
STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2025



Avant-propos

Le stage olympique de Valbonne 2025 a été organisé par l'association Animath.

*Son objet a été de rassembler 90 collégiennes, collégiens,
lycéennes et lycéens de la quatrième à la terminale,
de 11 à 17 ans, passionnés de mathématiques
sélectionnés parmi les près de 2000 candidats à la Coupe Animath,
dont certains représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
Olympiades Balkaniques de Mathématiques (BMO),
Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM).*

*Un peu plus qu'un tiers des stagiaires a pu découvrir la beauté des mathématiques olympiques,
tandis que les autres, ayant déjà une petite expérience dans ce domaine,
a pu approfondir ses connaissances.*

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne pour son excellent accueil.

Les animateurs



Paul
AVEROUS



Henry
BAMBURY



Serge
BIDALLIER



Anatole
BOUTON



Hugo
CHARTOIRE



Maxime
CHEVALIER



Gaëtan
DAUTZENBERG



Antoine
DERIMAY



Erik
DESURMONT



Raphael
DUCATEZ



Arthur
DUSOULIER



Emilhan
DÜRRÜOĞLU



Akin
DÜRRÜOĞLU



Mano
ETILÉ



Héloïse
FAUCHEU



Oscar
FISCHLER



Noé
FISHER



Aurélien
FOURRÉ



Noam
ISMAILI



Eva
JACOB



Maryam
KOUHKAN



Paul
LAURENT-
LEVINSON



Théo
LENOIR



Rémi
LESBATS



Hadriel
MILOT



Camille
PAWLOWSKI



Gabriel
PESQUET



Martin
RAKOVSKY



Auguste
RAMONDOU



Melvil
TREILLEUX



Lilas
TREILLEUX



Cheikh Tidiane
DIAGNE

Les élèves



Ghita
ABOULASSE



Victor
ALLOUCHE



Antoine
ALTHERR



Eve
AMSELLEM



Horia
ANTOHI



Mattéo
ARGENTIN



Mathurin
BACH



Maxence
BARRET



Amina
BATSIAKHAN



Sodcetsen
BATSIAKHAN



Mohamed
BENDRIOUCH



Hélié
BERNARD



Ulysse
BERSILLON



Tanguy
BONNISSEAU



Antoine
CARRIOU



Alexandru
CHIRIAC



Iris
CIARLETTA



Vlad
CONSTANTINESCU



Linus
CORONA



Clément Viet Phong
DANG



Louise
DELOYE



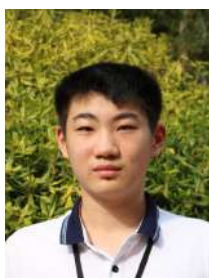
Bennigan
DERRIEN



Nils
DESURMONT



Matthieu
DIOT



Pierre
DONG



Octave
ESPINOZA



Iwan
ETILE



Hadrien
FAUCHEU



Samuel
FAUCHEU



Inès
FISCHLER



Yuxiang
FU



Rémi
GERON



Miryam
GROMOV



Ernest
GRULIER



Ilona
GUTSCHE



Assem
HAMWI



Malone
HEIM



Itza
HERVE-ARROUAYS



Matan
ISRAËL



Daniil
JARYKAOU



Yuancheng
JIANG



Noemi
KEMPE REGEV



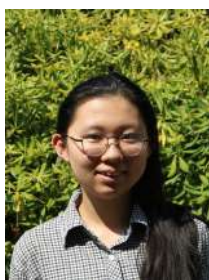
Yann
LE BARS



Nathanaël
LEE



Carmen
LHUILLERY



Ruirong
LI



Noé
LI



Agathe
LISSILOUR



Charlotte
LOUAPRE



Elie
LUCAS



Sabri
MAOUCHE



Sarah
MARCELLO



Marc
MARES



Alphonse
MARON



Tom
MARTINAL



Ary
MASSIAS JURIE
N DE LA GRAVIÈRE



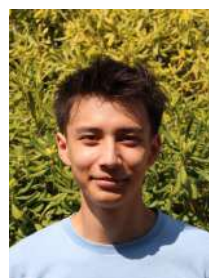
Adrien
MICHAUX



Pierre
MISGUICH



Thibault
MONNIER



Tristan
NGUYEN



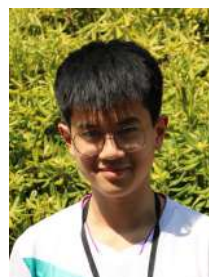
Mailane
OLIVIER



Lucie
PELISSIER



Anthony
PHAM



Dinh-Khanh
PHAN



Maël
PORRET



Clément
PROT



Lionel
QU



Marin
RENAUDINEAU



Ralph
REYNAUD



Raphaël
ROCHE



Geneviève
ROLET



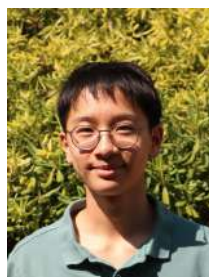
Kyrill
ROVINSKY



Antoine
SAEZ DUMAS



Iyed
SAIDANA



William
SAIDANA



Daniel
SCHACHTER



Maël
SHAWALY



Yahia
SNAIKE



Alicia
STAMULESCU



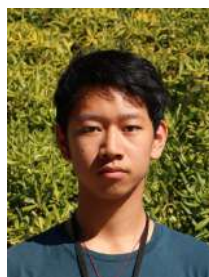
Noah
STUDNIA



Emma
SUAU



Colin
SUR-CORTIER



Theo
TAN



Jan
TARCZ



Antoine
VANDIER



Andreï
VORONTSOV



Julien
WELLENS



Michel
YANG



Yanlin
YANG



Benjamin
ZHENG



Laurent
ZHU



Discriminant
LECHAT

Table des matières

I	Déroulement du stage	15
II	Coupe Animath de printemps 2025	17
III	Groupe A	43
1	Première partie : Algèbre et Arithmétique	44
1	Algèbre : Découverte (Melvil)	44
2	Arithmétique : Divisibilité et PGCD (Raphaël)	50
3	Arithmétique : Nombres premiers (Anatole et Martin)	51
4	Algèbre : Inégalités 1 (Serge)	61
5	Arithmétique : TD de modulus (Arthur et Henry)	62
6	Algèbre : Récurrence (Rémi)	70
7	Algèbre : Inégalités 2 (Camille)	75
8	Arithmétique : Equations Diophantiennes (Akin)	82
2	Entraînement de mi-parcours	87
3	Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie	90
1	Géométrie : Chasse aux angles (Gabriel)	90
2	Combinatoire : Principe des tiroirs (Emilhan)	109
3	Combinatoire : Principe de l'extremum (Théo et Noam)	115
4	Géométrie : Théorème de l'angle tangent (Maryam)	119
5	Combinatoire : Invariants et coloriage (Lilas et Paul A)	120
6	Géométrie : Triangles semblables (Eva)	130
7	Combinatoire : Jeux (Oscar)	138
8	Géométrie : TD de révisions (Aurélien)	146
4	Entraînement de fin de parcours	147
IV	Groupe B	151
1	Première partie : Algèbre et Arithmétique	152
1	Algèbre : Inégalités classiques (Hugo et Martin)	152
2	Arithmétique : TD de révisions (Hadriel)	163
3	Arithmétique : Ordre 1 (Gaëtan)	167
4	Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Arthur)	171
5	Arithmétique : Ordre 2 (Héloïse)	180
6	Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Aurélien)	184
7	Algèbre : Méthode sp et relations de Viète (Anatole et Théo)	185
8	Arithmétique : Equations diophantiennes (Paul A)	201
2	Entraînement de mi-parcours	211

3	Deuxième partie : Géométrie et Combinatoire	215
1	Géométrie : Révisions (Rémi)	215
2	Combinatoire : Révisions (Maryam)	222
3	Combinatoire : Double comptage (Noé)	227
4	Géométrie : Configurations (Antoine)	247
5	Géométrie : Axes radicaux (Noam)	261
6	Combinatoire : Grilles (Oscar et Paul LL)	274
7	Combinatoire : TD de pot pourri (Emilhan)	282
8	Géométrie : TD de Pot pourri (Mano)	291
4	Entraînement de fin de parcours	292
V	Groupe C	297
1	Première partie : Arithmétique et Combinatoire	298
1	Arithmétique : Problèmes de tailles (Aurélien et Camille)	298
2	Combinatoire : récurrence (Théo)	303
3	Combinatoire : invariants (Raphaël)	313
4	Arithmétique : ordre 2 (Melvil)	314
5	Arithmétique : TD de pot pourri (Akin et Emilhan)	325
6	Combinatoire : Double comptage (Gaëtan et Hadriel)	331
7	Combinatoire : TD pot pourri (Héloïse et Rémi)	340
8	Arithmétique : le Théorème des restes chinois (Hugo)	346
2	Entraînement de mi-parcours	357
3	Deuxième partie : Algèbre et Géométrie	360
1	Algèbre : Polynômes 1 (Paul)	360
2	Géométrie : Chasse aux rapports (Anatole)	371
3	Géométrie : Axe radical (Eva et Lilas)	392
4	Algèbre : Polynômes 2 (Gabriel)	398
5	Algèbre : Equations fonctionnelles 1 (Noé)	405
6	Géométrie : Similitudes (Maxime)	420
7	Géométrie : TD de pot pourri (Erik et Martin)	427
8	Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Noam et Paul LL)	442
4	Entraînement de fin de parcours	448
VI	Groupe D	453
1	Première partie : Combinatoire et Arithmétique	454
1	Géométrie : Similitudes (Serge)	454
2	Combinatoire : Jeux (Emilhan)	470
3	Combinatoire : TD de petites Shortlists (Hadriel)	480
4	Géométrie : TD de petites Shortlists (Akin)	484
5	Géométrie : Milieux (Auguste et Melvil)	498
6	Combinatoire : Grilles (Paul A)	521
7	Combinatoire : TD de pot pourri (Henry)	536
8	Géométrie : Théorème de Céva et Ménélaüs (Raphaël)	540
2	Entraînement de mi-parcours	553
3	Deuxième partie : Algèbre et Arithmétique	559
1	Arithmétique : suites d'entiers (Erik et Eva)	559
2	Algèbre : Introduction aux nombres réels (Martin)	566

3	Algèbre : TD de petites SL d'algèbre (Aurélien et Oscar)	591
4	Arithmétique : Théorème des restes chinois (Paul LL)	597
5	Algèbre : Inégalités fonctionnelles (Anatole et Rémi)	603
6	Arithmétique : TD de petites Shortlists (Gabriel et Maryam)	612
7	Arithmétique : Problèmes autour des diviseurs (Maxime et Théo)	620
8	Algèbre : Inégalités dans les suites (Antoine et Noé)	629
4	Entraînement de fin de parcours	636
VII	Groupe E	641
1	Première partie	642
1	Combinatoire : problèmes algorithmiques (Gaëtan)	642
2	Algèbre : Polynômes (Henry)	655
3	Géométrie : géo-guessing (Auguste)	661
4	Combinatoire : Problèmes de niveau P1 (Aurélien)	671
5	Combinatoire : Problèmes de niveau P2 (Anatole)	671
6	Arithmétique : Problèmes de suites (Théo)	682
7	Arithmétique : Problèmes de niveau P1	693
8	Algèbre : Problèmes de niveau P1 (Serge)	711
2	Entraînement de mi-parcours	720
3	Deuxième partie	728
1	Géométrie : géométrie dynamique (Aurélien)	728
2	Algèbre : Problèmes de niveau P2 ou "Résoudre des exos c'est surfait" (Antoine)	728
3	Arithmétique : TN combi (Emilhan et Mano)	734
4	Géométrie : Problèmes de niveau P1 (Martin)	742
5	Arithmétique : Problèmes de niveau P2 (Erik et Théo)	758
6	Combinatoire : le lemme de Sperner (Mano)	765
7	Algèbre : Equations fonctionnelles (Paul A)	766
8	Géométrie : Problèmes de niveau P2 (Anatole)	772
4	Entraînement de fin de parcours	782
VIII	Citations mémorables	789

I. Déroulement du stage

Du jeudi 14 août au lundi 25 août, 90 stagiaires et 31 animateurs se sont réunis au Centre International de Valbonne (CIV) pour un stage de mathématiques organisé par la Préparation Olympique Française de Mathématique (POFM) de l'association Animath. La sélection des participants s'est faite via la Coupe Animath dont plus de 1500 candidats ont participé au premier tour en ligne et un peu plus de 500 au deuxième tour. In fine ont été sélectionnés environ 15 quatrièmes, 20 troisièmes, 25 secondes et 30 premières avec un système de bonus favorisant les filles et les élèves n'ayant pas encore participé à un stage. Les élèves ont été répartis en 5 groupes de niveau en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques. Le stage était divisé en deux périodes de cinq jours, quatre de cours et séances d'exercices suivi d'un entraînement de type olympique le matin du cinquième jour. Les cours portaient sur les quatre thèmes donnés lors des compétitions internationales : Arithmétique, Algèbre, Combinatoire et Géométrie. Des conférences étaient également organisées certains soirs du stage. On remercie Antoine, Henry, Mano et Raphaël qui ont présenté un exposé. Des activités plus ludiques étaient organisées les après-midi des entraînements et en dehors des cours les élèves ont pu profiter de la piscine, de séance de foot, de volley, d'un jeu de type chasse au trésor, de soirées astronomie et tout le long du stage d'un grand nombre de jeux de société. Il est possible de retrouver les comptes rendus du stage au jour le jour sur le site de la POFM : <https://maths-olympiques.fr/?p=17116>.

II. Coupe Animath de printemps 2025

Exercices collégiens

Exercice 1

Calculer

$$\frac{13}{6} + \frac{7}{10} + \frac{2}{15}$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Solution de l'exercice 1

On calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{13}{6} + \frac{7}{10} + \frac{2}{15} &= \frac{13 \cdot 5}{6 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 2}{15 \cdot 2} \\ &= \frac{65}{30} + \frac{21}{30} + \frac{4}{30} \\ &= \frac{65 + 21 + 4}{30} \\ &= \frac{90}{30} \\ &= 3\end{aligned}$$

La réponse est 3.

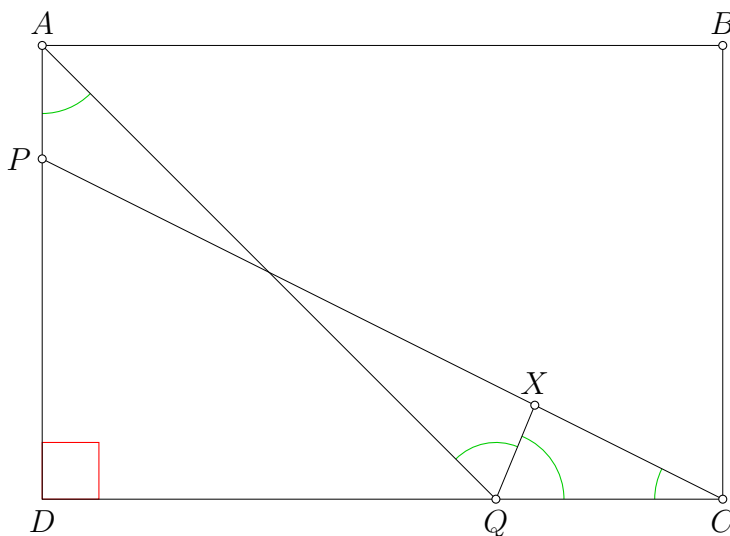
Commentaire des correcteurs : L'exercice est réussi par la grande majorité des élèves. Les quelques copies qui ne sont pas allées au bout sont celles qui n'ont pas réussi à simplifier complètement la fraction, et trouvent $\frac{9}{3}$ ou $\frac{45}{15}$ voire ne simplifient pas du tout et se contentent de garder $\frac{90}{30}$.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB > AD$, soit P le point de la demi-droite $[DA)$ tel que $\widehat{DCP} = 30^\circ$ et soit Q le point du segment $[CD]$ tel que $\widehat{DAQ} = 45^\circ$. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AQC}$ et de la droite (CP) .

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PXQ}$.

Solution de l'exercice 2



On procède par chasse aux angles. Dans le triangle ADQ rectangle en D , l'angle $\widehat{DAQ}$ mesure 45° donc $\widehat{DQA} = 180 - 90 - 45 = 45^\circ$. L'angle supplémentaire $\widehat{AQC}$ mesure donc $180 - 45 = 135^\circ$. La bissectrice de cet angle le découpe en deux angles égaux, qui mesurent donc tous les deux $\widehat{AQX} = \widehat{XQC} = \frac{135}{2} = 67,5^\circ$. Dans le triangle XQC , comme la somme des angles fait 180° , on a $\widehat{QXC} = 180 - \widehat{XQC} - \widehat{DCP} = 180 - 67,5 - 30 = 82,5^\circ$. Enfin, on peut trouver la valeur de l'angle supplémentaire

$$\widehat{PXQ} = 180 - \widehat{QXC} = 180 - 82,5 = 97,5^\circ$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien résolu. On note quelques erreurs notamment sur la définition d'une bissectrice et surtout sur la lecture de l'énoncé : certains ont pris la mauvaise valeur pour l'angle $\widehat{DCP}$. D'autres ne traitent que des cas particuliers tels que prendre $A = P$ ou faire passer la bissectrice de $\widehat{AQC}$ par B . Enfin, certains n'ont pas réalisé que seul l'exercice 1 demande une réponse sans preuve, et qu'il fallait donc démontrer chaque résultat pour obtenir les points de cet exercice.

Exercice 3

Déterminer tous les réels a et b tels que $a + b \neq 0$, $3a - b \neq 0$ et les deux équations suivantes sont vérifiées :

$$a = \frac{2}{a+b} \text{ et } b = \frac{2}{3a-b}.$$

Solution de l'exercice 3

La solution se découpe en une analyse et une synthèse.

Analyse : Soit a et b deux réels qui satisfont ces équations. On commence par multiplier par les dénominateurs. On obtient

$$\begin{cases} a(a+b) = 2 \\ b(3a-b) = 2 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

Ce dont on peut déduire que

$$a(a+b) = b(3a-b). \quad (\text{II.2})$$

Simplifier cette équation nous donne $a^2 + ab = 3ab - b^2$ soit $a^2 - 2ab + b^2 = 0$ ou $(a-b)^2 = 0$ ou encore $a-b=0$, donc $a=b$. En reprenant les premières équations, on trouve $a(a+a) = 2$ soit $a^2 = 1$ donc $a = 1$ ou $a = -1$. On trouve donc deux couples de solutions possibles $\boxed{a=1, b=1}$ et $\boxed{a=-1, b=-1}$.

Synthèse : On vérifie que nos couples sont bien solutions. Pour le premier, on a bien $a+b = 2 \neq 0$ et $3a-b = 2 \neq 0$, ainsi que

$$a = 1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{a+b}$$

et

$$b = 1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{3a-b}.$$

Pour le deuxième, on vérifie de même qu'on a bien $a+b = -2 \neq 0$ et $3a-b = -2 \neq 0$, ainsi que

$$a = -1 = \frac{2}{-2} = \frac{2}{a+b}$$

et

$$b = -1 = \frac{2}{-2} = \frac{2}{3a-b}.$$

Solution n°2 de l'exercice 3

On propose une autre manière d'effectuer l'analyse. L'idée est d'utiliser une des deux équations pour exprimer une variable en fonction de l'autre, par exemple b en fonction de a , puis de s'en servir pour éliminer tous les b dans l'autre équation et ainsi obtenir une équation en une seule variable, a , plus facile à résoudre.

La première équation se réécrit

$$a(a+b) = 2$$

Ou encore

$$b = \frac{2}{a} - a$$

On peut alors remplacer les b par $\frac{2}{a} - a$ dans la deuxième équation, ce qui donne

$$\frac{2}{a} - a = \frac{2}{3a - \left(\frac{2}{a} - a\right)}$$

On peut alors simplifier cette équation. On obtient successivement

$$\frac{2}{a} - a = \frac{2a}{3a^2 - 2 + a^2}$$

$$2 - a^2 = \frac{2a^2}{4a^2 - 2}$$

$$(2 - a^2)(4a^2 - 2) = 2a^2$$

$$10a^2 - 4a^4 - 4 = 2a^2$$

$$4a^4 - 8a^2 + 4 = 0$$

$$a^4 - 2a^2 + 1 = 0$$

$$(a^2 - 1)^2 = 0$$

$$a^2 - 1 = 0$$

$$(a - 1)(a + 1) = 0$$

$$a = \pm 1$$

On reprend alors notre expression $b = \frac{2}{a} - a$ pour voir que si $a = 1$, alors $b = \frac{2}{1} - 1 = 1$ et si $a = -1$, alors $b = \frac{2}{-1} - (-1) = -1$.

Les deux seuls couples possibles sont donc $(a = 1, b = 1)$ et $(a = -1, b = -1)$. On fait la synthèse comme dans la solution précédente.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est relativement peu réussi pour sa position. Quelques remarques :

- Pas mal d'élèves ont considéré que a et b étaient entier. Il n'y a aucune raison que ça soit vrai, donc traiter le cas des entiers n'était pas utile au sein de ce problème (et ne rapportait d'ailleurs pas de points).
- Certains élèves n'ont trouvé qu'une des deux solutions, ou même aucune. Il est dommage de ne pas tester différentes petites valeur de a et b pour voir les solutions : pour obtenir 1 point, il fallait avoir toutes les solutions.
- Certains élèves ont tenté des arguments du type si $a > 1$ alors $\frac{2}{a} + b$ est trop petit. Cela dépend beaucoup de ce que vaut b , et une telle approche ne pouvait marcher. Notez d'ailleurs que $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ n'implique pas $a < b$: par exemple si $b = -1$ et $a = 2$, la première inégalité est vraie mais pas la seconde.

- Certains élèves ont obtenu une équation comme $a^2 + b^2 = 2ab$, mais n'ont pas eu le réflexe de factoriser. Il est important d'avoir bien en tête les prérequis, qui étaient utiles ici.
- Certains élèves ont obtenu $a = b$ et se sont arrêtés là. Ok $a = b$, mais cela n'implique pas que tous les couples avec $a = b$ sont solution, d'ailleurs $a = b = 2$ n'est pas solution. Une fois qu'on a une condition, il faut la réinjecter dans le système pour voir ce qu'elle implique.
- Certains élèves ont obtenu $a = b = 1$ ou $a = b = -1$ et ont décrété que c'était les solutions. Comme tout le raisonnement est par implication, il fallait vérifier que ces couples étaient solution. Tous les élèves ne faisant pas ça ont perdu un point : c'est une étape cruciale du raisonnement.

Exercice 4

Soit a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 cinq entiers positifs distincts. Soit b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5 les mêmes entiers, écrits dans un ordre quelconque (soit le même ordre, soit un autre ordre).

Montrer que le produit

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$$

est pair.

Solution de l'exercice 4

On peut raisonner par l'absurde. Supposons que le produit $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$ soit impair. Alors chacun de ces cinq facteurs $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4$ et $a_5 - b_5$ sont impairs également. Leur somme est donc la somme de 5 entiers impairs, donc c'est un entier impair. Or leur somme n'est autre que $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + (a_4 - b_4) + (a_5 - b_5) = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) - (b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) = 0$ car les (a_i) et les (b_i) sont les mêmes entiers et ont donc la même somme. On a montré que 0 était impair, ce qui est une contradiction. Le produit initial était donc pair.

Solution n°2 de l'exercice 4

Comme 5 est impair, il ne peut pas y avoir autant de nombres pairs que de nombres impairs parmi a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 . Distinguons deux cas.

Premier cas, s'il y a plus de nombres pairs. Au moins 3 des entiers a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 sont donc pairs. Puisque ce sont les mêmes entiers, au moins 3 des entiers b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5 sont aussi pairs. Si on regarde ces au moins 6 entiers, ils ne peuvent pas tous avoir un indice différent, puisqu'il n'y a que 5 indices possibles. Il existe donc un indice i tel que a_i et b_i soient pairs. Mais alors le facteur $(a_i - b_i)$ est pair, et donc tout le produit initial est pair.

Dans le deuxième cas, s'il y a plus de nombres impairs que pairs, on trouve de manière identique un indice i tel que a_i et b_i soient tous les deux impairs. Alors leur différence est paire et on peut conclure de la même manière.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice a été plutôt bien résolu dans l'ensemble. Des points partiels ont été attribués à un certain nombre de copies, notamment lorsqu'elles montraient qu'il n'y avait pas le même nombre d'entiers pairs et impairs parmi les a_i .

Parmi les erreurs les plus courantes, nous pouvons citer des confusions concernant la parité des différences, des entiers a_i , ou du produit des différences. En particulier, un produit de nombres impairs est toujours impair, quelle que soit la parité du nombre de facteurs dans le produit, et un produit de nombres entiers est pair si et seulement si l'un des facteurs est pair.

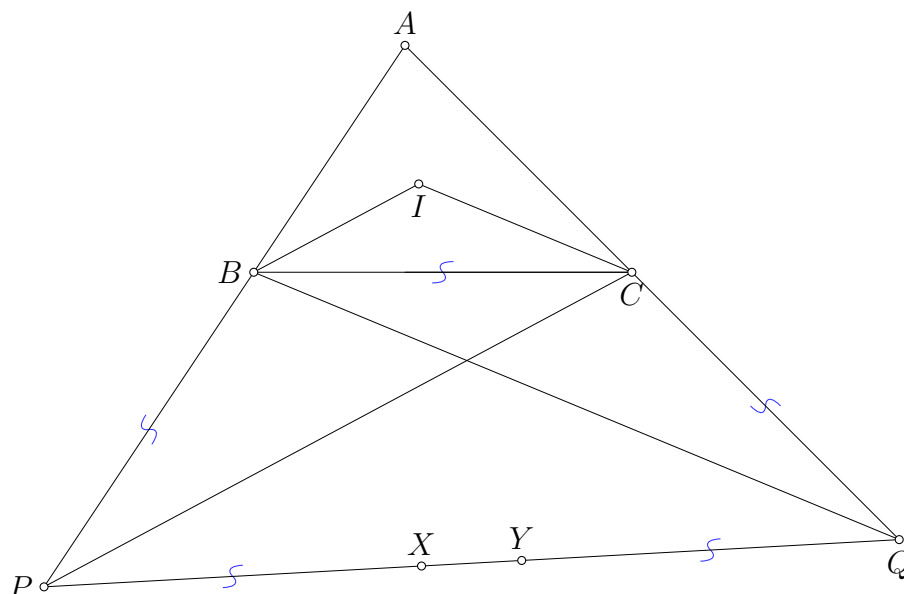
Une autre remarque importante est le fait que certains élèves donnaient un exemple d'appariements de parités entre les a_i et les b_i , qu'ils ont identifié comme étant "le pire cas". Ce raisonnement, bien qu'étant le résultat d'une intuition légitime, ne constitue en aucun cas une preuve rigoureuse. Il était possible de traiter "tous les cas" de façon intelligente, mais il faut alors s'assurer d'avoir bel et bien couvert toutes les possibilités.

Exercice 5

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La droite parallèle à (BI) passant par C coupe la droite (AB) en P et la droite parallèle à (CI) passant par B coupe la droite (AC) en Q . Le segment $[PQ]$ coupe le cercle de centre P passant par B en X et le cercle de centre Q passant par C en Y .

Montrer que $PY = QX$.

Solution de l'exercice 5



On commence par remarquer que I étant le centre du cercle inscrit à ABC , la droite (BI) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$. Alors le parallélisme $(BI) \parallel (CP)$ nous permet d'obtenir les égalités d'angles suivantes (en vert sur la figure) :

$$\widehat{BCP} = \widehat{IBC} = \widehat{ABI} = \widehat{BPC}$$

Donc le triangle BCP est isocèle en B . On montre de même que BCQ est isocèle en Q . Alors, on a les égalités de longueurs $BP = BC = CQ$. D'après les définitions de X et Y , PX est un rayon du cercle donc $PX = PB = CQ = QY$. Enfin, pour passer de $PX = QY$ à $PY = QX$ il suffit de remarquer que $PX + XQ = PQ = PY + YQ$ donc $PY = PQ - QY = PQ - PX = QX$.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été résolu entièrement par une quarantaine d'élèves. Nombreux sont les élèves qui ont réussi à se ramener à montrer que $PB = QC$ ou ont extrait des premières égalités d'angles à partir des hypothèses de parallélismes, ce qui permettait d'obtenir une partie des points.

Les erreurs principales des élèves n'ayant pas fourni de solutions correctes sont soit d'avoir pensé que (PQ) et (BC) sont parallèles (ce qui n'est pas vrai dans le cas général), soit d'avoir confondu les propriétés du point I avec celles d'un autre point remarquable du triangle.

Enfin, nous rappelons l'importance de justifier chaque étape, en l'absence de quoi de nombreux points étaient perdus.

Exercice 6

Soit $n \geq 1$ un entier. Rémi a choisi $2n + 1$ points alignés et deux à deux distincts tels que toutes les distances entre deux de ces points sont des nombres entiers. Elsa se rend compte que peu importe le point qu'elle choisit parmi les $2n + 1$ points, lorsqu'elle calcule la somme des $2n$ distances de ce point aux $2n$ autres points, elle obtient un entier pair.

Montrer que toutes les distances entre deux de ces points sont des entiers pairs.

Solution de l'exercice 6

On munit la droite d'une abscisse, ce qui permet d'attribuer à chacun des $2n + 1$ points un nombre. Puisque toutes les distances sont entières, si on place l'origine sur un des points, toutes les abscisses sont entières. Notons a_i l'abscisse du i -ième point. Alors la distance entre les i -ième et le j -ième point est $|a_i - a_j|$. L'énoncé nous dit donc que pour tout i , l'entier $|a_i - a_1| + |a_i - a_2| + \dots + |a_i - a_{i-1}| + |a_i - a_{i+1}| + \dots + |a_i - a_{2n+1}|$ est pair. Mais on peut remarquer que $|a_i - a_j|$ et $a_i - a_j$ ont la même parité, et que donc $|a_i - a_1| + |a_i - a_2| + \dots + |a_i - a_{i-1}| + |a_i - a_{i+1}| + \dots + |a_i - a_{2n+1}|$ a la même parité que $(a_i - a_1) + (a_i - a_2) + \dots + (a_i - a_{i-1}) + (a_i - a_{i+1}) + \dots + (a_i - a_{2n+1})$. En notant $S = a_1 + a_2 + \dots + a_{2n+1}$, on obtient donc que pour tout i , l'entier $(2n + 1)a_i - S$ est pair (pour le calcul, on peut faire apparaître le terme $a_i - a_i$ qui est nul). Cela signifie que S a la même parité que $(2n + 1)a_i$, mais qui a lui-même la même parité que a_i . Chacun des a_i a donc la même parité que S , donc ils ont tous la même parité. Par conséquent, chaque distance $|a_i - a_j|$ est donc paire.

Solution n°2 de l'exercice 6

Numérotions les points dans l'ordre où ils sont sur la droite et comparons deux points adjacents, disons le i -ième et le $i + 1$ -ième. Soit d la distance entre ces deux points. La différence entre la somme des distances au i -ième point moins la somme des distances au $i + 1$ -ième est un entier pair (parce que différence de deux entiers pairs). Dans cette différence de sommes de distances, on peut ignorer la distance de i à $i + 1$, qui s'annule avec la distance de $i + 1$ à i . Les autres distances peuvent être regroupées en paires ayant une extrémité commune autre que i et $i + 1$, de sorte que cette différence de sommes de distances est aussi égal à la somme pour chacun des autres points de la différence entre leur distance au i -ième et au $i + 1$ -ième, différence de distance qui vaut toujours plus ou moins d ; la différence est négative pour les points $1, 2, 3, \dots, i - 1$ plus proches de i que de $i + 1$ et positive pour $i + 2, i + 3, \dots, 2n + 1$. La différence des sommes des distances au i -ième et au $i + 1$ -ième point vaut donc $-(i - 1)d + (2n + 1 - (i + 1))d$, qui est donc un entier pair. On en déduit $2dn - 2id + d$ est pair, donc d est pair.

On a montré que la distance entre deux points adjacents sur la droite est paire, la distance entre deux points plus éloignés sera une somme de distances entre deux points adjacents, donc une somme d'entiers pairs, donc sera paire.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice a été assez peu résolu, mais les élèves ayant trouvé une solution ont souvent obtenu la note de 7/7.

Certains élèves ont voulu raisonner par récurrence sur le nombre de points. Il était en effet possible de montrer que les deux premières distances entre points consécutifs sont toujours des entiers pairs, et les éliminer ensuite dans le raisonnement puisque leurs contributions aux sommes de distances seront toujours un entier pair.

Cependant, il n'était pas possible de supposer dans l'hérédité que toutes les distances entre les $2n + 1$ premiers points (lorsque nous en rajoutons deux) sont des entiers pairs,

puisque l'hypothèse de l'exercice appliquée à $2n + 3$ points dépend de **toutes** les distances, y compris les deux dernières.

Exercice 7

Sur un tableau sont écrits 2025 nombres entiers strictement positifs, non nécessairement distincts. Quels que soient les 2023 nombres que l'on choisit parmi ces 2025 nombres, chacun des deux nombres restants divise la somme des nombres choisis.

Combien y a-t-il, au maximum, de nombres différents écrits au tableau ?

Solution de l'exercice 7

Le problème demande un maximum, la solution se divise donc forcément en deux parties.

Première partie : montrer qu'il y a au plus 2 nombres différents au tableau

Notons S la somme des 2025 nombres au tableau. Alors pour tout choix de a et b deux nombres au tableau, on sait que $a \mid S - a - b$, donc $a \mid S - b$. Donc si on suppose par l'absurde pouvoir prendre 3 nombres $a > b > c$ écrits au tableau, on sait que a divise $S - b$ et $S - c$, donc il divise $b - c$. Or $a > b - c > 0$, ce qui contredit $a \mid b - c$, donc il n'existe pas trois nombres distincts au tableau.

Deuxième partie : il peut y avoir deux nombres différents au tableau.

Il suffit de donner une construction et de vérifier qu'elle fonctionne. Il peut y avoir au tableau écrit 2024 fois le nombre 1 et une fois le nombre 2023. Alors quand on prend 2023 de ces nombres, soit on prend le nombre 2023, auquel cas les nombres restants sont des 1, donc ils divisent la somme, soit on ne le prend pas, auquel cas la somme vaut 2023 puisqu'on a pris que des 1, et elle est divisible par 1 et par 2023, les deux nombres qui n'ont pas été pris.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile et très peu d'élèves sont parvenus à le résoudre entièrement.

De nombreux élèves ont suivi leur première intuition, en essayant de montrer que la solution était 1, ce qui a mené à beaucoup d'erreurs de logique et de raisonnement. Par exemple, certains élèves donnent un exemple avec 2 nombres distincts qui ne fonctionne pas, et en déduisent que la réponse est 1, ce qui est faux.

On cherche uniquement à trouver un exemple avec 2 nombres distincts qui convient, et à montrer qu'il ne peut pas y en avoir strictement plus que 2. Il est conseillé de chercher plus longtemps des exemples afin de ne pas suivre une fausse piste.

De plus, il est important de justifier les exemples que l'on donne. Certains élèves n'ont obtenu qu'une partie des points attribués pour la construction car ils n'avaient pas justifiée qu'elle satisfaisait toutes les conditions de l'énoncé, ce qui est dommage.

Exercices lycéens

Exercice 8

Calculer

$$\sqrt{\sqrt{27} \cdot \sqrt{75} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{54}}$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Solution de l'exercice 8

On calcule de la manière suivante :

$$\sqrt{\sqrt{27} \cdot \sqrt{75} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{54}} = \sqrt{\sqrt{27 \cdot 75} + \sqrt{3 \cdot 8 \cdot 54}} \quad (\text{II.3})$$

$$= \sqrt{\sqrt{9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 25} + \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9}} \quad (\text{II.4})$$

$$= \sqrt{\sqrt{9} \cdot \sqrt{3 \cdot 3} \cdot \sqrt{25} + \sqrt{3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{9}} \quad (\text{II.5})$$

$$= \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \quad (\text{II.6})$$

$$= \sqrt{3 \cdot 3 \cdot (5 + 2 \cdot 2)} \quad (\text{II.7})$$

$$= \sqrt{3 \cdot 3 \cdot \sqrt{5 + 4}} \quad (\text{II.8})$$

$$= 3 \cdot 3 \quad (\text{II.9})$$

$$= 9 \quad (\text{II.10})$$

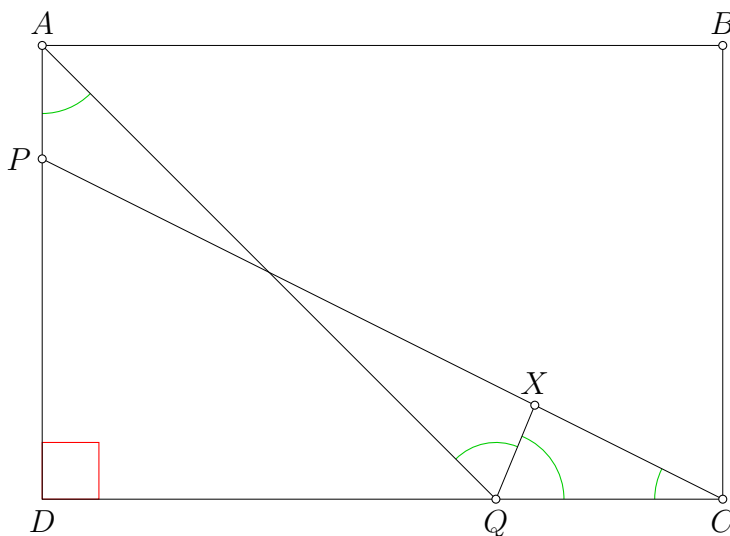
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été résolu par une grande majorité des élèves. Les élèves ayant mis le détail de leurs calculs ont presque tous obtenu des points partiels, même si la réponse finale était incorrecte. La plupart des erreurs provenaient de signes + qui se transformaient en signes $\times$ pendant les calculs.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB > AD$, soit P le point de la demi-droite $[DA)$ tel que $\widehat{DCP} = 30^\circ$ et soit Q le point du segment $[CD]$ tel que $\widehat{DAQ} = 45^\circ$. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AQC}$ et de la droite (CP) .

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PXQ}$.

Solution de l'exercice 9



On procède par chasse aux angles. Dans le triangle ADQ rectangle en D , l'angle $\widehat{DAQ}$ mesure 45° donc $\widehat{DQA} = 180 - 90 - 45 = 45^\circ$. L'angle supplémentaire $\widehat{AQC}$ mesure donc $180 - 45 = 135^\circ$. La bissectrice de cet angle le découpe en deux angles égaux, qui mesurent donc tous les deux $\widehat{AQX} = \widehat{XQC} = \frac{135}{2} = 67,5^\circ$. Dans le triangle XQC , comme la somme des angles fait 180° , on a $\widehat{QXC} = 180 - \widehat{XQC} - \widehat{DCP} = 180 - 67,5 - 30 = 82,5^\circ$. Enfin, on peut trouver la valeur de l'angle supplémentaire

$$\widehat{PXQ} = 180 - \widehat{QXC} = 180 - 82,5 = 97,5^\circ$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi dans l'ensemble. Les seules erreurs notables ont été des erreurs de lecture de l'énoncé, notamment au niveau de la définition de X ou de la mesure de l'angle $\widehat{PCD}$.

On regrette également un nombre d'erreurs de calcul non négligeable, et on rappelle donc l'importance de bien se relire pour éviter ces inattentions.

Exercice 10

Dans une pièce, certaines personnes sont amies. Une personne n'est jamais amie avec elle-même, et si une personne A est amie avec une personne B , alors la personne B est amie avec A . On remarque que "l'ennemi de mon ami est mon ami", autrement dit pour tout choix de trois personnes distinctes A , B et C dans la pièce, si A et B sont amies et B et C ne sont pas amies, alors A et C sont amies. Chaque personne dans la pièce a 4 amis.

Combien au maximum peut-il y avoir de personnes dans la pièce ?

Solution de l'exercice 10

Montrons qu'il y a au maximum 8 personnes dans la pièce.

Partie 1 : Il y a au plus 8 personnes dans la pièce

Supposons par l'absurde qu'il y en a au moins 9. Prenons une personne dans la pièce, que nous nommerons Albéric. Cette personne a 4 amis, que nous nommerons Balthazar, Cassandre, Dagobert et Elvire. Il y a donc au moins 4 personnes qui ne sont pas amies avec Albéric, on en choisit 4 que l'on nomme Françoise, Gertrude, Hugues et Isidore. Mais alors Françoise est l'ennemi d'Albéric, qui est l'ami de Balthazar, donc Françoise est amie avec Balthazar. De même, Gertrude, Hugues et Isidore sont ennemis d'amis de Balthazar, donc sont amis avec Balthazar. Ainsi, Balthazar est ami avec Albéric, Françoise, Gertrude, Hugues et Isidore, et a donc au moins 5 amis, contradiction.

Il y a au plus 8 personnes dans la pièce.

Partie 2 : Il peut y avoir 8 personnes dans la pièce.

Séparons 8 personnes de la pièce en deux groupes de 4, et créons des liens d'amitié entre deux personnes si et seulement si elles sont dans des groupes différents. Pour vérifier que cela fonctionne, on remarque que si A et B sont amies et B et C ne sont pas amies, alors A et B sont dans des groupes différents et B et C sont dans le même groupe, donc A et C sont dans des groupes différents et sont donc amis.

Commentaire des correcteurs :

Un grand nombre d'élèves a traité cet exercice, mais il est dommage que seule une proportion réduite des copies ait obtenu la note de 7/7. Les élèves sont en effet nombreux à avoir été victimes d'écueils évitables.

- De nombreux élèves ont mal compris l'énoncé. Il est important de bien relire l'énoncé pour être sûr de ne pas partir avec des hypothèses fausses.
- Certains élèves ont remarqué, à juste titre, qu'il existait une construction avec 5 ou 6 élèves et qu'il n'y en avait pas avec 7 élèves. Ils ont alors affirmé abusivement que 6 était le nombre maximal d'élèves possibles. Conclusion hâtive, car le fait qu'il ne puisse pas y avoir 7 élèves exactement ne prouve pas qu'il ne peut pas y en avoir 8 ou plus ! Il est important d'être rigoureux dans l'analyse, il ne s'agit en effet pas de montrer qu'une valeur est impossible, mais que toutes les valeurs supérieures au maximum sont impossibles.
- Certains élèves ont tenté de justifier un procédé de construction optimale : par exemple en disant on prend un élève A , ses amis B, C, D, E , et on suppose qu'ils ne sont pas amis car c'est le plus optimal, on peut leur rajouter 3 amis, ce qui fait cinq personnes, mais on ne peut pas en rajouter de neuvième. Cet argument est complètement faux : aucune raison que le plus optimal soit que B, C, D, E ne soient pas amis, ni même qu'on ne

puisse rajouter des amis de B qui ne soient pas amis de C, D, E , ou même des personnes qui ne sont pas amies avec A et sont quelconques.

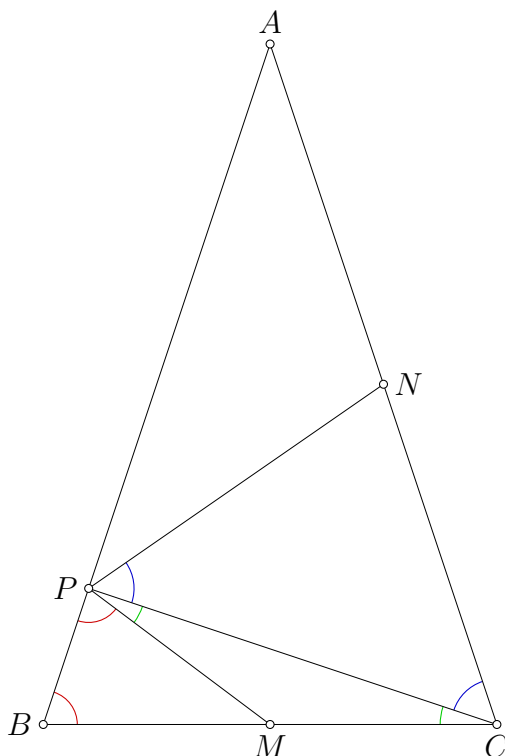
- Pour rebondir sur le point précédent, ce n'est pas parce qu'on ne peut pas rajouter d'élèves à une construction que celle-ci est optimale. En effet, on pourrait très bien imaginer une construction avec plus d'élèves qui n'est pas obtenue par la première construction en lui ajoutant des élèves. Il était ainsi nécessaire de distinguer les deux parties de la preuve : fournir une construction, et prouver indépendamment son optimalité.
- De plus, une proportion écrasante d'élèves a donné une construction avec 8 élèves, en général correcte, et a affirmé qu'elle convenait sans justifier plus avant. C'était pourtant une étape nécessaire, il n'était en effet pas du tout immédiat que la construction fournie convenait ! Cette erreur est d'autant plus répandue parmi les élèves étant parvenus à la conclusion que cette construction était la seule possible, aux symétries près : l'unicité d'une solution n'implique en rien sa validité !

Exercice 11

Soit ABC un triangle isocèle en A . Soient M et N les milieux des segments $[BC]$ et $[AC]$ respectivement, et soit P le pied de la hauteur issue de C dans ABC .

Montrer que $[PM)$ est la bissectrice de $\widehat{NPB}$.

Solution de l'exercice 11



On remarque que M est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle BPC , donc $MB = MP = MC$ et on a les égalités d'angles $\widehat{MBP} = \widehat{MPB}$ et $\widehat{MCP} = \widehat{MPC}$. De même, N est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle APC , donc $NP = NC$ et $\widehat{NPC} = \widehat{NCP}$.

Alors on peut calculer

$$\begin{aligned}
 \widehat{MPN} &= \widehat{MPC} + \widehat{CPN} \\
 &= \widehat{MCP} + \widehat{PCN} \\
 &= \widehat{MCN} \\
 &= \widehat{BCA} \\
 &= \widehat{CBA} \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A \\
 &= \widehat{MBP} \\
 &= \widehat{MPB}
 \end{aligned}$$

Donc $[PM)$ est la bissectrice de $\widehat{NPB}$.

Commentaire des correcteurs : Le problème est très bien résolu, et beaucoup de solutions ont été trouvées. Pour avancer, il était crucial d'exploiter les hypothèses sur les différents

points P , M et N et notamment de pouvoir les relier entre eux, le plus souvent grâce aux propriétés des triangles rectangles.

Pour établir les divers liens entre ces points, notamment par des égalités de longueurs, des justifications étaient de mise, et leur absence a été fortement pénalisée.

