carrés de taille $2^k \times 2^k$. D'après l'hypothèse de récurrence, on dispose d'une numérotation $a_1, \ldots, a_{2^{2k}}$ des entiers $1, \ldots, 2^{2k}$ de sorte que la 2^k-sous-grille située en haut à gauche ainsi numérotée vérifie les trois conditions de l'énoncé. On pose alors $b_i = a_i + 2^{2k}$, $c_i = a_1 + 2 \cdot 2^{2k}$ et $d_i = a_i + 3 \cdot 2^{2k}$, de sorte que l'ensemble des entiers a_i, b_i, c_i, d_i constitue une permutation des entiers $1, \ldots, 2^{2(k+1)}$. On numérote les cases des trois autres 2^k-grilles à l'aide des numérotation $(b_i), (c_i)$ et (d_i) comme dans la figure de gauche ci-dessous.

a_1	$\cdots$			b_1	$\cdots$		
		2^{2k}					
						$2^{2k}+2^{k-1}$	
		$\cdots$	$a_{2^{2k}}$			$\cdots$	$b_{2^{2k}}$
c_1	$\cdots$			d_1	$\cdots$		
		$3 \cdot 2^{2k}$					
						$3 \cdot 2^{2k}+2^{k-1}$	
		$\cdots$	$c_{2^{2k}}$			$\cdots$	$d_{2^{2k}}$

a_1	$\cdots$			b_1	$\cdots$		
		$2^{2k}+2^{k-1}$					
						2^{2k}	
		$\cdots$	$a_{2^{2k}}$			$\cdots$	$b_{2^{2k}}$
c_1	$\cdots$			d_1	$\cdots$		
		$3 \cdot 2^{2k}+2^{k-1}$					
						$3 \cdot 2^{2k}$	
		$\cdots$	$c_{2^{2k}}$			$\cdots$	$d_{2^{2k}}$

Pour l'instant, une telle numérotation ne vérifie pas la troisième condition de l'énoncé, puisque la somme des cases de la grille supérieure gauche est divisible par 2^k. On va donc permuter certaines cases des 2^k grilles.

Nous allons échanger les places des cases contenant l'entier 2^{2k} et l'entier $2^{2k} + 2^{k-1}$, ainsi que les cases contenant l'entier $3 \cdot 2^{2k}$ et $3 \cdot 2^{2k} + 2^{k-1}$. La numérotation obtenue correspond à la grille de droite.

Montrons que la configuration ci-dessus convient. Prenons $i \leqslant k - 1$. Toute 2^i-sous-grille est alors contenue dans l'une des quatre 2^k-sous-grille. Puisque $2^{2k} \equiv 2^{2k} + 2^{k-1} \mod 2^i$ et $3 \cdot 2^{2k} + 2^{k-1} \equiv 3 \cdot 2^{2k} \mod 2^i$, les sommes des 2^i-sous-grilles restent inchangées après nos deux permutations. Par hypothèse de récurrence, ces sommes n'étaient pas divisibles par 2^i, donc les sommes des 2^i-sous-grilles ne sont pas divisibles par 2^i. D'autre part, on vérifie que les sommes des cases des quatre 2^k-sous-grilles sont respectivement

$$a_1 + \ldots + a_{2^{2k}} + 2^{k-1} = 1 + \ldots + 2^{2k} + 2^{k-1} = 2^{2k-1}(2^{2k} + 1) + 2^{k-1} \equiv 2^{k-1} \mod 2^k ;$$

$$b_1 + \ldots + b_{2^{2k}} - 2^{k-1} = (2^{2k} + 1) + \ldots + 2 \cdot 2^{2k} - 2^{k-1} \equiv 2^{k-1} \mod 2^k ;$$

$$c_1 + \ldots + c_{2^{2k}} - 2^{k-1} = (2 \cdot 2^{2k} + 1) + \ldots + 3 \cdot 2^{2k} + 2^{k-1} \equiv 2^{k-1} \mod 2^k ;$$

$$d_1 + \ldots + d_{2^{2k}} - 2^{k-1} = (3 \cdot 2^{2k} + 1) + \ldots + 4 \cdot 2^{2k} - 2^{k-1} \equiv 2^{k-1} \mod 2^k ;$$

de sorte que la grille vérifie à présent les conditions de l'énoncé. Ceci conclut que 2^{k+1} est régulier et achève la récurrence.

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été peu abordé. Il contenait deux parties qui nécessitaient chacune du travail, mais comportaient des étapes accessibles. Cette structure s'est ressenti dans les notes, puisque plusieurs élèves ont pu gratter au moins un point sur le problème, par exemple en montrant qu'un entier régulier différent de 2 était divisible par 4, et quelques uns ont réussi l'une ou l'autre des deux étapes. Parmi les erreurs, on relève :

- ▷ Des élèves ayant mal lu l'énoncé et pensaient notamment que la somme dans toute $d-$sous-grille devait être divisible par d (au lieu de *non* divisible).
- ▷ La construction que plusieurs élèves ont tenté est d'échanger les positions de plusieurs cases, encore fallait-il s'assurer que les cases avec les propriétés voulues existaient bien. Cette erreur apparaît notamment lorsque les élèves ne sont pas assez précis dans leurs explications. Surtout dans un problème de combinatoire, une preuve peu précise n'est pas une preuve rigoureuse.
- ▷ Les deux étapes du problèmes nécessitaient un raisonnement par récurrence. Même si cela peut paraître rasoir, il est souhaitable que les élèves énoncent clairement la propriété qu'ils désirent montrer par récurrence. L'intérêt est double : c'est plus facile à suivre pour les correcteurs et les élèves risquent moins de faire une hérédité incomplète.