Enfin, les correcteurs ont été surpris par la méconnaissance des élèves des propriétés des droites remarquables d'un triangle isocèle. En particulier, la hauteur, la bissectrice et la médiane issues des sommets à la base du triangle **ne sont pas** nécessairement confondues. Ceci a conduit beaucoup d'élèves à un raisonnement faux dès le départ.

Exercice 12

Déterminer tous les entiers positifs $n \geq 2$ pour lesquels il existe des entiers positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que les deux ensembles

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ et } \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_n + a_1\}$$

contiennent n entiers consécutifs chacun.

Solution de l'exercice 12

L'énoncé demande de trouver tous les entiers n satisfaisant une propriété, une réponse complète comporte donc nécessairement une analyse et une synthèse.

Analyse : Soit n un entier satisfaisant la propriété et soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ de tels entiers. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1. La somme de n entiers consécutifs vaut $\frac{n(n+1)}{2} + kn$ pour un certain entier k .

Démonstration. On note k l'entier qui précède le plus petit des entiers consécutifs considérés. Alors la somme considérée est

$$\begin{aligned} (k+1) + (k+2) + \dots + (k+n) &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + kn \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + kn \end{aligned}$$

□

On peut appliquer ce lemme à chacun des deux ensembles qui contiennent n entiers consécutifs. Le lemme nous dit qu'il existe deux entiers k et l tels que

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n(n+1)}{2} + kn$$

et

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_n + a_1) = \frac{n(n+1)}{2} + ln.$$

Mais on remarque que

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_n + a_1) = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Donc

$$\frac{n(n+1)}{2} + ln = 2 \left(\frac{n(n+1)}{2} + kn \right) \quad (\text{II.11})$$

Ce qui se réécrit

$$\frac{n(n+1)}{2} = (l - 2k)n$$

Ou encore

$$\frac{n+1}{2} = l - 2k$$

$$n = 2(l - 2k) - 1$$

Donc n est impair.

Synthèse : Soit $n = 2m+1$ un entier impair. Construisons des entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ adéquats. On pose

$$\begin{cases} a_{2i-1} = i \\ a_{2i} = m + 1 + i \end{cases}$$

Par exemple pour $n = 7$, on a $m = 3$ et la suite $a_1, a_2 \dots a_7$ est 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4

Alors la somme de deux termes consécutifs vaut

$$\begin{cases} a_{2i-1} + a_{2i} = m + 1 + 2i \\ a_{2i} + a_{2i+1} = m + 2 + 2i \\ a_n + a_1 = m + 2 \end{cases}$$

On obtient donc chaque entier entre $m + 2$ et $m + n + 1 = 3m + 2$ une fois et une seule.

Les n qui satisfont cette propriété sont donc exactement les entiers impairs.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile et a été assez mal réussi par rapport à sa place dans le sujet.

De nombreux élèves ont cru que les entiers $a_1, \dots, a_n$ était rangés par ordre croissant, ou bien ont supposé, à tort, pouvoir les ordonner sans perte de généralité. Cela simplifiait considérablement le problème en éliminant la quasi-totalité des solutions possibles. Rappelons que, comme le montrent les solutions exhibées par le corrigé, un ensemble ne dépend pas de l'ordre de ses éléments alors que l'opération faite sur les a_i , elle, dépend bien de la façon dont on a numéroté ces entiers. À titre d'exemple prenons $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$ et $a'_1 = 1, a'_2 = 3, a'_3 = 2, a'_4 = 4$: les ensembles $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{1, 3, 2, 4\}$ sont les mêmes mais si on effectue les sommes décrites par l'énoncé, on obtient $\{3, 5, 7, 5\}$ et $\{4, 5, 6, 5\}$, deux ensembles différents.

Quand cette erreur a été évitée, l'idée de regarder les sommes des éléments (ou bien leur moyenne, ce qui est équivalent) a souvent été introduite. Les copies ont bien compris que la somme du deuxième ensemble était le double de celle du premier ensemble. Celles qui ont ensuite pensé à effectuer à nouveau le calcul du lemme sur ce second ensemble réussissent souvent à conclure la partie analyse. La synthèse était d'une difficulté équivalente à l'analyse sur ce problème, ce qui explique pourquoi un certain nombre de copies n'ont pas réussi à montrer que tous les entiers impairs sont bien solutions.

Quelques élèves perdent malheureusement des points en ne justifiant pas pourquoi leur construction générale dans le cas n impair respecte bien les conditions de l'énoncé.

Exercice 13

Sur un tableau sont écrits 2025 nombres entiers strictement positifs, non nécessairement distincts. Quels que soient les 2023 nombres que l'on choisit parmi ces 2025 nombres, chacun des deux nombres restants divise la somme des nombres choisis.

Combien y a-t-il, au maximum, de nombres différents écrits au tableau ?

Solution de l'exercice 13

Le problème demande un maximum, la solution se divise donc forcément en deux parties.

Première partie : montrer qu'il y a au plus 2 nombres différents au tableau

Notons S la somme des 2025 nombres au tableau. Alors pour tout choix de a et b deux nombres au tableau, on sait que $a \mid S - a - b$, donc $a \mid S - b$. Donc si on suppose par l'absurde pouvoir prendre 3 nombres $a > b > c$ écrits au tableau, on sait que a divise $S - b$ et $S - c$, donc il divise $b - c$. Or $a > b - c > 0$, ce qui contredit $a \mid b - c$, donc il n'existe pas trois nombres distincts au tableau.

Deuxième partie : il peut y avoir deux nombres différents au tableau.

Il suffit de donner une construction et de vérifier qu'elle fonctionne. Il peut y avoir au tableau écrit 2024 fois le nombre 1 et une fois le nombre 2023. Alors quand on prend 2023 de ces nombres, soit on prend le nombre 2023, auquel cas les nombres restants sont des 1, donc ils divisent la somme, soit on ne le prend pas, auquel cas la somme vaut 2023 puisqu'on a pris que des 1, et elle est divisible par 1 et par 2023, les deux nombres qui n'ont pas été pris.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été abordé seulement par une petite moitié des élèves. Peu d'entre eux ont su obtenir tous les points, mais beaucoup ont avancé plus ou moins substantiellement. Dans ce type d'exercice, il est important de travailler sur de nombreux exemples afin de se forger une intuition fiable : par exemple, ici, essayer des exemples avec 3 ou 4 nombres au tableau permettait déjà d'avoir une bonne idée de la réponse.

Parmi les écueils récurrents, on notera comme d'habitude que les exercices qui demandent de trouver un maximum ou un minimum doivent toujours se rédiger en 2 parties : d'une part montrer qu'on ne pouvait pas avoir plus de 2 nombres distincts au tableau, d'autre part donner un exemple dans lequel on a effectivement 2 nombres distincts. Chacune de ces parties a son importance et ne doit pas être négligée : ainsi, la construction devait être soigneusement justifiée car il y avait plusieurs conditions à vérifier. Donner une construction correcte sans justification ne rapportait qu'une partie des points attribués à cette partie, ce qui est dommage.

Exercice 14

Soit n un entier vérifiant $n \geq 2$. On dit que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n -permutants si chaque élément de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est égal à exactement un élément parmi $\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor$.

Déterminer, en fonction de n , la valeur maximale et la valeur minimale que peut prendre la somme

$$\lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \lfloor x_4 - x_3 \rfloor + \dots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor$$

lorsque les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n -permutants.

Ici, $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Solution de l'exercice 14

Commençons par écrire quelques inégalités sur les parties entières. On a

$$x_i - 1 < \lfloor x_i \rfloor \leq x_i$$

$$x_{i+1} - x_i - 1 < \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \leq x_{i+1} - x_i$$

Donc en combinant ces inégalités, on obtient

$$\lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor - 2 < \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor < \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor + 1.$$

Mais comme ces sont des inégalités strictes entre des entiers, on peut réécrire la même chose en

$$\lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor - 1 \leq \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \leq \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor.$$

Autrement dit,

$$\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor = \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor - u_i$$

Où u_i vaut soit 0, soit 1. La somme qui nous intéresse se réécrit donc

$$(\lfloor x_2 \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor - u_1) + (\lfloor x_3 \rfloor - \lfloor x_2 \rfloor - u_2) + \dots + (\lfloor x_n \rfloor - \lfloor x_{n-1} \rfloor - u_{n-1}) = \lfloor x_n \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor - (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1})$$

Pour la maximiser, on peut indépendamment maximiser $\lfloor x_n \rfloor$, minimiser $\lfloor x_1 \rfloor$ et s'assurer que chacun des u_i a sa valeur minimale, 0. En effet, une manière d'atteindre tous ces optimums simultanément est de poser $x_i = i$. On vérifie que les (x_i) sont n -permutants, que comme chaque x_i est entier, chaque u_i est bien nul, que $\lfloor x_n \rfloor = n$ a sa valeur maximale possible et que $\lfloor x_1 \rfloor = 1$ a sa valeur minimale possible. La somme recherchée vaut alors $\boxed{n - 1}$ qui est le maximum de cette somme.

Pour la minimiser, on va chercher similairement à optimiser chacun des termes de cette réécriture indépendamment. On cherche donc un ensemble n -permutant tel que $\lfloor x_n \rfloor = 1$, $\lfloor x_1 \rfloor = n$ et tel que chaque u_i vaille 1. Pour que u_i vaille 1, il suffit que la partie fractionnaire de x_i soit strictement plus grande que celle de x_{i+1} . En effet, dans ce cas, en notant $\{x_i\}$ cette partie fractionnaire, on a

$$\begin{aligned} \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor &= \lfloor \lfloor x_{i+1} \rfloor + \{x_{i+1}\} - \lfloor x_i \rfloor - \{x_i\} \rfloor \\ &= \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor + \lfloor \{x_{i+1}\} - \{x_i\} \rfloor \\ &= \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor - 1 \end{aligned}$$

Donc $u_i = 1$.

Pour que tous les u_i valent 1, il suffit donc que la suite des $\{u_i\}$ soit strictement décroissante. On se rappelle des contraintes $\lfloor x_1 \rfloor = n$ et $\lfloor x_n \rfloor = 1$ pour proposer l'ensemble n -permutant suivant :

$$x_i = n + 1 - i + \frac{n - i}{n}$$

Alors $\lfloor x_i \rfloor = n + 1 - i$ donc l'ensemble est bien n -permutant et les autres contraintes sont bien satisfaites, donc on a trouvé une configuration qui minimise la somme. Son minimum est donc $1 - n - (1 + 1 + \dots + 1)$ soit $\boxed{-2n + 2}$.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été peu abordé dans l'ensemble, et assez peu résolu dans son entièreté. Beaucoup d'élèves ont remarqué le télescopage entre les différences, le tout était alors d'être capable de comparer la somme de l'énoncé à $x_n - x_1$. Beaucoup d'élèves n'ont pas réussi à fournir une justification convaincante ou se sont embrouillés dans leurs inégalités.

Parmi les erreurs récurrentes :

- Beaucoup d'élèves se sont d'emblée placés dans le cas où la suite (x_i) est croissante, et il n'y a pas de raison que cela soit le cas. D'autres ont pensé qu'on avait toujours $\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \leq 1$.
- Beaucoup d'élèves ont pensé que $\lfloor x \rfloor \geq 0$ quel que soit x , ce qui les conduit à trouver que la somme est toujours positive.
- Une des raisons pour lesquelles les inégalités étaient mal justifiées est que les élèves ont cherché à décrire leur raisonnement plutôt qu'à l'effectuer : des inégalités comparant les quantités en jeu valent mieux qu'un long paragraphe d'explications avec les mains.
- Quelques élèves ont oublié ou ont bâclé la construction d'une suite minimisante/maximisante. On attendait un calcul justifiant que la construction fonctionne, dans le cas où cela n'était pas évident. Un tel calcul aurait permis à quelques élèves de voir que leur construction n'était en fait pas valide.

Enfin, afin d'anticiper les éventuelles réclamations, nous précisons que donner la bonne réponse ne rapportait pas de points si le raisonnement accompagné est absent ou incorrect. De même, donner une construction du maximum ne rapportait pas de points.

Exercice 15

Martin place des espions dans certaines cases d'une grille 2025×2025 (qui contient 2025^2 cases). Aurélien choisit alors un carré 1025×1025 dans la grille, composé de 1025^2 cases, et dit à Martin quels espions sont dans le carré qu'il a choisi.

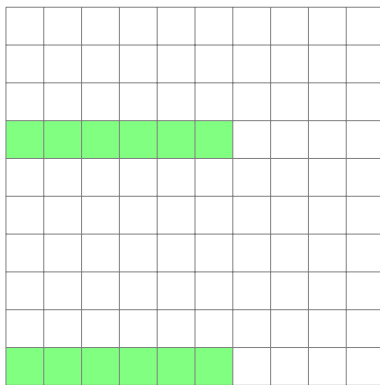
Combien d'espions au minimum Martin doit-il placer pour être sûr de pouvoir déterminer le carré choisi par Aurélien ?

Solution de l'exercice 15

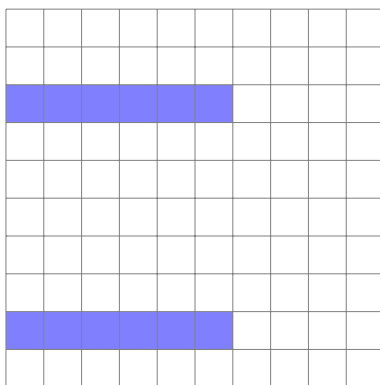
L'énoncé nous demande un nombre minimum, toute solution complète comporte nécessairement deux parties, une où l'on montre qu'il faut au moins 2000 espions, et une deuxième partie qui présente une construction où 2000 espions suffisent.

Première partie : Il faut au moins 2000 espions.

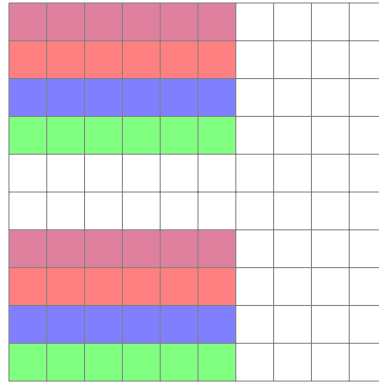
Considérons un placement des espions qui permette à Martin de trouver à coup sûr la position du carré. Notamment Martin peut différencier un carré placé tout en bas à gauche d'un carré placé juste au-dessus. Martin a donc placé un espion dans une des cases coloriées en vert, puisque ce sont les seules où ces deux carrés diffèrent. Pour les dessins, les grilles sont tracées en remplaçant 2025 par 10 et 1025 par 6.



On peut également traduire les deux carrés d'une rangée vers le haut. Pour les différencier, Martin a dû placer un espion dans une des cases bleues.

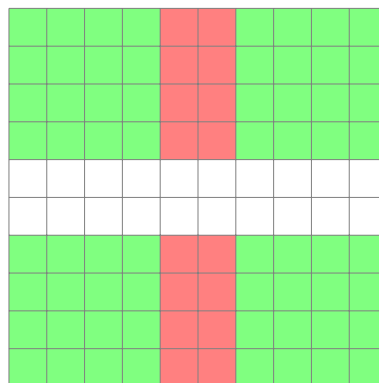


En continuant ainsi, on trouve que Martin a dû placer au moins un espion dans chacun des zones coloriées ci-dessous, soit un total d'au moins 1000 espions.



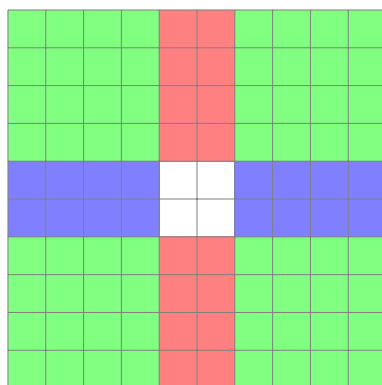
On remarque que pour cet argument, les 25 lignes centrales sont totalement inutilisées, ce sera important plus tard.

Améliorons l'argument. Il faut aussi pouvoir distinguer le carré en bas à droite du carré situé juste au-dessus. Cette nouvelle zone ne peut pas être simplement rajoutée aux zones existantes puisqu'elle chevauche partiellement la zone verte. Cependant, cela signifie que soit un espion est placé à l'intersection des deux zones, dans les 25 colonnes centrales, soit un espion est placé de chaque côté, soit un total d'au moins 2 espions. Autrement dit, si on décide que les espions dans les colonnes centrales comptent doubles, il y a au moins 2 espions au total sur les lignes concernées par ces carrés, la ligne tout en bas et la ligne 1025 lignes au-dessus. Comme précédemment, on peut répéter cet argument. On trouve ainsi qu'avec le coloriage suivant



Si on note r le nombre d'espions dans la zone rouge, v le nombre d'espions dans la zone verte, on a $2r + v \geq 2 \cdot 1000$ puisque pour 1000 paires de lignes, il faut au moins soit 2 espions verts, soit un espion rouge.

On peut recommencer tout ce raisonnement en échangeant lignes et colonnes, et en notant également b le nombre d'espions dans la zone bleue,

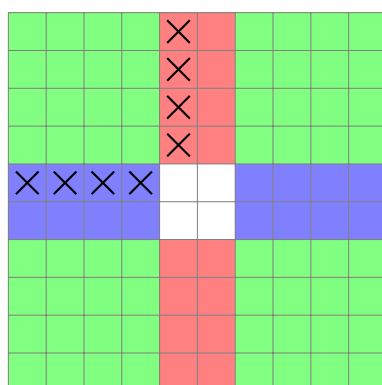


On a de même l'inéquation $2b + v \geq 2000$. En sommant les deux inéquations qu'on a, on obtient $2r + v + 2b + v \geq 2000 + 2000$ soit $r + b + v \geq 2000$, ce qui signifie qu'il y a au moins 2000 espions au total sur la grille.

Deuxième partie : Construction où 2000 espions suffisent.

Une construction possible consiste à placer 1000 espions dans la zone rouge du haut, un sur chaque ligne, et 1000 espions dans la zone bleue de droite, un sur chaque colonne. Alors, comme chaque carré contient les colonnes centrales où sont les cases rouges, les espions rouges vont permettre de déterminer exactement la hauteur où est placé le carré, indépendamment de sa position horizontale, et les espions bleus vont permettre de déterminer sa position horizontale indépendamment de sa hauteur, puisque quelle que soit sa hauteur, tout carré sera forcément sur les lignes centrales (qui contiennent les cases bleues).

Exemple où les espions sont notés par des croix.



Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a été réussi intégralement que par une petite dizaine d'élèves. Quelques remarques :

- Ne pas hésiter à traiter les petits cas, c'est-à-dire remplacer les nombres 2025 et 1025 par des nombres plus petits, par exemple 5 et 3. En testant plusieurs petits cas, cela permettait d'avoir une intuition de la bonne valeur.
- Connaître le nombre d'espions n'est pas du tout la même chose que connaître l'ensemble des espions sur le carré. Partir en ne regardant que le nombre n'est pas une bonne idée.
- Certains ont trouvé une construction avec 2000 espions vérifiant l'énoncé, mais n'ont pas voulu faire une preuve que cette construction permettait de retrouver le carré initial. Ceci coûtait malheureusement le point attribué pour la construction et la preuve que celle-ci fonctionnerait.

- Certains procédaient au départ comme dans le corrigé pour trouver 1000 espions. Mais il faut bien expliquer pourquoi ces espions étaient distincts, pourquoi un même espion ne pouvait pas remplir deux rôles simultanément.
- Certains élèves n'ont pas vu la subtilité entre les espions sur une zone centrale (en rouge et bleu) et les autres espions. C'était pourtant le coeur de la preuve et nécessitait une grande minutie.

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1	Première partie : Algèbre et Arithmétique	44
1	Algèbre : Découverte (Melvil)	44
2	Arithmétique : Divisibilité et PGCD (Raphaël)	50
3	Arithmétique : Nombres premiers (Anatole et Martin)	51
4	Algèbre : Inégalités 1 (Serge)	61
5	Arithmétique : TD de modulus (Arthur et Henry)	62
6	Algèbre : Récurrence (Rémi)	70
7	Algèbre : Inégalités 2 (Camille)	75
8	Arithmétique : Equations Diophantiennes (Akin)	82
2	Entraînement de mi-parcours	87
3	Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie	90
1	Géométrie : Chasse aux angles (Gabriel)	90
2	Combinatoire : Principe des tiroirs (Emilhan)	109
3	Combinatoire : Principe de l'extremum (Théo et Noam)	115
4	Géométrie : Théorème de l'angle tangent (Maryam)	119
5	Combinatoire : Invariants et coloriage (Lilas et Paul A)	120
6	Géométrie : Triangles semblables (Eva)	130
7	Combinatoire : Jeux (Oscar)	138
8	Géométrie : TD de révisions (Aurélien)	146
4	Entraînement de fin de parcours	147

1 Première partie : Algèbre et Arithmétique

1 Algèbre : Découverte (Melvil)

Manipulations algébriques

La factorisation est le fait d'écrire une expression sous la forme d'un produit. Nous parlons souvent de deux méthodes de bases : L'une fait intervenir la mise en évidence d'un facteur commun et l'autre fait intervenir les identités remarquables.

Exemple 1.

Montrer que si $n \geq 2$, $4n^2 - 1$ n'est pas un nombre premier.

(On dit que p est un nombre premier si $p \neq 1$ est tel qu'on ne puisse pas l'écrire sous la forme $p = ab$ avec $1 < a, b < p$).

On veut donc montrer qu'on peut trouver a et b tels que $4n^2 - 1 = ab$ et $1 < a, b < 4n^2 - 1$, on dit qu'on cherche à *factoriser* $4n^2 - 1$.

Proposition 2 (Distributivité/ La mise en évidence d'un facteur commun).

On a l'égalité suivante, appelée distributivité, valable pour tous a, b, k :

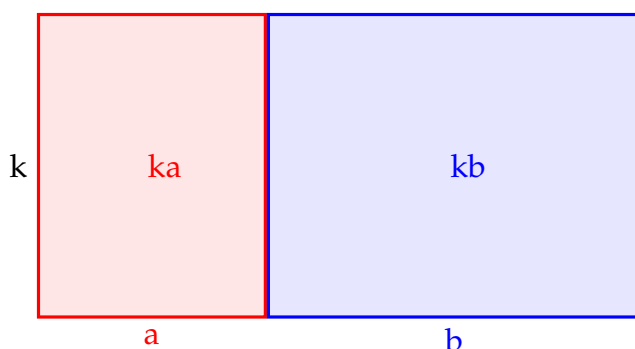
$$k(a + b) = ka + kb.$$

On dit que :

- $k(a + b)$ est la forme factorisée puisque c'est un produit.
- $ka + kb$ est la forme développée.

Démonstration.

Une preuve géométrique marche très bien, et les identités remarquables que nous verrons juste après en ont une aussi, elles ont (normalement) été vues en classe.



□

Il est souvent plus intéressant d'avoir la forme factorisée, par exemple le fait que l'un des facteurs est nul si le produit est nul, ou encore des relations de divisibilité (que vous

verrez plus tard dans la semaine).

Parfois on devra utiliser cette identité plusieurs fois pour obtenir un résultat totalement factorisé et utile.

Exemple 3.

$$ab + a + b + 1 = a(b + 1) + b + 1 = (b + 1)(a + 1)$$

Certaines identités sont à connaître et à savoir reconnaître n'importe où, elles sauvent des vies! (on dit que ce sont des identités remarquables)

Proposition 4 (Identités remarquables).

- $(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (c'est la précédente en remplaçant b par $-b$)
- $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

Revenons à notre exemple précédent avec $4n^2 - 1$: On a $4n^2 - 1 = (2n)^2 - 1^2 = (2n - 1)(2n + 1)$, et on a bien réussi à factoriser cette expression! (Quand je dis qu'elles peuvent sauver des vies...)

Exercice 1

Factoriser le plus possible $a^4 - b^4$.

Solution de l'exercice 1

$$\text{On a } a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

Exercice 2

Factoriser $a^4 + 4b^4$ (c'est l'identité de Sophie Germain)

Indice : on a $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$.

Solution de l'exercice 2

On reconnaît coup sur coup deux identités remarquables (à croire que c'était fait exprès) :

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2).$$

On peut ici voir qu'il faut parfois faire "apparaître" les termes manquants pour qu'on puisse factoriser comme il se doit, et c'est là que réside toute la difficulté de tels problèmes. Un autre exemple pour la route :

Exemple 5.

$$a^3 - b^3 = a^3 + a^2b + b^2a - a^2b - b^2a - b^3 = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Tiens d'ailleurs... On a $a^1 - b^1 = (a - b)(1)$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, il y aurait pas un paterne là?

La réponse est oui (waw!) :

Proposition 6.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite, tout se simplifie magiquement! $\square$

Pour montrer qu'elle est effectivement juste, il suffit de partir du membre de droite et de développer, tout se simplifie magiquement!

Si maintenant on suppose en plus n impair, on peut remplacer b par $-b$ dans la formule précédente, pour avoir

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - b^{n-2}a + b^{n-1}).$$

Exercice 3

Calculer $x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n$, avec $x \neq 1$ et $m < n$.

Solution de l'exercice 3

On a $x^m + \dots + x^{n-1} + x^n = x^m(1 + \dots + x^{n-m-1} + x^{n-m}) = x^m(1^{n-m} + 1^{n-m-1}x + \dots + 1 \times x^{n-m-1} + x^{n-m}) = x^m \left(\frac{x^{n-m+1} - 1}{x - 1} \right) = \frac{x^{n+1} - x^m}{x - 1}$

Exercice 4

Factoriser $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

Solution de l'exercice 4

Cette factorisation est beaucoup plus dure car elle ne fait intervenir aucune technique élémentaire ni terme manquant. Pour parvenir à factoriser cette expression on va s'appuyer sur la symétrie des rôles joués par les 3 variables x, y et z . Sans le justifier rigoureusement on sent bien que les termes de la factorisation doivent eux aussi être symétriques et puisque l'expression de départ est homogène de degré 3, les 2 termes de la parenthèse doivent être homogènes de degré 1 et 2 pour que la factorisation ne soit pas triviale. La seule expression homogène de degré 1 est à constante multiplicative près $x + y + z$. Pour l'autre parenthèse, l'expression doit être une combinaison linéaire des deux expressions suivantes $x^2 + y^2 + z^2$ et $xy + yz + zx$. En remarquant que l'expression s'annule pour $x = y = z$, on aboutit au résultat suivant :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Implication, équivalence, négation

Ce bout du cours regroupe des définitions importantes de logique qui sont surtout là pour poser les bases pour la partie d'après. Du moment que vous maîtrisez la partie suivante, ça ne sert à rien de connaître celle-là dans tous les détails.

Définition 7 (Implication).

Soient A et B deux phrases, pouvant être vraies ou fausses (qu'on appelle aussi propositions). On dit que A implique B (noté $A \implies B$) si dès que A est vérifiée, B l'est également.

Exemple 8. Si A est la phrase "J'ai tué Bob" et B est la phrase "Bob est mort", on a bien A implique B : si j'ai tué Bob, Bob est forcément mort.

Un exemple un peu plus mathématique peut-être : si $x \geq 1$, alors $x \geq 0$.

En général, on repère une implication (par exemple dans un énoncé) par la présence d'un "si", souvent suivi d'un "alors"

Exemple 9.

Soient $a, b > 0$. Montrer que si $a + b = 2$, alors $ab \leq 1$.

Définition 10 (Équivalence).

On peut voir sur tous ces exemples qu'il peut arriver que B soit vérifiée sans que A ne soit vérifiée : ce n'est pas parce que Bob est mort que je l'ai tué!

Des fois on veut que A soit vérifié exactement quand B est vérifié : on veut que $A \implies B$ et que $B \implies A$. On appelle ça une équivalence, qu'on note $A \iff B$, on dit alors que A est équivalente à B, ou encore que A et B sont équivalentes, ou encore A si et seulement si B.

Exemple 11.

Si A est la phrase $x \geq 0$ et B est la phrase $x^3 \geq 0$, on a bien $A \iff B$.

(Oui le premier exemple est un exemple mathématique, essayez de trouver deux phrases équivalentes de la vie de tous les jours qui ne soient pas simplement une reformulation basique l'une de l'autre)

Définition 12 (Négation).

Si on nous donne une proposition A (donc une phrase pouvant être ou vraie ou fausse), la négation de A est le contraire de A, noté $\neg A$.

Dit dans des termes plus compliqués, $\neg A$ est telle que " A est vraie" $\iff$ " $\neg A$ est fausse".

Exemple 13.

Si A est la proposition "Bob est mort", sa négation est "Bob est vivant".

Si A est " $x < 0$ ", alors sa négation est " $x \geq 0$ ".

Enfin la négation de "Pour tout $x > 0$, $x^2 + 2x - 3 > 0$ " est "Il existe $x > 0$ tel que $x^2 + 2x - 3 \leq 0$ ".

Ces définitions n'ont pas grand intérêt en elles-mêmes, mais elles permettent de résoudre beaucoup de problèmes si elles sont utilisées dans des raisonnements complexes et construits.

Définition 14 (Raisonnement par Absurde).

Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire est faux. Il s'appuie sur la règle logique que :

Si "non P" est faux, alors P est vraie. Autrement dit, L'idée est de supposer $\neg A$ et d'aboutir à une contradiction, à quelque chose qui est toujours faux ($0 > 1$ par exemple). Cela signifie que $\neg A$ est forcément faux, donc que A est vrai.

Exemple 15.

Montrons que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme un rapport de deux nombres entiers, on dit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, soient donc a, b des entiers tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On a alors $\frac{a^2}{b^2} = 2$, ou encore $a^2 = 2b^2$. À ce moment là, on remarque que a^2 est

pair, donc a est pair, il s'écrit sous la forme $a = 2a'$.

On remplace notre nouvelle expression de a dans l'équation de départ, on trouve $b^2 = 2a'^2$. Ainsi, b^2 est pair, et on a donc $b = 2b'$. En remplaçant, on trouve $a'^2 = 2b'^2$. Cette solution ressemble beaucoup à la solution initiale, puisque on a également $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$. En plus, la solution est strictement plus petite qu'avant. Si on continue ainsi, on trouvera une solution de plus en plus petite tout en restant dans les entiers, ce qui n'est pas possible puisque $a \geq 1$ et $b \geq 1$, il y aura un moment où ce ne sera plus le cas.

On appelle un tel raisonnement une descente infinie.

Exercice 5

Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Solution de l'exercice 5

Raisonnons par l'absurde et supposons $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Il existe alors un entier relatif a et un entier relatif b tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$. Ainsi, $3 \times a = 10^b$ ce qui signifie que 10^b est un multiple de 3 : la somme de ses chiffres doit donc être divisible par 3, ce qui est absurde. En effet, la somme des chiffres de 10^b est toujours égale à 1 et n'est donc pas divisible par 3.

L'hypothèse « $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. » est donc fausse et ainsi $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice 6

Montrer que le nombre suivant est irrationnel :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

Solution de l'exercice 6

La première étape, est de trouver des informations sur ce nombre. On pose $x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$,

alors on remarque

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1 + x} \\ \implies x(1 + x) &= 1 \\ \implies x^2 + x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Si on connaît la résolution des équations du second degré alors, on sait que $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, or $\sqrt{5}$ est un irrationnel, les opérations somme et division par des entiers ne changent pas la nature irrationnelle du nombre. Donc $x \notin \mathbb{Q}$

Solution n°2 de l'exercice 6

On commence comme précédemment par montrer que $x^2 + x - 1 = 0$ Par l'absurde, supposons que x est rationnel, il s'écrit alors sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec a et b des entiers premiers entre eux. en injectant cela dans notre équation, on obtient

$$a^2 + ab - b^2 = 0$$

Si $a \neq \pm 1$ Prenons p un diviseur premier de a , alors $p \mid a^2 + ab = b^2$. D'après le lemme d'Euclide, $p \mid b$, absurde car a et b sont premiers entre eux. Donc $a = \pm 1$. Le même raisonnement peut être utilisé pour montrer que $b = \pm 1$. Ainsi $x = \pm 1$ ce qui ne marche pas lorsqu'on le substitue dans l'équation, absurde, donc $x \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 7

Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution de l'exercice 7

Si $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel, alors $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ également, et $\sqrt{6}$ est aussi rationnel. On raisonne alors de la même manière que précédemment, pour aboutir à une contradiction.

2 Arithmétique : Divisibilité et PGCD (Raphaël)

Ce cours est tiré du fabuleux "[cours d'arithmétique de base](#)" de Jean-Louis Tu, disponible sur le site de la POFM.

3 Arithmétique : Nombres premiers (Anatole et Martin)

Définitions

Définition 1 (Nombre premier).

On appelle nombre premier un entier naturel qui possède *exactement* 2 diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Exemple 2.

Voici la liste des premiers nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Le seul nombre premier pair est 2. En effet, tout nombre pair est divisible par 2, donc tout nombre pair a au moins 3 diviseurs positifs distincts : 1, 2 et lui-même.

Remarque 3.

On remarquera que 1 n'est pas un nombre premier. En effet, il ne possède qu'un seul diviseur positif : 1.

Proposition 4 (crible).

Pour vérifier si un nombre n est premier, il faut vérifier s'il est divisible par un entier entre 2 et $n - 1$. En réalité, il suffit uniquement de tester s'il est divisible par un entier inférieur à $\sqrt{n}$.

Démonstration. Si $n \geq 2$ n'est pas premier, alors il possède un diviseur d différent de 1 et n . Si $d \leq \sqrt{n}$, on l'aurait trouvé en cherchant les diviseurs inférieurs à $\sqrt{n}$. Sinon, $d > \sqrt{n}$, donc en réarrangeant, on trouve $\frac{n}{d} \leq \sqrt{n}$, alors que $\frac{n}{d}$ est lui aussi un diviseur de n , et on aurait donc trouvé $\frac{n}{d}$. $\square$

Exemple 5.

Le nombre 91 est-il premier ? Non, $91 = 7 \cdot 13$.

Les nombres premiers sont les nombres qui n'ont pas de diviseurs stricts, à part 1. On s'attend donc, lorsqu'on étudie des relations de divisibilités entre entiers, à ce que les nombres premiers apportent beaucoup de contraintes et donc d'informations. Avant de voir les propriétés qui formalisent cette idée, on a besoin de la notion de "nombres premiers entre eux".

Définition 6.

Deux nombres a et b sont premiers entre eux si $\text{PGCD}(a, b) = 1$, autrement dit, s'ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exemple 7.

5 et 9 sont premiers entre eux.

14 et 35 ne sont pas premiers entre eux, car 7 divise ces deux nombres.

Proposition 8.

Soit p un nombre premier et n un entier naturel. Alors soit p divise n , soit p et n sont premiers entre eux.

Démonstration. Les seuls diviseurs de p sont 1 et p , donc les seuls diviseurs communs à p et n possibles sont 1 et p . Ainsi, soit p divise n , soit le seul diviseur commun de p et n est 1 ie n et p sont premiers entre eux. $\square$

Exercice 1

Déterminer toutes les paires de nombres premiers consécutifs

Solution de l'exercice 1

Commençons par remarquer que dans toute paire de nombres consécutifs, il y en a un qui est pair. Alors, comme le seul nombre premier pair c'est 2, les seules paires possibles sont (1, 2) ou (2, 3). On constate finalement que la première paire n'est pas solution puisque 1 n'est pas premier. Ainsi la seule solution est (2, 3) car 2 et 3 sont bien premiers.

Exercice 2

Déterminer tous les nombres premiers de la forme $a^2 - 1$ avec $a \geq 1$ un entier.

Solution de l'exercice 2

On reconnaît ici une identité remarquable : $a^2 - 1 = a^2 - 1^2 = (a - 1)(a + 1)$. Notre nombre est alors factorisé et pour que ce soit un nombre premier, il faut que l'un des facteurs soit égal à 1. Ainsi, on doit avoir $a - 1 = 1$ ou $a + 1 = 1$, ce qui donne $a = 2$ ou $a = 0$. Comme on cherche $a \geq 1$, on a $a = 2$, donc $a^2 - 1 = 3$ qui est bien premier. La seule solution est donc 3.

Exercice 3

Soit a et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^n - 1$ est premier. Montrer que $a = 2$ et que n est premier.

Solution de l'exercice 3

Commençons par montrer que $a = 2$. On sait que $a - 1$ divise $a^n - 1$ et comme $n \geq 2$, $a - 1 < a^n - 1$. Ainsi, $a - 1$ est un diviseur strict de $a^n - 1$, donc, comme $a^n - 1$ est premier, on doit avoir $a - 1 = 1$, soit $a = 2$.

Montrons à présent que n est premier. Par contraposée, si n n'est pas premier, alors on peut écrire $n = ab$ avec $a \geq 2$ et $b \geq 2$. Ainsi,

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1) \left(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 1 \right)$$

Avec $2^a - 1 \geq 2$ et $2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 1 \geq 2$, donc $2^n - 1$ n'est pas premier, ce qui conclut.

Exercice 4 (*)

Trouver tous les entiers naturels n tels que $n^4 + 4^n$ soit premier.

Solution de l'exercice 4

On écarte le cas $n = 1$. Si n est pair, le résultat est évident. Sinon, on peut écrire $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors on a

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= (2k + 1)^4 + 4 \times (2^k)^4 \\ &= ((2k + 1)^2 + 2 \times 2^{2k} + 2 \times (2k + 1) \times 2^k)((2k + 1)^2 + 2 \times 2^{2k} - 2 \times (2k + 1) \times 2^k) \end{aligned}$$

On vérifiera aisément que les deux facteurs sont bien strictement supérieurs à 1

Lemmes de Gauss et Euclide

Lemme 9 (Lemme de Gauss). Soient a, b et n trois entiers naturels tels que a et n soient premiers entre eux. Si n divise ab , alors n divise b .

Démonstration.

Il existe un entier k tel que $ab = nk$. Puisque n et a sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u et v tels que $au + nv = 1$. Alors on a

$$b = b(au + nv) = n(ak + bv).$$

Ceci implique que n divise b . □

Dans le cas particulier où n est un nombre premier, on obtient du lemme de Gauss le lemme d'Euclide.

Lemme 10 (Lemme d'Euclide).

Soit p un nombre premier et a et b des entiers naturels. Si p divise ab , alors p divise a ou p divise b .

Démonstration. Supposons que p ne divise pas a . D'après la proposition 8, p est premier avec a . D'après le lemme de Gauss, ceci implique que p divise b . □

Remarque 11.

Ce lemme se généralise facilement à un plus grand nombre d'entiers si p divise un produit $a_1 a_2 \dots a_k$ de plusieurs entiers naturels, alors p divise l'un des a_i .

Remarque 12.

Il faut absolument que p soit premier, sans quoi le résultat est complètement faux! Par exemple, 6 divise $3 \times 4 = 12$ mais 6 ne divise ni 3 ni 4. C'est une erreur très fréquente.

Exercice 5

Soit a un entier naturel et $n \geq 1$. Montrer que 7 divise a^n si et seulement si 7 divise a .

Solution de l'exercice 5

7 est premier, donc on peut appliquer le lemme d'Euclide généralisé : 7 divise $a \times a \times a \times \dots \times a$, donc 7 divise l'un des facteurs, ce qui donne que 7 divise a .

Réciproquement, si 7 divise a , on peut écrire $a = 7k$, alors $a^n = 7ka^{n-1}$ dont 7 divise a^n .

Exercice 6

Soit a, b deux nombres premiers entre eux. Montrer que si $a \mid n$ et $b \mid n$, alors $ab \mid n$.

Solution de l'exercice 6

Soient k et ℓ des entiers tels que $n = ak = b\ell$. On a donc que $b \mid ak$ et que b est premier avec a . D'après le lemme d'Euclide, $b \mid k$. Il existe donc un entier m tel que $k = bm$. On a alors $n = abm$, donc $ab \mid n$.

Exercice 7

Soient x et y deux entiers. Montrer que si $2x + 1$ divise $8y$, alors $2x + 1$ divise y .

Solution de l'exercice 7

$2x + 1$ est impair, donc premier avec 8. On peut donc directement appliquer le lemme de Gauss pour obtenir que $2x + 1$ divise y .

Le lemme suivant formalise le fait que les nombres premiers sont les briques élémentaires des entiers. Il sera ainsi très utile par la suite.

Lemme 13.

Montrer que tous les nombres différents de 1 ont au moins un diviseur premier.

Démonstration. Soit n un entier. On peut en fait expliciter un diviseur premier de n : il suffit de prendre son plus petit diviseur autre que 1 ! En effet, soit d le plus petit diviseur de n supérieur à 1. Si d n'est pas premier, il admet un diviseur strict a autre que 1. On a alors $a|d|n$ et $a > 1$, ce qui contredit la minimalité de d . Ainsi, d est premier. $\square$

Corollaire 14.

Montrer que deux entiers sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucun diviseur premier en commun.

Démonstration. Notons ces deux entiers a et b . Si a et b sont premiers entre eux, alors ils n'ont aucun diviseur commun autre que un, donc ils n'ont a fortiori aucun diviseur premier commun.

Réciproquement, si $\text{pgcd}(a, b) \neq 1$, alors $\text{pgcd}(a, b)$ a un diviseur premier (par le lemme précédent, qui divise à la fois a et b) $\square$

Exercice 8

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Solution de l'exercice 8

Par l'absurde, supposons qu'il n'en existe qu'un nombre fini $p_1, \dots, p_n$. Alors considérons l'entier $N = p_1 \times \dots \times p_n + 1$: il n'est divisible par aucun des n nombres premiers listés ci-dessus. Cependant le lemme précédent garantit l'existence d'un diviseur premier de N , ce qui nous donne une contradiction et qui conclut.

Exercice 9

Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 9

Par le corollaire précédent, il suffit de montrer qu'aucun nombre premier ne peut diviser simultanément ab et $a + b$. Soit donc p un nombre premier divisant ab . Par le lemme d'Euclide, $p|a$ ou $p|b$. Quitte à échanger a et b , on peut supposer que $p|a$. Comme a et b sont premiers entre eux, p ne divise pas b . Ainsi, p ne divise pas $a + b$, ce qui conclut.

Théorème fondamental

Théorème 15 (Théorème fondamental de l'arithmétique).

Soit $n \geq 2$ entier. On peut écrire cet entier comme un produit de nombres premiers. De plus, cette écriture est unique ! On appelle cette façon d'écrire n la *décomposition en produit de facteurs premiers* de n .

Exemple 16.

Voici quelques exemples de décompositions :

- $4 = 2^2$
- $17 = 17$
- $24 = 2^3 \times 3$
- $105 = 3 \times 5 \times 7$

Remarque 17.

Quelques remarques importantes :

- L'ordre de l'écriture n'est évidemment pas unique.
- Le fait que 1 n'est pas premier est important, puisque sinon on pourrait ajouter un nombre arbitraire de 1 dans le produit, ce qui retirerait l'unicité, qui est pourtant très importante.
- Les diviseurs premiers de n sont donc exactement les nombres premiers p qui apparaissent dans sa décomposition.

Si $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$, alors on peut facilement trouver ses diviseurs à partir de sa décomposition :

il s'agit de tous les nombres de la forme $d = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$, avec $\beta_i \leq \alpha_i$ pour tout indice i .

Exemple 18.

$24 = 2^3 \cdot 3$, donc ses diviseurs sont : $1, 2, 2^2, 3, 3 \cdot 2, 3 \cdot 2^2, 3 \cdot 2^3$.

Exercice 10

Soit p un nombre premier. Donner les diviseurs de p^k .

Solution de l'exercice 10

Les diviseurs de p^k sont les nombres de la forme p^a avec $0 \leq a \leq k$.

Exercice 11

Soit p un nombre premier et m et n des entiers. On suppose que $p^2 + m^2 = n^2$. Montrer que $n = m + 1$.

Solution de l'exercice 11

Notons que $n^2 > m^2$ donc $n > m$. L'équation se factorise sous la forme $p^2 = n^2 - m^2 = (n - m)(n + m)$. Donc $n - m$ est un diviseur de p^2 , de sorte que $n - m = 1, p$ ou p^2 . Si $n - m \geq p$, alors $n + m = \frac{p^2}{n - m} \leq n - m$, ce qui est absurde. On déduit que $n - m = 1$, comme voulu.

Exercice 12

En fonction de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier, déterminer son nombre de diviseurs positifs.

Solution de l'exercice 12

On note $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de n . Les diviseurs de n sont alors exactement les entiers de la forme $p_1^{\beta_1} \times \dots \times p_k^{\beta_k}$ avec $\forall i, \beta_i \in \llbracket 0, \alpha_i \rrbracket$, ce qui donne un total de

$$(\alpha_1 + 1) \times \dots \times (\alpha_n + 1)$$

diviseurs distincts.

Exercice 13

Montrer qu'un entier est un carré parfait si et seulement si tous ses diviseurs premiers apparaissent un nombre pair de fois dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Montrer qu'un entier est une puissance k -ième si et seulement si tous ses diviseurs premiers

apparaissent un nombre de fois divisible par k dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Solution de l'exercice 13

1. D'abord, si n est un carré, on peut écrire $n = k^2$ avec $k = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$. Ainsi, $n = p_1^{2\alpha_1} \times \dots \times p_r^{2\alpha_r}$, et l'unicité de la décomposition garantit alors le résultat. Réciproquement, si $n = p_1^{2\alpha_1} \times \dots \times p_r^{2\alpha_r}$, alors $n = k^2$ avec $k = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$.
2. La deuxième question est parfaitement analogue, mais en remplaçant les 2 par des k .

Valuation p -adique

Dans le temps qu'il nous reste, on attire l'attention sur les exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans la décomposition en facteurs premiers d'un entier.

Définition 19 (valuation p -adique).

Soit p un nombre premier et n un entier. L'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n est appelé *valuation p -adique* de n , et est noté $v_p(n)$. C'est le plus grand entier k tel que $p^k \mid n$.

Exemple 20.

Comme $2025 = 3^4 \times 5^2$, on a $v_3(2025) = 4$ et $v_5(2025) = 2$. Mais on a aussi $v_2(2025) = 0$.

Pour déterminer si un entier a divise un entier b , il suffit alors de montrer que $v_p(a) \leq v_p(b)$ pour tout nombre premier p .

Exercice 14

Soit p un nombre premier et a et b des entiers. Montrer que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. Montrer que $v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$.

Solution de l'exercice 14

Montrons que $v_p(a+b) \geq \min(v_p(a), v_p(b))$:

Soit p un nombre premier. Comme $p^{\min(v_p(a), v_p(b))}$ divise à la fois a et b , il divise leur somme. $\min(v_p(a), v_p(b)) \leq v_p(a+b)$.

Montrons que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$:

Soit $a = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_{i=1}^r p_i^{\beta_i}$ les écritures de a et b , où les α_i et β_i sont éventuellement nuls.

On vérifie que

$$ab = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i + \beta_i}.$$

Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, on déduit que $v_p(ab) = \alpha_i + \beta_i$. Ainsi,

$$v_{p_i}(ab) = \alpha_i + \beta_i = v_{p_i}(a) + v_{p_i}(b).$$

Exercice 15

Si $ab = k^n$ et a et b premiers entre eux, alors a et b sont une puissance n -ème.

Solution de l'exercice 15

Soit p un diviseur premier de a . Comme a est premier avec b , p ne divise pas b , de sorte que $v_p(n) = v_p(a) + v_p(b) = v_p(a)$. Comme k divise $v_p(n)$, k divise également $v_p(a)$. Comme c'est le cas pour tout facteur premier de a , a est une puissance k -ième d'après l'exercice 13. Il en est de même pour b .

Exercice 16

Un entier naturel qui est à la fois un carré et un cube est-il une puissance 6-ième ?

Solution de l'exercice 16

La réponse est OUI. En effet, l'exercice précédent nous garantit que tous les exposants dans la décomposition de cet entier doivent être divisibles par 2 et 3, puis l'exercice 12 nous apprend que tous les exposants doivent alors être divisibles par 6. Enfin, la réciproque de l'exercice 13 nous apprend que cela fait de notre entier une puissance 6-ième.

Exercice 17

Soit a et b deux entiers. Soit d un entier tel que $d \mid a + b$ et $d^2 \mid ab$. Montrer que $d \mid a$ et $d \mid b$.

Solution de l'exercice 17

Il suffit de montrer que, pour tout facteur premier p de d , le nombre $p^{v_p(d)}$ divise a et b , autrement dit, que $v_p(d) \leq v_p(a)$ et $v_p(d) \leq v_p(b)$. On fixe dans la suite un tel facteur premier p .

D'après l'énoncé, $v_p(d) \leq v_p(a+b)$ et $2v_p(d) \leq v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$. On déduit que $v_p(d) \leq v_p(a)$ ou $v_p(d) \leq v_p(b)$. Par symétrie des rôles de a et b , on peut supposer que $v_p(d) \leq v_p(a)$. Mais alors $p^{v_p(d)} \mid a$ et $p^{v_p(d)} \mid a + b$, donc $p^{v_p(d)} \mid b$ et $v_p(d) \leq v_p(b)$, ce qui conclut.

Et pour finir

Exercice 18

Déterminer tous les entiers naturels p tels que p , $p + 2$ et $p + 4$ soient tous premiers.

Solution de l'exercice 18

Remarquons que parmi p , $p + 2$ et $p + 4$, il y en a exactement un qui est divisible par 3 puisque l'un de p , $p + 1$ ou $p + 2$ l'est (ce sont trois nombres consécutifs), et que $p + 1$ est divisible par 3 SSI $p + 4$ l'est. Ainsi, l'un de ces trois nombres doit être égal à trois. C'est le même argument que pour les nombres premiers pairs. On peut alors traiter les trois cas et trouver que la seule possibilité est $p = 3$.

Exercice 19

Déterminer tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que $p < q < r$ et les nombres $r - q$, $r - p$ et $q - p$ sont tous les trois des nombres premiers.

Solution de l'exercice 19

On suppose que p , q et r sont tous impairs. Alors $p - q$, $q - r$ et $r - p$ sont pairs. Comme leur valeur absolue est première, ces nombres valent tous 2. Ainsi les entiers p , $p + 2$ et $p + 4$ sont premiers. Si p est divisible par 3, alors $p = 3$ et $q = 5$ et $r = 7$.

Cependant, le triplet $(3, 5, 7)$ n'est pas solution du problème : $7 - 3 = 4$ n'est pas premier.

Si p n'est pas divisible par 3, alors p est de la forme $3k + 1$ ou $3k + 2$. Le premier cas implique que $p + 2$ soit divisible par 3 donc $p + 2 = 3$ mais $p = 1$ n'est pas un nombre premier. Le deuxième cas implique que $p + 4$ soit divisible par 3, mais $p + 4 = 3$ ne donne pas de solution strictement positive.

On suppose que $r = 2$. Alors p et q sont impaires et $p - q$ est pair et premier donc égal à 2. Il vient que $q + 2$, q et $q - 2$ sont tous les trois des nombres premiers. D'après le cas précédent, cela implique que $q - 2 = 3$ donc $p = 7$. Réciproquement, le triplet $(p, q, r) = (2, 5, 7)$ et ses permutations sont donc bien solutions au problème.

Les seuls triplets solutions sont donc $(2, 5, 7)$ ainsi que ses permutations.

Exercice 20

Soit p un nombre premier et a, b deux entiers tels que $p^3 | ab$. Montrer que $p^2 | a$ ou $p^2 | b$.

Solution de l'exercice 20

Supposons que p^2 ne divise ni a ni b . Alors $v_p(a) \leq 1$ et $v_p(b) \leq 1$. On déduit que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \leq 2$, ce qui contredit le fait que $p^3 | ab$.

Exercice 21

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers dont le reste de la division euclidienne par 4 vaut 3.

Solution de l'exercice 21

Par l'absurde, supposons qu'il en existe un nombre fini $k \in \mathbb{N}$. Notons les $p_1, \dots, p_k$. Considérons le nombre $n = 4p_1 \times \dots \times p_k - 1$. Alors N n'est divisible ni par 2 ni par un des p_i . C'est donc le produit de nombres premiers distincts des p_i et de 2. Or, un produit de nombres premiers de la forme $4m + 1$ est un nombre de la forme $4m' + 1$, donc au moins un des diviseurs de N est de la forme $4\ell + 3$, et n'apparaît pas dans la liste des p_i , ce qui est absurde. Il y a donc une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.

Exercice 22

Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Donner les valeurs possibles du PGCD de $a + b$ et de $a^2 - ab + b^2$.

Solution de l'exercice 22

Posons $d = \text{PGCD}(a + b, a^2 - ab + b^2)$.

Soit p un éventuel diviseur premier de d . Alors p est également un diviseur de $a^2 + b^2 - ab - (a + b)^2 = -3ab$. D'après le lemme d'Euclide, p divise 3, a ou b . Si p divise b , comme p divise $a + b$, on déduit que p divise également a , ce qui contredit que a et b sont premiers entre eux. Ainsi, p ne peut pas diviser b , et de même il ne peut pas diviser a . On déduit que p divise 3 donc $p = 3$. Ainsi, d est une puissance de 3.

Cependant, si 9 divisait d , on aurait de même que précédemment que 9 divise $3ab$, donc que 3 divise ab . Ceci implique que 3 divise $a + b$ et a et ou b , donc 3 divise a et b , ce qui contredit que a et b sont premiers entre eux. Ainsi, 9 ne divise pas d , donc $d = 1$ ou $d = 3$.

Réciproquement, ces deux valeurs sont possibles : si $a = b = 1$, on a bien $\text{PGCD}(a + b, a^2 - ab + b^2) = \text{PGCD}(1, 2) = 1$, tandis que si $a = 1$ et $b = 2$, on a bien $\text{PGCD}(a + b, a^2 - ab + b^2) = \text{PGCD}(3, 3) = 3$.

Exercice 23

Soit p, q et r des nombres premiers. On suppose que chacun des trois nombres $pq + 1, qr + 1$ et $rp + 1$ sont des carrés parfaits. Montrer que $p + 2qr + 2$ est un carré parfait.

Solution de l'exercice 23

Donnons-nous trois entiers strictement positifs a, b et c tels que $pq + 1 = a^2, qr - p = b^2$ et $rp + 1 = c^2$. Puisque p, q et r sont premiers, ils sont supérieurs ou égaux à 2, de sorte que $a^2 > pq \geq 4$ donc $a \geq 3$ et de même $b \geq 3$ et $c \geq 3$. Les égalités se réécrivent comme

$$pq = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1),$$

$$qr - p = b^2,$$

$$rp = c^2 - 1 = (c - 1)(c + 1).$$

Puisque $a \geq 3$, on a $1 < a - 1 < a + 1 < a^2 - 1$, donc $a + 1$ et $a - 1$ sont des diviseurs strictes de pq . Ceci implique que $p = a + 1$ et $q = a - 1$ ou que $p = a - 1$ et $q = a + 1$. De même, on trouve que $p = b + 1$ et $r = b - 1$ ou que $p = b - 1$ et $r = b + 1$. On déduit que $q = p + 2$ ou $q = p - 2$ et $r = p + 2$ ou $r = p - 2$. On distingue les différents cas :

- Si $q = p + 2$ et $r = p + 2$, alors $q = r = p + 2$, donc $(p + 2)^2 - p = p^2 + 3p + 4$ est un carré parfait, ce qui est absurde car $(p + 1)^2 < p^2 + 3p + 4 < (p + 2)^2$.
- Si $q = p - 2$ et $r = p + 2$, d'après l'exercice 17 on déduit que $q = 3, p = 5$ et $r = 7$. Mais alors $p + 2qr + 2 = 49 = 7^2$, donc l'énoncé est vérifié.
- Si $q = p + 2$ et $r = p - 2$, d'après l'exercice 17 on déduit que $q = 7, p = 5$ et $r = 3$. Mais alors $p + 2qr + 2 = 49 = 7^2$, donc l'énoncé est vérifié.
- Si $q = p - 2$ et $r = p - 2$, alors $(p - 2)^2 - p$ est un carré parfait. Pourtant, $(p - 3)^2 < (p - 2)^2 - p < (p - 2)^2$, ce qui est absurde.

Exercice 24

Trouver toutes les paires (p, q) de nombres premiers telles que

$$p^2(p^3 - 1) = q(q + 1).$$

Solution de l'exercice 24

Si $p = q$, alors $p^4 - p = p + 1$. Or $p^4 = p \cdot p^3 \geq 8p > 2p + 1$ pour tout nombre premier p car $p \geq 2$. On a donc $p \neq q$ et donc p et q sont premiers entre eux.

p^2 est premier avec q donc d'après le lemme de Gauss, $p^2 \mid q + 1$. On dispose donc de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $q + 1 = kp^2$.

Comme q est premier avec p^2 , $q \mid p^3 - 1 = (p - 1)(p^2 + p + 1)$. Donc $q \mid p - 1$ ou $q \mid p^2 + p + 1$.

Si $q \mid p - 1$, alors

$$p < kp^2 - 1 = q \leq p - 1$$

ce qui est absurde.

On a donc $q \mid p^2 + p + 1$ donc $kp^2 - 1 = q \leq p^2 + p + 1$ soit $(k - 1)p^2 \leq p + 2$. Si $k = 1$, alors $q = p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ qui n'est premier que si $p = 2$. On a alors $q = 3$ mais $2^2(2^3 - 1) = 28 \neq 12 = 3(3 + 1)$. On en déduit que $k \geq 2$ et $p > 2$, donc $p + 2 < p^2 \leq (k - 1)p^2 \leq p + 2$ ce qui est également absurde.

Finalement il n'y a pas de solution.

Exercice 25 (*)

Iran Round 2 2010. Soient $a > b$ deux entiers strictement positifs. On suppose que $\gcd(a - b, ab + 1) = 1$ et que $\gcd(a + b, ab - 1) = 1$. Montrer que $(a - b)^2 + (ab + 1)^2$ n'est pas un carré parfait.

Solution de l'exercice 25

Commençons par vérifier que

$$(a - b)^2 + (ab + 1)^2 = (a + b)^2 + (ab - 1)^2 = (a^2 + 1)(b^2 + 1).$$

On suppose par l'absurde que ce nombre est un carré parfait. Observons que si $a^2 + 1$ et $b^2 + 1$ ne peuvent pas tous les deux être des carrés parfaits. En effet, s'il existe x tel que $a^2 + 1 = x^2$, on déduit que $1 = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$. Chacun des facteurs $x - a$ et $x + a$ sont donc des diviseurs de 1, et sont strictement positifs, donc ils sont égaux à 1. Ainsi, $x - a = x + a = 1$, donc $a = 0$, ce qui contredit les hypothèses. Ainsi, $a^2 + 1$ et $b^2 + 1$ ne sont pas des carrés parfaits, donc ils ne sont pas premiers entre eux (d'après l'exercice 14).

On note $d = \text{PGCD}(a^2 + 1, b^2 + 1)$ et p un diviseur premier de d (qui existe d'après le paragraphe précédent). Alors p divise également $b^2 + 1 - (a^2 + 1) = b^2 - a^2 = (b - a)(a + b)$. D'après le lemme d'Euclide, p divise $a - b$ ou $a + b$. Si $p \mid a - b$, alors p divise également $ab + 1$ car p divise le nombre $(a - b)^2 + (ab + 1)^2$. Ceci contredit l'hypothèse que $\text{PGCD}(a - b, ab + 1) = 1$. Si $p \mid a + b$, alors p divise également $ab - 1$ car p divise le nombre $(a + b)^2 + (ab - 1)^2$. Ceci contredit l'hypothèse que $\text{PGCD}(a + b, ab - 1) = 1$. On a une contradiction dans tous les cas, ce qui conclut l'exercice.

4 Algèbre : Inégalités 1 (Serge)

Ce cours reprend le sublime TD d'inégalités de Rémi Lesbats donné au groupe A du "Stage de Valbonne 2023".

5 Arithmétique : TD de modulus (Arthur et Henry)

Cours et Exercices

Ce cours introduit le concept de congruence. Il reprend les idées du polycopié introductif de la POFM accessible sur [ce lien](#). Nous introduisons les modulus, ainsi que leurs principales opérations. Nous étudions ensuite la valeur d'un carré modulo certaines valeurs, et utilisons ce concept à travers des exercices. Enfin, nous définissons très brièvement la notion d'inverse modulaire. Cette dernière partie n'a pas été traitée pendant le cours.

Congruence et Opérations

Exemple 1.

Analogie en une horloge et les calculs modulo 12.

Définition 2.

Soit n un entier non nul. On dit de deux entiers relatifs a et b qu'ils sont **congrus modulo n** si

$$n \mid (a - b).$$

Dans ce cas on écrit $a \equiv b [n]$. (se lit " a est congru à b modulo n ")

Proposition 3.

Soit n un entier non nul, et a et b des entiers.

a est congru à b modulo n si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n .

Démonstration. Puisqu'on doit montrer une équivalence ("si et seulement si") on doit faire la preuve de chacune des implications.

- (Sens $\Leftarrow$) On suppose que a et b ont le même reste r dans la division euclidienne par n . Ainsi il existe q et q' (pas forcément égaux!) tels que

$$a = qn + r \quad \text{et} \quad b = q'n + r.$$

On veut montrer que n divise $a - b$:

$$a - b = qn + r - q'n - r = n(q - q').$$

Donc a et b sont congrus entre eux modulo n . $a \equiv b [n]$.

- (Sens $\Rightarrow$) : On suppose que $a \equiv b [n]$, c'est à dire $n \mid a - b$. On veut montrer que a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n . Écrivons déjà ces divisions :

$$a = qn + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < n,$$

$$b = q'n + r' \quad \text{et} \quad 0 \leq r' < n.$$

Comme n divise $a - b$ alors $n \mid n(q - q') + (r - r')$ donc $n \mid r - r'$.

Or

$$0 \leq r < n,$$

$$-n < -r' \leq 0.$$

Donc

$$-n < r - r' < n.$$

Et le seul multiple de n strictement compris entre $-n$ et n est 0. Donc $r - r' = 0$ c'est à dire que les restes sont égaux.

□

Remarque 4.

La première définition où $n \mid a - b$ est peut être moins intuitive que celle avec les restes, mais elle est beaucoup plus facile à utiliser dans les preuves, ce que nous allons voir tout de suite.

Proposition 5.

Soit n un entier non nul, et a, b et c des entiers

1. $a \equiv a \pmod{n}$.
2. Si $a \equiv b \pmod{n}$, alors $b \equiv a \pmod{n}$.
3. Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $b \equiv c \pmod{n}$, alors $a \equiv c \pmod{n}$.

Démonstration. Éléments de preuves :

1. Car $n \mid a - a = 0$.
2. Si $n \mid a - b$ alors $n \mid b - a$.
3. Si $n \mid a - b$ et $n \mid b - c$ alors $n \mid a - b + b - c = a - c$.

□

Proposition 6 (Opérations).

Soit n un entier non nul, et a, a', b et b' des entiers. Supposons $a \equiv a' \pmod{n}$ et $b \equiv b' \pmod{n}$

1. (Somme) : $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$
2. (Différence) : $a - b \equiv a' - b' \pmod{n}$
3. (Produit) : Si $ab \equiv a'b' \pmod{n}$
4. (Puissance) : Pour k un entier naturel, on a $a^k \equiv a'^k \pmod{n}$

Démonstration. On suppose que $n \mid a - a'$ et que $n \mid b - b'$

1. Par somme de multiples n divise $a - a' + b - b' = a + b - (a' + b')$. Donc $a + b \equiv a' + b' \pmod{n}$.
2. Même chose avec la différences de deux multiples
3. Cette preuve nécessite une astuce souvent utile, qui consiste à ajouter le terme que l'on veut pour le retirer ensuite :

$$a'b' - ab = a'b' - ab' + ab' - ab = (a' - a)b' + (b' - b)a$$

On a une combinaison linéaire de multiples de n , c'est donc un multiple de n .

4. Il suffit d'itérer la proposition 6.3 par récurrence.

□

Exemple 7.

Attention : **On ne peut pas toujours diviser dans les modulus!!!**

Par exemple $2 \times 4 \equiv 2 \times 1 \pmod{6}$ pourtant $4 \not\equiv 1 \pmod{6}$.

Exercice 1

Vrai ou Faux ?

- $8 \equiv 2 [3]$
- $23 \equiv 103 [10]$
- $7 \equiv -2 [9]$
- $302 \times (8 + 30) \equiv 10 [3]$
- $13 \times 218 \equiv -2 [7]$
- $21^{21} \equiv 3 [4]$
- $2^{10} \times 69 \equiv -13 [7]$

Solution de l'exercice 1

Dans l'ordre, les réponses sont VVVVFFF.

Exercice 2

1. Montrer qu'un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est aussi.
2. Montrer que ce critère marche aussi pour 9 : un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
3. Trouver un critère similaire sur les chiffres d'un entier pour dire s'il est divisible par 4 ou 8.

Solution de l'exercice 2

Pour cela, on étudie le cycle des puissances de 10 modulo 3, puis 9, et enfin 4 et 8.

1. Modulo 3, $10^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{3}$, donc le nombre dont les chiffres en base 10 sont $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0$ s'écrit

$$\overline{a_k \cdots a_1 a_0}^{10} = 10^k a_k + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv a_k + \dots + a_1 + a_0 \pmod{3}.$$

2. De même modulo 9.
3. Modulo 4, 10^k est congru à 0 dès lors que $k \geq 2$, donc un nombre $\overline{a_k \cdots a_1 a_0}^{10}$ est divisible par 4 si et seulement si $4 \mid 2a_1 + a_0$, car $10^1 \equiv 2 \pmod{4}$.
Modulo 8, on trouve la condition

$$8 \mid 4a_2 + 2a_1 + a_0.$$

Exercice 3

Montrer que la somme de 3 cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Solution de l'exercice 3

On remarque que les cubes modulo 9 sont congrus à 0, 1, -1 dans cet ordre. En effet,

$$\begin{aligned} 0^3 &\equiv 0 \pmod{9} \\ 1^3 &\equiv 1 \pmod{9} \\ 2^3 &\equiv 8 \equiv -1 \pmod{9} \\ 3^3 &\equiv 0 \pmod{9} \\ 4^3 &\equiv 1 \pmod{9} \\ 5^3 &\equiv -1 \pmod{9} \\ 6^3 &\equiv 0 \pmod{9} \\ 7^3 &\equiv 1 \pmod{9} \\ 8^3 &\equiv -1 \pmod{9}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Ainsi quels que soient trois cubes consécutifs, on englobe exactement un de chaque reste parmi $\{-1, 0, 1\}$, dont la somme vaut bien 0.

Exercice 4

Montrer les divisibilités suivantes pour n un entier naturel :

$$3 \mid n^3 - n \qquad 8 \mid n^3(n^6 - 1) \qquad 11 \mid 3^{n+3} - 4^{4n+2}$$

Solution de l'exercice 4

1. On regarde modulo 3, on voit en testant les trois valeurs $\{0, 1, 2\}$ que $n^3 \equiv n \pmod{3}$.
2. Il suffit de vérifier que

$$n^3(n^6 - 1) \equiv 0 \pmod{8}$$

pour $n \in \{0, 1, \dots, 7\}$.

3. On regarde $3^{n+3} - 4^{4n+2} = 27 \times 3^n - 16 \times (4^4)^n$ modulo 11. Or $4^4 \equiv 3 \pmod{11}$ et $27 - 16 \equiv 0 \pmod{11}$. Ainsi

$$11 \mid 3^{n+3} - 4^{4n+2}.$$

Exercice 5

Montrer que $n - 1$ divise $n^2 + 4n^{n+2} - 7n + 2n^{2025}$.

Solution de l'exercice 5

On regarde modulo $n - 1$ directement :

$$\begin{aligned} n^2 + 4n^{n+2} - 7n + 2n^{2025} &\equiv 1^2 + 4 \times 1^{4n+2} - 7 \times 1 + 2 \times 1^{2025} \\ &\equiv 1 + 4 - 7 + 2 \equiv 0 \pmod{n-1}. \end{aligned}$$

Exercice 6

Déterminer le pgcd de tous les entiers de la forme

$$(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)(a-c)(b-d)$$

où a, b, c, d sont des entiers relatifs.

Solution de l'exercice 6

Posons

$$P(a, b, c, d) = (a - b)(b - c)(c - d)(d - a)(a - c)(b - d).$$

Nous voulons calculer g le plus grand commun diviseur de toutes les valeurs que peut prendre $P(a, b, c, d)$.

Prenons des exemples simples :

$$P(0, 1, 2, 3) = (0 - 1)(1 - 2)(2 - 3)(3 - 0)(0 - 2)(1 - 3) = -12.$$

Donc g divise 12. Il nous suffit donc de vérifier modulo 3 et modulo 4.

- Divisibilité par 4 : On examine la parité du produit en fonction de celle de a, b, c, d . Si au moins 3 ont la même parité, alors deux différences sont paires. Sinon il y a deux paires entièrement distinctes de même parité, donc dans tous les cas, $4 \mid P(a, b, c, d)$.
- Modulo 3 : Considérons a, b, c, d modulo 3. Par le principe des tiroirs, deux d'entre eux sont congrus modulo 3. Donc une des différences est divisible par 3.

On en déduit que $3 \mid g$, $4 \mid g$, d'où $12 \mid g$, mais comme $g \mid 12$ et que g est positif, $g = 12$.

Exercice 7

Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Solution de l'exercice 7

Inspirons nous de la preuve de l'infinitude des nombres premiers. Supposons par l'absurde qu'il n'existe qu'un nombre fini de premiers congrus à 3 modulo 4. Appelons les

$$p_1, p_2, \dots, p_N.$$

Alors $M = 4p_1p_2 \cdots p_N - 1$ possède un diviseur premier impair. Si tous ses diviseurs étaient congrus à 1 modulo 4, M serait congru à 1 modulo 4, or M est congru à 3. Donc M possède un diviseur premier congru à 3 modulo 4. Or pour tout i , $M \equiv -1 \pmod{p_i}$, ainsi M n'est divisible par aucun p_i , contradiction ! Il y a donc une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Carrés et Cubes**Exercice 8**

Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 10^{100} + 3$?

Solution de l'exercice 8

Un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4. Ainsi $a^2 + b^2 \equiv 0, 1 \text{ ou } 2 \pmod{4}$, mais $10^{100} + 3 \equiv 3 \pmod{4}$. L'équation n'a pas de solution.

Exercice 9

Trouver tous les entiers naturels x, y, z, n tel que $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2^n$.

Solution de l'exercice 9

Ici on regarde modulo 8. Si $n \geq 3$, alors $2^n \equiv 0 \pmod{8}$. Or un carré vaut 0, 1 ou 4 modulo 8, ainsi on peut se convaincre que l'expression $x^2 + y^2 + z^2 + 1$ ne sera jamais divisible par

8. Les seules solutions possibles sont donc pour $n = 0, 1, 2$. On trouve les solutions $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, ainsi que $(1, 1, 1, 2)$.

Exercice 10

Montrer que l'équation $x^2 + 14y^2 = 124$ n'a pas de solutions entières.

Solution de l'exercice 10

Modulo 7, un carré est congru à 0, 1, 2 ou 4, mais $124 \equiv 5 \pmod{7}$, il n'y a donc pas de solutions.

Exercice 11

Montrer que l'équation $16x^2 + 3y^2 = 5$ n'a pas de solutions entières.

Solution de l'exercice 11

On peut regarder modulo 4, à gauche on a 0 ou 3, mais 1 à droite. On peut aussi noter que $|x| < 1$ et $|y| \leq 1$ et tester tous les cas.

Exercice 12

Trouver tous les entiers relatifs x, y, z tels que $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Solution de l'exercice 12

Cet exercice introduit le principe de *descente infinie*. Soit (x_0, y_0, z_0) un solution non-nulle qui minimise la valeur de $|x_0|$. Alors modulo 4, la seule solution possible est d'avoir $x_0^2 \equiv y_0^2 \equiv z_0^2 \equiv 0 \pmod{4}$. Cela implique que les trois variables sont paires. Ainsi on peut définir les entiers $x_1 = x_0/2$, $y_1 = y_0/2$, $z_1 = z_0/2$. On remarque alors que

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2,$$

donc (x_1, y_1, z_1) est aussi une solution non-nulle de l'équation, mais avec $|x_1| = |x_0|/2 < |x_0|$. Cela contredit la minimalité de $|x_0|$. Il n'y a donc pas de solutions non-nulles. Cependant, $(0, 0, 0)$ est clairement solution.

Inverses**Définition 8.**

Un entier b est dit **inverse de a modulo n** si $ab \equiv 1 \pmod{n}$. Si a possède un inverse modulo n (ce qui n'est pas toujours le cas) on dit que a est **inversible modulo n** .

Corollaire 9.

Si a est inversible modulo n , alors on peut "diviser" par a en multipliant par son inverse. $ab \equiv ac \pmod{n}$ implique $b \equiv c \pmod{n}$ pour b et c des entiers.

Proposition 10.

Un entier a est inversible modulo n si et seulement si a et n sont premiers entre eux. Dans ce cas, l'inverse de a est unique modulo n .

Démonstration.

— (Sens $\Leftarrow$) Si a et n sont premiers entre eux, alors par Théorème de Bézout il existe u et v des entiers tel que

$$au + bn = 1.$$

En passant cette égalité modulo n , on a

$$au \equiv 1 [n].$$

Donc a est inversible

— (Sens $\Rightarrow$) : On suppose que il existe u tel que $ab \equiv 1 [n]$. Donc $n \mid ab - 1$, c'est à dire qu'il existe q un entier tel que

$$ab - 1 = qn,$$

$$ab + qn = 1.$$

On utilise alors la réciproque du Théorème de Bézout pour conclure que a et n sont premiers entre eux.

(Unicité de l'inverse) : Soit b et b' des inverses de a (possiblement égaux). On va montrer que $b \equiv b' [n]$.

$$ab \equiv 1 \equiv ab' [n].$$

Mais puisque a est inversible, on peut simplifier par a en multipliant des deux côtés par b

$$bab \equiv bab' [n],$$

$$b \equiv b' [n].$$

□

Exercice 13

Trouver tous les inversibles modulo 8 et calculer leurs inverses.

Solution de l'exercice 13

On a $1 \times 1 \equiv 1 \pmod{8}$, $3 \times 3 \equiv 1 \pmod{8}$, $5 \times 5 \equiv 1 \pmod{8}$ et $7 \times 7 \equiv 1 \pmod{8}$. Aucun des autres résidus n'est inversible car non premiers avec 8.

Exercice 14

Calculer l'inverse de 37 modulo 53.

Solution de l'exercice 14

On cherche un entier x tel que

$$37x \equiv 1 \pmod{53}.$$

Autrement dit, il faut trouver x et y tels que

$$37x + 53y = 1.$$

C'est exactement ce que donne l'algorithme d'Euclide étendu.

$$53 = 1 \times 37 + 16$$

$$37 = 2 \times 16 + 5$$

$$16 = 3 \times 5 + 1$$

$$5 = 5 \times 1 + 0.$$

Donc $\gcd(37, 53) = 1$.

On exprime maintenant 1 comme combinaison de 37 et 53 en remontant les égalités :

$$1 = 16 - 3 \times 5.$$

Mais $5 = 37 - 2 \times 16$, donc

$$1 = 16 - 3(37 - 2 \times 16) = 7 \times 16 - 3 \times 37.$$

Puis $16 = 53 - 37$, donc

$$1 = 7(53 - 37) - 3 \times 37 = 7 \times 53 - 10 \times 37.$$

On a

$$1 = -10 \times 37 + 7 \times 53.$$

Donc -10 est un inverse de 37 modulo 53. On peut prendre la classe positive correspondante : $-10 \equiv 43 \pmod{53}$. 43 est donc l'inverse de 37 modulo 53.

Exercice 15

Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers a premiers avec p tels que $a \equiv a^{-1} \pmod{p}$.

Solution de l'exercice 15

Pour cela, il faut que $p \mid a^2 - 1$. Ainsi comme p est premier, soit $p \mid a - 1$ et alors $a \equiv 1 \pmod{p}$, soit $p \mid a + 1$, et alors $a \equiv -1 \pmod{p}$. Ainsi seuls 1 et -1 peuvent être leur propre inverse (et ils le sont toujours).

Exercice 16

Démontrer que si p est premier, alors $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Solution de l'exercice 16

Tous les entiers $1, \dots, p - 1$ sont premiers avec p . Par l'exercice précédent, seuls 1 et $p - 1$ sont leur propre inverse. Ainsi, dans le produit

$$1 \times 2 \times \cdots \times (p - 2) \times (p - 1),$$

chaque terme qui n'est ni 1, ni $p - 1$ se simplifie avec son inverse (qui n'est ni 1 ni $p - 1$). Il ne reste plus que 1 et $p - 1$, et donc

$$(p - 1)! \equiv 1 \times (p - 1) \equiv -1 \pmod{p}.$$

Exercice 17

Trouver tous les entiers naturels n tels qu'il existe un entier a tel que $n \mid 4a^2 - 1$.

Solution de l'exercice 17

Remarquons d'abord que pour tout entier a , l'expression $4a^2 - 1$ est impaire. Ainsi si n est pair, alors $n \nmid (4a^2 - 1)$. Donc aucun entier pair ne convient. Le cas $n = 1$ convient trivialement.

Montrons maintenant que tout entier naturel impair n convient. Soit n impair. Alors 2 est inversible modulo n , donc il existe un entier a tel que

$$2a \equiv 1 \pmod{n}.$$

Pour ce choix de a on a

$$4a^2 - 1 = (2a)^2 - 1 \equiv 1^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

d'où $n \mid 4a^2 - 1$, ainsi tous les impairs fonctionnent.

6 Algèbre : Récurrence (Rémi)

L'objectif de ce cours est de découvrir le principe de récurrence via des formules algébriques. La partie théorique peut se retrouver dans les polys de 2022 et 2023. La majorité des exercices et leurs corrigés sont repris du cours d'Antoine de l'an dernier.

Exercices

Exercice 1

Montrer que

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution de l'exercice 1

Initialisation : On a bien $1 = \frac{1 \times 2}{2}$.

Hérédité : Supposons qu'on ait

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 1}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

comme espéré.

Exercice 2

Montrer que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution de l'exercice 2

Initialisation : On a bien $1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}$.

Hérédité : Supposons qu'on ait

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2 + n + 6n + 6) \\ &= \frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2) \end{aligned}$$

comme espéré.

Exercice 3

Montrer que

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Solution de l'exercice 3*Initialisation* : On a bien $1 = 1$.*Hérédité* : On utilise la formule qu'on a trouvée précédemment. Supposons qu'on ait

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4} (n+2)^2 \end{aligned}$$

comme espéré.

Exercice 4Soit n un entier strictement positif. Montrer que

$$2^n > n.$$

Solution de l'exercice 4*Initialisation* : On a bien $2^1 = 2 > 1$.*Hérédité* : Supposons qu'on ait $2^n > n$ pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2 \times n = n + n \geq n + 1$$

ce qui conclut par récurrence.

Exercice 5Trouver tous les entiers positifs n tels que

$$2^n \geq n^2.$$

Solution de l'exercice 5

On commence par regarder les petits cas :

- $2^0 = 1 > 0 = 0^2$
- $2^1 = 2 > 1 = 1^2$
- $2^2 = 4 = 4 = 2^2$
- $2^3 = 8 < 9 = 3^2$
- $2^4 = 16 = 16 = 4^2$

$$— 2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

On observe que les puissances de 2 semblent grandir beaucoup plus vite que les carrés à partir de là. On va donc montrer par récurrence que $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$.

Initialisation : On a bien $2^4 = 16 = 4^2$.

Hérédité : Supposons qu'on ait $2^n \geq n^2$ pour un certain $n \geq 4$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2 \times n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

L'inégalité $n^2 \geq 2n + 1$ peut se montrer de nombreuses manières. On peut par exemple dire que $(n-1)^2 \geq 9$ (car $n \geq 4$), donc en développant $n^2 - 2n + 1 \geq 9$, d'où $n^2 \geq 2n + 8 \geq 2n + 1$. Cela conclut par récurrence. Finalement, en combinant cela avec les petits cas, les solutions sont tous les entiers positifs sauf 2.

Exercice 6

Soit n un entier strictement positif. Que vaut la somme des n plus petits entiers positifs impairs ?

Solution de l'exercice 6

On calcule les premières valeurs :

- $1 = 1$
- $1 + 3 = 4$
- $1 + 3 + 5 = 9$
- $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

On voit apparaître les premiers carrés parfaits, et on devine donc qu'il s'agira de la réponse générale. Montrons le par récurrence.

Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ ».

- *Initialisation* : $1 = 1^1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.
- *Hérédité* : Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.
Par hypothèse de récurrence, $1 + 3 + \dots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

On a bien montré par récurrence que la somme des n plus petits entiers impairs vaut n^2 .

Exercice 7

Montrer que pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Solution de l'exercice 7

Initialisation : On a bien $1 = \frac{q-1}{q-1}$.

Hérédité : Supposons qu'on ait

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$$

Exercice 8

Soit $x \geq 0$ un réel. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

Solution de l'exercice 8

Initialisation : On a bien $1 + x \leq 1 + x$.

Hérédité : Supposons qu'on ait

$$1 + nx \leq (1 + x)^n$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

car $1 + x \geq 0$ et $nx^2 \geq 0$, ce qui conclut l'hérédité.

Exercice 9

On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$, et

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Donner une expression explicite pour u_n .

Solution de l'exercice 9

En regardant les premiers termes de la suite, on se rend compte que $u_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$. On remarque également que

$$u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_n + u_n = 2u_n$$

pour $n \geq 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $u_1 = u_0 = 1 = 2^{1-1}$

Hérédité : Supposons que pour un $n \geq 1$, on a $u_n = 2^{n-1}$. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

comme voulu.

Exercice 10

On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$, et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n.$$

Solution de l'exercice 10

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $1^2 - 2 \times 1 = -1 = (-1)^1$.

Hérédité : Supposons qu'on ait $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$ pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = F_{n+1}^2 - (F_n + F_{n+1})F_n = F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^n$$

comme espéré.

Exercice 11

Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Solution de l'exercice 11

Cet exercice est encore plus vicieux, puisqu'il propose une hypothèse de récurrence, mais que celle-ci n'est pas la bonne, puisqu'on aurait du $2 + \frac{1}{(n+1)^2}$ dans l'hérédité, ce qui poserait problème. On va donc montrer quelque chose de plus fort que ce qu'on doit montrer pour pouvoir y arriver par récurrence. On va montrer que la somme en question est en fait plus petite que $2 - \frac{1}{n}$.

Initialisation : On a bien $\frac{1}{1^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$.

Hérédité : Supposons qu'on ait

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} \leq 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

comme espéré.

Exercice 12

Trouver toutes les suites (a_n) de réels strictement positifs telles que

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

Solution de l'exercice 12

En se rappelant de la formule de l'exercice 3, on se doute qu'on devra avoir $a_n = n$ pour tout n . On le montre donc par récurrence!

Initialisation : On doit avoir $a_1^3 = a_1^2$, donc comme $a_1 \neq 0$, on a $a_1 = 1$.

Hérédité : Supposons que $a_k = k$ pour tout $k \leq n$ pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + 2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + a_{n+1}^2.$$

Ainsi, on doit avoir

$$a_{n+1}^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1})^2 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = 2a_{n+1}(a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1}^2.$$

En remplaçant dans cette expression les valeurs de $a_1, \dots, a_n$, on trouve

$$a_{n+1}^2(a_{n+1} - 1) = 2a_{n+1} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right),$$

et en divisant par a_{n+1} , $a_{n+1}(a_{n+1} - 1) = n(n+1)$. $f(x) = x(x-1)$ étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$, notre équation admet au plus une solution, mais on sait que $a_{n+1} = n+1$ en est une! On doit donc avoir $a_{n+1} = n+1$, ce qui conclut l'hérédité, et cette preuve.

7 Algèbre : Inégalités 2 (Camille)

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Cas $n = 3$: Soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 des réels. On a :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Cas général : Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On a :

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + \dots + b_n^2)$$

Il y a égalité lorsque tous les b_i sont nuls, ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $a_i = \lambda b_i$ pour tout i .

Théorème 2 (Inégalité des mauvais élèves).

Cas $n = 3$: Soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 des réels. On a :

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3} \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3}$$

Cas général : Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des réels. On a :

$$\frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n} \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n}$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\frac{a_i}{b_i} = \lambda$ pour tout i entre 1 et n .

Exercices

Exercice 1

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ et donner les cas d'égalité.

Exercice 2 (Inégalité arithmético-quadratique)

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a + b + c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 3 (Inégalité arithmético-harmonique)

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + \dots + a_n}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 4 (Lemme du tourniquet)

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que $ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2$ et donner les cas d'égalité.

Exercice 5

Soient a, b, c, d des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{4ab}{c+d} \leq \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d}$$

.

Exercice 6

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{1}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{9}{c+a} \geq \frac{18}{a+b+c}$$

Exercice 7

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 8

Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Montrer que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 9

Soient a, b, c des réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Quelle est la plus grande valeur que peut prendre $s = 2a - 6b + 4c$?

Exercice 10

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a^2}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{c^2}{a}\right) \geq (1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c)$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 11 (Shortlist JBMO A1 2023)

Soient a, b, c, d des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{2}{(a+b)(c+d) + (b+c)(a+d)} \leq \frac{1}{(a+c)(b+d) + 4ac} + \frac{1}{(a+c)(b+d) + 4bd}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 12 (JBMO A1 2024)

Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}$. Montrer que

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Exercice 13 (Shortlist JBMO A2 2022)

Soient x, y, z des réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 3$. Montrer que

$$\frac{x+3}{y+z} + \frac{y+3}{z+x} + \frac{z+3}{x+y} + 3 \geq 27 \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3}$$

Exercice 14 (Shortlist JBMO A1 2018)

Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x}{\sqrt{\sqrt[4]{y} + \sqrt[4]{z}}} + \frac{y}{\sqrt{\sqrt[4]{z} + \sqrt[4]{x}}} + \frac{z}{\sqrt{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}} \geq \frac{\sqrt[4]{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^7}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

On applique l'inégalité des mauvais élèves :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1} &\geq \frac{(a+b+c)^2}{1+1+1} \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 2

On applique l'inégalité des mauvais élèves :

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^2}{3+3+3} &\leq \frac{a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{9} &\leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} &\leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3

On applique l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{1^2}{a_1} + \dots + \frac{1^2}{a_n} \leq \frac{(1 + \dots + 1)^2}{a_1 + \dots + a_n} = \frac{n^2}{a_1 + \dots + a_n}$$

Solution de l'exercice 4

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (b^2 + c^2 + a^2) &\geq (ab + bc + ca)^2 \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 &\geq (ab + bc + ca)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca \end{aligned}$$

car tout est positif.

Solution de l'exercice 5

On applique d'abord l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d} \geq \frac{(a+b)^2}{c+d} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c+d}$$

Or d'après l'IAG, on a : $a^2 + b^2 \geq 2ab$. On a donc $\frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c+d} \geq \frac{4ab}{c+d}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6

On applique l'inégalité des mauvais élèves :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+b} + \frac{4}{b+c} + \frac{9}{c+a} &= \frac{1}{a+b} + \frac{2^2}{b+c} + \frac{3^2}{c+a} \\ &\geq \frac{(1+2+3)^2}{2(a+b+c)} \\ &= \frac{36}{2(a+b+c)} \\ &= \frac{18}{a+b+c} \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7

On applique d'abord l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c) + (b+c)(b+a) + (c+a)(c+b)}$$

L'exercice revient alors à montrer que

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(a+c) + (b+c)(b+a) + (c+a)(c+b)} &\geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow 4(a+b+c)^2 &\geq 3(a+b)(a+c) + (b+c)(b+a) + (c+a)(c+b) \\ \Leftrightarrow 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8ab + 8bc + 8ca &\geq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 9ab + 9bc + 9ca \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq ab + bc + ca \end{aligned}$$

ce qui est vrai d'après le lemme du tourniquet.

Solution de l'exercice 8

On applique d'abord l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3^2}{ab+bc+ca+3}$$

De plus, d'après le lemme du tourniquet :

$$ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \iff \frac{3^2}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{3^2}{a^2+b^2+c^2+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

car $a^2+b^2+c^2=3$ d'après l'énoncé.

Solution de l'exercice 9

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} (2a-6b+4c)^2 &\leq (a^2+b^2+c^2) \cdot (2^2+(-6)^2+3^2) \\ \iff s^2 &\leq 14 \cdot 56 \\ \iff s &\leq 28 \end{aligned}$$

On vérifie alors que ce maximum est bien atteint. On part du cas d'égalité de Cauchy-Schwarz : $\frac{a}{2} + \frac{b}{-6} + \frac{c}{4} = \lambda$ On a donc $a = 2\lambda$, $b = -6\lambda$ et $c = 4\lambda$

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= 14 \\ \iff 4\lambda^2+36\lambda^2+16\lambda^2 &= 14 \\ \iff 56\lambda^2 &= 14 \\ \iff \lambda^2 &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

En prenant $\lambda = \frac{1}{2}$ on a bien $s = 14$.

Solution de l'exercice 10

D'après l'inégalité des mauvais élèves : $\frac{1}{1} + \frac{a^2}{b} \geq \frac{(1+a)^2}{1+b}$, et de même, $\frac{1}{1} + \frac{b^2}{c} \geq \frac{(1+b)^2}{1+c}$ et $\frac{1}{1} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(1+c)^2}{1+a}$ On a alors :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{a^2}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{c^2}{a}\right) &\geq \frac{(1+a)^2 \cdot (1+b)^2 \cdot (1+c)^2}{(1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c)} \\ &\geq (1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c) \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11

On utilise l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{1^2}{(a+c)(b+d)+4ab} + \frac{1^2}{(a+c)(b+d)+4cd} \geq \frac{(1+1)^2}{2(a+c)(b+d)+4ac+4bd}$$

Or

$$\begin{aligned} 2(a+c)(b+d)+4ac+4bd &= 2ac+2ad+2bc+2bd+2ab+2bd+2ca+2cd \\ &= 2((a+b)(c+d)+(b+c)(a+d)). \end{aligned}$$

Donc l'inégalité précédente se réécrit

$$\frac{1}{(a+c)(b+d)+4ab} + \frac{1}{(a+c)(b+d)+4cd} \geq \frac{2}{(a+b)(c+d)+(b+c)(a+d)}$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue. On a égalité si et seulement si $\frac{1}{(a+c)(b+d)+4ab} = \frac{1}{(a+c)(b+d)+4cd}$, donc si et seulement si $(a+c)(b+d)+4ab = (a+c)(b+d)+4cd$ i.e. si $ab = cd$.

Solution de l'exercice 12

Les racines étant peu attrayantes, on commence par faire une IAQ pour simplifier les dénominateurs.

Ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{a^2+b^2} \leq \sqrt{2} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right).$$

Il suffit donc de montrer que $(a+b)(b+c)(c+a) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \leq 1$, i.e. que

$$(a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) \leq 1.$$

Or

$$(a+b)(b+c) + (b+c)(c+a) + (c+a)(a+b) = a^2 + b^2 + c^2 + 3(ab + bc + ca) \leq 4(a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

par lemme du tourniquet ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13

Posons $s = x + y + z$, et soit L et R les membres de gauche et de droite de notre inégalité. On peut réécrire L comme

$$L = \frac{x+3}{y+z} + 1 + \frac{y+3}{z+x} + 1 + \frac{z+3}{x+y} + 1 = (s+3) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right).$$

Or, par l'inégalité des mauvais élèves

$$\left(\frac{1^2}{y+z} + \frac{1^2}{z+x} + \frac{1^2}{x+y} \right) \geq \frac{(1+1+1)^2}{y+z+z+x+x+y}.$$

On en déduit que $L \geq 9(s+3)/(2s)$.

En outre, l'inégalité arithmético-quadratique, appliquée aux termes $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{z}$, indique que

$$\frac{s}{3} \geq \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{3} \right)^2.$$

Ainsi, $(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \leq 3(x+y+z) = 3s$ et $R \leq 81/s^2$.

Pour montrer que $L \geq R$, il suffit donc de démontrer que $9(s+3) \times s^2 \geq 81 \times 2s$, c'est-à-dire que $s(s+3) \geq 18$, ou encore que $s \geq 3$. On conclut alors en utilisant le lemme du tourniquet, qui indique que

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 3(xy + yz + zx) \geq 9,$$

c'est-à-dire que $s \geq 3$.

Solution de l'exercice 14

Pour simplifier un peu les calculs posons $x = u^4$, $y = v^4$ et $z = w^4$, il suffit alors de montrer que

$$\frac{u^4}{\sqrt{v+w}} + \frac{v^4}{\sqrt{u+w}} + \frac{w^4}{\sqrt{u+v}} \geq \frac{(u^2 + v^2 + w^2)^{7/4}}{\sqrt{2\sqrt{27}}}$$

Ici les puissances quatrièmes ne nous arrangent pas, on préférerait avoir des carrés. Pour cela utilisons l'inégalité des mauvais élèves.

$$\frac{u^4}{\sqrt{v+w}} + \frac{v^4}{\sqrt{u+w}} + \frac{w^4}{\sqrt{u+v}} \geq \frac{(u^2 + v^2 + w^2)^2}{\sqrt{u+v} + \sqrt{v+w} + \sqrt{u+w}}$$

Il suffit alors de montrer que $\sqrt{u+v} + \sqrt{v+w} + \sqrt{u+w} \leq \sqrt{2\sqrt{27}}(u^2 + v^2 + w^2)^{1/4}$. Or par une succession d'inégalité arithmético-quadratique.

$$\sqrt{u+v} + \sqrt{v+w} + \sqrt{u+w} \leq \sqrt{3}\sqrt{u+v+v+w+u+w} = \sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{u+v+w}$$

$$\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{u+v+w} \leq \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{2}}(u^2 + v^2 + w^2)^{1/4} = \sqrt{2\sqrt{27}}(u^2 + v^2 + w^2)^{1/4}$$

ce qui donne bien le résultat voulu.

8 Arithmétique : Equations Diophantiennes (Akin)

Durant ce cours, nous avons passé en revue les différents réflexes à avoir lorsque l'on est confronté à une équation diophantienne : regarder les carrés modulo 3, 4 ou 8, les cubes modulo 7, 9 ou 13, étudier le pgcd, factoriser. Le principe de la descente infinie a également été traité. Enfin, il faut toujours veiller à bien vérifier les solutions que l'on obtient. Pour ces notions théoriques, on se réfère au chapitre sur les équations diophantiennes de l'intemporel polycopié d'arithmétique de la POFM : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_cours.pdf.

Exercices

Exercice 1

Trouver tous les entiers x et y tels que $x^2 = 13 + 9y^2$.

Exercice 2

Trouver tous les entiers naturels x, y tels que $2^x = y^2 + y + 1$.

Exercice 3

Trouver tous les triplets d'entiers (x, y, z) tels que $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$.

Exercice 4

Trouver tous les entiers naturels a, b tels que $a^2 + 1 = b!$.

Exercice 5

Trouver tous les entiers naturels m, n tels que $2^n + 1 = 7^m$.

Exercice 6

Trouver tous les couples d'entiers naturels (a, n) tels que $3^n + 1 = a^2$.

Exercice 7

Trouver tous les entiers naturels x, y, z tels que $x^4 + y^4 = 4z^4$.

Exercice 8

Trouver tous les couples d'entiers naturels (m, p) où p est un nombre premier et $m^3 = p^2 - 8$.

Exercice 9

Trouver tous les entiers naturels x, n tels que $7^n = x^2 + 1$.

Exercice 10

Trouver tous les entiers naturels x, n tels que $3 \times 2^x + 4 = n^2$.

Exercice 11

Trouver tous les entiers naturels a et b tels que $2^a - 3^b = 7$.

Exercice 12

Déterminer tous les entiers naturels non nuls a, b et c pour lesquels il existe des entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x! = ab + 1$, $y! = bc + 1$ et $z! = ca + 1$.

Exercice 13

Trouver tous les triplets d'entiers x, y et z tels que $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$

Exercice 14

Trouver tous les couples d'entiers (a, b) tels que $2^{a^2} = b^3 + 11$.

Solution de l'exercice 1

Quitte à remplacer x par $-x$ et y par $-y$, supposons que x et y soient des entiers naturels vérifiant $x^2 = 13 + 9y^2$. On a alors $13 = x^2 - 9y^2 = (x - 3y)(x + 3y)$. Le second facteur est positif, donc le premier également. De plus, le premier facteur est plus petit que le premier. Puisque 13 est un nombre premier, cela implique que $x - 3y = 1$ et $x + 3y = 13$. En sommant on trouve $x = 7$, puis $y = 2$. Le couple $(7, 2)$ et ses variantes $(-7, 2)$, $(-7, -2)$, $(7, -2)$ sont bien solutions après vérification, donc ce sont les seules.

Solution de l'exercice 2

Lorsque $x \geq 1$, le membre de gauche est pair alors que le membre de droite est impair, donc il n'y a pas de solution. En effet, $y^2 + y = y(y + 1)$ est toujours pair, donc $y^2 + y + 1$ est impair. Lorsque $x = 0$, on trouve que $y = 0$ convient. La seule solution est donc $(0, 0)$.

Solution de l'exercice 3

Clairement, $(0, 0, 0)$ est une solution. Montrons que c'est la seule ; pour cela, nous allons procéder par descente infinie. Une solution (x, y, z) d'entiers satisfait $3 \mid x^3$, donc $3 \mid x$ et par suite $27 \mid x^3$. Ensuite, 9 divise tous les termes sauf $3y^3$, donc divise également $3y^3$. Cela nous indique que $3 \mid y$, puis $27 \mid y^3$. Enfin, tous les termes sauf $9z^3$ sont divisibles par 27, donc $9z^3$ également. Il en découle que $3 \mid z$. Le triplet $(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3})$ est donc constitué d'entiers, et vérifie clairement l'équation. Ainsi, dès que (x, y, z) est une solution entière, $(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3})$ est également une solution entière. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution entière $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, avec, par exemple, $x \neq 0$ (le raisonnement est identique si $y \neq 0$ ou $z \neq 0$), de sorte que $|x| > 0$. On sait que $(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3})$ est également une solution entière, et $|x/3| < |x|$. En continuant indéfiniment, on obtient une suite $|x| > |x/3| > |x/9| > \dots$ strictement décroissante d'entiers positifs. C'est absurde, donc $(0, 0, 0)$ est bien la seule solution.

Solution de l'exercice 4

Si $b = 0$ ou 1, alors seul $a = 0$ convient. Les couples $(0, 0)$ et $(0, 1)$ sont solutions.

Si $b = 2$, seul $a = 1$ convient. Le couple $(1, 2)$ est solution.

Si $b \geq 3$, alors $b! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots$ est divisible par 3. Il en découle que $a^2 \equiv -1 \pmod{3}$, ce qui est impossible : les carrés ne valent que 0 ou 1 modulo 3. Ainsi, il n'y a pas de solution lorsque $b \geq 3$.

Finalement, les solutions sont $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 2)$.

Solution de l'exercice 5

On a $2^n + 1 > 1$, donc $m \neq 0$. En particulier, $7 \mid 7^m = 2^n + 1$, donc $2^n \equiv -1 \pmod{7}$. Cependant, les puissances de 2 valent 1, 2, 4, 1, 2 et ainsi de suite modulo 7, et ne valent donc jamais -1 . Dès lors, il n'y a aucune solution.

Solution n°2 de l'exercice 5

En regardant modulo 3, on trouve $2^n + 1 \equiv 1 \pmod{3}$, donc $3 \mid 2^n$. Cette divisibilité est impossible, donc il n'y a pas de solution.

Solution de l'exercice 6

On remarque que le couple $(2, 1)$ est solution ; montrons que c'est le seul. Soit (a, n) un couple

solution. On a $3^n = a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$. On sait que $a + 1$ est strictement positif, donc $a - 1$ également. Puisque 3 est un nombre premier, le seul facteur premier qui peut diviser $a - 1$ ou $a + 1$ est 3. Ainsi, $a - 1$ et $a + 1$ sont tous les deux des puissances de 3. Si $a > 2$, alors $a - 1 > 1$ et donc $3 \mid a - 1$. De même, $a + 1 > 1$ donc $3 \mid a + 1$. En effectuant la différence on trouve $3 \mid 2$, absurde. Sinon, $a = 2$ puis $n = 1$.

Solution de l'exercice 7

Le triplet $(0, 0, 0)$ est clairement solution. Montrons que c'est la seule solution naturelle. Soit (x, y, z) une solution avec $x, y, z \in \mathbb{N}$. On a $4 \mid x^4 + y^4$. Puisque x^4 et y^4 sont tous les deux des carrés, on sait qu'ils valent chacun 0 ou 1 modulo 4. Pour qu'ils somment à 0 modulo 4, c'est qu'ils valent chacun 0 modulo 4. Les naturels x^4 et y^4 sont pairs, donc x et y également. On trouve alors que $16 \mid x^4 + y^4 = 4z^4$, de sorte que $4 \mid z^4$. On sait alors que z est pair. Ainsi, le triplet $(x/2, y/2, z/2)$ est également composé de naturels, et on vérifie qu'il est également solution. Ainsi, dès que (x, y, z) est une solution naturelle, $(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2})$ est également une solution naturelle. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution naturelle avec $z > 0$. Alors il existe une solution naturelle avec $0 < z/2 < z$, puis une solution naturelle avec $0 < z/4 < z/2 < z$, et ainsi de suite. En continuant ce processus indéfiniment, on obtient une suite strictement décroissante d'entiers positifs, contradiction. Ainsi, toute solution naturelle admet $z = 0$, donc $x^4 + y^4 = 0$ et par suite $x = y = 0$ également. Cela conclut.

Solution de l'exercice 8

Soit (m, p) un couple solution. On a $p^2 = m^3 + 8 = (m + 2)(m^2 - 2m + 4)$. Les deux facteurs sont strictement plus grands que 1. Puisqu'ils divisent p^2 et leur produit vaut exactement p^2 , ils sont tous les deux égaux à p . On a donc $p = m + 2 = m^2 - 2m + 4$, d'où $(m - 1)(m - 2) = 0$ et donc $m \in \{1, 2\}$. Si $m = 2$ on trouve $p = 4$ qui n'est pas un nombre premier. Si $m = 1$, alors on vérifie que $p = 3$ convient dans l'équation initiale. Finalement $(1, 3)$ est la seule solution naturelle.

Solution de l'exercice 9

Si $n = 0$, alors seul $x = 0$ convient. Sinon, $n \geq 1$ et $7 \mid 7^n = x^2 + 1$. Autrement dit, $x^2 \equiv -1 \pmod{7}$. Cependant, les carrés modulo 7 sont 0, 1, 2 et 4, donc $x^2 \equiv -1 \pmod{7}$ n'a pas de solution. La seule solution est donc $(0, 0)$.

Solution n°2 de l'exercice 9

En regardant modulo 4, on sait $x^2 \in \{0, 1\}$ donc $x^2 + 1 \in \{1, 2\}$ modulo 4. Cependant, 7^n est impair, donc ne peut valoir 2 modulo 4. On a donc $1 \equiv 7^n \equiv (-1)^n \pmod{4}$, d'où n est pair. Soit $n = 2m$, avec $m \in \mathbb{N}$. On a alors $x^2 = 7^{2m} - 1 = (7^m - 1)(7^m + 1)$. Ces deux facteurs sont pairs, donc $4 \mid x^2$. Il en découle que $\frac{7^m - 1}{2} \times \frac{7^m + 1}{2}$ est un produit de deux entiers consécutifs qui est un carré d'entier, puisqu'il est égal à $(\frac{x}{2})^2$. Deux entiers consécutifs sont premiers entre eux, donc chacun des deux facteurs doit être un carré. Les seuls carrés consécutifs sont 0 et 1, donc ils valent 0 et 1 dans un certain ordre. Mais $\frac{7^m - 1}{2} < \frac{7^m + 1}{2}$, donc $\frac{7^m - 1}{2} = 0$, ou encore $m = 0$. On retrouve ensuite $x = 0$, de sorte que $(0, 0)$ soit la seule solution.

Solution de l'exercice 10

Cette solution est tirée du corrigé de l'envoi d'arithmétique 2021-2022.

Pour $x = 0$, l'équation devient $n^2 = 7$ qui n'a pas de solution. Supposons $x > 0$, on factorise : $3 \cdot 2^x = (n - 2)(n + 2)$. Le membre de gauche est pair donc le membre de droite est pair. Les deux facteurs du membre de droite sont de même parité donc ils sont tous les deux pairs et on a deux cas :

▷ Cas 1 : $3 \cdot 2^a = n - 2$ et $2^b = n + 2$, avec $a + b = x$. On peut combiner ces deux équations pour

trouver $2^b = 3 \cdot 2^a + 4$. Notons que $n + 2$ et $n - 2$ ont pour différence 4 donc ils ne peuvent pas être tous les deux divisibles par 8. On a donc $a \leq 2$ ou $b \leq 2$. Or $2^b > 4$, donc $b > 2$ et on déduit que $a \leq 2$. Si $a = 0$, $2^b = 3 + 4 = 7$ ce qui n'est pas possible. Si $a = 1$, $2^b = 6 + 4 = 10$ ce qui n'est pas possible non plus. Si $a = 2$, alors $2^b = 12 + 4 = 16$ donc $b = 4$. On obtient $x = 6$ et $n = 14$. réciproquement, on vérifie que $3 \cdot 2^6 + 4 = 196 = 14^2$ et le couple $(6, 14)$ est bien solution.

▷ Cas 2 : $3 \cdot 2^a = n + 2$ et $2^b = n - 2$, avec $a + b = x$. Les deux équations combinées donnent $2^b + 4 = 3 \cdot 2^a$. De même que précédemment, on a $a \leq 2$ ou $b \leq 2$.

Si $b \leq 2$, alors $b = 0, 1$ ou 2 . Si $b = 0$, alors $5 = 3 \cdot 2^a$ ce qui n'est pas possible. Si $b = 1$, $6 = 3 \cdot 2^a$ et $a = 1$, soit $x = 2$ et $n = 4$ et on vérifie que $3 \cdot 2^2 + 4 = 16 = 4^2$ et $(2, 4)$ est bien solution. Si $b = 2$, alors $8 = 3 \cdot 2^a$ ce qui n'est pas possible.

Si $a \leq 2$, alors $a = 0, 1$ ou 2 . Si $a = 0$, $2^b + 4 = 3 < 4$ ce qui n'est pas possible. Si $a = 1$, on retombe sur le cas où $b = 1$ et sur le couple $(2, 4)$. Si $a = 2$, $2^b + 4 = 12$ donc $b = 3$. Ceci donne $x = 5$ et $n = 10$. Réciproquement, on vérifie que $3 \cdot 2^5 + 4 = 100 = 10^2$ et $(5, 10)$ est bien solution. Ainsi l'ensemble des couples (x, n) solutions est $\{(2, 4), (5, 10), (6, 14)\}$.

Solution de l'exercice 11

Cette solution est tirée du cours d'équations diophantiennes donné par Amélie à Valbonne en 2024.

On suppose $b \geq 1$. En regardant modulo 3, on obtient $2^a \equiv 1 \pmod{3}$, donc a est pair. De plus, $a \geq 3$ (car $2^a > 7$) donc en regardant modulo 4 on a $-3^b \equiv -1 \pmod{4}$ donc b est pair. En notant $a = 2x$ et $b = 2y$, on a $(2^x - 3^y)(2^x + 3^y) = 7$ d'où comme le second terme est positif et 7 est premier : $2^x - 3^y = 1$ et $2^x + 3^y = 7$. On obtient alors $2^x = 4$ et $3^y = 3$, soit $a = 4$ et $b = 2$. Si $b = 0$, $a = 3$ fonctionne.

Solution de l'exercice 12

Cette solution est tirée du cours d'équations diophantiennes donné par Gaspard et Théo à Valbonne en 2023.

Soit (a, b, c) un triplet solution éventuel, et (x, y, z) donnés par l'énoncé. Sans perte de généralité, et puisque x, y et z jouent des rôles symétriques, on suppose que $x \leq y \leq z$. Regardons modulo 3. Pour cela supposons que $x \geq 3$. Dans ce cas, $ab \equiv -1 \equiv bc \equiv ca \pmod{3}$. En particulier, 3 ne divise ni a ni b ni c : a, b, c valent 1 ou $-1 \pmod{3}$. Par principe des tiroirs, deux éléments sont alors égaux $\pmod{3}$. Par symétrie, on peut supposer que a et b sont égaux modulo 3. On a donc $ab \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \cdot -1 \pmod{3}$ ce qui est absurde. Ainsi, x vaut 1 ou 2, donc $ab + 1$ vaut 1 ou 2, donc ab vaut 0 ou 1. D'après l'énoncé, on en déduit donc que $a = b = 1$ et $x = 1$, et $c = z! - 1$. Ainsi à permutation près $(a, b, c) = (1, 1, z! - 1)$. Réciproquement, si (a, b, c) vaut à permutation près un triplet de la forme $(1, 1, t! - 1)$, à permutation près $(ab + 1, bc + 1, ac + 1)$ vaut $(2!, t!, t!)$.

Solution de l'exercice 13

On remarque que $(0, 0, 0)$ est solution. On montre que c'est la seule : en regardant modulo 13, on obtient $5x^3 \equiv 2y^3 \pmod{13}$. Cependant, les cubes modulo 13 valent 0, 1, -1 , 5 ou -5 , donc $5x^3 \in \{0, 5, -5, -1, 1\}$ modulo 13 et $2y^3 \in \{0, 2, -2, 10, 3\}$ modulo 13. Ainsi, pour qu'ils soient égaux modulo 13, ils doivent tous les deux être nuls modulo 13. Autrement dit, $13 \mid x$ et $13 \mid y$. Mais alors $13^2 \mid 5x^3 + 11y^3 = -13z^3$, de sorte que $13 \mid z^3$ et donc $13 \mid z$. L'équation étant homogène, nous venons de démontrer que si (x, y, z) est une solution entière, alors $(\frac{x}{13}, \frac{y}{13}, \frac{z}{13})$ est également une solution entière. En suivant le principe de la descente infinie, on obtient alors que $(0, 0, 0)$ est bien le seul triplet solution de l'équation initiale.

Solution de l'exercice 14

Montrons qu'il n'y a pas de solution. Supposons par l'absurde que (a, b) soit solution. En regardant l'équation modulo 7, on sait que $b^3 \in \{0, 1, -1\}$ modulo 7 et donc $b^3 + 11 \in \{3, 4, 5\}$ modulo 7. Donc $2^{a^2} \in \{3, 4, 5\}$ modulo 7. Cependant, les puissances de 2 valent 1, 2, 4, 1, 2, 4, ... modulo 7. Ainsi, on a forcément $2^{a^2} \equiv 4 \pmod{7}$. Les entiers x tels que $2^x \equiv 4 \pmod{7}$ sont exactement les entiers congrus à 2 modulo 3 d'après notre observation précédente. Nous devons donc avoir $a^2 \equiv 2 \pmod{3}$, contradiction.

2 Entraînement de mi-parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 1

Trouver tous les n et p entiers naturels tels que p est premier et

$$n^3 = p + 1.$$

Exercice 2

Soit a, b et c des réels positifs tels que $abc + ab + ac + a = 27$. Démontrer que

$$a + b + c \geq 7.$$

Exercice 3

Démontrer que pour x, y, z strictement positifs

$$\frac{x^2 + 1}{y + z} + \frac{y^2 + 4}{z + x} + \frac{z^2 + 9}{x + y} \geq 6,$$

Y a-t-il égalité ?

Exercice 4

Trouver le plus petit entier $n \geq 0$ tel que la seule solution $(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}^4$ à l'équation

$$a^2 + b^2 + c^2 = nd^2$$

soit $(0, 0, 0, 0)$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

En passant le 1 de l'autre côté, on remarque que $n^3 - 1 = p$, ce qui se factorise en

$$(n - 1)(n^2 + n + 1) = p.$$

Si $n > 2$, alors p aurait deux facteurs strictement plus grands que 1, ce qui contredirait la définition d'un nombre premier. Donc $n \leq 2$. En testant les trois valeurs $n \in \{0, 1, 2\}$, on trouve que $(n, p) = (2, 7)$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 2

La condition se factorise en

$$a(b + 1)(c + 1) = 27.$$

Par l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à $a, b + 1, c + 1$, on trouve

$$a + (b + 1) + (c + 1) \geq 3\sqrt[3]{a(b + 1)(c + 1)} = 9.$$

En soustrayant 2 de chaque côté, le résultat en découle.

Solution de l'exercice 3

Les carrés au numérateur nous donnent envie d'appliquer l'inégalité des mauvais élèves. Mais pour cela, il faut d'abord écrire les fractions comme sommes de deux fractions, puis appliquer l'inégalité.

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 1}{y + z} + \frac{y^2 + 4}{z + x} + \frac{z^2 + 9}{x + y} &= \frac{x^2}{y + z} + \frac{1^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{2^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y} + \frac{3^2}{x + y} \\ &\geq \frac{(x + 1 + y + 2 + z + 3)^2}{(y + z) + (y + z) + (z + x) + (z + x) + (x + y) + (x + y)} \\ &= \frac{(x + y + z + 6)^2}{4(x + y + z)}. \end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer que

$$\frac{(x + y + z + 6)^2}{x + y + z} \geq 24.$$

On remarque que cette inégalité ne dépend que de la somme $S = x + y + z$. Or, on a

$$\frac{(S + 6)^2}{S} = \left(\sqrt{S} + \frac{6}{\sqrt{S}} \right)^2 \geq \left(2\sqrt{\sqrt{S} \cdot \frac{6}{\sqrt{S}}} \right)^2 = 24,$$

où l'inégalité utilisée est l'IAG en deux variables.

Étudions maintenant le cas d'égalité. Pour avoir égalité dans l'inégalité de départ, il faut en particulier qu'il y ait égalité dans l'inégalité des mauvais élèves. Il y a alors égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que

$$\frac{x}{y + z} = \frac{1}{y + z} = \frac{y}{z + x} = \frac{2}{z + x} = \frac{z}{x + y} = \frac{3}{x + y} = \lambda.$$

Cela implique $x = 1$, $y = 2$ et $z = 3$, et l'égalité

$$\frac{1}{y+z} = \frac{y}{z+x}$$

n'est alors pas vérifiée.

Solution de l'exercice 4

On va démontrer que la réponse est $n = 7$. Pour les n inférieurs, on trouve à chaque fois une solution non triviale.

- $\underline{n=0} : (0, 0, 0, 1);$
- $\underline{n=1} : (1, 0, 0, 1);$
- $\underline{n=2} : (1, 1, 0, 1);$
- $\underline{n=3} : (1, 1, 1, 1);$
- $\underline{n=4} : (2, 0, 0, 1);$
- $\underline{n=5} : (2, 1, 0, 1);$
- $\underline{n=6} : (2, 1, 1, 1).$

On va maintenant démontrer que l'équation pour $n = 7$ n'admet pas de solutions non nulles. Suivant le principe de la descente infinie, on suppose qu'il existe une solution (a, b, c, d) où les quatre entiers n'ont pas de diviseur premier commun. Alors en regardant modulo 8, l'équation devient

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \equiv 0 \pmod{8}.$$

Or les carrés modulo 8 ne peuvent que valoir 0, 1 ou 4. La seule façon d'obtenir 0 en additionnant quatre de ces trois chiffres est $0+0+0+0$, ce qui est impossible puisque cela impliquerait que 2 divise chacun de a, b, c, d . Cela conclut.

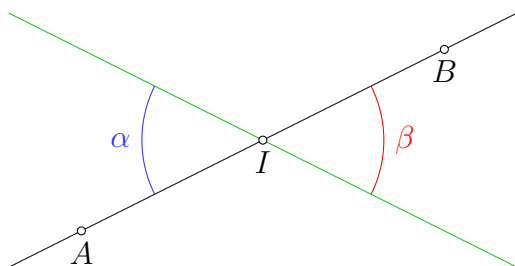
3 Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie

1 Géométrie : Chasse aux angles (Gabriel)

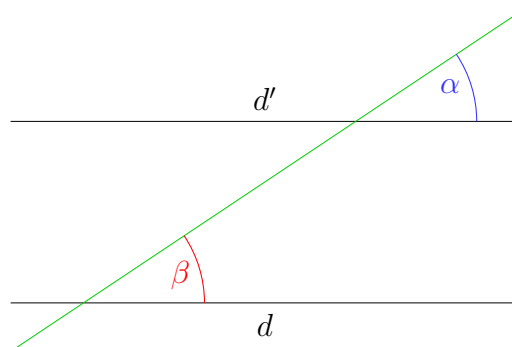
Quelques rappels

Ce cours reprend en bonne partie celui de Martin Rakovsky de l'an dernier.

Rappel 1 (Parallélisme et angles).

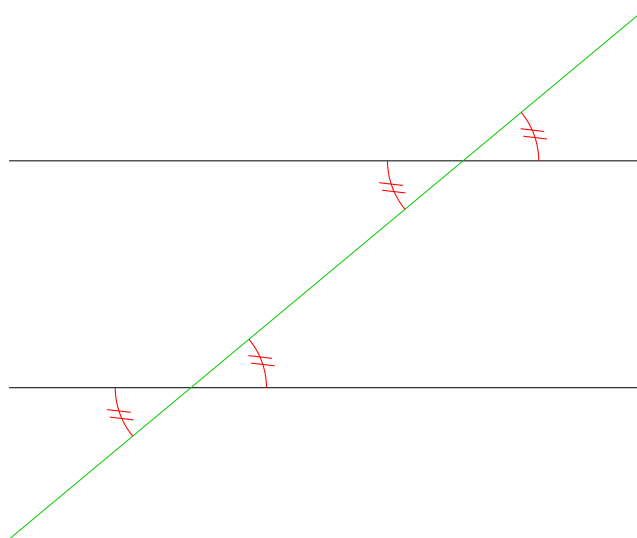


$$\beta = \alpha \Leftrightarrow (AI) = (IB)$$



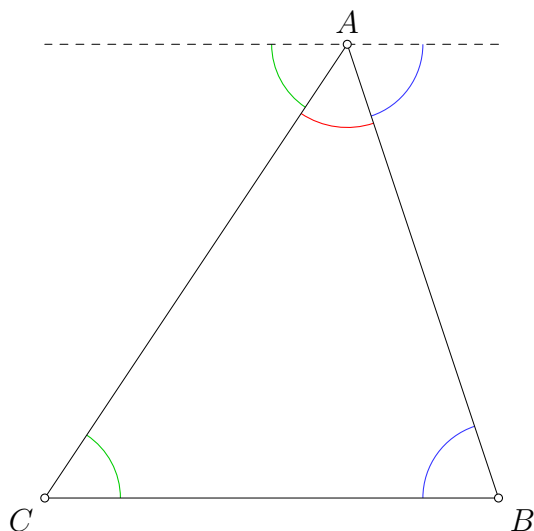
$$\beta = \alpha \Leftrightarrow d \parallel d'$$

Ainsi, quand on a deux droites parallèles et une sécante on a directement 4 angles égaux !



Rappel 2 (Somme des angles d'un triangle).

Pour montrer que la somme des angles du triangle ABC vaut 180° on trace la parallèle à (BC) passant par A .



$$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

Remarque 3.

Un quadrilatère (convexe) c'est deux triangles donc la somme de ses angles vaut 360° .

Exercice 1

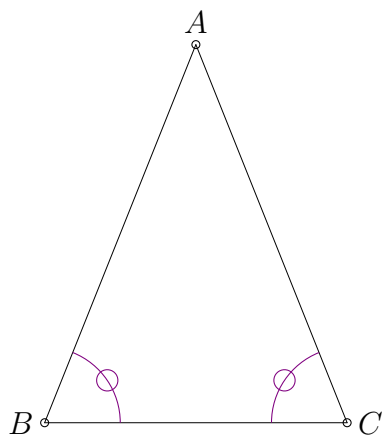
Que vaut la somme des angles d'un heptagone (7 côtés) convexe ?

Solution de l'exercice 1

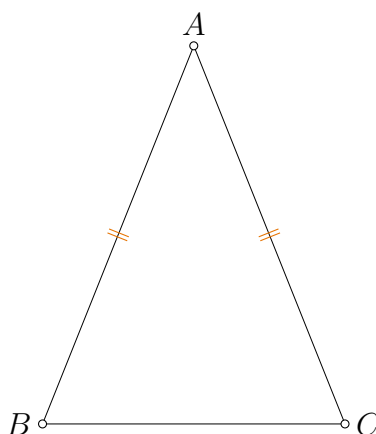
On obtient une telle figure avec 5 triangles donc la somme des angles vaut $5 \cdot 180 = 900^\circ$.

Rappel 4 (Triangles isocèles).

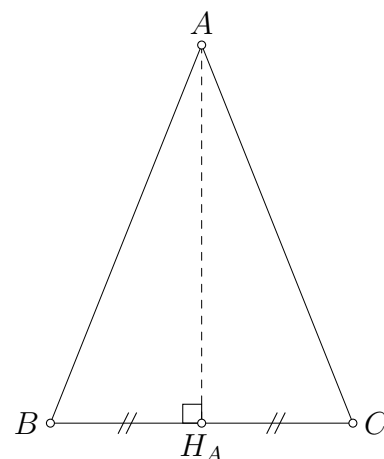
Les situations suivantes sont équivalentes :



$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$



$$AB = AC$$

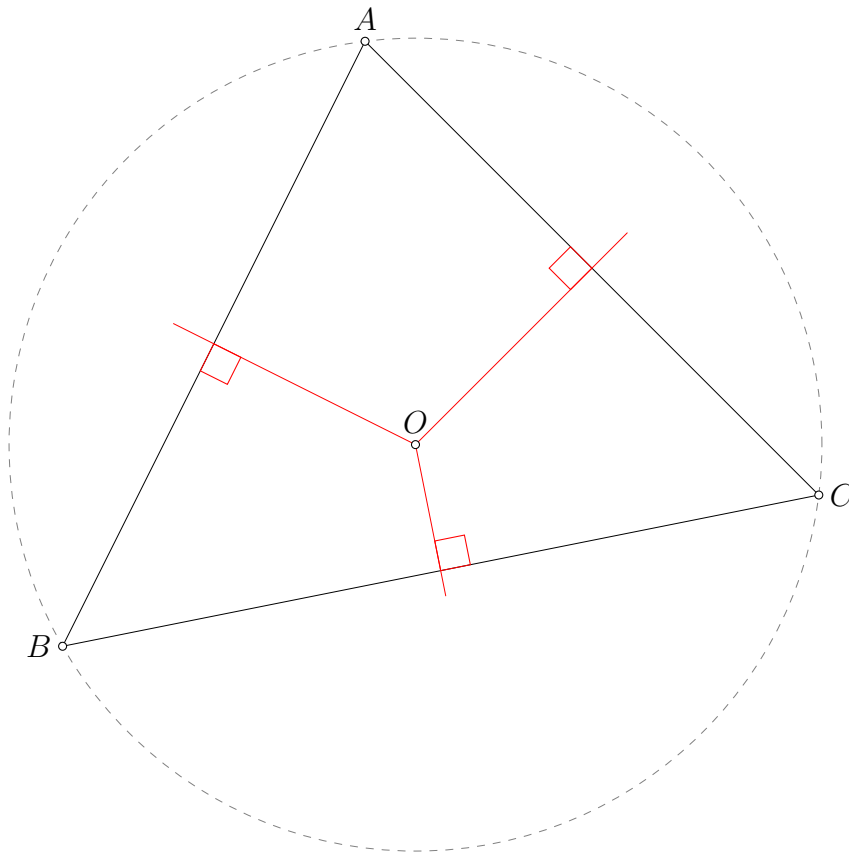


$$BH_A = H_AC$$

Certains points du triangles sont particulièrement importants, notamment :

Rappel 5 (Centre du cercle circonscrit).

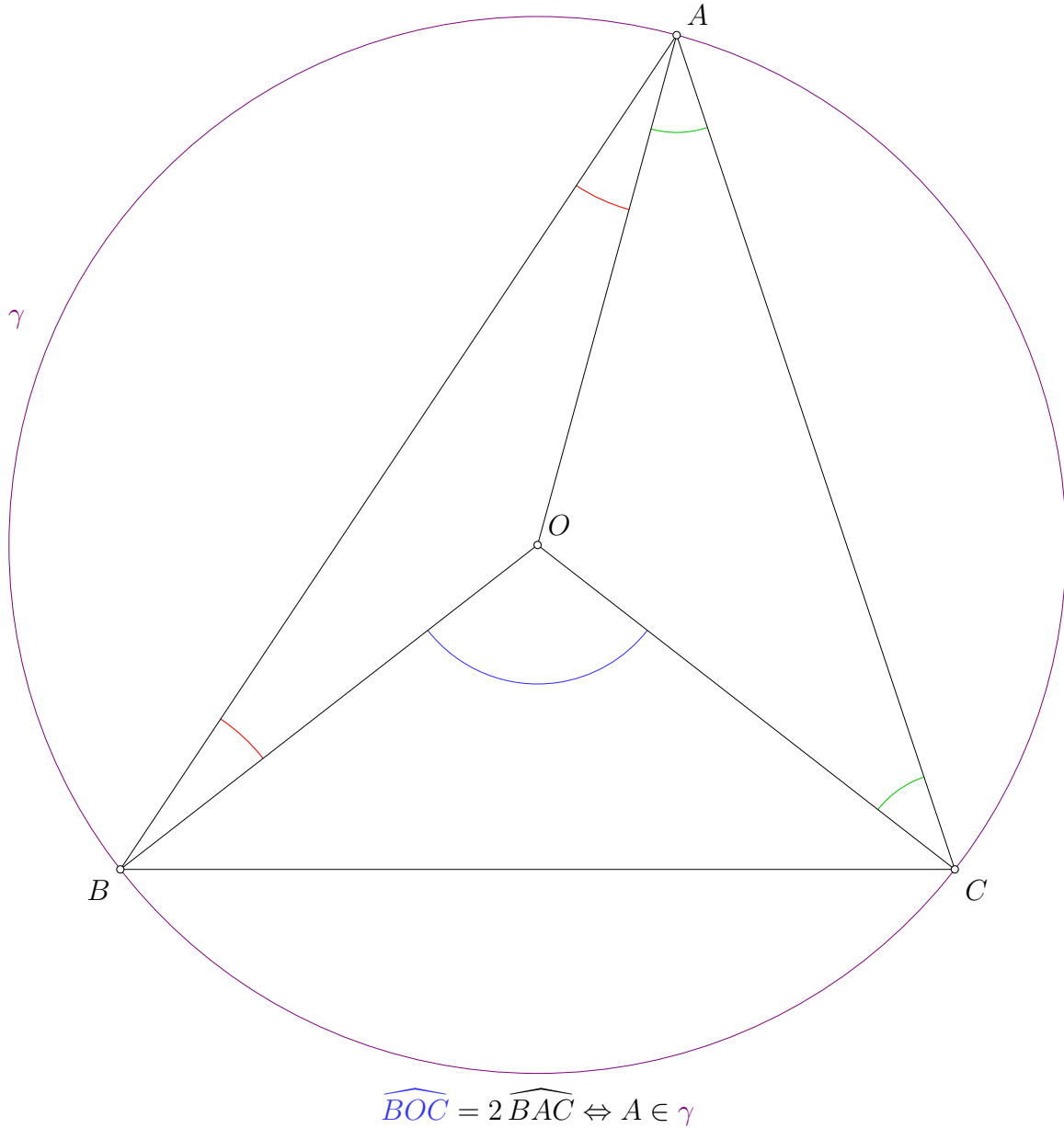
Les trois médiatrices d'un triangle s'intersectent un seul point, qui est le *centre de son cercle circonscrit* du triangle.



Démonstration. La médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points à égal distance de A et B , de même pour la médiatrice de $[BC]$. Donc l'intersection O des deux médiatrices est à égal distance de A , B et C , et elle est ainsi sur la troisième médiatrice. $\square$

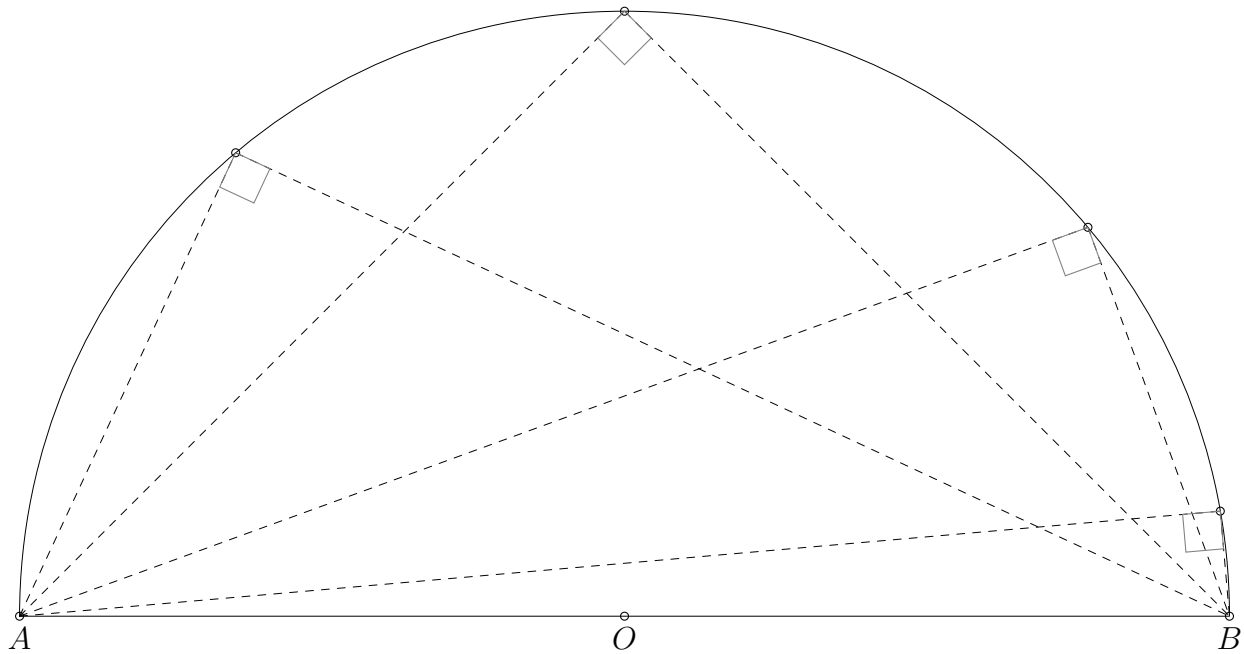
Géométrie dans le cercle**Théorème 6** (Angle au centre).

Si A et O sont du même côté de (BC) alors on a l'équivalence

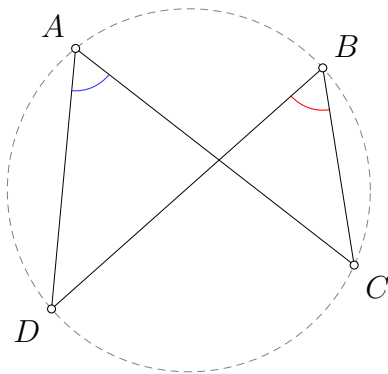


Démonstration. Montrons que si O est le centre du cercle circonscrit de ABC alors on a l'égalité d'angles. D'abord AOB est isocèle en O , de même que COA . Ainsi $\widehat{BOC} = 360 - \widehat{AOB} - \widehat{COA} = 360 - (180 - 2\widehat{BAO}) - (180 - 2\widehat{OAC}) = 2\widehat{BAC}$. Réciproquement supposons l'égalité d'angles, et A' intersection de (BA) et de γ . On montre que $A = A'$. En effet, par le sens direct on a $\widehat{BA'C} = \widehat{BOC}/2 = \widehat{BAC}$. Les droites (AC) et $(A'C)$ sont donc parallèles mais elles se coupent (en C)! Elles sont donc confondues et ainsi $A = A'$ donc $A \in \gamma$. $\square$

Corollaire 7 (Pour les angles droits).

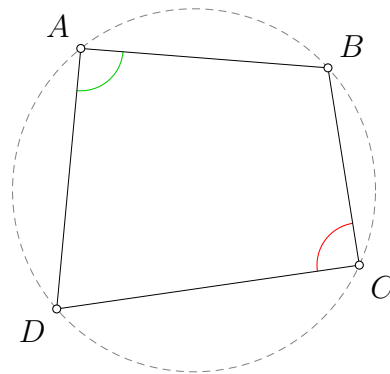
**Définition 8** (Cocyclicité).

Des points sur un même cercle sont dits *cocycliques*. Pour une figure comme un quadrilatère on dira simplement qu'elle est *cyclique*.

Théorème 9 (Angles inscrits, angles opposés).

$$\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$$

$\Leftrightarrow A, B, C \text{ et } D \text{ cocycliques}$



$$\widehat{DAB} = 180^\circ - \widehat{DCB}$$

$\Leftrightarrow A, B, C \text{ et } D \text{ cocycliques}$

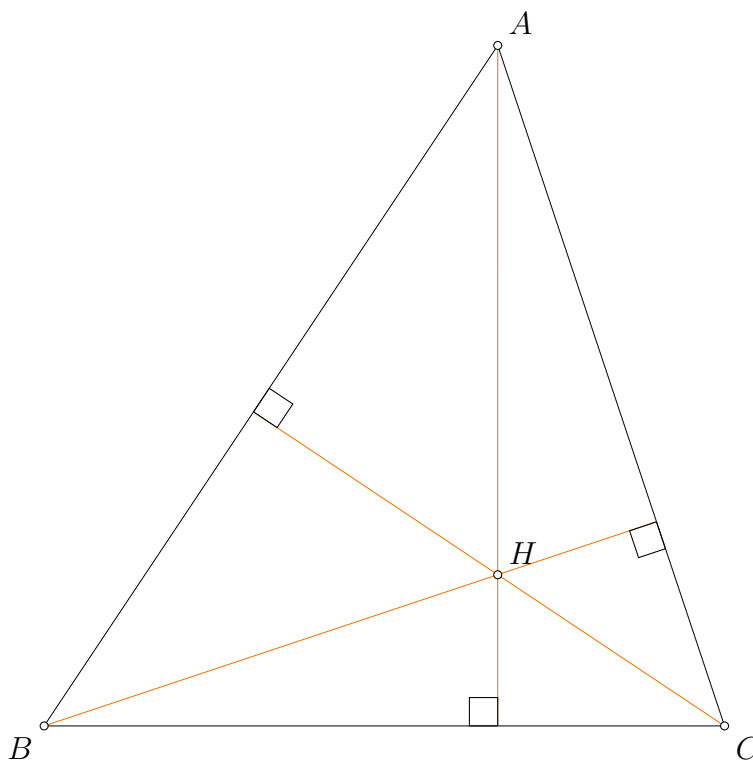
Démonstration. Le théorème de l'angle inscrit se déduit directement du théorème de l'angle au centre. Pour les angles opposés il suffit d'introduire A' diamétralement opposé à A et d'utiliser le théorème de l'angle inscrit et le corollaire précédent. $\square$

D'autres petits rappels

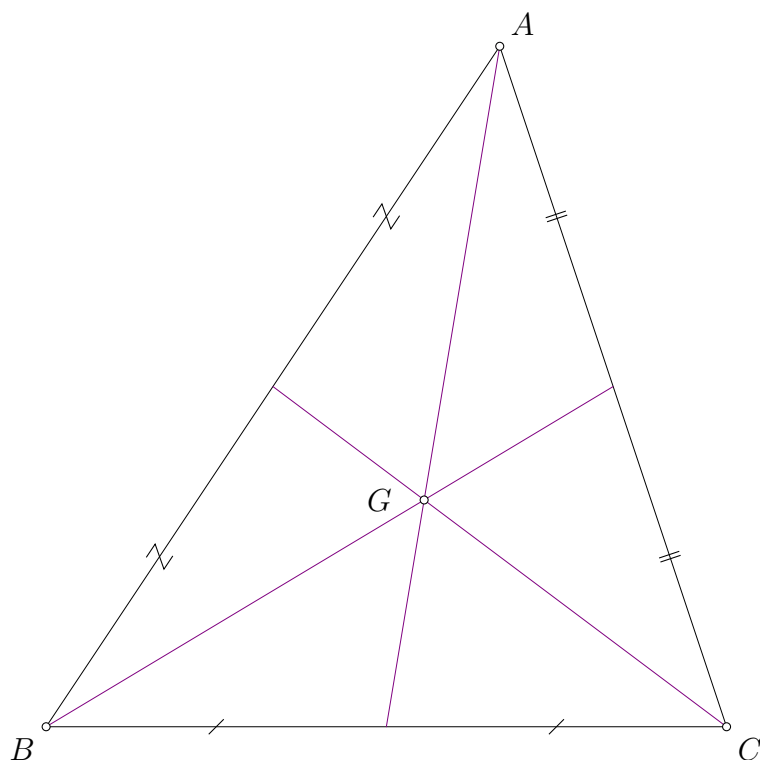
Nous avons déjà un peu parlé du centre du cercle circonscrit. Présentons deux autres points remarquables du triangle. Les preuves sortent du cadre de ce cours et n'ont pas donc pas été présentées.

Rappel 10 (Orthocentre).

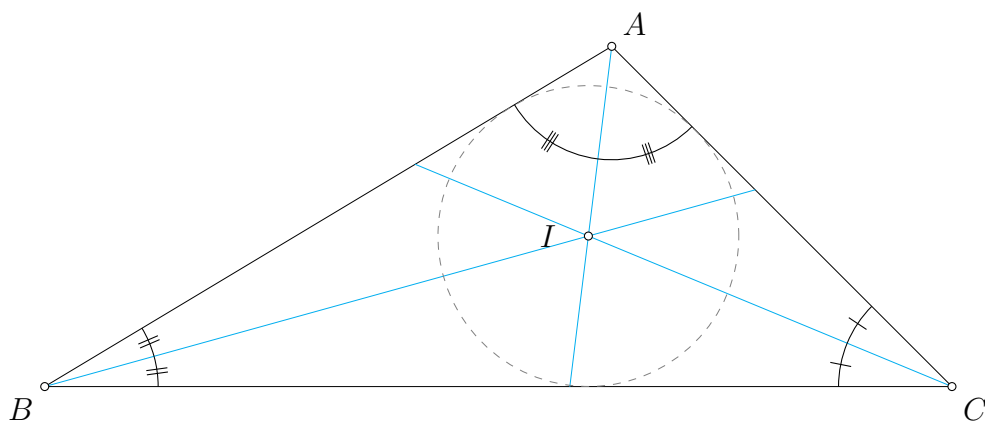
Les trois hauteurs d'un triangle s'intersectent un seul point, appelé son *orthocentre*.

**Rappel 11 (Centre de gravité).**

Les trois médianes d'un triangle s'intersectent à leur deux-tiers en un seul point, appelé son *centre de gravité*.

**Rappel 12.**

Les trois bissectrices d'un triangle s'intersectent en un seul point, le *centre du cercle inscrit* du triangle.



Exercices

Exercice 2

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points distincts A et B . Une droite passant par le point A recoupe le cercle Γ_1 en un point C et le cercle Γ_2 en un point D . Une droite passant par le point B recoupe le cercle Γ_1 en un point E et le cercle Γ_2 en un point F . Montrer que les droites (CE) et (DF) sont parallèles.

Exercice 3

Soient ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent respectivement aux points P et Q . Une droite ℓ coupe les cercles ω_1 et ω_2 respectivement aux points A, C et B, D de telle sorte que les points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre. Montrer qu'on a $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 4 (Théorème de Miquel)

Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de points A et C sur la droite (BD) . Soient B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de points B et D sur la droite (AC) . Montrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Exercice 7

Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $\widehat{BAC} = 60^\circ$. On note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et I le centre du cercle inscrit du triangle ABC . Montrer que B, I, O, H et C sont cocycliques.

Exercice 8

Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles de sommets A et B rencontrent les côtés BC et AC respectivement en D et E . Soit F la projection orthogonale de C sur BE et G la projection orthogonale de C sur AD . Montrer que (FG) et (AB) sont parallèles.

Exercice 9

Soit Γ un cercle de centre O et $ABCD$ quatre points sur Γ . Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ s'intersectent en P . Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP s'intersectent en Q . Montrer que l'angle $\widehat{OQP}$ est droit.

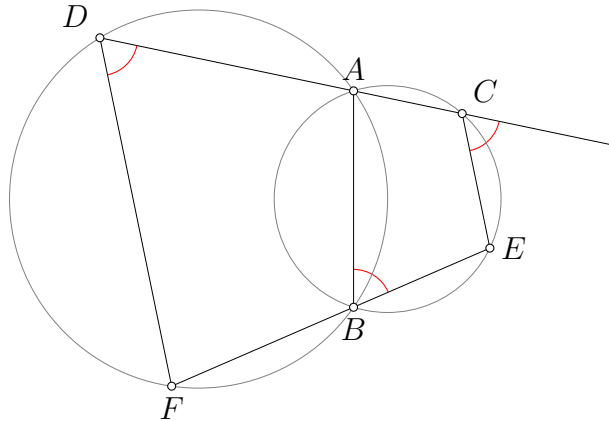
Exercice 10 (EGMO 2022 P1)

Soit ABC un triangle dans lequel $BC < AB$. Soit P un point distinct de B sur le segment $[AB]$ et Q un point distinct de C sur le segment $[AC]$ tels que $BQ = BC = CP$. Soit T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ , H l'orthocentre du triangle ABC et S le point d'intersection des droites (BQ) et (CP) . Montrer que les points T, H et S sont alignés.

Solutions**Exercice 2**

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points distincts A et B . Une droite passant par le point A recoupe le cercle Γ_1 en un point C et le cercle Γ_2 en un point D . Une droite passant par le point B recoupe le cercle Γ_1 en un point E et le cercle Γ_2 en un point F . Montrer que les droites (CE) et (DF) sont parallèles.

Solution de l'exercice 2 (Antiparallèles)



Les points A, B, F et D sont cocycliques donc

$$\widehat{FDA} = 180^\circ - \widehat{FBA} = \widehat{EBA}$$

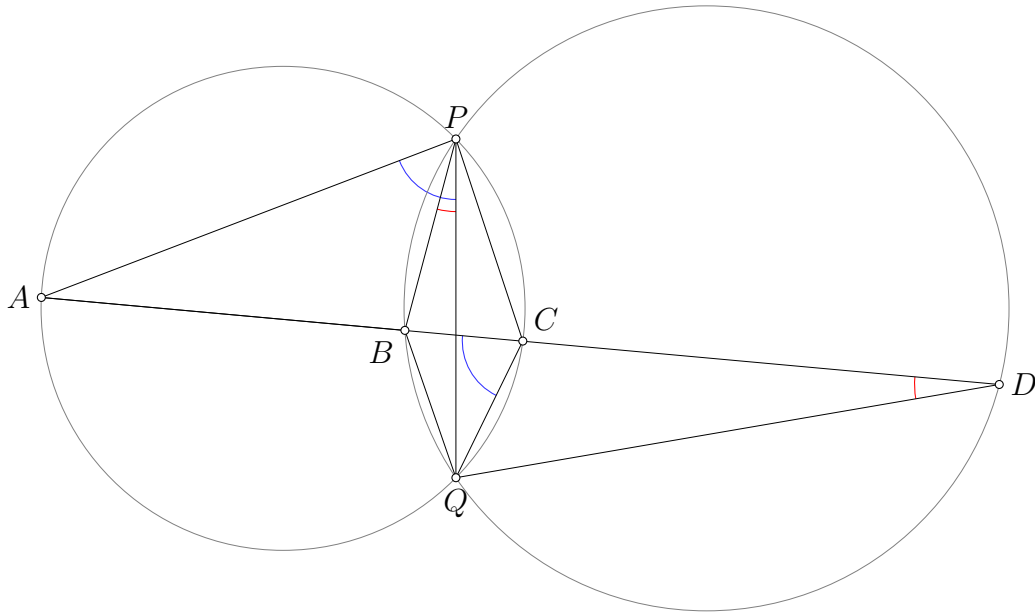
Les points A, B, E et C sont cocycliques donc

$$\widehat{ABE} = 180^\circ - \widehat{ECA}$$

On obtient donc que $\widehat{FDA} = 180^\circ - \widehat{ACE}$, ce qui signifie que les droites (DF) et (CE) sont parallèles.

Exercice 3

Soient ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent respectivement aux points P et Q . Une droite ℓ coupe les cercles ω_1 et ω_2 respectivement aux points A, C et B, D de telle sorte que les points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre. Montrer qu'on a $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Solution de l'exercice 3

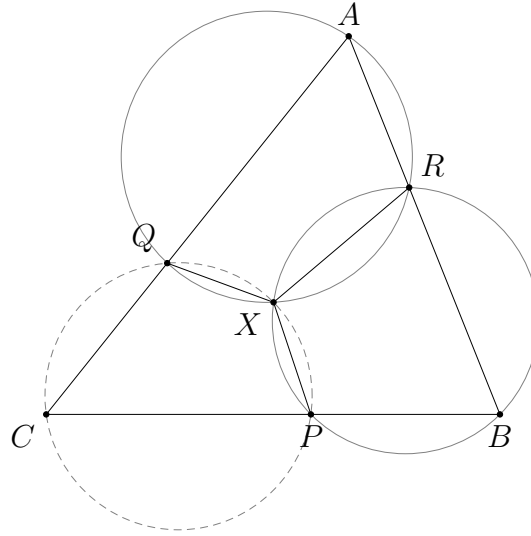
On vérifie que d'après le théorème de l'angle inscrit pour les quadrilatères cycliques $APCQ$ et $PBQD$:

$$\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = \widehat{ACQ} - \widehat{BDQ} = \widehat{CQD}$$

où la dernière égalité provient du fait que la somme des angles du triangle CQD vaut 180° .

Exercice 4 (Théorème de Miquel)

Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Solution de l'exercice 4

On appelle X le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AQR et BRP . Il s'agit de montrer que le point X appartient au cercle circonscrit du triangle CPQ . Or :

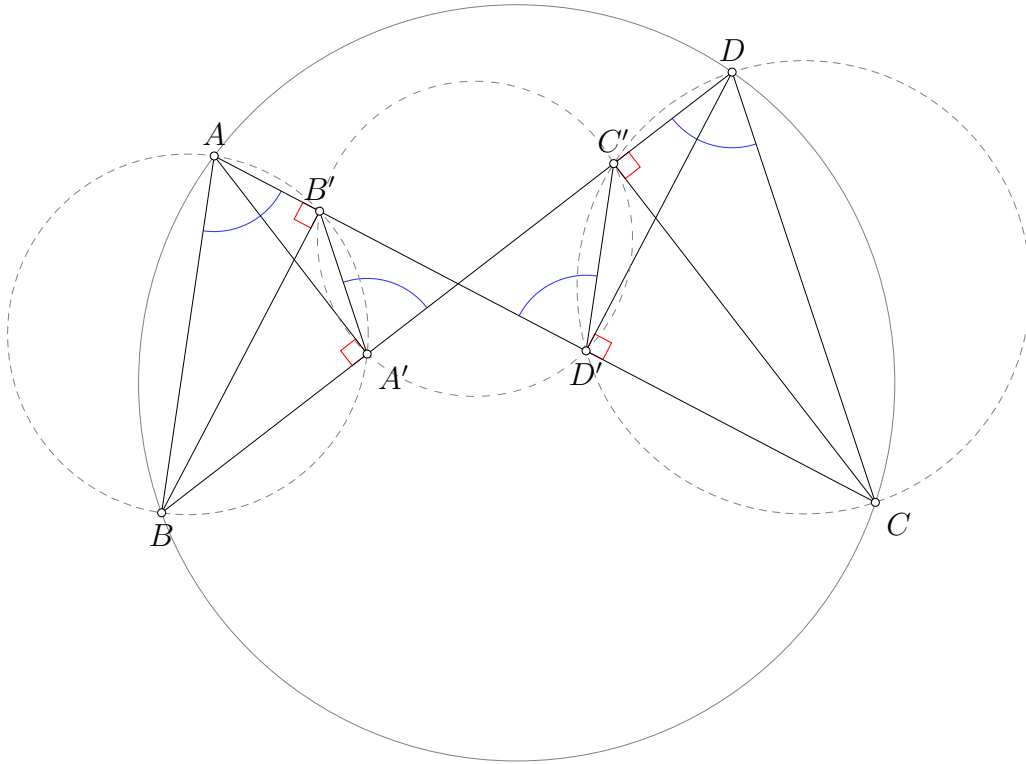
$$\widehat{QXP} = 360^\circ - \widehat{PXR} - \widehat{RXQ} = (180^\circ - \widehat{PXR}) + (180^\circ - \widehat{QXR}) = \widehat{PBR} + \widehat{QAR} = 180^\circ - \widehat{PCQ}$$

ce qui montre bien que les points Q, X, P et C sont cocycliques.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de points A et C sur la droite (BD) . Soient B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de points B et D sur la droite (AC) . Montrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques.

Solution de l'exercice 5

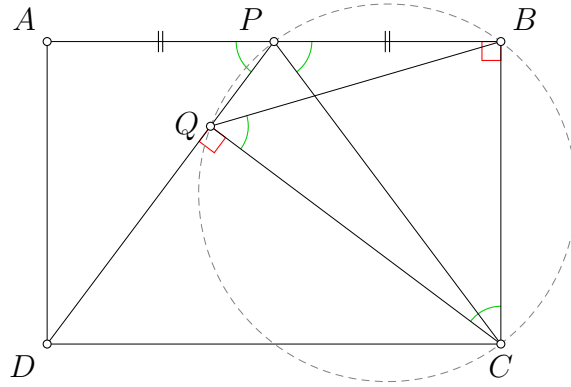


Puisque $\widehat{AB'B} = 90^\circ = \widehat{AA'B}$, le quadrilatère $AB'A'A$ est cyclique. De même, le quadrilatère $DC'D'D$ est cyclique. On déduit

$$\widehat{C'A'B'} = 180^\circ - \widehat{B'A'B} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 180^\circ - \widehat{C'D'C} = \widehat{C'D'A'}.$$

Exercice 6

Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Solution de l'exercice 6

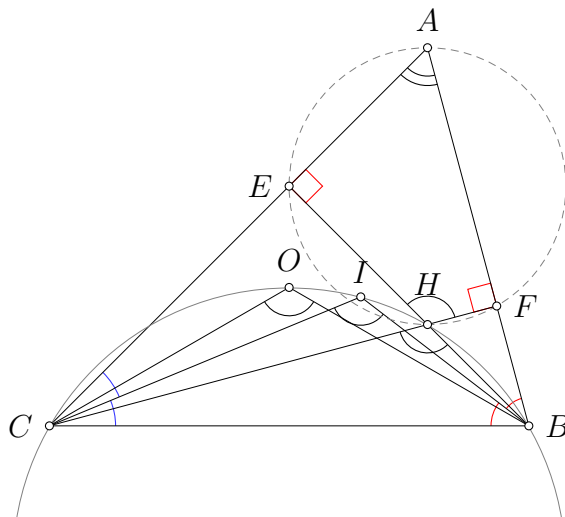
Puisque $\widehat{PQC} = 90^\circ = 180^\circ - 90^\circ = 180^\circ - \widehat{PBC}$, les points Q, P, B et C sont cocycliques. Il vient que $\widehat{CQB} = \widehat{CPB}$.

Les points B et C sont les symétriques respectifs des points A et D par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. On déduit que $\widehat{CPB} = \widehat{DPA}$.

Les points Q, P, B et C sont cocycliques, donc $\widehat{DPA} = 180^\circ - \widehat{QPB} = \widehat{QCB}$. On a donc finalement $\widehat{QCB} = \widehat{BQC}$ et le triangle BQC est isocèle en B .

Exercice 7

Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $\widehat{BAC} = 60^\circ$. On note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et I le centre du cercle inscrit du triangle ABC . Montrer que B, I, O, H et C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7

On va montrer que $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC}$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC} = 120^\circ$. On sait donc que nous allons devoir montrer successivement $\widehat{BHC} = 120^\circ$ et $\widehat{BIC} = 120^\circ$.

Pour calculer $\widehat{BHC}$, on introduit D, E et F les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets A, B et C . Puisque $\widehat{HEA} = 180^\circ - \widehat{HFA} = 90^\circ$, les points A, E, H et F sont cocycliques. Ainsi $\widehat{FHE} = 180^\circ - \widehat{EAF} = 120^\circ$ donc $\widehat{BHC} = \widehat{EHF} = 120^\circ$.

Enfin, pour montrer que $\widehat{BIC} = 120^\circ$, on se sert du fait que le point I est le point d'intersection des bissectrices du triangle. Cette définition nous donne en effet accès aux angles $\widehat{BCI}$ et $\widehat{BCI}$ en fonction des angles du triangle. On a donc :

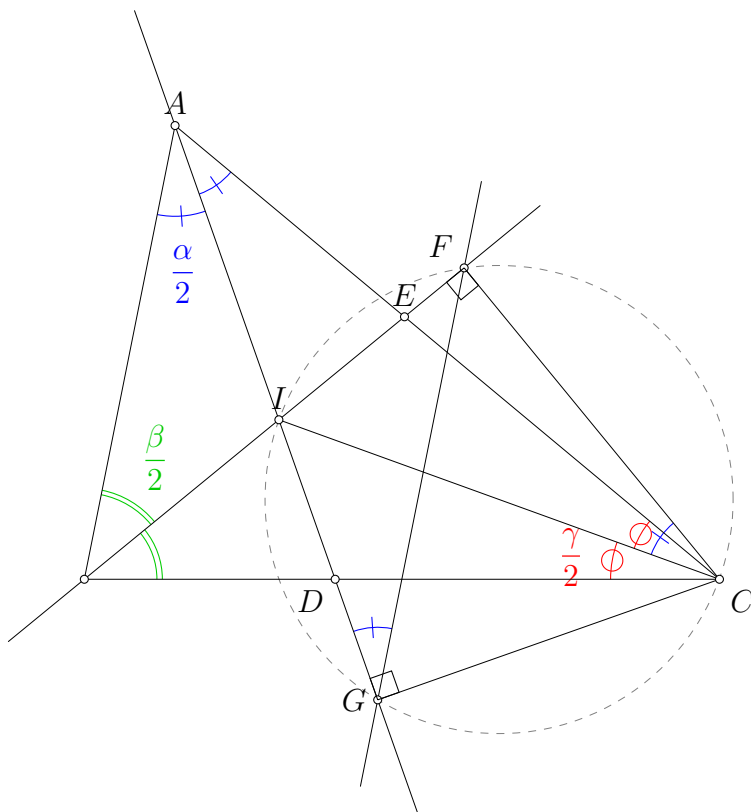
$$\widehat{BIC} = 180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{BAC}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

En conclusion, $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC} = 120^\circ$ donc les 5 points B, O, H, I et C sont cocycliques.

On peut traiter de façon similaire le cas où un des angles du triangle ABC est obtus.

Exercice 8

Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles de sommets A et B rencontrent les côtés BC et AC respectivement en D et E . Soit F la projection orthogonale de C sur BE et G la projection orthogonale de C sur AD . Montrer que (FG) et (AB) sont parallèles.

Solution de l'exercice 8

On note α, β, γ les angles du triangle ABC , selon les conventions d'usage. On note I le centre du cercle inscrit. C'est donc en particulier le point d'intersection de (AD) et (BE) , et (CI) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

Alors, on cherche à montrer que $\widehat{AGF} = \widehat{BAG}$.

Comme $\widehat{IFC} = 180 - \widehat{IGC}$, $IFCG$ est cyclique. On a donc $\widehat{AGF} = \widehat{IGF} = \widehat{ICF}$.

En regardant le triangle rectangle BFC , avec le fait que (BI) et (CI) sont des bissectrices, on a $90 = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \widehat{ICF}$. Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180$, avec ce qui précède, $\widehat{AGF} = \frac{\alpha}{2}$, ce qui conclut.

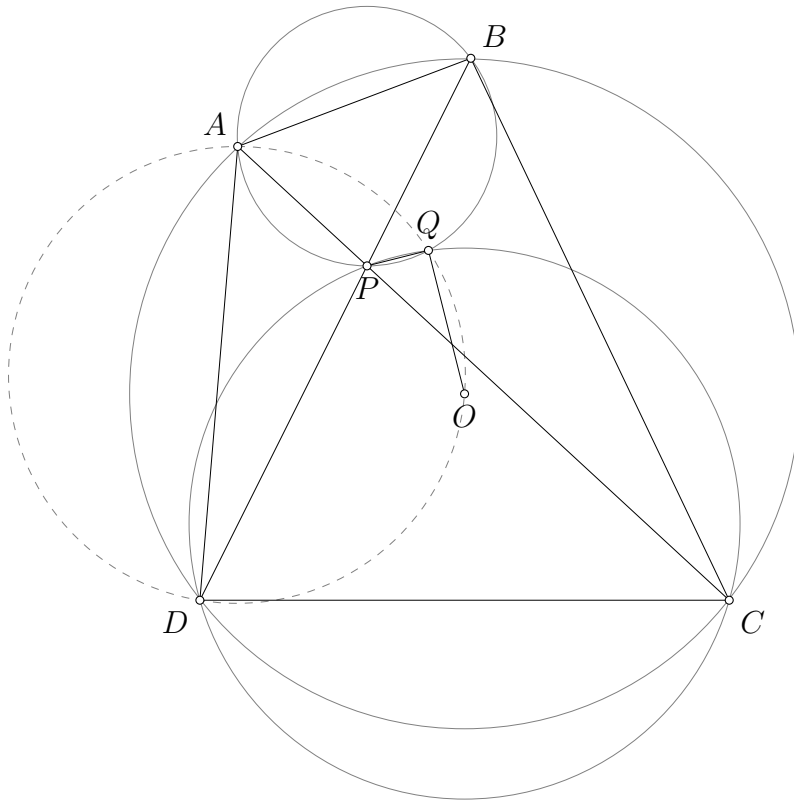
Exercice 9

Soit Γ un cercle de centre O et $ABCD$ quatre points sur Γ .

Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ s'intersectent en P .

Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP s'intersectent en Q .

Montrer que l'angle $\widehat{OQP}$ est droit.

Solution de l'exercice 9

On s'aperçoit que quelque soit la façon dont on essaie de décomposer $\widehat{OQP}$, il faut connaître un angle de la forme $\widehat{OQD}$. De plus avec une figure bien tracé on peut conjecturer que $AOQD$ est un quadrilatère cocyclique.

Effectivement, en utilisant une fois le théorème de l'angle inscrit dans chacun des petits cercles puis le théorème de l'angle au centre dans le grand pour tout ramener en O , on obtient

$$\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{QPD} = \widehat{ABP} + \widehat{PCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \widehat{AOD}, \text{ d'où cette cocyclicité.}$$

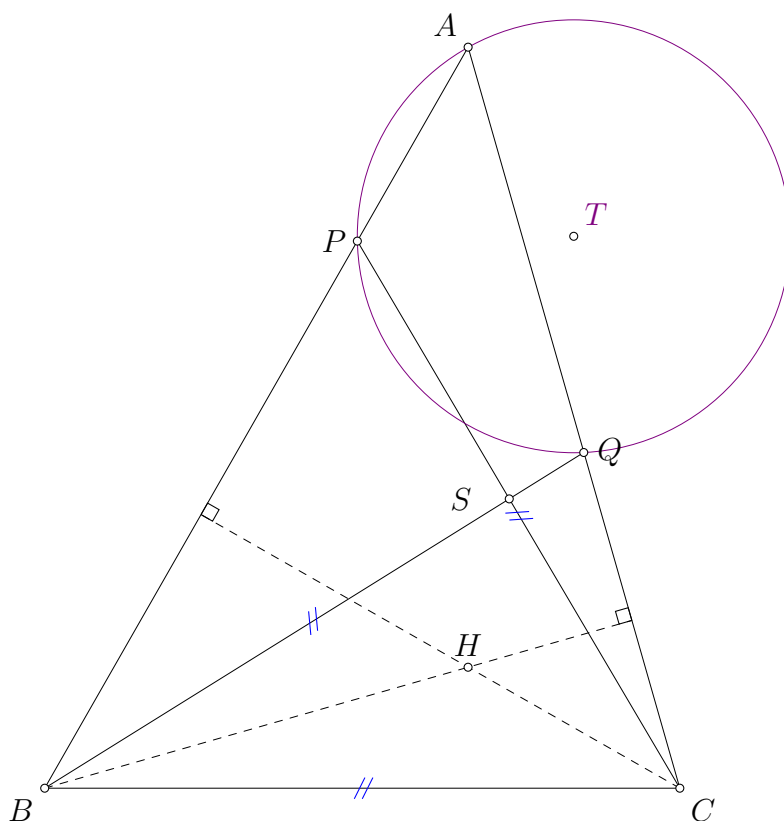
$$\text{Finalement, } \widehat{OQP} = \widehat{OQD} + \widehat{DQP} = \widehat{OAD} + \widehat{DCP} = \widehat{OAD} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOD} = 90^\circ$$

Exercice 10 (EGMO 2022 P1)

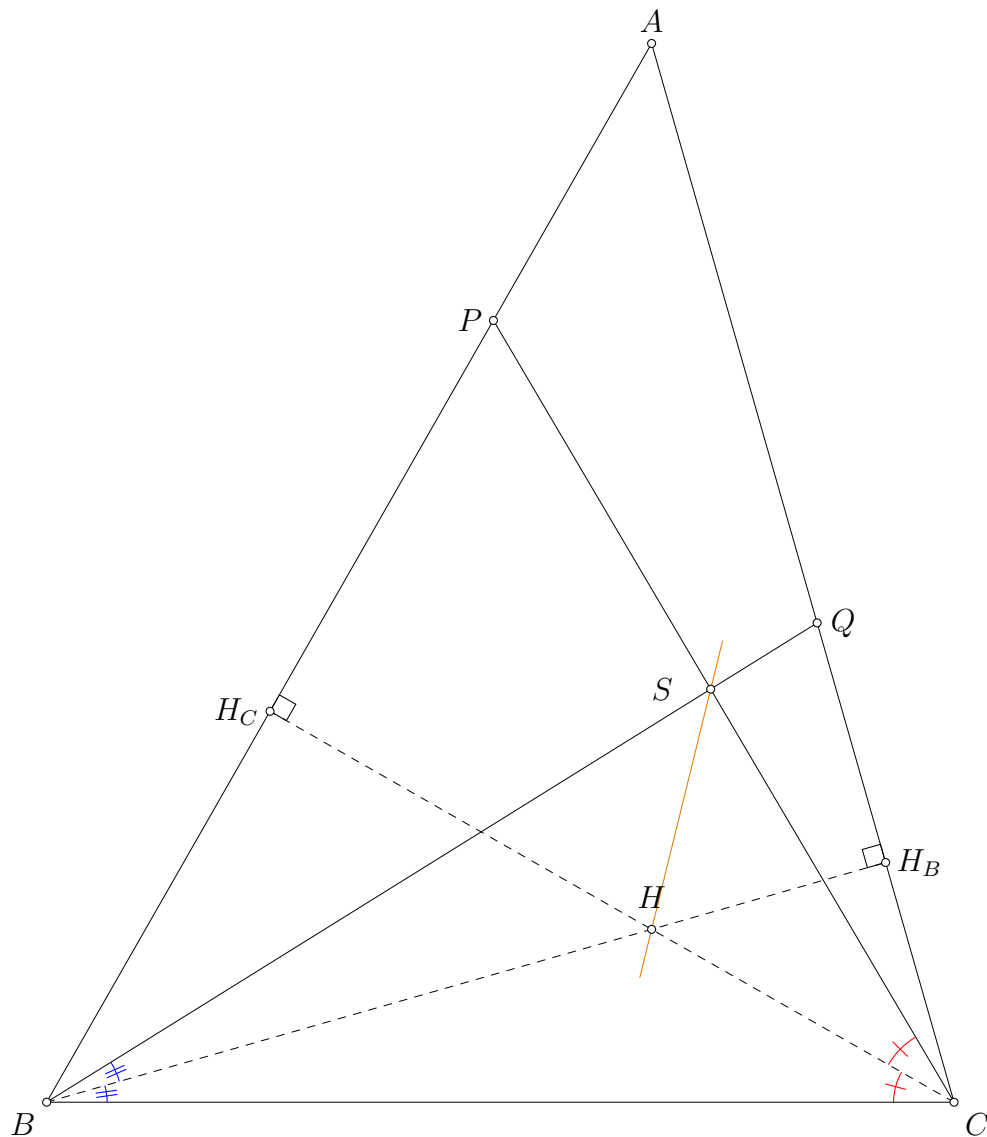
Soit ABC un triangle dans lequel $BC < AB$. Soit P un point distinct de B sur le segment $[AB]$ et Q un point distinct de C sur le segment $[AC]$ tels que $BQ = BC = CP$. Soit T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ , H l'orthocentre du triangle ABC et S le point d'intersection des droites (BQ) et (CP) . Montrer que les points T, H et S sont alignés.

Solution de l'exercice 10

Devant ce problème il nous faut un plan d'attaque ! Notre but est de considérer des bouts de la figure complète (qu'on doit toujours faire pour avoir les idées claires, et regarder si on voit à l'oeil des alignements, des cocyclités etc... incluse ci-dessous) pour ne pas s'embrouiller. On procède donc en deux étapes, d'abord en regardant H et S , puis en regardant T et S .

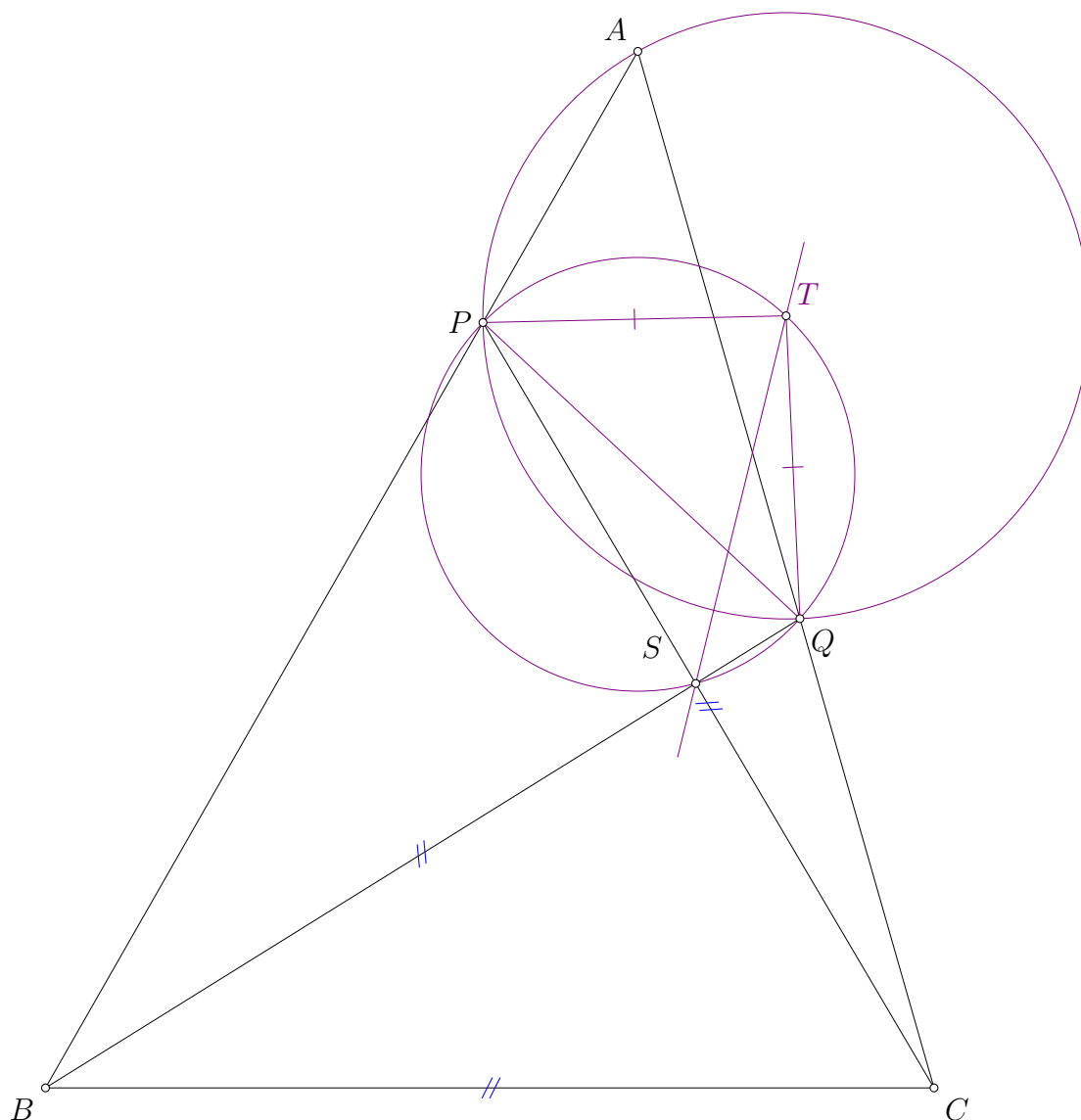


ETAPE 1 :



On montre que H est sur la bissectrice de $\widehat{PSQ}$. En effet BPC est isocèle en C donc sa bissectrice et sa hauteur sont confondues donc H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$. De même H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{QBC}$, ce qui conclut comme les trois bissectrices sont concurrentes.

ETAPE 2 :



On montre d'abord que $PTQS$ est cyclique : en effet par triangles isocèles on a $\widehat{SPA} = 180 - \widehat{ABC}$ et $\widehat{SQA} = 180 - \widehat{ACB}$. Ainsi $\widehat{PSA} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = 180 - 2\widehat{BAC}$. Or par angle au centre dans le cercle de centre T , on a $\widehat{PTQ} = 2\widehat{BAC}$. Ceci conclut par caractérisation des angles opposés comme supplémentaires.

Ceci fait, par angles inscrits et PTQ isocèle en T , on a $\widehat{PST} = \widehat{PQT} = \widehat{QPT} = \widehat{QST}$, donc T est sur la bissectrice de $\widehat{BSC}$ comme H l'était, ce qui conclut le problème.

2 Combinatoire : Principe des tiroirs (Emilhan)

Un peu de théorie ...

Théorème 1 (Principe des tiroirs).

Si $n + 1$ chaussettes sont placées dans n tiroirs, il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 chaussettes.

Démonstration. Si chaque tiroir contenait au plus 1 chaussette, il y aurait au plus n chaussettes au total. $\square$

Exemple 2.

Parmi 367 élèves, il y en a au moins 2 dont l'anniversaire est le même jour. En effet, il y a 367 chaussettes (les élèves) réparties dans 366 tiroirs (les jours d'anniversaire).

Plus généralement,

Théorème 3 (Principe des tiroirs).

Si $kn + 1$ éléments sont répartis dans k ensembles, il y a au moins un ensemble contenant au moins $n + 1$ éléments.

Démonstration. De la même manière, si chaque ensemble contenait au plus n éléments, il y aurait au plus kn éléments au total. $\square$

Exemple 4.

Si Théo lance un dé (normal) 19 fois, il obtiendra la même valeur au moins 4 fois. En effet, il y a $19 = 6 \cdot 3 + 1$ chaussettes (les lancers de dé) réparties dans 6 tiroirs (les valeurs possibles).

Théorème 5 (Principe des tiroirs).

Si n éléments sont répartis dans k ensembles, il y a au moins un ensemble contenant au moins $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ éléments.

Démonstration. On montre comme précédemment qu'il y a un ensemble contenant au moins $\frac{n}{k}$ éléments. La conclusion suit car un ensemble fini contient un nombre entier d'éléments. $\square$

Remarque 6. On retrouve en particulier les deux théorèmes précédents, puisque $\lceil \frac{kn+1}{k} \rceil = n + 1$.

La version suivante du principe des tiroirs est également très utile :

Théorème 7 (Principe des tiroirs infini).

Si on place un nombre infini d'éléments dans un nombre fini d'ensembles, il y a au moins un ensemble contenant un nombre infini d'éléments.

Exemple 8.

Parmi un nombre infini de nombres entiers distincts (les chaussettes), il y en a forcément une infinité qui ont la même parité (le fait d'être pair ou impair étant les tiroirs).

et beaucoup d'exercices !

La plupart des exercices suivants sont repris des cours d'Antoine (Valbonne 2024) et de Maena (Valbonne 2023).

Échauffement**Exercice 1**

Combien de personnes faut-il au minimum pour qu'il existe nécessairement 3 personnes ayant leur anniversaire le même jour ?

Exercice 2

Montrer que $(a - b)(b - c)(c - a)$ est toujours pair si a, b, c sont entiers.

Exercice 3

Montrer que si l'on prend 5 points dans un triangle équilatéral de côté 2, il y en a au moins 2 qui sont à distance au plus 1.

Exercice 4

On considère un tableau 3×3 tel que sur chaque case figure $-1, 0$ ou 1 . On considère la somme de chacune des colonnes, lignes et grandes diagonales. Montrer que parmi ces sommes, il y en a toujours deux qui sont égales.

Plat principal**Exercice 5**

Montrer que si l'on prend 1013 nombres distincts entre 1 et 2024, il y en a forcément deux dont la somme vaut 2025.

Exercice 6

On colorie chaque point du plan en blanc ou en noir. Montrer qu'il existe deux points de même couleur distants d'exactly $1m$.

Exercice 7

On prend cinq points distincts du plan à coordonnées entières. Montrer qu'il en existe d'eux tel que le milieu du segment les reliant soient à coordonnées entières.

Dépassement**Exercice 8**

- a) 4 points sont sur un cercle. Montrer qu'il existe un demi-cercle (bords compris) qui contient 3 de ces points.
- b) 5 points sont sur une sphère. Montrer qu'il existe une demi-sphère (bords compris) qui contient 4 de ces points.

Exercice 9

On choisit 10 entiers quelconques entre 1 et 100. Montrer qu'on peut trouver 2 sous-ensembles de ces 10 entiers, A et B , qui sont non vides, disjoints et de même somme.

Exercice 10

Montrer que si l'on choisit $n + 1$ nombres parmi $\{1, 2, \dots, 2n\}$, on peut en trouver deux tel que l'un divise l'autre.

Exercice 11

On considère 1000 points distincts dans le plan, tels que tout ensemble de 4 points en contient 2 qui sont à distance inférieure ou égale à 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 contenant au moins 334 points.

Autres exos**Exercice 12**

Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers et $b_1, \dots, b_n$ une permutation de ces entiers. Montrer que si n est impair, le produit $(a_1 - b_1) \cdot (a_2 - b_2) \dots (a_n - b_n)$ est toujours pair.

Exercice 13

On colorie tous les points du plan en rouge ou vert. Montrer qu'il existe un rectangle dont tous les sommets sont de la même couleur.

Exercice 14

Une équipe de foot marque au moins 1 but pendant 20 matchs consécutifs. S'ils ont marqué 30 buts au total sur les 20 matchs, montrer qu'il existe une suite de matchs consécutifs lors de laquelle l'équipe a marqué exactement 9 buts.

Exercice 15

Soit B un ensemble contenant strictement plus de $\frac{2^{n+1}}{n}$ points de la forme $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$ dans l'espace de dimension n , avec $n \geq 3$. Montrer qu'il existe trois points distincts de B qui forment un triangle équilatéral.

Solution de l'exercice 1

Il y a 366 jours de l'année, qui sont les tiroirs. Les chaussettes sont les personnes. S'il y a $366 \cdot 2 + 1 = 733$ personnes, il y en a donc au moins 3 qui sont nées le même jour. En outre, si seules 732 personnes sont présentes, il est possible d'avoir exactement 2 personnes qui sont nées pour chaque jour potentiel. La réponse est donc 733.

Solution de l'exercice 2

Le produit en question est pair si et seulement si il contient un facteur pair. Cette condition est vérifiée si et seulement si deux des trois entiers a, b, c sont de même parité. Or, par principe des tiroirs, il y en a au moins 2 qui sont pairs ou 2 qui sont impairs, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

On peut trianguler un triangle équilatéral de côté par 4 triangles équilatéraux de côté 1, qui seront nos tiroirs. Puisque nous avons 5 points, qui sont nos chaussettes, il y en a au moins 2 qui sont dans le même tiroir. Ces deux points sont bien à distance ≤ 1 .

Solution de l'exercice 4

On veut deux sommes égales, les chaussettes vont donc être les sommes (qui correspondent aux différentes lignes, colonnes et diagonales) et les tiroirs les valeurs que ces sommes peuvent prendre. On a 3 lignes, 3 colonnes et 2 grandes diagonales, donc 8 sommes. Or, les

valeurs possibles des sommes vont de -3 à 3 ; il y en a donc 7. On conclut par principe des tiroirs.

Solution de l'exercice 5

Les chaussettes vont être les nombres choisis. On peut répartir les 2024 valeurs possibles en 1012 paires d'entiers dont la somme vaut 2024, à savoir $\{1, 2023\}, \{2, 2022\}, \dots, \{1012, 1013\}$. Ces paires seront nos tiroirs. Par principe des tiroirs, il y a nécessairement deux nombres choisis qui sont dans la même paire, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6

On dessine un triangle équilatéral de côté $1m$. D'après le principe des tiroirs, il y a deux des sommets de ce triangle qui sont de la même couleur, et ils sont bien à un mètre de distance.

Solution de l'exercice 7

On peut deviner en lisant l'énoncé que les chaussettes vont être les points. Les tiroirs sont moins évidents. On considère les coordonnées des points, on les représente donc sous la forme (x, y) . Si on a deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) , le milieu du segment est $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. La condition pour que le milieu soit à coordonnées entières est que x_1 et x_2 aient la même parité, et que y_1 et y_2 aient la même parité. Nos tiroirs seront donc les couples de parité, à savoir (P, P), (P, I), (I, I), (I, P). On a bien 4 tiroirs pour 5 points, donc deux points vont avoir la même parité pour x_1, x_2 et y_1, y_2 respectivement.

Solution de l'exercice 8

- a) Naturellement, les tiroirs sont les demi-cercles et les chaussettes sont les points. Cependant, tout ce que l'on peut dire a priori est qu'un demi-cercle contient au moins 2 points. Il faut donc raffiner les choix des demi-cercles. L'énoncé précise : bords compris. On peut donc tracer un diamètre qui passe par un des points, ce point appartient aux deux demi-cercles tracés et ainsi il reste 3 points à répartir entre deux demi-cercles. Il y aura donc un demi-cercle avec au moins 2 points par principe des tiroirs, auxquels s'ajoute le point sur le diamètre, ce qui conclut.
- b) L'idée est la même. Cette fois-ci c'est un plan qui va séparer notre sphère en deux demi-sphères. Une droite pour le diamètre est définie par un point et le centre. Un plan est défini par le centre et deux points. On peut donc placer deux points d'office dans les deux demi-sphères! Il reste donc 3 points à répartir dans les deux demi-sphères et on conclut de la même manière.

Solution de l'exercice 9

On se rend déjà compte que si on trouve simplement deux ensembles différents de même somme, on pourra répondre au problème en enlevant les nombres qui sont dans l'intersection, ce qui conserverait l'égalité des sommes puisqu'on a enlevé la même chose des deux côtés. Les nouveaux ensembles obtenus seront en outre non vides, puisque les nombres étant strictement positifs, un sous-ensemble strictement inclus dans un autre ne peut pas avoir la même somme. Ainsi le principe des tiroirs semble être une bonne idée. On a $2^{10} - 1 = 1023$ ensembles différents possibles, sommant tous à un nombre entre 1 et 1000. Nos tiroirs sont les sommes possibles, et nos chaussettes sont les sous-ensembles. Comme $1023 > 1000$, on conclut qu'il y a deux sous-ensembles non vides de même somme, et on finit l'exercice par la remarque du début.

Pour montrer qu'il y a 2^n sous-ensembles d'un ensemble à n éléments, il est possible de remarquer que choisir un sous-ensemble revient à choisir, pour chacun des n éléments, si on le prend ou non.

Solution de l'exercice 10

L'idée est de partitionner les nombres de 1 à $2n$ en n groupes de telle sorte que si l'on choisit deux nombres quelconques d'un même groupe, l'un est un multiple de l'autre. Une première chose que l'on peut essayer est de faire des paires de la forme $(k, 2k)$, mais un nombre comme $2n - 1$ ne serait dans aucune telle paire. On généralise un peu cette idée : si m est un nombre > 0 , on peut l'écrire de façon unique sous la forme $2^k \cdot t$, où t est un naturel impair et $k \geq 0$. On remarque alors que si deux nombres m et m' ont la même partie impaire $t = t'$, alors l'un des deux divise l'autre. Nos tiroirs seront donc les parties impaires possibles pour les nombres de 1 à $2n$, qui sont exactement les nombres impairs entre 1 et $2n$. Il y en a n , donc le principe des tiroirs nous dit que nous avons deux nombres ayant la même partie impaire, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 11

L'observation principale est la suivante : puisque l'énoncé nous dit qu'il n'y a pas 4 points qui sont à distance > 1 deux à deux, si nous avons 3 points qui sont à distance > 1 deux à deux, tout autre point est à distance ≤ 1 de l'un de ces trois points, et nous pourrions alors appliquer un principe des tiroirs.

Commençons donc par résoudre l'exercice dans ce cas. Soient A, B, C trois points de notre ensemble qui sont à distance > 1 deux à deux. Si P est un autre point de notre ensemble, l'hypothèse nous dit qu'il est à distance ≤ 1 de A, B ou C . Autrement dit, tout autre point appartient au cercle de rayon 1 et de centre A , ou B , ou C . Par principe des tiroirs, l'un de ces cercles contient donc au moins $\lceil \frac{1000-3}{3} \rceil = 333$ points auxquels s'ajoute le centre du cercle.

Supposons maintenant qu'il n'existe pas 3 tels points. S'il n'y a pas deux points à distance > 1 , n'importe quel cercle de rayon 1 centré en l'un de nos points les contient tous. Sinon, soient A et B à distance > 1 . Puisque tout point C est à distance ≤ 1 de A ou de B , le même raisonnement nous montre qu'il existe un cercle contenant au moins $\lceil \frac{1000-2}{2} \rceil + 1 = 500$ points.

Solution de l'exercice 12

Puisque n est impair, il y a $k \geq \frac{n+1}{2}$ nombres de même parité parmi $a_1, \dots, a_n$. Ainsi, parmi les nombres $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$, il y en a au moins $n+1$ qui sont de même parité. Ces $n+1$ nombres sont nos chaussettes, et apparaissent tous dans une des n parenthèses, qui sont nos tiroirs. Il y a donc au moins un facteur qui est une différence de deux nombres de même parité. Ce facteur est donc pair, et le produit aussi.

Solution de l'exercice 13

Une variante de ce problème étant présente sur mathraining, je ne rédigerai pas la correction de cet exercice.

Solution de l'exercice 14

Pour $1 \leq i \leq 20$, on désigne par g_i le nombre de buts qui ont été marqués lors des i premiers matchs. Montrer que l'équipe de foot a marqué exactement 9 buts lors d'une suite de matchs consécutifs revient à montrer qu'il existe des indices $1 \leq i < j \leq 20$ tels que $g_i + 9 = g_j$. En effet, cela veut dire qu'il y a eu exactement 9 buts lors des matchs de numéros compris entre $i+1$ et j .

On remarque que pour tout $1 \leq i \leq 20$, $1 \leq g_i \leq 30$, donc $1 \leq g_i + 9 \leq 39$. On applique donc le principe des tiroirs aux 40 nombres $(g_i)_i$ et $(g_i + 9)_i$. Puisque ceux-ci sont tous compris entre 1

et 39, le principe des tiroirs nous dit bien qu'il est possible de trouver $1 \leq i < j \leq 20$ tels que $g_i + 9 = g_j$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 15

Notons X l'ensemble des points de la forme $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$. La distance entre deux points de X dépend uniquement du nombre de coordonnées qui diffèrent entre ces deux points. Désormais, nous appellerons donc distance entre deux points de X ce nombre de coordonnées qui sont distinctes. Soit P un point quelconque dans X . Il existe exactement n points de X qui sont à distance 1 de P . Ainsi, en sommant le nombre de points à distance 1 de tous les points de B , on en a $> \frac{2^{n+1}}{n} \cdot n = 2^{n+1}$. Par principe des tiroirs, puisque X contient 2^n éléments, il y a au moins un élément $P \in X$ apparaissant au moins 3 fois. Ainsi, il existe des points distincts P_1, P_2 et P_3 de B qui sont tous à distance 1 de P , et qui sont donc à distance 2 deux à deux. Ces trois points forment donc un triangle équilatéral.

3 Combinatoire : Principe de l'extremum (Théo et Noam)

Théorème 1.

Tout ensemble fini possède un maximum et un minimum.

Théorème 2.

Tout ensemble d'entiers naturels possède un minimum.

Exercice 1

Soit S un ensemble de points tel que tout point de S est le milieu d'un segment dont les extrémités sont dans S . Montrer que S est infini.

Exercice 2

On considère un ensemble T de $2n$ points du plan. Montrer qu'il est possible de relier les points par paire de sorte que deux segments ne se croisent pas.

Exercice 3

$2n + 1$ nombres réels ont la propriété que la somme de n parmi eux est toujours plus petite que la somme des autres $n + 1$. Montrer que ces nombres sont tous positifs.

Exercice 4

À un tournoi, chacun rencontre tous ses adversaires et il n'y a pas d'égalité. Tout le monde écrit sur sa feuille le noms des adversaires qu'il a battus, et les noms sur la feuille des adversaires vaincus. Montrer qu'un participant a tous les autres noms sur une feuille.

Solution de l'exercice 4

On considère la personne qui a le plus de noms sur sa feuille. Si il lui manque un nom, elle a perdu contre une personne, qui a donc tous les noms de cette personne plus un, impossible.

Exercice 5

Sur un cercle, on dispose n nombres de sorte que chacun soit la moyenne des deux qui l'entourent. Montrer que tous les nombres sont égaux.

Solution de l'exercice 5

Le maximum doit être entouré par deux nombres qui lui sont égaux. De proche en proche, tous les nombres doivent alors être égaux.

Exercice 6

On dispose de $n \geq 3$ points distincts dans le plan. Montrer qu'il existe A, B, C tel qu'il n'y a aucun autre point sur les segments $[AB], [AC], [BC]$.

Solution de l'exercice 6

On considère le triangle de plus petit périmètre. Si la condition n'est pas vérifiée (mettons D est sur le segment $[AB]$), alors d'après l'inégalité triangulaire DBC est de plus petit périmètre, impossible.

Exercice 7

Des nombres $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ vérifient la propriété $x_1 + x_2 = 2x'_1, x_2 + x_3 = 2x'_2, \dots, x_{100} + x_1 = 2x'_{100}$ où les x'_i sont une permutation des x_i . Montrer que tous les x_i sont égaux.

Solution de l'exercice 7

On considère le plus grand des x'_i , qui est donc égal au plus grand des x_i . Puisque $x_i + x_{i+1} =$

$2x'_i$, ce maximum est atteint au moins deux fois. En réutilisant cette formule sur le deuxième x'_i maximal, on montre de même que le maximum est atteint trois fois, puis que tous les x_i sont égaux.

Exercice 8

Lors d'un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer qu'il existe deux couples de partenaires de danse f, g et f', g' tels que f et g' , f' et g n'ont pas dansé ensemble.

Solution de l'exercice 8

On considère le garçon ayant dansé avec le plus de filles g , puis f' une fille n'ayant pas dansé avec ce garçon, et enfin g' ayant dansé avec f' . Puisque g a dansé avec le plus de filles mais pas f' , il existe une fille f avec laquelle g a dansé mais pas g' .

Exercice 9

Avec un nombre impair de personnes, chacun arrose son voisin le plus proche. Montrer qu'une personne ne sera pas arrosée.

Solution de l'exercice 9

On procède par récurrence. Prenons le couple d'arroseurs les plus proches, qui s'arrosent donc l'un l'autre. Si une autre personne les arrose, il y a parmi les $n - 2$ autres participants au plus $n - 3$ arroseurs, donc une personne ne sera pas arrosée. Sinon, on conclut par hypothèse de récurrence avec les $n - 2$ autres personnes.

Exercice 10

Sur un ensemble fini S des points du plan, toute droite passant par deux éléments par deux points passe par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.

Solution de l'exercice 10

On considère le couple point, droite (qui passe par au moins trois points de l'ensemble) qui minimise la distance (non nulle) : mettons A, d . Par hypothèse, il y a deux points sur d du même côté de la perpendiculaire à la d passant par A (appelée d') dans notre ensemble : disons B, C avec B plus proche de d' que C . Alors par inégalité triangulaire le couple $B, (AC)$ a une plus petite distance : impossible. Donc tous les points sont alignés.

Trouver le plus petit entier

Exercice 11

À un tournoi, chaque participant rencontre chaque adversaire deux fois, et marque un point pour une victoire et aucun pour une défaite (pas de match nul). Le dernier récolte 5 points. Combien y a-t-il de participants au minimum ?

Solution de l'exercice 11

Analyse : s'il y a n participants, il y a au moins $5n$ points distribués, et comme chaque match attribue exactement un point $n(n-1)$ points sont distribués au total. $5n \leq n(n-1) \iff n \leq 6$ donc il doit y avoir au moins six participants. Si on a six participants et que chacun gagne la moitié de ses matchs contre chaque adversaire, chacun aura marqué 5 points. Donc 6 est le minimum.

Exercice 12

On colorie les entiers de 2 à 31 en utilisant k couleurs. Si n divise strictement m , n et m sont de couleur différente. Combien faut-il de couleurs au minimum ?

Solution de l'exercice 12

Les puissances de 2 doivent toutes être de couleur différente car chacune divise ou est divisée par les trois autres : il faut au moins quatre couleurs. À l'inverse, en coloriant de la même couleur tous les entiers de 2^k à $2^{k+1} - 1$ (compris), la condition est respectée, puisque si n divise strictement m , $n \leq \frac{m}{2}$.

Exercice 13

Un groupe de n amis prend r photos distinctes (deux photos n'ont pas exactement les mêmes personnes) qui contiennent au moins une personne chacune. Trouver le plus grand r tel que pour chaque paire de photos on trouve au moins une personne qui apparaît sur les deux.

Solution de l'exercice 13

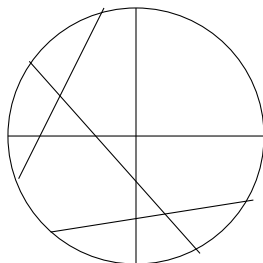
Cf. principe des tiroirs

Exercice 14

Combien de coups de couteau faut-il donner au minimum pour partager un gâteau (en deux dimensions, chaque part doit avoir de la crème sur le dessus) en 13 parts ? (pas forcément égales)

Solution de l'exercice 14

Une construction à quatre coups de couteau n'est pas difficile à trouver. Montrons qu'il s'agit du minimum. À chaque coup de couteau, le couteau divise une part en deux (donc ajoute une part) à chaque fois qu'il rencontre une nouvelle part, soit sur le bord du gâteau, soit après avoir rencontré un ancien coup de couteau. Le k -ième coup ajoute donc au plus k parts. Il y a donc après k coups au plus $1 + \frac{k(k+1)}{2}$ parts, donc il faut bien au moins quatre coups.

**Exercice 15**

On dispose de douze boules dont une est soit plus légère soit plus lourde (on ne sait pas). Combien de pesées au minimum faut-il faire pour déterminer de quelle boule il s'agit, et son poids ?

Solution de l'exercice 15

Il y a 24 possibilités puisque chacune des douze boules peut être plus légère ou plus lourde. Après avoir choisi une stratégie à n étapes, on peut avoir 3^n résultats différents, puisque à chaque étape il y a trois issues possibles. Si on veut pouvoir déterminer laquelle de ces possibilités est la bonne, chaque résultat doit correspondre à au plus une possibilité : on veut $3^n \geq 24$ donc $n \geq 3$.

Montrons la construction. On commence par peser quatre boules de chaque côté :

- Si la balance reste à l'équilibre, les quatre autres peuvent être plus lourdes ou plus légères. On en met deux d'un côté et une de l'autre, plateau que l'on complète avec

une boule sûre. Si le plateau penche d'un côté, comparer les deux boules du même côté permet de conclure, sinon il faut peser la boule laissée sur le côté avec une autre.

- Sinon, on dispose de chaque côté du plateau deux boules potentiellement plus lourdes et une potentiellement plus légère. Si le plateau penche d'un côté, comparer les deux boules les plus lourdes du côté qui penche permet de conclure. Sinon, on compare les plus légères laissées sur le côté entre elles.

Rappel 3.

Ces deux derniers exercices illustrent que la difficulté peut se trouver aussi bien sur la partie analyse que la partie synthèse du raisonnement. Il est donc crucial d'explicitier chaque étape de la réponse.

4 Géométrie : Théorème de l'angle tangent (Maryam)

En stand-by

5 Combinatoire : Invariants et coloriage (Lilas et Paul A)

Invariants

Un invariant est une quantité propre à un problème (un entier, éventuellement pris modulo n , un ensemble, un réel, ...) qui demeure constante lors des différentes étapes d'un processus ou d'un algorithme. Elle permet souvent de montrer qu'une configuration n'est pas accessible à partir d'une autre. Un exemple simple est le premier exercice ci-dessous.

Exercice 1

On dispose de piles de jetons. On peut séparer une pile pour former deux piles ou fusionner deux piles pour en former une. Peut-on, en débutant avec une pile de 2024, obtenir 2025 piles de 1 jeton ?

Exercice 2

On dispose d'une pile de 100 pièces. De là, il est possible d'effectuer 2 types d'opérations :

- Enlever une pièce d'un tas d'au moins 3 pièces et diviser le tas restant en deux tas (non vides)
- Supprimer un tas d'une seule pièce

En trouvant un invariant sur le nombre de pièce additionné au nombre de tas, prouver qu'il est impossible d'arriver dans la situation où l'on a aucune pièce.

Exercice 3

On dispose de 16 ampoules dans un carré de 4 par 4. On dispose d'un interrupteur par ligne d'un interrupteur par colonne. Chaque interrupteur inverse l'état (allumé ou éteint) de toutes les ampoules de sa ligne ou colonne. Au départ, seule l'ampoule en haut à gauche est allumée. Peut-on allumer toutes les ampoules ?

Exercice 4

On écrit les nombres de 1 à 2021 au tableau. A chaque étape, on efface deux nombres au tableau et on écrit leur différence. Peut-on finir avec comme seul chiffre écrit au tableau le 2 ?

Exercice 5

Héloïse et Hannah se baladent sur les points à coordonnées entières du plan. Initialement, Héloïse part du point $(0, 0)$ et Hannah du point $(1, 0)$. Chaque seconde, chacune se déplace vers un point adjacent à celui sur lequel elle est. Peuvent-elles se rejoindre ?

Exercice 6

On divise un cercle en six secteurs. On écrit la suite 1, 0, 1, 0, 0, 0, un nombre dans chaque secteur dans l'ordre des aiguilles d'une montre. A une étape, on peut augmenter de 1 la valeur dans deux secteurs adjacents. Est-il possible de se retrouver avec le même nombre dans chaque secteur au bout d'un nombre fini d'étapes ?

Exercice 7

Les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ valent 1 ou -1 . On pose $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ et $a_{n+3} = a_3$. Sachant que $S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}$ vaut 0, montrer que n est divisible par 4. On pourra étudier ce qu'il se passe pour S lorsque l'on change le signe d'un des nombres.

Exercice 8

Les nombres 1, 3, 8, 6, 11 sont écrits au tableau. A chaque étape, on peut choisir trois de ces nombres a, b, c et les remplacer par les moyennes arithmétiques $\frac{a+b}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}$. Peut-on obtenir les nombres 2, 4, 5, 7, 9 sur le tableau au bout d'un nombre fini d'opérations ?

Et si on avait plutôt pris les moyennes géométriques ?

Exercice 9

Sur une île vivent des caméléons : 25 rouges, 12 verts et 8 bleus. Quand deux caméléons d'une même couleur se rencontrent, ils se font peur et prennent chacun une des deux autres couleurs mais pas la même. Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils se font peur et prennent toutes les deux la troisième couleur. Après un an, tous les caméléons sont de la même couleur. Cette couleur peut-elle être le bleu ?

Exercice 10

On considère $2n$ pièces en cercle dont l'une des faces est blanche et l'autre noire. Au début, toutes les pièces ont pour face visible la face blanche sauf une pièce qui est retournée et qui montre la face noire. Une opération est l'une des deux manipulations suivantes :

- Choisir deux pièces adjacentes de même couleur et les retourner toutes les deux.
- Choisir deux pièces espacées d'une pièce, et de couleur différente, et les retourner toutes les deux.

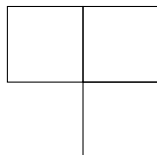
Est-il possible d'arriver à la configuration où toutes les pièces sont retournées par rapport à la configuration initiale ?

Pavages et coloriage**Exercice 11**

Est-il possible de paver une grille de taille 4×4 avec des pièces de taille 1×3 ? Et avec une grille de taille $2^n \times 2^n$ pour $n \geq 1$ un entier ?

Exercice 12

Est-il possible de paver une grille de taille $3 \times 2n$ avec $n \geq 1$ un entier avec des pièces de la forme (les rotations de la pièce sont autorisées) :

**Exercice 13**

On dispose des mêmes pièces qu'à l'exercice précédent, est-il possible de paver une grille de dimension 3×3 avec ces pièces ?

Exercice 14

On considère un échiquier 8×8 .

1. Peut-on le recouvrir avec des dominos 2×1 ?

2. On retire un coin de l'échiquier. Peut-on le recouvrir avec des dominos 2×1 ?
3. On retire deux coins opposés de l'échiquier initial. Peut-on le recouvrir avec des dominos 2×1 ?

Exercice 15

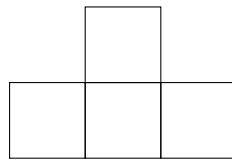
1. Peut-on recouvrir un échiquier 8×8 avec des triominos 3×1 ?
2. Est-ce possible si on enlève l'un des coins ?

Exercice 16

Une limace se trouve sur la case en bas à gauche d'une grille rectangulaire de dimension $m \times n$. Elle se déplace de case en case, passant d'une case à une autre avec laquelle elle a un côté en commun. Elle souhaite finir sur la case en haut à droite en passant par toutes les cases une unique fois. Pour quelles valeurs de m et n peut-elle y arriver ?

Exercice 17

Pour quels $n > 1$ peut-on paver une grille carrée de taille $n \times n$ avec des pièces de la forme :

**Exercice 18**

Le carrelage du palais de Minos est recouvert de dalles de taille 2×2 et 1×4 . Malheureusement, une d'elle s'est cassée et il ne reste plus que des dalles de rechange de l'autre forme. Peut-on réorganiser les carreaux déjà placés pour effectuer sa réparation ?

Exercice 19

Soient n, a et b des entiers naturels non-nuls. A quelle condition peut-on paver un rectangle $a \times b$ avec des rectangles $1 \times n$ ou $n \times 1$?

Solutions**Solution de l'exercice 1**

On remarque que le nombre de jetons est un invariant du problème. Il est donc impossible, en partant de 2024 jetons, de terminer avec 2025 jetons.

Solution de l'exercice 2

On remarque que la parité du (nombre de pièces + nombre de piles) est un invariant du problème. Il suffit de traiter les deux opérations pour s'en convaincre :

- Si on effectue la première opération, le nombre de pièces diminue de 1 et le nombre de tas augmente de 1, donc la somme des deux ne varie pas et en particulier la parité de la somme ne varie pas.
- Si on effectue la deuxième opération, on diminue le nombre de pièces et le nombre de tas par 1, donc la parité de la somme des deux ne change pas : on lui retire 2.

Alors si on arrive à ne plus avoir de pièce, on a 0 pièce et 0 tas, donc la somme est paire, mais la somme initiale est impaire, donc c'est impossible.

Solution de l'exercice 3

On remarque que la parité du nombre d'interrupteurs allumés est un invariant du problème. En effet, si on a k lampes allumées dans une ligne/colonne et qu'on active l'interrupteur, alors on se retrouvera avec $4 - k$ lampes allumées en plus, et k lampes allumées en moins, ce qui fait une différence de $4 - 2k = 2(2 - k)$ lampes, qui est bien pair. Étant donné qu'il y a un nombre pair de lampes en tout et qu'on commence avec un nombre impair de lampes allumées, il est impossible d'atteindre une position où toutes les lampes seraient allumées.

Solution de l'exercice 4

On considère S la somme de tous les entiers figurant au tableau. Si on efface les deux nombres a et b , avec $a \leq b$, S va être remplacé par $S - (a + b) + (b - a) = S - 2a$, qui est de la même parité que S . Ainsi, la parité de S ne change pas. Or, au départ, S vaut $1 + 2 + \dots + 2022 = \frac{2022 \times 2023}{2} = 1011 \times 2023$ qui est impair. Donc on ne peut pas obtenir 0 à la fin.

Solution de l'exercice 5

À chaque tour, la somme des coordonnées du point sur lequel se trouvent Héloïse et Hannah varie de ± 1 . Par conséquent, la somme des coordonnées des deux points sur lesquelles elles se trouvent varie de $-2, 0$ ou 2 , et ne change pas de parité. Or, initialement, cette somme est impaire. Elle le restera donc, ce qui interdit à Héloïse et Hannah de se retrouver en un même point de coordonnées (x, y) , car alors la somme des coordonnées de leur point serait l'entier pair $2(x + y)$.

Solution de l'exercice 6

On remarque que la somme alternée S des nombres écrits sur chaque secteur est un invariant du problème. Or, S vaut initialement 2, et il est donc impossible que tous les secteurs contiennent le même nombre car dans ce cas, S vaudrait 0.

Solution de l'exercice 7

Lorsque l'on change l'un des a_i de signe, on change le signe de la somme T de 4 termes consécutifs valant ± 1 . Or, T est pair (comme somme de 4 nombres impairs), donc S , qui change de $2T$, reste invariante modulo 4. Or, lorsque tous les a_i valent 1, on a $S = n$. Cela montre que $S \equiv 0 \pmod{4}$.

Solution n°2 de l'exercice 7

On sait par hypothèse que S est la somme de n termes valant ± 1 , et que le résultat est pair, donc n est pair. Notons $n = 2k$, avec $k \geq 1$. En outre, puisque $S = 0$, il y a autant de termes valant 1 que -1 dans la somme, c'est-à-dire qu'il y en a k de chaque. On calcule alors le produit suivant de deux manières différentes :

$$\prod_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} = 1^k \cdot (-1)^k = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2,$$

donc k est pair. Cela montre bien que $n = 2k$ est divisible par 4.

Solution de l'exercice 8

On remarque un invariant du problème : la somme des nombres écrits au tableau. En effet,

$$a + b + c = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+c}{2}$$

Or, $1 + 3 + 8 + 6 + 11 = 29$ et $2 + 4 + 5 + 7 + 9 = 27$ donc ce n'est pas possible d'atteindre une situation avec ces nombres au tableau.

Pour la moyenne géométrique, le même argument tient, mais au niveau du produit, puisque $abc = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{bc} \cdot \sqrt{ac}$. Or, $1 \times 3 \times 8 \times 6 \times 11$ est divisible par 16, mais $2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 9$ non, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9

Montrons qu'il n'est pas possible que tous les caméléons deviennent bleus. On note R , V et B les nombres respectifs de caméléons de couleurs rouge, vert ou bleu. On dispose alors de deux invariants. Le premier est $V + R + B = 44$. Le second est le reste modulo 3 de $X = B - V$. En effet, lorsque deux caméléons bleus se rencontrent, B diminue de 2 et V augmente de 1, donc $B - V$ diminue de 3. Lorsque deux caméléons verts se rencontrent, V diminue de 2 et B augmente de 1, donc $B - V$ augmente de 3. Lorsque deux caméléons rouges se rencontrent, B et V augmentent de 1 tous les deux, donc $B - V$ ne change pas. Les autres interactions possibles ont le même effet sur X à signe près.

Or, X est initialement divisible par 3, mais il y a 44 caméléons, donc ils ne peuvent pas tous devenir bleus.

Solution de l'exercice 10

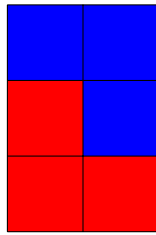
On considère l'invariant suivant : $S = c_1 - c_2 + c_3 - \dots - c_{2n}$, où c_i vaut 1 si la i -ième pièce est blanche et -1 si elle est noire. Quitte à déplacer l'origine, on peut supposer que la pièce noire est la pièce $2n$. Au départ, on a $S = 2$. Si toutes les pièces se retrouvaient du côté opposé au côté initial, on aurait $S = -2$. Par conséquent, on ne peut pas se retrouver dans cette position.

Solution de l'exercice 11

Si on pouvait paver une grille avec les pièces 1×3 , alors le nombre de cases de la grille serait divisible par 3. Or, pour tout entier naturel n , $3 \nmid 2^n \times 2^n$, donc il est impossible de paver une grille de $2^n \times 2^n$ avec des pièces 1×3 .

Solution de l'exercice 12

La réponse est **oui**. En effet, il suffit de remarquer qu'on peut paver une grille 3×2 avec ces pièces, de la façon suivante : Il suffit alors de répéter ce motif sur toute la longueur de la grille

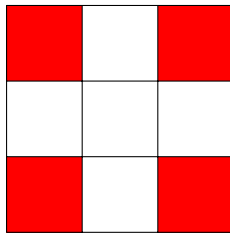


pour la paver entièrement avec de telles pièces.

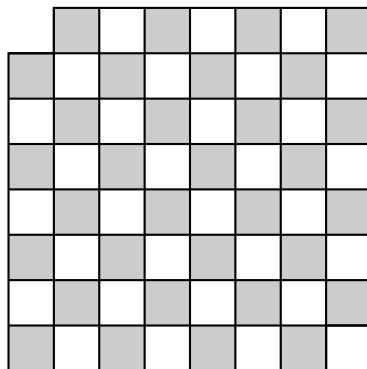
Solution de l'exercice 13

On considère le coloriage ci-dessous, où chaque coin est colorié en rouge.

Puisqu'une pièce ne peut pas recouvrir deux cases rouges, il faudrait au moins 4 pièces pour recouvrir la grille. Il faudrait donc que la grille possède au moins $12 > 9$ cases, ce qui n'est pas le cas.

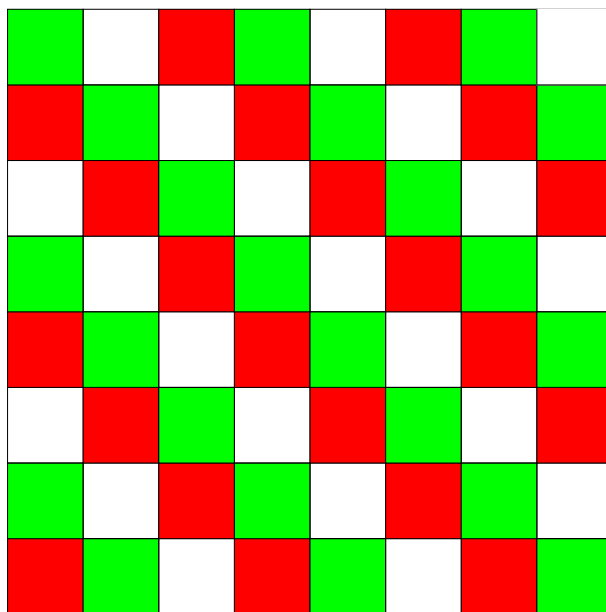
**Solution de l'exercice 14**

1. Oui, on peut, il suffit de les poser tous horizontalement par exemple.
2. On ne peut plus car il y a un nombre impair de cases et que chaque domino couvre deux cases.
3. On colorie la grille en échiquier. On a retiré 2 cases de la même couleur, blanche par exemple, il y a alors 30 cases blanches et 32 cases noires, or un domino recouvre exactement une case blanche et une case noire donc ça n'est pas possible.



Solution de l'exercice 15

1. $8 \times 8 = 64$ n'est pas divisible par 3, donc on ne peut pas paver une grille de 8×8 avec les triominos 1×3 .
2. Si on a retiré 1 coin, alors on colorie la grille avec 3 couleurs, en alternant :

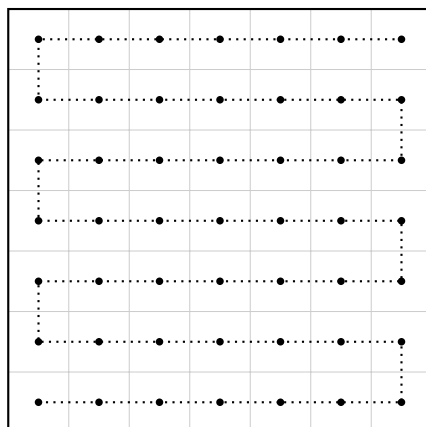


On remarque alors qu'il y a plus de cases vertes que des deux autres types de cases, mais chaque triomino recouvre exactement une case de chaque couleur : il n'est pas possible de placer 21 triominos sur la grille.

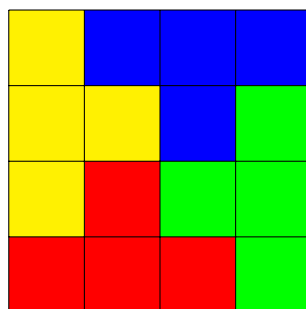
Solution de l'exercice 16

On montre que c'est possible si et seulement si au plus une des deux variables est paire. On colorie la grille comme un damier et on effectue une disjonction de cas :

- Si n et m sont paires, alors la case en haut à droite est de la même couleur que la case en bas à gauche. Or, à chaque déplacement, la limace doit obligatoirement changer de couleur de case. Comme le nombre de cases total est pair, il faut effectuer un nombre impair de déplacements pour atteindre la dernière case, mais alors la dernière case ne peut pas être de la même couleur que la première. Absurde
- Si l'une des deux variables n'est pas paire, alors il suffit de faire des serpentins selon l'autre direction (voir la figure ci-dessous), puisqu'après un nombre impair de longueurs, on se retrouve en haut de la grille, et donc ce sera bien le cas à la fin.

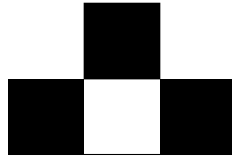
**Solution de l'exercice 17**

Montrons que les solutions sont exactement les multiples de 4. Dans un premier temps, remarquons que $n = 4$ est une solution comme illustré ci-dessous. Si $n = 4k$ est un multiple de 4, il suffit de paver les k^2 carrés 4×4 .

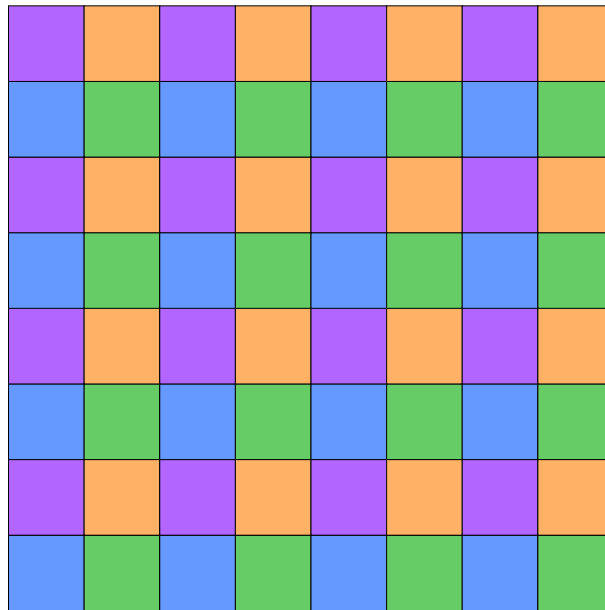


Soit n une solution. Puisque chaque pièce recouvre un nombre pair de cases, n est pair car il y a n^2 cases dans la grille. En outre, si on pave notre grille comme un échiquier, on remarque qu'une pièce recouvre exactement 1 case noire et 3 cases blanches ou l'inverse. Puisque n est pair, il y a autant de cases blanches et noires dans la grille, et il doit donc y avoir le même nombre de pièces recouvrant une seule case blanche que de pièces recouvrant une seule case noire.

Il y a donc un nombre pair de pièces, recouvrant chacune 4 cases, donc $8 \mid n^2$, ce qui montre que $4 \mid n$. Cela conclut.

**Solution de l'exercice 18**

On utilise un coloriage un peu astucieux, car il doit faire apparaître clairement la différence entre les deux formes de dalles. Pour cela, on colorie la première ligne en alternant le bleu et le vert, la deuxième en alternant le violet et le orange, puis à nouveau le bleu et le vert, etc.



On constate qu'une dalle 2×2 recouvre exactement une case de chaque couleur, quelle que soit sa position, tandis qu'une dalle 4×1 ne recouvre que deux couleurs, deux cases dans chacune. Ainsi, par exemple le nombre de cases bleues a la même parité que le nombre de dalles carrées. On ne peut donc pas remplacer une dalle 2×2 par une dalle 4×1 ou vice-versa.

Solution de l'exercice 19

- Si n divise a ou b , alors c'est évident qu'un tel recouvrement est possible. On suppose alors que n ne divise ni a , ni b
- On utilise n couleurs de sorte qu'un rectangle $1 \times n$ recouvre n couleurs différentes à chaque fois. On numérote les couleurs de 1 à n , et on compte le nombre de case coloriées dans le grand rectangle
- On effectue la division euclidienne de a et b par n . On a $a = k \cdot n + r$ et $b = l \cdot n + q$
- On sait qu'il y a autant de cases de chaque couleur sur les rectangles $b \times (n \cdot k)$ et $r \times (l \cdot n)$ donc pour que $a \times b$ soit recouvrables pour des rectangles $1 \times n$, Il faut que ça soit le cas pour le rectangle $r \times q$ or on a le coloriage suivant (avec le rectangle $r \times q$ représenté en blanc).

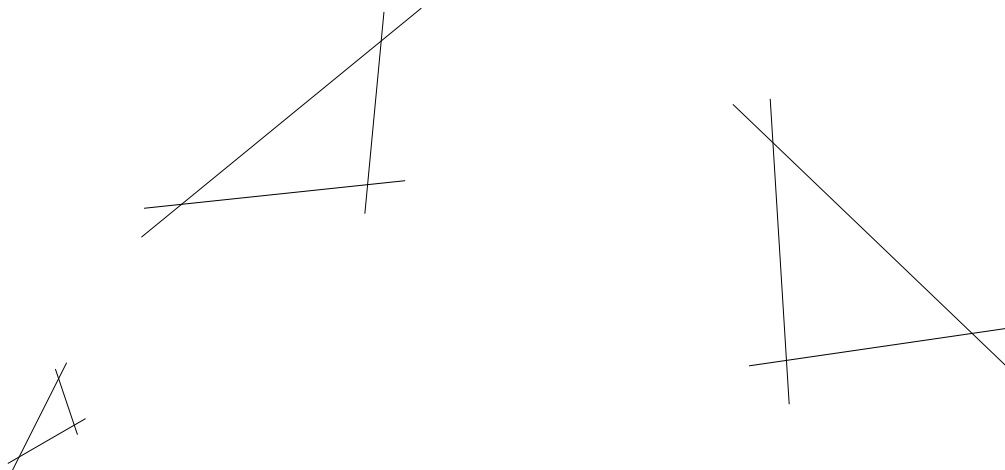
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

Supposons que le rectangle $r \times q$ fois a autant de cases de chaque couleur : il doit donc en avoir $\frac{rq}{n}$. Mais la couleur 1 est représentée $\min(r, q)$ fois. Donc $\min(r, q) = \frac{rq}{n}$. Si par l'absurde $r, q > 0$, disons $r \leq q$, alors $n = q$, contradiction. Donc soit r soit q est nul, ce qui signifie bien que n divise a ou b .

6 Géométrie : Triangles semblables (Eva)

Les triangles semblables sont très utiles en géométrie, car ils permettent de passer de relations d'angles à des égalités de rapports de longueurs et vice-versa.

- Intuitivement, deux triangles sont **semblables** si en les translatants/retournant/aggrandissant, ils sont superposables :



- On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si :

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}, \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \text{ et } \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

Et on le note : $ABC \sim A'B'C'$

Attention : l'ordre des points est important !

- La propriété intéressante est que :

$$ABC \sim A'B'C' \iff \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Ce qui nous permet donc de passer d'égalités d'angles à des égalités de rapports, ainsi que dans l'autre sens.

Pour retrouver quels rapports on a, c'est assez facile : deux points sont l'un au dessus de l'autre si ils ont la même position dans leur triangle.

- On peut également se contenter de montrer une égalité de rapports, et l'égalité de l'angle entre les deux côté. On a :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

Pour résumer, pour montrer que deux triangles sont semblables, on a besoin au choix :

- des 3 égalités d'angle (2 suffisent donc car à partir de deux angles dans un triangle, on peut trouver le troisième)
- des trois égalités de rapports de longueur
- d'une égalité entre deux rapports et de l'angle au milieu de ce rapport (c'est important d'avoir cet angle et pas un autre)

Exercices

Exercice 1 (Pythagore)

Montrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ lorsque ABC est un triangle rectangle en A

Exercice 2

Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 3 (droite des milieux)

Soit ABC un triangle et E, D les milieux respectifs de AB et AC Montrer que $(ED) \parallel (BC)$

Exercice 4 (puissance d'un point)

Soit ω un cercle, A, B, C, D des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites AB et CD (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point P . Montrez que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Exercice 5 (puissance d'un point intérieur)

Soit ω un cercle et P un point hors du cercle. On prend deux droites (d) et (d') passant par P qui intersectent chacune le cercle 2 fois. On nomme ces intersections A, A' et B, B' . Soit X l'intersection des droites (AB') et $(A'B)$. Montrer que $XA \cdot XB' = XB \cdot XA'$

Exercice 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point de $[AC]$. On nomme E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F celui sur $[AD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$

Exercice 7

Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 , s'intersectant en deux points X et Y . Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y . On note B l'intersection de (AY) en Ω_2 . Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Exercice 8

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M et N les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$. La droite (DB) coupe les droites (AM) et (AN) respectivement en P et Q . Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un losange, F sur le segment $[AD]$ et E sur le segment $[AB]$. L le point d'intersection de (FC) et (BD) , K celui de (EC) et (BD) , Q celui de (FK) et (BC) et P celui de (EL) et (DC) . Montrer que $CP = CQ$

Exercice 10

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en C . Soit D et E des points sur $[CA]$ et $[CB]$ tels que $CD = CE$. Soient U et V les points d'intersection des perpendiculaires à (AE) passant par D et C avec (AB) .

Montrer que $UV = VB$.

Exercice 11 (Ptolémée)

Soit A, B, C, D quatre points disposés dans cet ordre sur un cercle. Montrer que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

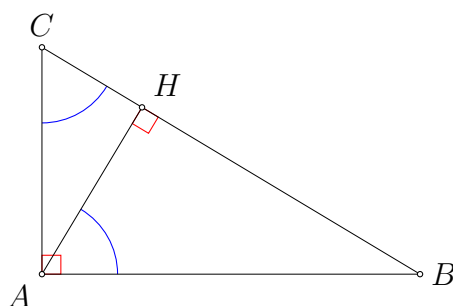
Exercice 12

Soit ABC un triangle, D, E, F les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit X un point dans ABC . On note A', B', C' les symétriques de X par rapport à D, E, F .

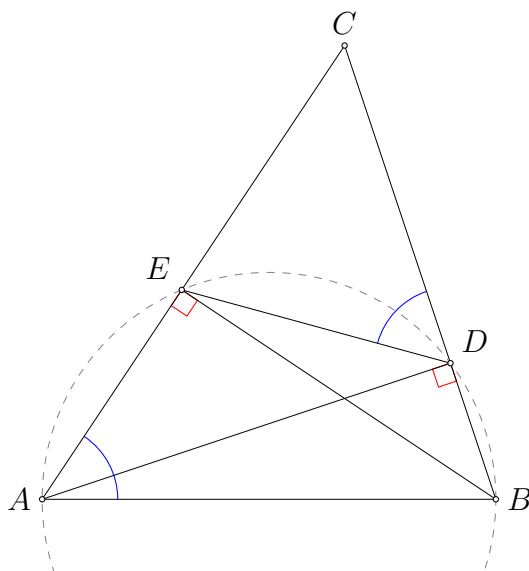
Montrer que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

Solutions**Solution de l'exercice 1**

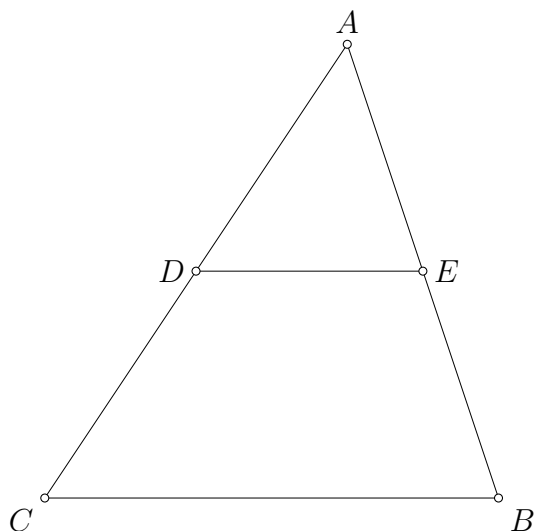
Soit H_A le pied de la hauteur issue de A : On a $ABC \sim H_A B A \sim H_A A C$ donc $\frac{AB}{AH_B} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BH_A$ De même $\frac{AC}{AH_C} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = BC \cdot CH_A$ Donc on a bien $AB^2 + AC^2 = BC(H_A B + H_A C) = BC^2$

**Solution de l'exercice 2**

On a $ABDE$ cocycliques donc $\widehat{CDE} = 180 - \widehat{BDE} = \widehat{BAC}$ ce qui conclut

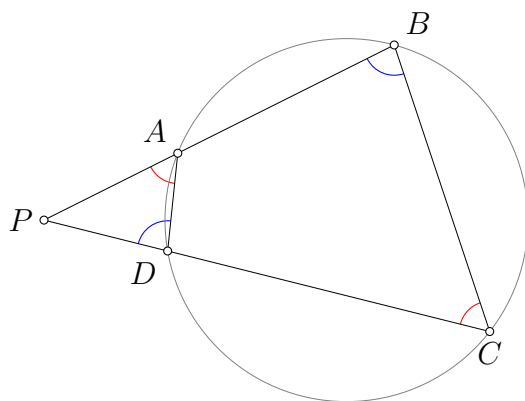
**Solution de l'exercice 3**

On a $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ et $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$ On a donc bien $AED \sim ABC$ donc $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ donc $(ED) \parallel (BC)$



Solution de l'exercice 4

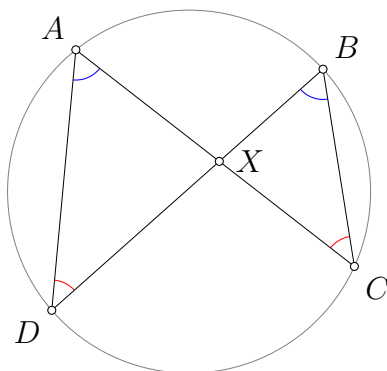
On a $PCA \sim PBD$ donc $\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \Leftrightarrow PC \cdot PD = PA \cdot PB$.



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

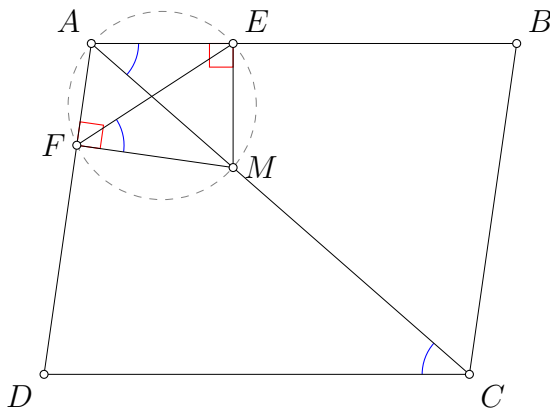
Solution de l'exercice 5

On a $AA'X \sim BB'X$ Il vient donc $\frac{AX}{BX} = \frac{A'X}{B'X} \Rightarrow AX \cdot XB' = XB \cdot XA'$

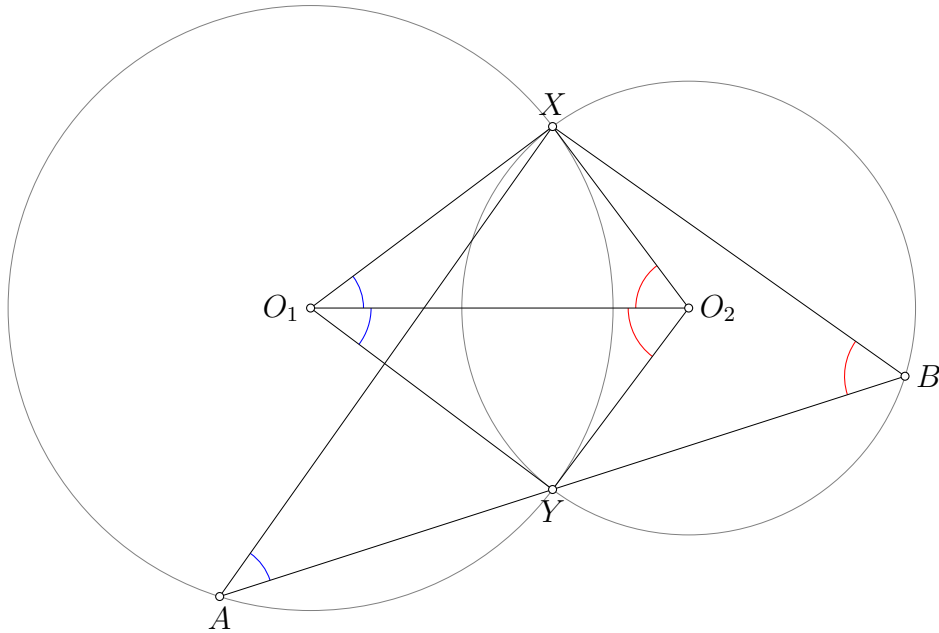


Solution de l'exercice 6

On a premièrement $\widehat{AFM} = 90 = 180 - 90 = 180 - \widehat{AEM}$ Donc $AEMF$ sont cocycliques.
 Donc $\widehat{EMF} = 180 - \widehat{FAE} = 180 - \widehat{BAD}$ Or on est dans un parallélogramme donc $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAD} = \widehat{EMF}$. On a de plus $\widehat{EFM} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ On a donc les triangles MFE et BAC semblables donc $\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$



Solution de l'exercice 7



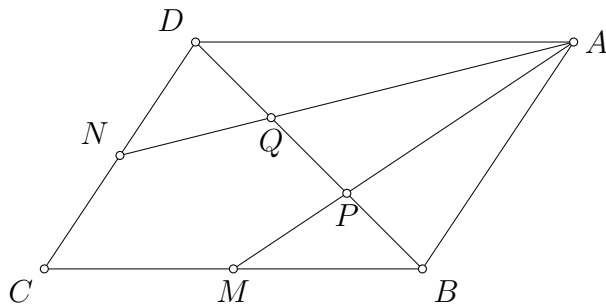
Par théorème de l'angle au centre, on a : $\widehat{ABX} = \widehat{YBX} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{YO_1X}$.

Par symétrie, on a : $\widehat{XO_1O_2} = \widehat{YO_1O_2}$, donc $\frac{1}{2} \cdot \widehat{YO_1X} = \widehat{XO_1O_2}$. (Si cela ne vous convainc pas, on peut regarder la médiatrice de $[XY]$, elle passe par O_1 et O_2 , et comme XO_1Y est isocèle en O_1 , la médiatrice de $[XY]$ est aussi la bissectrice de $\widehat{XO_1Y}$, donc on a l'égalité d'angle désirée)

Ainsi, on a $\widehat{ABX} = \widehat{O_2O_2X}$. De même, on a : $\widehat{BAX} = \widehat{O_1O_2X}$.

Il en résulte que $AXB \sim O_1XO_2$.

Solution de l'exercice 8



Par angles alternes-internes, on a $\widehat{QDN} = \widehat{QBA}$ et $\widehat{QND} = \widehat{QAB}$, donc $QDN \sim QBA$.

Ainsi, on a $\frac{DQ}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$ car $AB = DC$ et N est le milieu de $[DC]$. (On peut remarquer que c'est en fait le théorème de Thalès dans $DNQAB$)

Donc $DQ = \frac{QB}{2}$, ce qui implique $DQ = \frac{DB}{3}$. On montre de même que $BP = \frac{DB}{3}$, et il vient alors que $QP = BP - DQ - PB = \frac{BD}{3}$.

On a bien alors $DQ = QB = PB$.

Solution de l'exercice 9

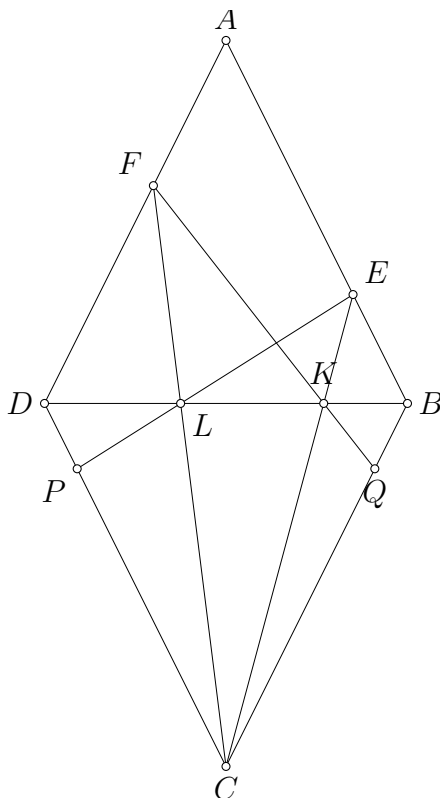
On remarque que $BQK \sim KFD$, ce qui nous donne $\frac{BQ}{FD} = \frac{QK}{DK}$. De même, on a $KEB \sim KCD$ donc $\frac{KB}{KD} = \frac{EB}{CD}$. En combinant les deux on obtient $\frac{QK}{DF} = \frac{EB}{CD}$, c'est-à-dire $QB = \frac{EB \cdot DF}{CD}$.

On réitère : $DPL \sim BEL$ donc $\frac{DP}{BE} = \frac{DL}{BL}$. De même $DFL \sim BCL$ donc $\frac{DF}{BC} = \frac{DL}{BL}$.

En combinant on a donc

$$DP = \frac{DF \cdot BE}{BC} = \frac{EB \cdot DF}{CD} = BQ.$$

On a donc bien $CQ = CP$



Solution de l'exercice 10

Voir le [poly de valbonne de 2021](#), page 96, exercice 8.

Solution de l'exercice 11

On nomme E le point d'intersection des diagonales et F le point de EC tq $\widehat{ABE} = \widehat{FBC}$
On a $BFA \sim BCD$ et $BFC \sim BAD$ donc $\frac{AF}{AB} = \frac{DC}{DB}$ et $\frac{CF}{CB} = \frac{DA}{DB}$ donc $(AF + FC) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$

Solution de l'exercice 12

Voir le [poly de valbonne de 2021](#), page 96, exercice 7.

7 Combinatoire : Jeux (Oscar)

Exercices

Exercice 1

Antoine et Oscar jouent à un jeu. Sur une table, il y a 20 pièces. En commençant par Antoine, ils peuvent prendre 1, 2, 3, 5 ou 7 pièces. Celui qui prend la dernière pièce gagne. Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 2

Soit $n \geq 1$. Discriminant et Oscar jouent à un jeu. Ils posent n balles sur la table. Chacun leur tour, en commençant par Discriminant, ils prennent 1, 2, 3 ou 4 balles. Celui qui prend la dernière balle gagne.

En fonction de n , lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 3

Rémi et Oscar jouent à un jeu sur un échiquier 2025×2025 , avec initialement un 0 dans chaque case. En commençant par Rémi, chacun leur tour, ils doivent ajouter 1 à un nombre de la grille, pour un total de 2^{2025} ajouts.

A la fin du jeu, on note $l_1, \dots, l_{2025}$ la somme des nombres dans chacune des lignes et $c_1, \dots, c_{2025}$ la somme des nombres dans chacune des colonnes. Oscar gagne si pour tout $1 \leq i \leq 2025$, il existe $1 \leq j \leq 2025$ tel que $l_i = c_j$ et pour tout $1 \leq j \leq 2025$, il existe $1 \leq i \leq 2025$ tel que $c_j = l_i$. Sinon, c'est Rémi qui gagne.

Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 4

Théo et Oscar jouent à un jeu sur un 100-gone régulier. Chacun leur tour, en commençant par Oscar, ils peuvent choisir un nombre entre 1 et 100 qui n'a pas encore été choisi et le mettre sur un des sommets qui n'a pas encore de nombre.

A la fin du jeu, on note S la somme maximale parmi les nombres de 3 sommets consécutifs. Oscar veut maximiser S et Théo cherche à le minimiser.

Si les deux joueurs jouent de manière optimale, combien vaudra S ?

Exercice 5 (JBMO TST 2020)

Soit $n \geq 3$. Paul et Oscar jouent à un jeu. Sur une table, il y a n pièces. Chacun leur tour, en commençant par Oscar, en notant k le nombre de pièces encore sur la table, ils peuvent prendre l pièces, avec $l \geq 1$ tel que k et l sont premiers entre eux. Le joueur qui prend la dernière pièce gagne.

En fonction de n , lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 6 (C1 JBMO 2022)

Aurélien et Oscar jouent à un jeu. Sur un tableau, ils écrivent les entiers de 1 à 2022. Puis, chacun leur tour, en commençant par Oscar, ils choisissent un entier pas encore entouré et l'entourent en bleu ou en rouge.

A la fin du jeu, on note N le nombre de paires (a, b) d'entiers $1 \leq a < b \leq 2022$ telles que $b - a = 3$ et que a et b sont de la même couleur. Oscar veut maximiser N et Aurélien le minimiser.

Si les deux joueurs jouent de manière optimale, combien vaudra N .

Exercice 7

Martin et Oscar jouent à un jeu sur un échiquier 5202×5202 . Chacun son tour, en commençant par Oscar, Oscar met un X dans une case vide, et puis Martin met un O dans une case vide. Oscar gagne s'il réussit à remplir un carré 2×2 de X, et sinon c'est Martin qui gagne. Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 8 (C1 JBMO 2020)

Emilhan et Oscar jouent à un jeu. Sur un tableau, ils ont écrit le nombre 2. En commençant par Oscar, en notant n le nombre au tableau, ils doivent le remplacer par $n + p$ où p est un diviseur premier de n .

Le premier joueur qui écrit un nombre strictement plus grand que $2025^{2025^{2025}}$ perd.

Lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

On remarque que le jeu est symétrique entre les deux joueurs. Ainsi, en partant depuis la fin, on remonte pour déterminer pour chaque nombre de pièce si la situation est gagnante ou perdante pour celui à qui c'est de jouer :

- 1 est gagnant en prenant 1 balle.
- 2 est gagnant en prenant 2 balles.
- 3 est gagnant en prenant 3 balles.
- 4 est perdant.
- 5 est gagnant en prenant 1 balle.
- 6 est gagnant en prenant 2 balles.
- 7 est gagnant en prenant 3 balles.
- 8 est perdant.
- 9 est gagnant en prenant 1 balle.
- 10 est gagnant en prenant 2 balles.
- 11 est gagnant en prenant 3 balles.
- 12 est perdant.
- 13 est gagnant en prenant 1 balle.
- 14 est gagnant en prenant 2 balles.
- 15 est gagnant en prenant 3 balles.
- 16 est perdant.
- 17 est gagnant en prenant 1 balle.
- 18 est gagnant en prenant 2 balles.
- 19 est gagnant en prenant 3 balles.
- 20 est perdant.

Donc, comme c'est Antoine qui commence, c'est Oscar qui gagne.

Solution de l'exercice 2

On remarque que le jeu est symétrique entre les deux joueurs.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, s'il y a $5k$ balles, alors le joueur dont ce n'est pas le tour dispose d'une stratégie gagnante :

- Initialisation : pour $k = 1$, si le premier joueur choisit $1 \leq l \leq 4$, alors le second peut choisir $1 \leq 5 - l \leq 4$ pièces et donc ainsi gagner.
- Hérité : pour $k \geq 2$, supposons la propriété vraie au rang $k - 1$ et montrons-la au rang k .

Si le premier joueur choisit $1 \leq l \leq 4$, alors le second peut choisir $1 \leq 5 - l \leq 4$ pièces. Ainsi, c'est à nouveau au premier joueur de jouer, et il y a $5(k - 1)$ pièces : par hypothèse de récurrence, c'est le second qui gagne.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons une disjonction de cas :

- Si $5|n$, alors comme vu ci-dessus, c'est le deuxième joueur, Oscar, qui gagne.
- Sinon, on pose r le reste de la division de n par 5. Ainsi, $1 \leq r \leq 4$.
Donc, en prenant r pièces, Discriminant remporte la partie car Oscar doit jouer et il reste $n - r$, qui est divisible par 5, pièces.

Finalement, Discriminant gagne si 5 ne divise pas n , et sinon c'est Oscar qui l'emporte.

Solution de l'exercice 3

Oscar souhaite garantir que $c_i = l_i$ pour tout $1 \leq i \leq 2025$. Pour cela, lorsque Rémi joue sur la case (i, j) , Oscar joue sur la case (j, i) .

Au cours de ces deux tours, l_i et c_j ont augmenté de 1 du fait de l'action d'Oscar, et l_j et c_i ont augmenté du fait de l'action de Rémi. Donc, on conserve $l_j = c_j$ et $l_i = c_i$.

A la fin, $c_i = l_i$ pour tout $1 \leq i \leq 2025$ et donc Oscar remporte la partie.

Oscar possède donc une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 4

On cherche à montrer que $S = 201$ si les joueurs jouent de manière optimale.

- Stratégie de Théo : Théo groupe les sommets par paire de sommets consécutifs. Ainsi, si Oscar met un i sur l'un des sommets d'une paire, Théo met un $101 - i$ sur l'autre sommet de la paire.
Alors, à la fin, sur chaque paire, la somme des deux nombres sera de 101. Comme parmi 3 nombres consécutifs il y a exactement une paire, la somme de 3 nombres consécutifs sera d'au plus $101 + 100 = 201$.
- Stratégie d'Oscar : Oscar choisit un sommet arbitraire et y met le 100.
 - Si Théo ne joue pas le 99, alors Oscar place le 99 sur l'un des sommets à côté du 100. Dès lors, à gauche ou à droite de ces deux sommets, il y aura au moins un 2 et donc une somme d'au moins $100 + 99 + 2 = 201$.
 - Si Théo joue un 99.
 - Si Théo place le 99 à côté du 100, alors comme ci-dessus, il y aura forcément une somme de 201.
 - Sinon, Oscar peut placer le 98 à côté du 100 de sorte qu'il ne soit pas à côté du 99. Dès lors, après le coup de Théo, Oscar pourra placer à gauche ou à droite de ces deux nombres un 96 ou un 97. Ainsi, il s'assurera d'obtenir une somme d'au moins $100 + 98 + 96 = 294 > 201$.

Donc, dans tous les cas, Oscar peut s'assurer d'obtenir une somme d'au moins 201 sur 3 sommets consécutifs.

Finalement, si les deux joueurs jouent de manière optimale, on aura $N = 201$.

Solution de l'exercice 5

On remarque que le jeu est symétrique entre les deux joueurs.

Montrons par récurrence forte que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, s'il reste k pièces sur la table, alors le joueur dont c'est le tour gagne si et seulement si k est impair.

- Initialisation : pour $k = 1$, c'est bien le premier jour qui gagne.
- Hérédité : pour $k \geq 2$, supposons la propriété vraie aux rangs $< k$ et montrons-la au rang k .
 - Si k est impair, alors le joueur peut prendre une pièce (car 1 et k sont premiers entre eux) et donc l'autre joueur se retrouve avec un nombre pair de pièces à son tour : il va donc perdre par hypothèse de récurrence.
 - Si k est pair. Alors pour tout $1 \leq l \leq k$ tel que l est premier avec k , l est impair. Donc, $k - l$ est impair et ainsi si le premier joueur choisi l pièces, l'autre se retrouvera avec un nombre impair de pièces à son tour : il va gagner. Donc, peut importe son choix, le joueur dont c'est le tour perd.

Finalement, Oscar gagne si n est impair et Paul gagne si n est pair.

Solution de l'exercice 6

On dit qu'une paire (a, b) avec $1 \leq a < b \leq 2022$ est belle si $b - a = 3$ et si a et b sont de la même couleur.

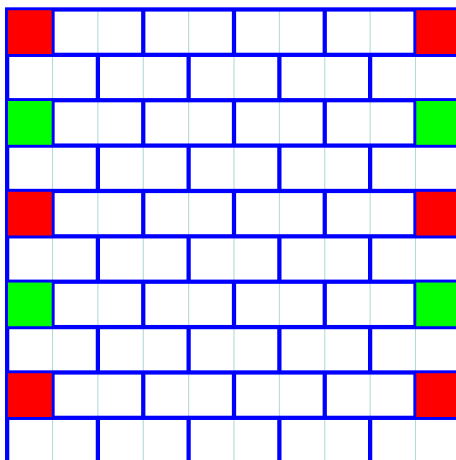
On cherche à montrer que $N = 1008$ si les joueurs jouent de manière optimale.

- Stratégie d'Aurélien : On groupe les nombres par paire : $(1, 4), (2, 5), (3, 6), (7, 10), (8, 11), (9, 12), \dots, (2019, 2022)$. Si Oscar colorie l'un des nombres d'une paire, alors Aurélien colorie l'autre de la couleur opposée. Ainsi, sur les 2019 paires belles possibles $(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), \dots, (2019, 2022)$, Aurélien en empêche 1011.
Il y aura donc au plus 1008 paires belles.
- Stratégie d'Oscar : A chacun des tours, si Oscar peut colorier un nombre distant de 3 d'un nombre déjà colorié, il le fait et crée donc une nouvelle paire belle. C'est impossible pour lui si pour $i = 0, 1, 2$, tous les nombres congrus à $i \pmod 3$ sont tous coloriés ou ne le sont tous pas. Dans ce cas, il colorie un nombre d'une classe $\pmod 3$ avec aucun nombre colorié. Cela peut arriver au plus 3 fois car il ne coloriera pour la première fois un nombre d'une classe au plus 3 fois (1 fois par classe). Comme au total il a 1011 tours, il peut s'assurer de créer $1011 - 3 = 1008$ belles paires.

Finalement, $N = 1008$ si les deux joueurs jouent de manière optimale.

Solution de l'exercice 7

On pave la grille de cette manière (en prenant comme exemple un grille 10×10) : On remarque



qu'en plaçant un carré 2×2 , il y a forcément exactement un domino entier qui est recouvert par le carré. On en déduit la stratégie suivante pour Martin :

- Si Oscar joue sur une case "non colorée", Martin joue sur la case qui appartient au même domino.
- Si Oscar joue sur une case colorée, Martin joue sur la case colorée de la même ligne.

Ainsi, Oscar ne peut remplir un domino, et donc ne peut remplir un carré 2×2 .

C'est donc Martin qui possède une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 8

Tout d'abord, on remarque que le jeu est symétrique pour les deux joueurs. De plus, comme le nombre écrit au tableau augmente au moins de 2 à chaque fois, le jeu va nécessairement se terminer.

Ainsi, lorsqu'un 12 est écrit au tableau, c'est soit le joueur dont c'est le tour qui a une stratégie gagnante, soit c'est l'autre joueur :

— Si c'est le joueur dont c'est le tour. Voici une stratégie pour Oscar :

- Oscar efface le 2 et le remplace par $2 + 2 = 4$.
- Emilhan efface le 4 et le remplace par $4 + 2 = 6$.
- Oscar efface le 6 et le remplace par $6 + 3 = 9$.
- Emilhan efface le 9 et le remplace par $9 + 3 = 12$.

Ainsi, Oscar se trouve à son tour avec un 12 au tableau : par hypothèse, il dispose alors d'une stratégie gagnante.

— Si c'est l'autre joueur. Voici une stratégie pour Oscar :

- Oscar efface le 2 et le remplace par $2 + 2 = 4$.
- Emilhan efface le 4 et le remplace par $4 + 2 = 6$.
- Oscar efface le 6 et le remplace par $6 + 2 = 8$.
- Emilhan efface le 8 et le remplace par $8 + 2 = 10$.
- Oscar efface le 10 et le remplace par $10 + 2 = 12$.

Ainsi, Emilhan se trouve à son tour avec un 12 au tableau : par hypothèse, Oscar dispose alors d'une stratégie gagnante.

Donc, dans tous les cas, Oscar dispose d'une stratégie gagnante.

8 Géométrie : TD de révisions (Aurélien)

à suivre...

4 Entraînement de fin de parcours

Stage olympique de Valbonne 2025

24 août 2025

Veillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 1

Soit A, B, C sur un cercle Γ . La tangente à Γ en A recoupe (BC) en E et on note D le pied de la bissectrice en A .

Montrer que AED est isocèle.

Exercice 2

Martin invite 50 couples à sa soirée. Il hésite entre ses 10 couleurs préférées, donc il impose que chaque personne choisisse la couleur de son habit parmi ces 10 couleurs. Montrer qu'il peut mettre deux couples à une table, de façon à ce qu'au plus 2 couleurs soient présentes à la table.

Exercice 3

Soit ABC un triangle. On prend K sur (BC) et on prend L sur (AB) , M sur (AC) tels que $ALKM$ soit un parallélogramme. On note T l'intersection du cercle circonscrit à AKC et de (KM) et S celle du cercle circonscrit à AKB et de (KL) . On suppose que $MLST$ est cyclique. Montrer que K est le milieu de $[BC]$.

Exercice 4

On prend une grille 2025×2025 et dans chaque case on écrit un nombre entre 1 et 4049.

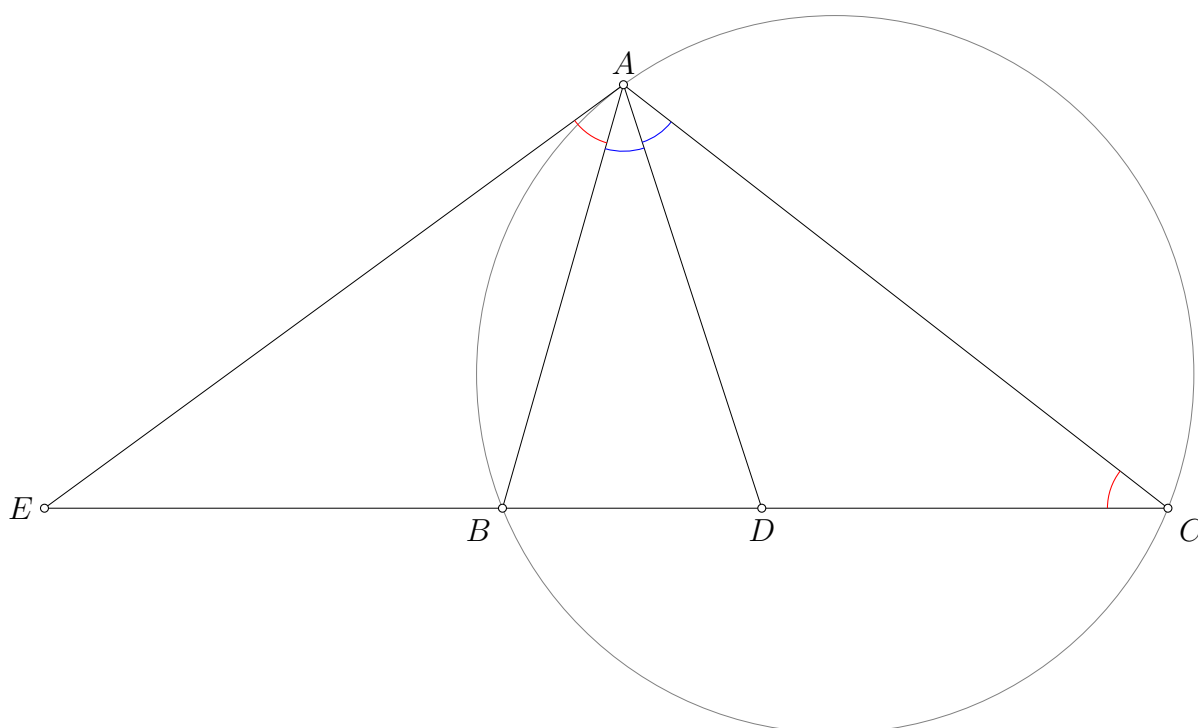
On définit la croix i , qui est l'ensemble des nombres écrits dans la ligne i et la colonne i , comptés avec multiplicité. (Si 2 apparaît 4 fois il apparaît 4 fois dans la croix).

On dit qu'une grille est *jolie* si dans chaque croix, chaque nombre de $\{1, \dots, 4049\}$ apparaît une unique fois.

Existe-t'il une grille *jolie*?

Solutions

Solution de l'exercice 1



Par angle tangentiel, $\widehat{EAB} = \widehat{ACB}$.
De plus,

$$\begin{aligned}\widehat{ADE} &= \widehat{DAC} + \widehat{ACB} \\ &= \widehat{DAB} + \widehat{EAB} \\ &= \widehat{EAD}\end{aligned}$$

(par la somme des angles d'un triangle)
(la bissectrice)

Donc AED est isocèle en E .

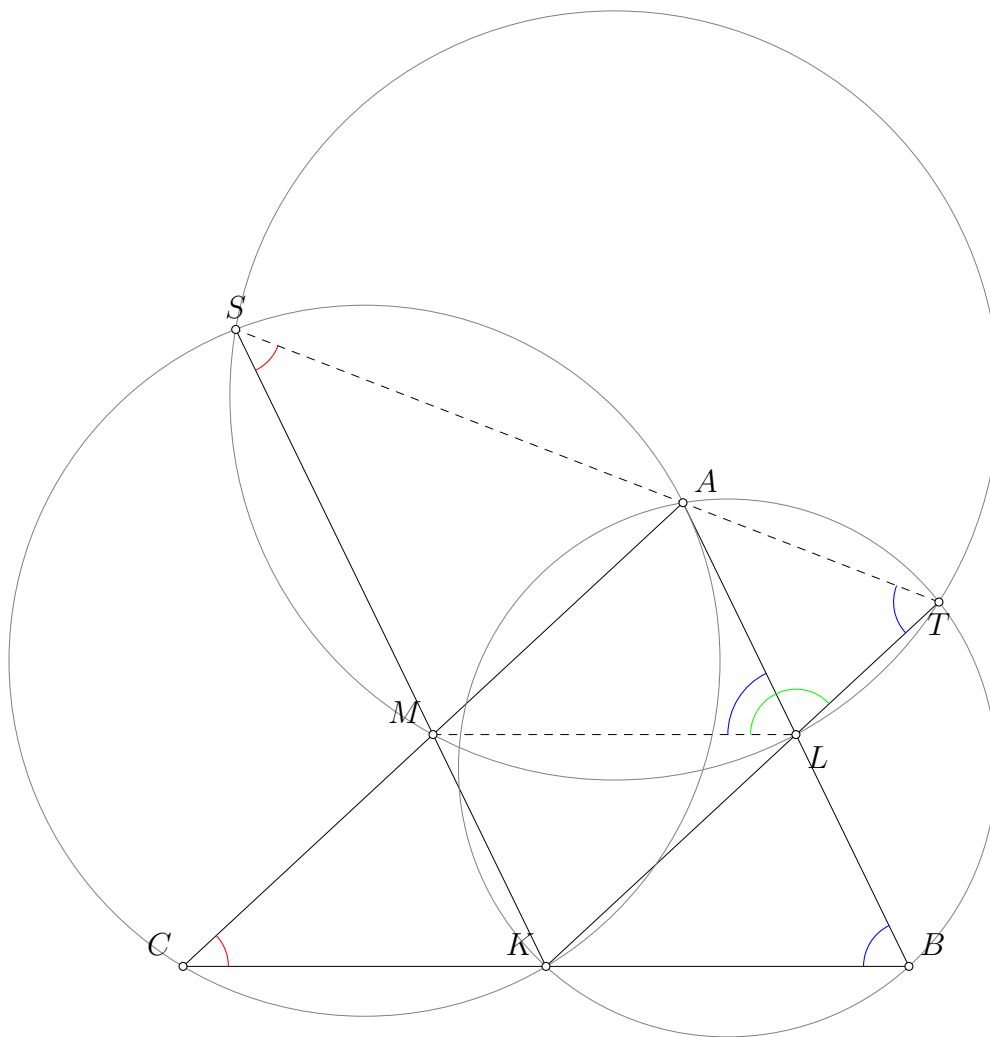
Solution de l'exercice 2

On a 3 cas à traiter :

- S'il y a deux couples unicolores (ie dans chaque couple, les deux partenaires sont de la même couleur), on a déjà gagné : on les assoie à la même table.

- S'il n'y a aucun couple unicolore, alors tout couple est bicolore. On associe à chaque couple l'ensemble des deux couleurs associées. Il y a $\binom{10}{2} = 45$ tels ensembles et 50 couples. Par le principe des tiroirs, on dispose de deux couples habillés en les mêmes couleurs et on les met à la même table.
- S'il y a un seul couple unicolore, les autres couples sont bicolores et on en a 49. De même, il y a 45 ensembles de deux couleurs possibles pour 49 couples, donc deux ont les mêmes couleurs et ça conclut.

Solution de l'exercice 3



- Premièrement, montrons que si (LM) est parallèle à (BC) , alors K est le milieu de $[BC]$. (Remarque : Dans ce cas, étant donné qu'en plus (KM) et (AB) sont parallèles, et (KL) et (AC) aussi, on a plein de triangles semblables ! ABC , ALM , LBK , MKC , et KML . On peut conclure avec les triangles semblables, en montrant que les 4 derniers sont isométriques, ce qui donne directement $BK = KC$)
 $AMKL$ est un parallélogramme donc $KM = AL$. De même, avec notre hypothèse supplémentaire $LMKB$ est un parallélogramme donc $KM = BL$. Ainsi, $AL = LB$ et L est le milieu de $[AB]$. Mais comme (KL) et (AC) sont parallèles, par le théorème de Thalès K est le milieu de $[BC]$.

— On va donc montrer que (LM) et (BC) sont parallèles.

On pose $\gamma = \widehat{BCA} = \widehat{ABC}$, $\alpha = \widehat{CAB}$. On a $\alpha + \beta + \gamma = 180$ et il s'agit de montrer $\widehat{ALM} = \beta$ pour prouver le parallélisme.

Par angle inscrit (dans $AKCT$) $\widehat{STM} = \widehat{ATK} = \widehat{ACK} = \gamma$

Par angle complémentaire (dans $SLMT$), $\widehat{SLM} = 180 - \widehat{STM} = 180 - \gamma = \alpha + \beta$.

Comme (LK) et (AC) sont parallèles, (BLK) et (BAC) sont semblables et donc $\widehat{BLK} = \alpha$.

Ainsi,

$$\widehat{ALM} = \widehat{SLM} - \widehat{SLA} = \alpha + \beta - \widehat{BLK} = \alpha + \beta - \alpha = \beta$$

Ce qui conclut !

Solution de l'exercice 4

On procède par l'absurde, supposons que l'on ait une grille *jolie* :

Si un nombre est écrit sur une case (i, i) il apparaît dans 1 croix. Si il est écrit dans une autre case, il apparaît dans 2 croix. Or il y a 2025 croix.

Supposons qu'un nombre ne soit écrit sur aucune case diagonale. Il apparaît donc dans un nombre pair de croix, or il y en a 2025.

Donc chaque nombre est écrit au moins une fois sur la diagonale, ce qui est absurde car il y a 4049 nombres pour 2025 cases diagonales.

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1	Première partie : Algèbre et Arithmétique	152
1	Algèbre : Inégalités classiques (Hugo et Martin)	152
2	Arithmétique : TD de révisions (Hadriel)	163
3	Arithmétique : Ordre 1 (Gaëtan)	167
4	Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Arthur)	171
5	Arithmétique : Ordre 2 (Héloïse)	180
6	Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Aurélien)	184
7	Algèbre : Méthode sp et relations de Viète (Anatole et Théo)	185
8	Arithmétique : Equations diophantiennes (Paul A)	201
2	Entraînement de mi-parcours	211
3	Deuxième partie : Géométrie et Combinatoire	215
1	Géométrie : Révisions (Rémi)	215
2	Combinatoire : Révisions (Maryam)	222
3	Combinatoire : Double comptage (Noé)	227
4	Géométrie : Configurations (Antoine)	247
5	Géométrie : Axes radicaux (Noam)	261
6	Combinatoire : Grilles (Oscar et Paul LL)	274
7	Combinatoire : TD de pot pourri (Emilhan)	282
8	Géométrie : TD de Pot pourri (Mano)	291
4	Entraînement de fin de parcours	292

1 Première partie : Algèbre et Arithmétique

1 Algèbre : Inégalités classiques (Hugo et Martin)

Rappels :

- Les outils les plus puissants sont les inégalités classiques. L'IAG à deux variables et plus et l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont des inégalités sert à **séparer** des produits qui mélangent plusieurs variables. Le corollaire de Cauchy-Schwarz, à savoir l'inégalité des mauvais élèves, est redoutablement efficace pour minorer une somme de fractions. L'IAH sert à comparer une somme de termes et la somme de ses carrés.
- Une astuce supplémentaire est le lemme du tourniquet, présent sous la forme $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ et sous la forme $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$.
- Les inégalités nécessitent beaucoup de manipulations algébriques. On n'hésitera pas à **découper** une expression en plusieurs morceaux avant d'appliquer des inégalités. Le découpage s'intuit en **investiguant** le cas d'égalité des inégalités que l'on souhaite utiliser.

Exercices

Exercice 1 (Muirhead interdit)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + ab^3c + abc^3$$

Exercice 2 (Envoi Algèbre 2020-2021)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Et donner le(s) cas d'égalité.

Exercice 3

Soient x, y, z positifs et non tous nuls. Montrer que

$$\frac{1}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{9}{z+x} \geq \frac{18}{x+y+z}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 4 (Greece 2015 TST JBMO)

Montrer que

$$(3x+y)(3y+z)(3z+x) \geq 64xyz$$

Exercice 5

Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Montrer que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

Exercice 6

Soient $a, b, c, m > 0$. Montrer que

$$(a^2 + m)(b^2 + m)(c^2 + m) \geq (ab + m)(bc + m)(ca + m)$$

Exercice 7

Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a^2}{b}\right) \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \left(1 + \frac{c^2}{a}\right) \geq (1+a)(1+b)(1+c)$$

et donner le cas d'égalité.

Exercice 8 (JBMO SL 2023 A1)

Montrer que pour tous a, b, c, d ,

$$\frac{2}{(a+b)(c+d) + (b+c)(a+d)} \leq \frac{1}{(a+c)(b+d) + 4ac} + \frac{1}{(a+c)(b+d) + 4bd}.$$

Exercice 9 (Grèce TST JBMO 2020)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Montrer que :

$$\frac{a+b}{b^2+ab+b^2} + \frac{b+c}{b^2+bc+c^2} + \frac{a+c}{a^2+ac+c^2} \leq 2$$

Exercice 10 (Envoi Algèbre 2022-2023)

Soient $x, y, z > 0$ tels que $xy + yz + zx = 1$. Montrer que

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \right) \geq 5$$

Exercice 11 (Turquie TST JBMO 2023)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b} + \frac{b^4+1}{c^3+c^2+c} + \frac{c^4+1}{a^3+a^2+a} \geq 2$$

Exercice 12 (JBMO SL 2019 A2)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $abc = \frac{2}{3}$, montrer que :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

Exercice 13 (Envoi Pot-Pourri 2020-2021)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$\frac{a^3 + 5b^3}{3a + b} + \frac{b^3 + 5c^3}{3b + c} + \frac{c^3 + 5a^3}{3c + a} \geq \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Exercice 14 (Envoi Algèbre 2019-2020)

Soient $a, b, c > 0$ tels que $ab + bc + ca = abc$. Montrer que

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{6}$$

Solutions**Exercice 1** (Muirhead interdit)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, montrer que :

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + ab^3c + abc^3$$

Solution de l'exercice 1

L'inégalité arithmético-géométrique donne :

$$\begin{aligned} \frac{a^5 + a^5 + a^5 + b^5 + c^5}{5} &\geq \sqrt[5]{a^{15}b^5c^5} = a^3bc \\ \frac{b^5 + b^5 + b^5 + a^5 + c^5}{5} &\geq \sqrt[5]{a^5b^{15}c^5} = ab^3c \\ \frac{c^5 + c^5 + c^5 + b^5 + a^5}{5} &\geq \sqrt[5]{a^5b^5c^{15}} = abc^3 \end{aligned}$$

En sommant ces trois inégalités, on obtient bien que :

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq a^3bc + ab^3c + abc^3$$

Exercice 2 (Envoi Algèbre 2020-2021)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Et donner le(s) cas d'égalité.

Solution de l'exercice 2

D'après l'inégalité des mauvais élèves, en factorisant au préalable par 2 :

$$2 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 1 = 2 \times \frac{(1+1+1)^3}{a+b+b+c+c+a} = \frac{2 \times 9}{2(a+b+c)} = \frac{9}{a+b+c}.$$

Pour déterminer le cas d'égalité, il faut regarder le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves. Celui-ci indique que si l'on a égalité, alors $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a+c} = \frac{1}{b+c}$, donc $a+b = b+c = a+c$. En particulier, comme $a+b = b+c$, $a = c$ et comme $a+b = a+c$, $b = c$, donc $a = b = c$.

Réciproquement si $a = b = c$, alors

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} = 3 \times \frac{2}{2a} = \frac{3}{a} = \frac{9}{a+b+c}$$

et on a bien égalité.

Exercice 3

Soient x, y, z positifs et non tous nuls. Montrer que

$$\frac{1}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{9}{z+x} \geq \frac{18}{x+y+z}$$

et donner les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 3

D'après l'inégalité des mauvais élèves, on a

$$\frac{1}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{9}{z+x} = \frac{1^2}{x+y} + \frac{2^2}{y+z} + \frac{3^2}{z+x} \geq \frac{(1+2+3)^2}{2(x+y+z)} = \frac{18}{x+y+z}$$

Il y a égalité s'il y a égalité dans l'inégalité des mauvais élèves, donc s'il existe k tel que $x+y = k \cdot 1$, $y+z = k \cdot 2$ et $z+x = k \cdot 3$. On a alors

$$x = \frac{x+y+x+z-(y+z)}{2} = k$$

$$y = \frac{y+z+y+x-(x+z)}{2} = 0$$

$$z = \frac{z+x+z+y-(x+y)}{2} = 2k$$

Réciproquement, si $(x, y, z) = (k, 0, 2k)$, on vérifie qu'on a égalité dans l'inégalité ci-dessus.

Exercice 4 (Greece 2015 TST JBMO)

Montrer que

$$(3x+y)(3y+z)(3z+x) \geq 64xyz$$

Solution de l'exercice 4

Il faut ici penser à découper certains termes avant d'appliquer l'inégalité des moyennes. En effet, d'après l'inégalité des moyennes à 4 variables, on a

$$3x+y = x+x+x+y \geq 4\sqrt[4]{x^3y};$$

$$3y+z = y+y+y+z \geq 4\sqrt[4]{y^3z};$$

$$3z+x = z+z+z+x \geq 4\sqrt[4]{z^3x}.$$

En multipliant les trois inégalités, on trouve

$$(3x + y)(3y + z)(3z + x) \geq 4\sqrt[4]{x^3y} \cdot 4\sqrt[4]{y^3z} \cdot 4\sqrt[4]{z^3x} = 64xyz,$$

comme désiré.

Exercice 5

Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Montrer que

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

Solution de l'exercice 5

D'après l'inégalité des mauvais élèves, on a

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{(1+1+1)^2}{1+ab+1+bc+1+ca} = \frac{9}{3+ab+bc+ca}.$$

Pour montrer l'inégalité, il suffit donc de montrer que

$$\frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{3}{2},$$

ou encore, après réarrangement des termes,

$$ab + bc + ca \leq 3.$$

Or, d'après l'hypothèse et le lemme du tourniquet,

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

L'inégalité est donc démontrée.

Exercice 6

Soient $a, b, c, m > 0$. Montrer que

$$(a^2 + m)(b^2 + m)(c^2 + m) \geq (ab + m)(bc + m)(ca + m)$$

Solution de l'exercice 6

Il y a trois termes à gauche et trois termes à droite. Les termes à droite combinent les variables a, b et c deux à deux, tandis que les termes à gauche séparent ces variables. Il serait donc illusoire de penser dominer chaque terme de droite par un terme de gauche. Il faut combiner deux à deux les termes de droite.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\sqrt{a^2 + m}\sqrt{b^2 + m} \geq ab + m;$$

$$\sqrt{b^2 + m}\sqrt{c^2 + m} \geq bc + m;$$

$$\sqrt{c^2 + m}\sqrt{a^2 + m} \geq ca + m.$$

En effectuant le produit de ces inégalités, on trouve

$$\begin{aligned}
(ab+m)(bc+m)(ca+m) &\leq \sqrt{a^2+m}\sqrt{b^2+m}\sqrt{b^2+m}\sqrt{c^2+m}\sqrt{c^2+m}\sqrt{a^2+m} \\
&= (a^2+m)(b^2+m)(c^2+m).
\end{aligned}$$

Ceci est bien l'inégalité voulue.

Exercice 7

Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a^2}{b}\right) \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \left(1 + \frac{c^2}{a}\right) \geq (1+a)(1+b)(1+c)$$

et donner le cas d'égalité.

Solution de l'exercice 7

D'après l'inégalité des mauvais élèves :

$$1 + \frac{a^2}{b} = \frac{1^2}{1} + \frac{a^2}{b} \geq \frac{(1+a)^2}{1+b}$$

de même on a $1 + \frac{b^2}{c} \geq \frac{(1+b)^2}{1+c}$ et $1 + \frac{c^2}{a} \geq \frac{(1+c)^2}{1+a}$. En faisant le produit on a

$$\left(1 + \frac{a^2}{b}\right) \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \left(1 + \frac{c^2}{a}\right) \geq \frac{(1+a)^2}{1+b} \cdot \frac{(1+b)^2}{1+c} \cdot \frac{(1+c)^2}{1+a} = (1+a)(1+b)(1+c)$$

Il y a égalité lorsqu'il y a égalité dans les inégalités des mauvais élèves. En particulier, il existe k tel que $b = k \cdot \frac{a^2}{b}$ et $1 = k \cdot 1$. On déduit que $k = 1$ puis $b = \frac{a^2}{b}$, soit $a = b$. De même on trouve $b = c$. On a donc $a = b = c$ et réciproquement on a bien égalité lorsque $a = b = c$, on a donc tous les cas d'égalité.

Exercice 8 (JBMO SL 2023 A1)

Montrer que pour tous a, b, c, d ,

$$\frac{2}{(a+b)(c+d) + (b+c)(a+d)} \leq \frac{1}{(a+c)(b+d) + 4ac} + \frac{1}{(a+c)(b+d) + 4bd}.$$

Solution de l'exercice 8

D'après l'inégalité des mauvais élèves,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(a+c)(b+d) + 4ac} + \frac{1}{(a+c)(b+d) + 4bd} \\
&\geq \frac{(1+1)^2}{(a+c)(b+d) + 4ac + (a+c)(b+d) + 4bd} \\
&= \frac{4}{2(a+c)(b+d) + 4(ac+bd)} \\
&= \frac{2}{(a+c)(b+d) + 2(ac+bd)}.
\end{aligned}$$

Or, on a l'identité

$$(a+c)(b+d) + 2(ac+bd) = (ad+ac+bd+bc) + (ab+ac+bd+dc) = (a+b)(c+d) + (b+c)(a+d).$$

On a donc bien

$$\frac{1}{(a+c)(b+d) + 4ac} + \frac{1}{(a+c)(b+d) + 4bd} \geq \frac{2}{(a+b)(c+d) + (b+c)(a+d)}.$$

Exercice 9 (Grèce TST JBMO 2020)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Montrer que :

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{b+c}{b^2+bc+c^2} + \frac{a+c}{a^2+ac+c^2} \leq 2$$

Solution de l'exercice 9

D'après l'inégalité des moyennes au dénominateur, on trouve

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} \leq \frac{a+b}{2ab+ab} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) :$$

$$\frac{b+c}{b^2+bc+c^2} \leq \frac{b+c}{2bc+bc} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) ;$$

$$\frac{c+a}{c^2+ac+a^2} \leq \frac{a+c}{2ac+ac} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right).$$

En sommant ces trois inégalités, on trouve bien

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{b+c}{b^2+bc+c^2} + \frac{a+c}{a^2+ac+c^2} \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) = 2.$$

Exercice 10 (Envoi Algèbre 2022-2023)

Soient $x, y, z > 0$ tels que $xy + yz + zx = 1$. Montrer que

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} + \frac{1}{z^2+1} \right) \geq 5$$

Solution de l'exercice 10

Dans cet exercice, on aimerait bien appliquer l'inégalité arithmético-géométrique de façon à obtenir une minoration du type $(x^2+1) + \frac{1}{x^2+1} \geq 2$. Mais si on s'y prend mal, on n'arrive pas à conclure. En effet, on aurait pu s'en douter en étudiant le cas d'égalité de l'équation. Au vu de la condition $xy + yz + zx = 1$, on se doute que l'égalité va se produire pour $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$. En introduisant ces valeurs dans l'équation, on trouve bien que l'on a égalité, mais ceci n'est pas un cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique plus tôt.

Dans le cas d'égalité $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on a $x^2 + 1 = \frac{4}{3}$ et $\frac{1}{x^2+1} = \frac{3}{4}$. On applique donc l'inégalité arithmético-géométrique avec des coefficients appropriés pour avoir l'égalité des deux termes dans ce cas :

$$\frac{3}{4}(x^2 + 1) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) \geq 2.$$

En sommant ces trois équations, on a

$$\frac{3}{4}(x^2 + y^2 + z^2 + 3) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1}\right) \geq 6.$$

qui donne

$$\frac{3}{4}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1}\right) \geq \frac{15}{4}.$$

Par rapport à l'inégalité de l'énoncé, il nous reste un terme $\frac{5}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$ à minorer. Mais on a, par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\frac{5}{4}(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{5}{4}(xy + yz + zx) = \frac{5}{4}.$$

En ajoutant cette inégalité à l'inégalité obtenue précédemment, on obtient bien

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1}\right) \geq \frac{15}{4} + \frac{5}{4} = 5.$$

Solution n°2 de l'exercice 10

Posons $s = x^2 + y^2 + z^2$. Notons que par l'inégalité des mauvais élèves,

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{x^2 + 1} + \frac{1}{y^2 + 1} + \frac{1}{z^2 + 1}\right) \geq \frac{4}{3} \frac{(1 + 1 + 1)^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 3} = \frac{12}{s + 3}.$$

Ainsi il suffit de montrer que $2s + \frac{12}{s+3} \geq 5$. En multipliant des deux côtés par $s + 3$ qui est positif, il suffit de montrer que $2s(s + 3) + 12 \geq 5(s + 3)$. Ceci est équivalent à $2s^2 + 6s + 12 \geq 5s + 15$ et donc à $2s^2 + s \geq 3$. Or par le lemme du tourniquet, $s \geq xy + yz + xz = 1$, donc $2s^2 + s \geq 3$. On a bien le résultat voulu.

Exercice 11 (Turquie TST JBMO 2023)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$\frac{a^4 + 1}{b^3 + b^2 + b} + \frac{b^4 + 1}{c^3 + c^2 + c} + \frac{c^4 + 1}{a^3 + a^2 + a} \geq 2.$$

Solution de l'exercice 11

On commence par appliquer l'inégalité arithmético-géométrique aux trois termes de l'énoncé :

$$\frac{a^4 + 1}{b^3 + b^2 + b} + \frac{b^4 + 1}{c^3 + c^2 + c} + \frac{c^4 + 1}{a^3 + a^2 + a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{(a^4 + 1)(b^4 + 1)(c^4 + 1)}{(b^3 + b^2 + b)(c^3 + c^2 + c)(a^3 + a^2 + a)}}.$$

On cherche donc à minorer les quotients $\frac{a^4 + 1}{a^3 + a^2 + a}$. Pour cela, on applique des inégalités arithmético-géométriques :

$$\begin{aligned}
a^3 + a^2 + a &\leq \frac{1}{2}(a^4 + a^2) + a^2 + \frac{1}{2}(a^2 + 1) = \frac{1}{2}(a^4 + 1) + 2a^2 \\
&\leq \frac{1}{2}(a^4 + 1) + (a^4 + 1) = \frac{3}{2}(a^4 + 1)
\end{aligned}$$

et ainsi $\frac{a^4+1}{a^3+a^2+a} \geq \frac{2}{3}$. On a de même pour b et c , et donc

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b} + \frac{b^4+1}{c^3+c^2+c} + \frac{c^4+1}{a^3+a^2+a} \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = 2.$$

Solution n°2 de l'exercice 11

On peut également réfléchir avec l'inégalité de réarrangement. L'inégalité n'est pas symétrique, on ne peut donc pas supposer sans perte de généralités $a \geq b \geq c$ ou quelque chose de similaire.

Cependant, par stricte croissance, $(a^4 + 1, b^4 + 1, c^4 + 1)$ est dans le même ordre que (a, b, c) . De même, $(a^3 + a^2 + a, b^3 + b^2 + b, c^3 + c^2 + c)$ est également dans le même ordre et $\left(\frac{1}{a^3 + a^2 + a}, \frac{1}{b^3 + b^2 + b}, \frac{1}{c^3 + c^2 + c}\right)$ est dans le sens inverse. Ainsi, par inégalité de réarrangement,

$$\frac{a^4+1}{a^3+a^2+a} + \frac{b^4+1}{b^3+b^2+b} + \frac{c^4+1}{c^3+c^2+c}$$

est la valeur minimale que peut prendre une somme de produit de termes de $(a^4 + 1, b^4 + 1, c^4 + 1)$ avec des termes de $\left(\frac{1}{a^3 + a^2 + a}, \frac{1}{b^3 + b^2 + b}, \frac{1}{c^3 + c^2 + c}\right)$. En particulier ici :

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b} + \frac{b^4+1}{c^3+c^2+c} + \frac{c^4+1}{a^3+a^2+a} \geq \frac{a^4+1}{a^3+a^2+a} + \frac{b^4+1}{b^3+b^2+b} + \frac{c^4+1}{c^3+c^2+c}$$

On peut maintenant comme précédemment montrer $\frac{a^4+1}{a^3+a^2+a} \geq \frac{2}{3}$ et conclure par

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b} + \frac{b^4+1}{c^3+c^2+c} + \frac{c^4+1}{a^3+a^2+a} \geq 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Exercice 12 (JBMO SL 2019 A2)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $abc = \frac{2}{3}$, montrer que :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

Solution de l'exercice 12

Remarquons pour commencer que le membre de gauche est de degré 1 alors que celui de droite est de degré -2 . On cherche donc à homogénéiser l'inégalité en diminuant de 3 le degré du membre de gauche. Pour cela, on divise par abc à gauche et on divise donc par $\frac{2}{3}$ à droite, on se ramène donc à montrer que :

$$\frac{\frac{1}{c}}{a+b} + \frac{\frac{1}{a}}{b+c} + \frac{\frac{1}{b}}{a+c} = \frac{1}{ac+bc} + \frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{ab+bc} \geq \frac{3}{2} \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$$

Or, l'inégalité des mauvais élèves nous indique que :

$$\frac{1}{ac+bc} + \frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{ab+bc} \geq \frac{(1+1+1)^2}{ac+bc+ab+ac+ab+bc} = \frac{9}{2(ab+bc+ac)}$$

Il suffit donc de prouver que $\frac{3}{ab+bc+ac} \geq \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}$, ou, de façon équivalente que :

$$3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(ab+bc+ac)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz avec les vecteurs $(a^{\frac{3}{2}}, b^{\frac{3}{2}}, c^{\frac{3}{2}})$ et $(a^{\frac{1}{2}}, b^{\frac{1}{2}}, c^{\frac{1}{2}})$ on a :

$$(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq (a^2+b^2+c^2)^2$$

Or, avec les vecteurs (a, b, c) et $(1, 1, 1)$ on a aussi : $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$, on en déduit donc :

$$3(a^3+b^3+c^3)(a+b+c) \geq 3(a^2+b^2+c^2)^2 \geq (a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)$$

Alors, le lemme du tourniquet nous permet de conclure :

$$3(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)(ab+bc+ac)$$

Ce qui suffit à prouver l'inégalité de l'énoncé.

Exercice 13 (Envoi Pot-Pourri 2020-2021)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$\frac{a^3+5b^3}{3a+b} + \frac{b^3+5c^3}{3b+c} + \frac{c^3+5a^3}{3c+a} \geq \frac{9}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

Solution de l'exercice 13

La première idée, c'est de séparer chaque terme et d'écrire (avec la notation de somme cyclique),

$$\sum_{cyc} \frac{a^3+5b^3}{3a+b} = \sum_{cyc} \frac{a^3}{3a+b} + \underbrace{\frac{b^3}{3a+b} + \dots + \frac{b^3}{3a+b}}_{5 \text{ fois}}.$$

Si l'on applique d'emblée l'inégalité des mauvais élèves, comme nous y invite la forme de l'inégalité, les exposants des termes au numérateur seront des $3/2$. On va donc multiplier en haut et en bas dans chaque fraction par un terme permettant de compléter le carré au numérateur. Voyons plutôt :

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{3a+b} + \frac{b^3}{3a+b} + \dots + \frac{b^3}{3a+b} = \sum_{cyc} \frac{a^4}{3a^2+ab} + \frac{b^4}{3ab+b^2} + \dots + \frac{b^4}{3ab+b^2}.$$

D'après l'inégalité des mauvais élèves, on a alors

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{3a^2+ab} + \frac{b^4}{3ab+b^2} + \dots + \frac{b^4}{3ab+b^2} \geq \frac{(a^2+5b^2+b^2+5c^2+c^2+5a^2)^2}{8a^2+16ab+8b^2+16bc+8c^2+16ca} = \frac{9}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Ceci conclut.

Exercice 14 (Envoi Algèbre 2019-2020)

Soient $a, b, c > 0$ tels que $ab + bc + ca = abc$. Montrer que

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{6}$$

Solution de l'exercice 14

En appliquant l'IAG aux dénominateurs, on trouve

$$\frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b^2 + c^2} + \frac{1}{c^2 + a^2} \leq \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2bc} + \frac{1}{2ca}.$$

D'après le lemme du tourniquet, on trouve

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \leq \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2}_{=1} = \frac{1}{6}.$$

2 Arithmétique : TD de révisions (Hadriel)

Exercice 1

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n + 1 \mid 3n + 2$

Exercice 2

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $2n + 1 \mid n + 2$

Exercice 3

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $2n + 1 \mid 5n + 2$

Exercice 4

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n - 3 \mid 2n^2 - n + 3$

Exercice 5

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n - 1 \mid 3n^3 - 2n^2 + 5n + 1$

Exercice 6

Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $2x + 1 \mid 8y$. Montrer que $2x + 1 \mid y$

Exercice 7

Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors il est une puissance sixième parfaite.

Exercice 8

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4

Exercice 9

Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Exercice 10

Soit x, y des entiers. Montrer que si $x^2 \mid xy + x + y$, alors $x^2 \mid x + y$.

Exercice 11

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^5 - 2n^4 + 5n^3 - n^2 - 8n + 5 = 0$

Exercice 12

Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9

Exercice 13

Trouver tous les couples d'entiers x, y vérifiant $x^2 y^2 = x^2 + xy + y^2$

Exercice 14

Existe-t-il a et b entiers tels que $a^2 + b^2 = 10^{100} + 3$

Exercice 15

Existe-t-il des entiers a, b tels que $3a^2 = b^2 + 1$

Exercice 16

Trouver tous les triplets x, y, l d'entiers naturels vérifiant $x^3 + y^3 - 53 = 7^l$

Exercice 17

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $4^n + n^4$ soit premier.

Solutions

Solution de l'exercice 1

$n + 1 \mid 3n + 2 \iff n + 1 \mid 3(n + 1) - 1 \iff n + 1 \mid -1$. La seule solution est donc $n = 0$.

Solution de l'exercice 2

$2n + 1 \mid n + 2$ implique $2n + 1 \leq n + 2$ car $n + 2 > 0$. Ainsi, $n \leq 1$. Réciproquement, 0 et 1 sont bien solution.

Solution de l'exercice 3

$$2n + 1 \mid 5n + 2 \iff 2n + 1 \mid 2(2n + 1) + n \iff 2n + 1 \mid n.$$

On remarque que 0 est solution. Si $n \neq 0$, $2n + 1 \mid n$ implique $2n + 1 \leq n$ donc $n \leq -1$ ce qui n'est pas possible. Ainsi la seule solution est $n = 0$.

Solution de l'exercice 4

On fait la division euclidienne du polynome $2X^2 - X + 3$ par $X - 3$:

$$2n^2 - n + 3 = 2n(n - 3) + 5n + 3 = (2n + 5)(n - 3) + 18.$$

Ainsi $n - 3 \mid 2n^2 - n + 3 \iff n - 3 \mid 18$. Les solutions sont donc 0, 1, 2, 4, 5, 6, 9, 12, 21.

Solution de l'exercice 5

On fait la division euclidienne du polynome $3X^3 - 2X^2 + 5X + 1$ par $X - 1$:

$$3n^3 - 2n^2 + 5n + 1 = 3n^2(n - 1) + n^2 + 5n + 1 = (3n^2 + n)(n - 1) + 6n + 1 = (3n^2 + n + 6)(n - 1) + 7.$$

Ainsi $n - 1 \mid 3n^3 - 2n^2 + 5n + 1 \iff n - 1 \mid 7$. Les solutions sont donc 0, 2, 8.

Solution de l'exercice 6

$2x + 1$ est premier avec 2. Ainsi le lemme de gauss nous dit que $2x + 1 \mid y$.

Solution de l'exercice 7

On regarde la décomposition en facteurs premiers de n . Puisque n s'écrit a^2 et b^3 pour certains a, b entiers, chaque exposant de chaque premier dans la décomposition en facteurs premiers de n est divisible par 2 et 3, donc par 6. n est donc une puissance sixième.

Solution de l'exercice 8

Supposons par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à 3 mod 4. On les note $p_1, \dots, p_n$. On distingue deux cas selon la parité de n :

Cas 1 : n impair. Dans ce cas, $p_1 \dots p_n \equiv 3[4]$. Donc $N_1 := p_1 \dots p_n + 4 \equiv 3[4]$. Soit q un diviseur premier de N_1 . q est impair car N_1 est impair, et q est premier avec chaque p_i . Ainsi q est égal à aucun p_i , donc est congru à 1 modulo 4. Ainsi chaque diviseur premier de N_1 est congru à 1 modulo 4. Donc N_1 est congru à 1 modulo 4, absurde.

Cas 2 : n pair. Dans ce cas, $p_1 \dots p_n \equiv 1[4]$. Donc $N_2 := p_1 \dots p_n + 2 \equiv 3[4]$. Soit q un diviseur premier de N_2 . q est impair car N_2 est impair, et q est premier avec chaque p_i . Ainsi q est égal à aucun p_i , donc est congru à 1 modulo 4. Ainsi chaque diviseur premier de N_2 est congru à 1 modulo 4. Donc N_2 est congru à 1 modulo 4, absurde.

Solution de l'exercice 9

Premièrement, si $n = 1$, $2^n - 1$ n'est pas premier.

Si n est composé, on peut noter $n = ab$ avec $a, b > 1$. On a donc $2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + \dots + 1)$ qui n'est pas premier. Ainsi si $2^n - 1$ est premier, n est premier aussi.

Solution de l'exercice 10

$x^2 \mid xy + x + y \iff x^2 \mid x^2 + xy + x + y \iff x^2 \mid (x+1)(x+y)$. Or x et $x+1$ sont premiers entres eux donc x^2 et $x+1$ sont premiers entres eux. Le lemme de gauss nous donne donc que $x^2 \mid x+y$.

Solution de l'exercice 11

Prenant l'équation modulo n , on trouve que $n \mid 5$. Ainsi n vaut 1 ou 5. On vérifie que 5 n'est pas solution (car le terme 5^5 est trop grand pour être compensé par le reste de l'équation), et 1 est solution. La seule solution est donc $n = 1$.

Solution de l'exercice 12

Les valeurs que prennent n^3 lorsque n varie de 0 à 8 modulo 9 sont :

0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1. On vérifie que lorsqu'on somme trois valeurs consécutives, ça fait bien 0 modulo 9 à chaque fois.

Solution de l'exercice 13

Soit g le pgcd de x et y . On pose $x = ga$, $y = gb$, avec a et b premiers entres eux. L'équation revient donc à :

$$a^2b^2g^4 = a^2g^2 + abg^2 + b^2g^2.$$

En divisant par g^2 : $a^2b^2g^2 = a^2 + ab + b^2$. Ainsi, $a \mid b^2$ et $b \mid a^2$. a et b sont premiers entres eux donc le lemme de gauss nous donne que $a, b \in \{\pm 1\}$. Donc $x = y$ ou $x = -y$.

Si $x = y$, on cherche les x tels que $x^4 = 3x^2$ qui a pour seule solution entière 0 (si x est non nul, on divise par x^2 et ça revient à trouver une solution à $x^2 = 3$). Ce cas nous fournit donc la solution (0, 0).

Si $x = -y$, on cherche les x tels que $x^4 = x^2$. Les x qui vérifient ça sont exactement 0, 1, -1. Ce cas nous fournit donc les solutions (0, 0), (1, -1), (-1, 1). Les solutions sont donc (0, 0), (1, -1), (-1, 1).

Solution de l'exercice 14

Regardant modulo 4, on veut que $a^2 + b^2 \equiv 3[4]$. Or a^2 et b^2 ne peuvent que être congru à 0 ou 1 modulo 4, donc $a^2 + b^2$ ne peut pas être congru à 3 modulo 4. Il n'y a donc pas de solutions.

Solution de l'exercice 15

Regardant modulo 4, le coté gauche peut que être congru à 0 ou 3, et le coté droit peut que être congru à 1 ou 2. Il n'y a donc pas de solutions.

Solution de l'exercice 16

Commençons par traiter le cas $\ell = 0$. Dans ce cas, on veut (x, y) tel que $x^3 + y^3 = 54$. puisque $4^3 = 64 > 54$, on sait que x et y seront ≤ 3 . On trouve pour seule solution (3, 3, 0) dans ce cas. On traite maintenant le cas $\ell > 0$. Prenant l'équation modulo 7, on obtient :

$$x^3 + y^3 \equiv 4[7].$$

Or x^3 peut être congru que à 0, 1 ou -1 modulo 7. Donc $x^3 + y^3$ peut être congru que à 5, 6, 0, 1, 2 modulo 7, et en particulier pas à 4. Il n'y a donc pas de solutions dans ce cas. La seule solution est donc (3, 3, 0).

Solution de l'exercice 17

On commence par traiter les cas $n = 0, 1$. Si $n = 0$, $4^n + n^4 = 1$ donc n'est pas premier. Si $n = 1$, et $4^n + n^4 = 5$ est premier.

Si n est pair ≥ 2 , $4^n + n^4$ est divisible par 2 et est plus grand que 2 donc n'est pas premier.

Si n est impair plus grand strictement que 1, on pose $n = 2k + 1$ avec $k > 0$. On a donc $4^n + n^4 = (2k + 1)^4 + 4^{2k+1} = (2k + 1)^4 + 4(2^k)^4$. On va utiliser l'identité de Sophie Germain : $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$. Dans notre cas, on obtient : $4^n + n^4 = ((2k + 1)^2 + 2(2k + 1)2^k + 2^{2k+1})((2k + 1)^2 - 2(2k + 1)2^k + 2^{2k+1})$. Ces deux termes sont strictement plus grands que 1 pour tout $k > 0$. $4^n + n^4$ n'est donc pas premier dans ce cas.

On trouve donc que le seul n tel que $n^4 + 4^n$ soit premier est 1.

3 Arithmétique : Ordre 1 (Gaëtan)

On étudie dans ce cours, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$, les solutions $m > 0$ de $a^m \equiv 1 \pmod{n}$.

On remarque tout de suite qu'il est nécessaire pour l'existence de telles solutions que n et a soient premiers entre eux.

Réciproquement, si c'est le cas, on peut considérer les puissances successives de a modulo n : il y en a un nombre fini possible, donc par principe des tiroirs il existe $0 < u < v$ tels que $a^u \equiv a^v \pmod{n}$. Comme a est premier avec n , on peut diviser par a^u pour obtenir $a^{v-u} \equiv 1 \pmod{n}$. Il existe donc bien toujours de tels m .

L'avantage de connaître un tel m est par exemple de pouvoir simplifier les expressions de a^b modulo n . On effectue la division euclidienne de b par m : $b = mq + r$ avec $0 \leq r < m$. On a alors $a^b = a^{mq+r} = (a^m)^q \cdot a^r \equiv 1^q \cdot a^r \equiv a^r \pmod{n}$.

Bilan : pour simplifier a^b modulo n , on peut simplifier a modulo n et b modulo m .

Le théorème suivant montre que pour p premier, $m = p - 1$ convient pour tout a .

Théorème 1 (Petit théorème de Fermat).

Pour tout nombre premier p et tout entier a non divisible par p , le nombre p divise $a^{p-1} - 1$.

Démonstration (par bijection et factorielle). On suppose ici que $1 \leq a \leq p - 1$, et on note E l'ensemble des entiers $1, 2, \dots, p - 1$. Puis, pour tout entier $k \in E$, on note $f(k)$ le reste de la division de ak par p . Puisque le nombre premier p ne divise ni a ni k , il ne divise pas leur produit ak non plus, donc $f(k) \in E$. En outre, si k et ℓ sont deux éléments de E pour lesquels $f(k) = f(\ell)$, on sait que p divise

$$(ak - f(k)) - (a\ell - f(\ell)) = a(k - \ell),$$

et puisque p ne divise pas a , c'est qu'il divise $k - \ell$, donc que $k = \ell$. Ainsi, la fonction f est injective, et elle est même bijective.

On en conclut que

$$(p-1)! \equiv \prod_{k=1}^{p-1} k \equiv \prod_{k=1}^{p-1} f(k) \equiv \prod_{k=1}^{p-1} (ak) \equiv a^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} k = a^{p-1} (p-1)! \pmod{p}.$$

Ainsi, p divise $(a^{p-1} - 1)(p-1)!$, et puisque p ne divise pas $(p-1)!$, c'est donc que p divise $a^{p-1} - 1$. $\square$ On peut généraliser ce théorème modulo n n'importe quel n pas forcément premier, avec le théorème d'Euler. Soit n un entier naturel non nul. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers

k premiers avec n et tels que $1 \leq k \leq n$. Ce nombre est appelé *indicatrice d'Euler* de n .

Théorème 2 (Théorème d'Euler).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$ premier avec n , on a $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Ce théorème se démontre de manière analogue au précédent, nous n'en détaillerons pas la preuve ici.

Attention! Ce théorème ne fonctionne que si a est premier avec n . Par exemple, si $n = 12$ et $a = 15$, il ne fonctionne évidemment pas.

Remarquons que, lorsque p est un nombre premier, on a bien $\varphi(p) = p - 1$, ce qui nous permet de retrouver le petit théorème de Fermat. Par ailleurs, il existe en fait une manière simple de calculer $\varphi(n)$ dans le cas où n est un entier quelconque. C'est l'objet du résultat ci-dessous, dont la démonstration utilise le *théorème des restes chinois*.

Théorème 3 (Indicatrice d'Euler).

Soit n un entier naturel non nul dont la décomposition en tant que produit de facteurs premiers est

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}.$$

L'indicatrice d'Euler de n est alors égale au produit

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i - 1) p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Ordre multiplicatif

Plus l'entier strictement positif m vérifiant $a^m \equiv 1 \pmod{n}$ est petit, moins on a de valeurs possibles pour les a^k puisqu'on peut réduire k modulo m . Cela motive la définition suivante : Pour tout entier a premier avec n , on définit $\omega_n(a)$, appelé *ordre de a modulo n* , le plus petit entier naturel strictement positif d tel que $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

Le théorème suivant est fondamental pour la notion d'ordre.

Théorème 4.

Les entiers k pour lesquels n divise $a^k - 1$ sont exactement les multiples de $\omega_n(a)$.

Démonstration. On note $d = \omega_n(a)$.

Soit $m > 0$ tel que $a^m \equiv 1 \pmod{n}$. Soit $m = dq + r$ la division euclidienne de m par q (on a donc $0 \leq r < d$). Ainsi $1 \equiv a^{dq+r} \equiv a^r \pmod{n}$: si $r \neq 0$, cela contredirait la minimalité de d : ainsi $r = 0$ et on a bien $d \mid m$.

L'autre implication est claire. □

En particulier, couplant ce théorème et le théorème d'Euler, on a toujours $\omega_n(a) \mid \varphi(n)$. Si p est premier, $\omega_p(a) \mid p - 1$.

Exercice 1

Démontrer que 13 divise $8^{60} - 3^{24}$.

Exercice 2

Quel est le reste de la division par 19 de $2024^{2023^{2025}}$?

Exercice 3

Démontrer, pour tout entier $n \geq 0$, que 7 divise $3^{12n+1} + 2^{6n+2}$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10. Montrer qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec le chiffre 1.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Montrer que $n \mid 2^{n!} - 1$.

Exercice 6

Soient $n \geq 1$ et $a \geq 2$ des entiers. Montrer que $n \mid \varphi(a^n - 1)$.

Exercice 7

Soient p, q premiers tels que $q \mid 1 + p + \dots + p^{p-1}$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 8

Soit $k \geq 1$ un entier premier avec 6. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel k divise $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Solution de l'exercice 1

Le petit théorème de Fermat indique directement que

$$8^{60} - 3^{24} \equiv 8^{12 \times 5} - 3^{12 \times 2} \equiv (8^{12})^5 - (3^{12})^2 \equiv 1^5 - 1^2 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Solution de l'exercice 2

On commence par simplifier 2024 modulo 19 :

$$2024^{2023^{2025}} \equiv 10^{2023^{2025}}$$

On peut de même simplifier l'exposant modulo $\varphi(19) = 18$:

$$\equiv 10^{7^{2025}}$$

On peut donc simplifier l'exposant à l'exposant modulo $\varphi(18) = \varphi(2) \cdot \varphi(9) = 6$:

$$\equiv 10^{7^3} \equiv 10^1 \equiv 10$$

modulo 19.

Solution de l'exercice 3

Le petit théorème de Fermat indique directement que

$$3^{12n+1} + 2^{6n+2} \equiv 3 \times (3^6)^{2n} + 4 \times (2^6)^n \equiv 3 \times 1^{2n} + 4 \times 1^n \equiv 3 + 4 \equiv 0 \pmod{7}.$$

Solution de l'exercice 4

Puisque 10 est premier avec n , soit ω l'ordre de 10 modulo n . On constate alors que

$$\sum_{k=0}^{n\omega-1} 10^k \equiv \sum_{k=0}^{\omega-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} 10^{k+\ell\omega} \equiv \sum_{k=0}^{\omega-1} \sum_{\ell=0}^{n-1} 10^k \equiv n \sum_{k=0}^{\omega-1} 10^k \equiv 0 \pmod{n}.$$

Solution de l'exercice 5

Puisque 2 est premier avec n , soit ω l'ordre de 2 modulo n . Par définition, on sait que $\varphi(n) \leq n$, donc que $\varphi(n)$ divise $n!$. Ainsi, puisque ω divise $\varphi(n)$, il divise $n!$ également. Ainsi, si l'on pose $k = n!/\omega$, et puisque n est premier avec 2, on constate que

$$2^{n!} - 1 \equiv (2^\omega)^k - 1 \equiv 1^k - 1 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Solution de l'exercice 6

On note d l'ordre de a modulo $a^n - 1$. Comme $a^n \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$, on sait que $d \leq n$. Supposons $d < n$: on a alors $0 < a^d - 1 < a^n - 1$ ce qui invalide $a^n - 1 \mid a^d - 1$: ainsi $d = n$. Comme $a^{\varphi(a^n - 1)} \equiv 1 \pmod{a^n - 1}$ par théorème d'Euler, on en déduit $n \mid \varphi(a^n - 1)$ par théorème fondamental de l'ordre, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7

Si $q \mid p^{p-1} + p^{p-2} + \dots + p + 1$ alors

$$q \mid (p^{p-1} + p^{p-2} + \dots + p + 1)(p - 1) = p^p - 1$$

On a donc l'ordre ω de p modulo q qui divise p , et deux cas sont possibles :

Si $\omega = 1$ alors il vient que $p \equiv 1 \pmod{q}$ et donc $p^{p-1} + p^{p-2} + \dots + p + 1 \equiv p \pmod{q}$ et donc $p = q$, mais alors $q \mid 1$, absurde.

Si $\omega = p$ alors par le petit théorème de Fermat on a p qui divise $q - 1$.

Solution de l'exercice 8

L'idée est de remarquer que $1/6 + 1/3 + 1/2 = 1$. Idéalement, on souhaiterait donc choisir $n = -1$, mais on ne peut pas procéder brutalement ainsi. À la place, on va simplement considérer l'entier $n = \varphi(k) - 1$ puis agit proprement. En effet, on constate alors que

$$6(2^n + 3^n + 6^n - 1) \equiv 3 \times 2^{\varphi(k)} + 2 \times 3^{\varphi(k)} + 6^{\varphi(k)} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod{n},$$

et puisque k est premier avec 6, on en conclut que k divise bien $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

4 Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Arthur)

Cours

Ce cours est grandement inspiré des cours d'EF du groupe B des stages d'été à Valbonne de 2023 (Henry) et de 2024 (Paul LL)

Une équation fonctionnelle est une équation dans laquelle l'inconnue recherchée n'est plus un nombre, mais une fonction. On cherche alors à identifier toutes les fonctions qui satisfont une relation donnée.

On parle d'une fonction $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ lorsque celle-ci s'évalue en un élément de son ensemble de définition $\mathcal{A}$, et prend ses valeurs dans son ensemble d'arrivée $\mathcal{B}$. Ainsi pour $a \in \mathcal{A}$, $f(a)$ est bien défini et est un élément de $\mathcal{B}$.

Une équation fonctionnelle se présente généralement sous la forme d'une égalité impliquant une ou plusieurs variables de $\mathcal{A}$ et la fonction f . Voyons sur un premier exemple :

Exemple 1.

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tous réels x et y on ait

$$f(x + y) = f(x) + y$$

Méthode d'Analyse-Synthèse

Pour résoudre une équation fonctionnelle, on adopte presque toujours une méthode en deux étapes : l'analyse et la synthèse.

- Analyse : Dans cette étape, on suppose qu'il existe une solution f et on essaye de déduire un maximum de conséquences sur cette fonction, souvent en remplaçant x et y par des valeurs bien choisies. L'objectif est d'arriver à une affirmation du type : « Si f est solution, alors f doit nécessairement être de la forme ... ». De cette façon **on restreint l'ensemble des solutions possibles**.
- Synthèse : Une fois qu'on estime avoir suffisamment restreint les solutions possibles, il nous reste à vérifier lesquelles sont effectivement solutions de l'équation initiale et lesquelles ne le sont pas. En général, la synthèse est souvent plus simple que l'analyse, mais il est essentiel de ne pas négliger cette vérification, même lorsque les solutions semblent évidentes.

Retour à l'exemple 1.

Analyse : Ici, puisque l'équation est vraie pour tout réel x , on peut poser $x = 0$. De cette façon $f(y) = y + f(0)$ quel que soit le réel y . Ainsi si f est solution alors c'est une fonction de la forme $f(x) = x + c$ où c est une constante réelle.

Synthèse : On vérifie que toutes les fonctions de cette forme sont bien solutions. En effet il y aurait tout à fait pu y avoir des intrus.

$$f(x + y) = (x + y) + c = (x + c) + y = f(x) + y$$

L'analogie entre les équations fonctionnelles et une enquête policière est souvent utilisée pour illustrer le processus de résolution. Dans cette métaphore, nous agissons comme des détectives, utilisant les indices fournis par l'équation pour identifier des fonctions suspectes. L'analyse permet de trouver une liste de suspects restreinte, tandis que la phase

de vérification agit comme un jugement final, déterminant quelles fonctions sont réellement des solutions.

Remarque 2.

Les substitutions les plus classiques sont $x = 0$, 1 ou -1 , ainsi que $x = y$ ou $x = -y$. Mais cela dépend évidemment de l'équation qu'on nous donne. Par exemple, s'il y a un terme de la forme $f(x - g(y))$ (par exemple $f(x - y^2)$), il peut être intéressant de remplacer x par $g(y)$ pour obtenir $f(0)$. Ou alors une substitution qui permet de rendre égaux deux termes de l'égalité. L'objectif est de s'adapter au problème pour trouver les meilleures substitutions possibles.

Premiers exercices**Exercice 1**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(xy)$$

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Exercice 3

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^{666} + y) = f(x^{2025} + 2y) + f(x^{42})$$

Équation de Cauchy**Exercice 4**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{N}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 5

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 6

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Autres exercices**Exercice 7**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) + f(x)f(y) = xy$$

Exercice 8

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Exercice 9

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) = n + 1$$

Exercice 10

(IMO Longlist 1979, Exercice 65)

Soit f une fonction telle que $f(x) \leq x$ pour tout réel x , et $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ pour toute paire de réels x et y . Montrer que f est la fonction identité.

Exercice 11

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x + y)f(x)f(y) = xf(y) + yf(x)$$

Exercice 12

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(f(x) + f(y)) = x + y \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Exercice 13

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

Analyse : Soit f une solution.

Avec $y = 0$ on trouve pour tout réel x que

$$f(x) = f(0)$$

Synthèse : On vérifie que toutes les fonctions constantes $f(x) = c \in \mathbb{R}$ sont bien solutions.

Pour x, y réels :

$$f(x + y) = c = f(xy)$$

Donc les solutions sont les fonctions constantes.

Solution de l'exercice 2

Analyse : Soit f une solution.

Ici, on a envie de se débarrasser du terme compliqué $f(x - f(y))$, on pose donc $x = f(y)$ ce qui donne pour tout réel y que

$$f(0) = f(f(y) - f(y)) = 1 - f(y) - y$$

$$f(y) = -y + (1 - f(0))$$

Ici on va même pouvoir affiner notre analyse et trouver $f(0)$. En effet $f(0) = -0 + (1 - f(0))$ donc $f(0) = \frac{1}{2}$.

Synthèse : On vérifie que la fonction $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ avec est bien solution. Pour xy , réels :

$$f(x - f(y)) = -\left(x - \left(-y + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} = 1 - x - y$$

Donc $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 3

Analyse : Si on arrive à égaliser $f(x^{666} + y)$ avec un des deux termes à droite, on pourrait simplifier et il ne resterait qu'une seule expression de f . Pour se débarrasser des y en plus, essayons d'égaliser avec $f(x^{2025} + 2y)$. Au brouillon, on se dit qu'il suffirait que $x^{666} + y = x^{2025} + 2y$, c'est à dire que $y = x^{666} - x^{2025}$, et avec cette substitution on trouve que pour tout réel x :

$$f(x^{42}) = 0$$

Donc f est nulle sur les réels positifs, il reste à trouver f sur les négatifs, pour cela on fait la substitution $y = 0$:

$$f(x^{2025}) = 0$$

Donc f est la fonction nulle.

Synthèse : On vérifie que la fonction nulle est la seule solution

Solution de l'exercice 4

Analyse : Avec $x = y = 0$ on trouve $f(0) = 0$

Avec $x = 1$ et $y = 1$ on trouve $f(2) = 2f(1)$

Avec $x = 2$ et $y = 1$ on trouve $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$

On sent que ça se généralise par récurrence : Montrons $f(n) = nf(1)$ par récurrence sur n .

- Initialisation : On a déjà montré pour 0, 1, 2 et 3.
- Hérédité : Si $f(n) = nf(1)$ alors avec $x = n$ et $y = 1$

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$$

(Remarque : la récurrence revient à faire informellement $f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(1) + \dots + f(1) = nf(1)$)

Donc f est une fonction linéaire.

Synthèse : On vérifie que toutes les fonctions linéaires à coefficient directeur entier $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{N}$ sont bien solutions. Pour x, y entiers :

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

Donc les solutions sont les fonctions $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 5

Analyse : La même récurrence que dans l'Exercice 4 montre que $f(n) = nf(1)$ pour $n \in \mathbb{N}$

En posant $x = -y = n \in \mathbb{N}$ on trouve

$$0 = f(0) = f(n) + f(-n) = nf(1) + f(-n)$$

$$f(-n) = -nf(1)$$

Synthèse : On vérifie que toutes les fonctions linéaires à coefficient directeur entier $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Z}$ sont bien solutions. (attention a est ici dans $\mathbb{Z}$ car $f(1)$ pourrait être négatif) Pour x, y entiers :

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

Donc les solutions sont les fonctions $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 6

Analyse : On peut refaire la même récurrence que dans l'Exercice 4 mais avec $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$ au lieu de $f(1)$: Montrons $f(nr) = nf(r)$ par récurrence sur n .

- Initialisation : Pour $n = 0$ ou $n = 1$ c'est évident.
- Hérédité : Si $f(nr) = nf(r)$ alors avec $x = nr$ et $y = r$

$$f((n+1)r) = f(nr) + f(r) = nf(r) + f(r) = (n+1)f(r)$$

Donc $f(nr) = nf(r)$.

A partir de là, pour p et q des entiers :

$$q \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = f(p) = p \cdot f(1)$$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \cdot f(1)$$

Synthèse : Encore une fois, on vérifie que toutes les fonctions linéaires à coefficient directeur rationnel $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$ sont bien solutions. Pour x, y rationnels :

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$$

Donc les solutions sont les fonctions $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$.

Remarque 3.

Attention : on ne peut pas étendre ces solutions à $\mathbb{R}$ sans plus d'hypothèses. Il existe en effet d'autres solutions que les solutions linéaires.

Pour n'inclure que les solutions linéaires, on peut par exemple rajouter l'une des deux conditions suivantes :

- f est continue
- f est monotone (croissante ou décroissante)

Solution de l'exercice 7

Analyse : Avec $y = 0$ on trouve pour tout réel x que

$$f(x)(1 + f(0)) = 0$$

Or la fonction nulle n'est pas solution de l'équation, donc on peut trouver une valeur x tel que $f(x) \neq 0$, et ainsi $f(0) = -1$.

Puis avec $x = -y = -1$ on trouve $f(1)f(-1) = 0$

- Cas 1 : $f(1) = 0$. On souhaite annuler le produit $f(x)f(y)$, on pose donc $y = 1$, et on voit qu'il faut remplacer x par $x - 1$ pour obtenir $f(x) = x - 1$.
- Cas 2 : $f(-1) = 0$. De même, en posant $y = -1$ et en remplaçant x par $x + 1$ on a $f(x) = -x - 1$.

Synthèse : On vérifie que ces deux fonctions sont bien solutions.

Solution de l'exercice 8

Le fait que la fonction soit définie dans les rationnels, nous invite à se ramener à l'équation de Cauchy. Mais on ne pourra pas le faire sur f car on voit qu'il y a d'autres solutions que les fonctions linéaires. (les fonctions affines $f(x) = a + b$ sont aussi solutions)

Avec $y = 0$ et $x = 2X$ pour X réel :

$$2f(X) = f(2X) + f(0)$$

Ainsi dans l'équation initiale :

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y) + f(0)$$

L'astuce ici va être de poser $g(x) = f(x) + f(0)$.

De cette façon g vérifie bien l'équation de Cauchy. Donc $g(x) = ax = f(x) + f(0)$ et ainsi $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

On vérifie que les fonctions affines sont bien solutions.

Remarque 4.

Comment trouver le bon g à poser ?

On se doutait déjà que f ne pourrait pas vérifier Cauchy, car les fonctions affines sont aussi solutions. Là on peut se demander si ce ne sont pas les seules solutions. Si on veut montrer que $f(x) = ax + b$ avec a et b des constantes réelles, cela signifie que $g(x) = f(x) - f(0) = ax + b - x = ax$ vérifiera probablement Cauchy si on est en train de bien deviner les solutions. C'est pour cela qu'il est souvent utile de passer du temps à deviner les solutions au brouillon pour avoir de bonnes idées dans la résolution.

Solution de l'exercice 9

On va utiliser une astuce très utile à toujours tenter dès qu'on connaît bien $f(f(x))$. L'astuce est d'évaluer $f(f(f(n)))$ de deux façons différentes. Ici pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(f(f(n))) = f(n+1) \quad \text{et aussi} \quad f(f(f(n))) = f(n) + 1$$

Donc

$$f(n+1) = f(n) + 1$$

De cette façon par une récurrence que l'on n'explicitera pas

$$f(n) = f(1 + \dots + 1) = f(0) + 1 + \dots + 1 = f(0) + n$$

En remplaçant dans l'équation initiale

$$f(f(n)) = n + f(0) + f(0) = n + 1$$

$$2f(0) = 1$$

Donc $f(0)$ n'est pas entier ce qui est absurde. Puisque nous avons supposé une solution f , cela signifie qu'il n'y a pas de solutions. L'analyse élimine toutes les possibilités.

Remarque 5.

Les deux choses à retenir de cet exercice sont cette astuce du $f(f(f(x)))$ et le fait que l'analyse élimine parfois toutes les possibilités, ce qui ne donne aucune solution.

Solution de l'exercice 10

En posant $(x, y) = (0, 0)$, on trouve $f(0) \leq f(0) + f(0) \iff f(0) \geq 0$. Donc $f(0)$ est positif. De plus, en posant $(x, y) = (x, -x)$, on trouve :

$$f(0) \leq f(x) + f(-x) \implies f(x) \geq -f(-x)$$

Or, avec la première condition, trouve que pour tout réel x , $f(-x) \leq -x \iff x \leq -f(-x)$. Donc en combinant les deux inégalités, on trouve

$$x \leq -f(-x) \leq f(x) \implies x \leq f(x) \leq x$$

Donc pour tout réel x , $f(x) = x$.

Remarque 6.

Il ne faut pas se laisser troubler par l'inégalité qui remplace l'égalité dans ce problème. De nombreux problèmes en compétition et en test sont désormais plutôt des "inéquations fonctionnelles".

Solution de l'exercice 11

Analyse :

On commence par prendre $y = x$, ce qui donne :

$$2xf(x) = 2xf(x)^2$$

D'où pour tout x non-nul, $f(x) = 1$ ou $f(x) = 0$. Ici, on est tenté de conclure qu'il y a deux possibles solutions pour les réels non-nuls : soit $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, soit $f(x) = 1$

pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Mais cela ne tient pas compte des multigraphes : on n'a pas encore montré qu'une fonction telle que $f(x) = 0$ pour certains réels (non-nuls) et $f(y) = 1$ pour d'autres n'était pas solution.

Pour les écarter, supposons par l'absurde qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, on trouve à partir de l'équation initiale :

$$x = (x + y)f(x)f(y) = 0$$

ce qui est absurde comme on a supposé $x \neq 0$. Donc c'est impossible qu'il y ait de fonction solution qui prenne pour valeur 0 pour un certain antécédent non-nul, et 1 pour un autre antécédent non-nul.

Trouvons maintenant la valeur de $f(0)$ selon le cas. En prenant x non-nul et $y = 0$ on obtient :

$$xf(0) = xf(0)f(x)$$

Donc si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on doit avoir $f(0) = 0$. Sinon, si $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on trouve $xf(0) = xf(0)$, donc $f(0)$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle.

Synthèse :

On vérifie aisément que la fonction nulle est bien solution.

Vérifions maintenant que toutes les fonctions de la forme $f(0) = C$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ sont également solution. Comme x et y jouent des rôles symétriques dans l'équation, il y a trois cas à vérifier :

- **Cas 1 :** $x = y = 0$. On a alors $xf(y) + yf(x) = 0 + 0 = 0$ et $(x + y)f(x)f(y) = 0 \cdot C^2 = 0$, donc on a bien $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
- **Cas 2 :** $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}^*$. Alors $xf(y) + yf(x) = 0 + yC$, et $(x + y)f(x)f(y) = y \cdot C \cdot 1 = yC$, donc on a également $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
- **Cas 3 :** $x, y \in \mathbb{R}^*$, alors $xf(y) + yf(x) = x + y$ et $(x + y)f(x)f(y) = (x + y) \cdot 1^2 = x + y$, on a bien $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.

Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc la fonction nulle, et toutes les fonctions de la forme $f(0) = C$ (avec $C \in \mathbb{R}$) et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Solution de l'exercice 12

On pose $y = 0$ pour utiliser la 2^{de} condition, et on trouve à nouveau $f(f(x)) = x$. Donc pour l'utiliser, on applique f aux deux membres, ce qui donne :

$$f(f(f(x) + f(y))) = f(x + y) \implies f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Donc toute fonction solution de l'équation initiale est solution de l'équation de Cauchy. De plus, cette fonction a pour domaine de définition $\mathbb{Q}$, donc elle doit être linéaire, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax$ pour un certain réel. On voit que toutes ces fonctions respectent la condition $f(0) = 0$, et en réinjectant cela dans l'équation initiale :

$$f(f(x) + f(y)) = f(ax + ay) = a^2(x + y) = x + y$$

Donc $a^2 = 1 \implies a = 1$ ou -1 .

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ (les calculs pour déterminer a font office de vérification, mais dans le doute ça ne fait jamais de mal de révérifier que les fonctions obtenues sont bien des solutions, on ne sait jamais).

Solution de l'exercice 13

1. Après un peu de réflexion on remarque que les fonctions de la forme $f(x) = kx$ pour $k \in \mathbb{R}$ sont solutions

$$f(x^2 - y^2) = kx^2 - ky^2 \quad (x - y)(f(x) + f(y)) = (x - y)(kx + ky) = kx^2 - ky^2.$$

2. Si on choisit $x = y = 0$.

$$f(0) = f(0^2 + 0^2) = (0 - 0) \times (f(0) + f(0)) = 0$$

Donc $f(0) = 0$.

3. On tente $y = 0$

$$f(x^2 + 0) = (x - 0)(f(x) + f(0)) = xf(x)$$

donc $f(x^2) = xf(x)$

Si on tente maintenant $x = 0$ on a

$$f(0 - y^2) = (0 - y)(f(0) + f(y)) = -yf(y)$$

donc $f(-y^2) = -yf(y)$. En regroupant ces deux résultats (avec $x = y$ pour le premier) on alors que $f(-y^2) = -f(y^2)$. Puisque tout nombre positif peut s'écrire de la forme y^2 on en déduit que pour tout $t \geq 0$

$$f(-t) = -f(t).$$

En fait cela s'étend bien aussi aux $t' \leq 0$ en posant $t = -t' \geq 0$ et en multipliant l'équation par (-1) .

4. Astuce : Le terme de gauche de $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$ ne change pas si on change $y \rightarrow (-y)$. On peut écrire deux équations

$$\begin{cases} f(x^2 - (-y)^2) = (x + y)(f(x) + f(-y)) = (x + y)(f(x) - f(y)) & \text{car } f(-y) = -f(y) \\ f(x^2 - (-y)^2) = f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)) \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} (x + y)(f(x) - f(y)) &= (x - y)(f(x) + f(y)) \\ xf(x) + yf(x) - xf(y) - yf(y) &= xf(x) - yf(x) + xf(y) - yf(y) \\ yf(x) - xf(y) &= -yf(x) + xf(y) \end{aligned}$$

Et donc $2yf(x) = 2xf(y)$. Conclusion pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$yf(x) = xf(y)$$

Ça c'est une équation très utile qui va permettre de conclure. Si on fixe maintenant $y = 1$ alors

$$1 \times f(x) = x \times f(1)$$

Si on écrit $k = f(1)$ on a alors $f(x) = kx$. Conclusion les seules solutions possibles sont les fonctions de la forme $f(x) = kx$. (Remarque pour $y = 2$ cela donne $2f(x) = xf(2)$ donc $f(x) = \frac{f(2)}{2} \times x$, même conclusion avec $k = \frac{f(2)}{2}$).

Synthèse : on a déjà montré en 1. que les fonctions de forme $f(x) = kx$ sont solutions.

5 Arithmétique : Ordre 2 (Héloïse)

Ce TD avait pour but d'appliquer la théorie de l'ordre vue la veille. On y développe notamment un argument classique : appliquer la théorie de l'ordre au plus petit diviseur premier de l'un des entiers de l'exercice.

Exercices

Exercice 1

Soit p, q premiers distincts et $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \equiv 1 \pmod{(p-1)(q-1)}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^a \equiv n \pmod{pq}$.

Exercice 2

Que vaut le reste de la division euclidienne de 11...11 avec trente-deux 1 par 17?

Exercice 3

Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite définie par $a_0 = 1, a_{n+1} = 2^{a_n}$ est stationnaire modulo N .

Exercice 4

Déterminer tous les entiers n strictement positifs tels que n divise $2^n - 1$.

Exercice 5

Déterminer tous les entiers n strictement positifs impairs tels que n divise $3^n + 1$.

Exercice 6

Déterminer tous les couples d'entiers (a, n) avec n strictement positif tel que n divise $(a + 1)^n - a^n$.

Exercice 7

Déterminer tous les nombres premiers p tels que $2^p + p$ divise $3^p + p$.

Exercice 8

Trouver toutes les paires d'entiers naturels non nuls (m, n) tels que

$$mn \mid 3^m + 1 \quad \text{et} \quad mn \mid 3^n + 1$$

Exercice 9

(IMO 1999, P4) Déterminer tous les couples d'entiers (n, p) avec p premier, $0 < n \leq 2p$ et :

$$n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

L'énoncé dit que $a \equiv 1 \pmod{\varphi(pq)}$. Si pq est premier avec n , on obtient le résultat par le théorème d'Euler-Fermat.

Si pq divise n , on a fini. Si p divise n et q est premier avec n par exemple, alors q divise $n^{a-1} - 1$ d'après le théorème d'Euler-Fermat et p divise n , donc pq divise $n(n^{a-1} - 1) = n^a - n$.

Solution de l'exercice 2

$$\begin{aligned}
 111 \dots 111 &= \sum_{k=0}^{31} 10^k \\
 &= \frac{10^{32} - 1}{10 - 1}
 \end{aligned}$$

10 et 17 sont premiers entre eux donc d'après petit Fermat : $10^{32} - 1 = (10^{17-1})^2 - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.

De plus, $10 - 1 = 9$ est premier avec 17 donc on peut multiplier par l'inverse de 9 mod 17 et trouver que 17 divise notre nombre.

Solution de l'exercice 3

On prouve le résultat par récurrence forte :

Initialisation : Pour $N = 2$, la suite devient stationnaire dès a_1 .

Hérédité : Pour N une puissance de 2, la suite s'annule à partir d'un certain rang.

Pour $N = 2^k m$ avec m impair, comme la suite est stationnaire modulo 2^k et modulo m par hypothèse de récurrence forte, on obtient par le théorème des restes chinois qu'elle est aussi stationnaire modulo $2^k \times m = N$ (2^k et m premiers entre eux).

Si N est impair, la suite est stationnaire modulo $\varphi(n)$ par hypothèse de récurrence, et comme $2^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$ d'après le théorème d'Euler-Fermat (2 et N premiers entre eux), on obtient que la suite $b_n = 2^{a_n}$ est stationnaire mod N , or $b_n = a_{n+1}$ donc la suite a_n est aussi stationnaire modulo N .

Solution de l'exercice 4

$n = 1$ est clairement solution, supposons désormais $n > 1$. Notons p le plus petit facteur premier de n , en particulier p divise $2^n - 1$. Modulo p , on a $2^n \equiv 1 \pmod{p}$, donc 2 admet un ordre modulo p . L'ordre de 2 (noté ω) divise alors $p - 1$ et n .

Montrons que $\text{PGCD}(p - 1, n) = 1$. Si le pgcd ne vaut pas 1, soit q un facteur premier de $p - 1$ et de n . Comme q divise n , $q \geq p$, donc q ne divise pas $p - 1$ ce qui est absurde.

Ainsi ω divise $\text{PGCD}(p - 1, n) = 1$, donc $\omega = 1$. Ainsi $2^1 \equiv 1 \pmod{p}$, donc p divise $2^1 - 1 = 1$ ce qui est absurde.

On a abouti à une contradiction, ainsi le seul entier solution est $n = 1$.

Solution de l'exercice 5

Tout d'abord, $n = 1$ est solution, supposons désormais $n > 1$.

Notons p le plus petit facteur premier de n , en particulier p divise $3^n - 1$. Modulo p , on a $3^n \equiv -1 \pmod{p}$, donc en élevant au carré, $3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ donc 3 admet un ordre modulo p . L'ordre de 3 (noté ω) divise alors $p - 1$ et $2n$.

Comme dans l'exercice 6, on a que $p - 1$ est premier avec n . Comme ω divise $p - 1$, ω est premier avec n donc divise 2.

Ainsi $p \mid 3^2 - 1 = 8$ donc $p = 2$, ce qui est absurde car n est impair.

$n = 1$ est donc la seule solution.

Solution de l'exercice 6

Si $n = 1$, tout a convient.

Sinon supposons $n > 1$ et notons q le plus petit diviseur premier de n . q divise $(a+1)^n - a^n$, donc modulo q , $(a+1)^n \equiv a^n \pmod{q}$. Or, si $q|a$ alors $q|a^n$ donc $q|(a+1)^n$ donc $q|a+1$. Ainsi $q|a+1-a=1$, ce qui est absurde.

On obtient donc que a est inversible, notons u un inverse de a modulo n . On a $((1+a)u)^n \equiv 1 \pmod{q}$. Ainsi notons d l'ordre de $(1+a)u$ modulo q qui existe : d divise n et $q-1$. Comme dans les exercices précédents, $q-1$ et n sont premiers entre eux donc $d=1$. Ainsi $(1+a)u \equiv 1 \pmod{d}$ donc en multipliant par a , on a $1+a \equiv a \pmod{q}$. En particulier q divise $1+a-a=1$ ce qui est absurde.

Les seules solutions sont donc les couples de la forme $(1, a)$ avec a entier.

Solution de l'exercice 7

Soit p premier tel que $2^p + p$ divise $3^p + p$. Notons q un facteur premier de $2^p + p$. q divise $2^p + p$ et $3^p + p$, donc q divise $3^p - 2^p$ qui est impair. Ainsi $q \neq 2$, donc 2 est inversible mod q . Comme $3^p \equiv 2^p \pmod{q}$, en posant u un inverse de 2 modulo q , on a $(3u)^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Posons ω l'ordre de $3u$ modulo q : par hypothèse ω existe et divise p . Si $\omega = 1$, on a $3u \equiv 1 \pmod{q}$, donc en multipliant par 2 $3 \equiv 2 \pmod{q}$. Ainsi q divise $3-2=1$ ce qui est absurde. On a donc $\omega \neq 1$, et comme ω divise p , $\omega = p$.

Or par Petit Fermat, ω divise $q-1$, donc $q \equiv 1 \pmod{p}$. En particulier, comme tous les facteurs premiers de $2^p + p$ valent 1 modulo p , on a que $2^p + p \equiv 1 \pmod{p}$. Or si $p \neq 2$, par Petit Fermat, $2^p + p \equiv 2 \not\equiv 1 \pmod{p}$. Si $p = 2$, alors $2^p + p \equiv 0 \pmod{p}$ ce qui est aussi absurde.

Ainsi il n'y a pas de solution.

Solution de l'exercice 8

Soit (m, n) vérifiant l'énoncé. Alors $m|3^m + 1$, d'après l'exercice 5, $m = 1$ ou m est pair. De même pour n .

- Si $m = 1$ et $n = 1$, on vérifie que ça marche.
- Si $m = 1$ et n est pair, $n|4$ donc $n = 2$ ou $n = 4$. On vérifie que seul $n = 2$ marche.
- Si $n = 1$ et m est pair, idem.
- Si mn est divisible par 4, $3^m + 1 \equiv 0 \pmod{4}$. Or $3^m \equiv 1 \pmod{4}$ car m est pair. Ce qui est absurde.

Ainsi les couples solutions sont $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$.

Solution de l'exercice 9

Supposons $n = 1$, la condition se réécrit $0 < 1 \leq 2p-1|p$ ce qui est vrai pour tout p premier, donc $(1, p)$ est solution pour tout p premier.

Désormais supposons $n \geq 2$ et notons q le plus petit diviseur premier de n . Si $q = 2$, alors n est pair donc $(p-1)^n + 1$ aussi, donc $p-1$ est impair. Ainsi p est pair donc $p = 2$. Réciproquement si $p = 2$ la condition se réécrit $n|2$ et on a la solution $(2, 2)$ qui réciproquement vérifie toutes les conditions de l'énoncé (car 2 divise $1+1$ et $0 < 2 \leq 4$).

On peut donc désormais supposer $q \geq 3$ et $p \neq 2$. Comme q divise $(p-1)^n + 1$, on a $(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$. En élevant au carré, $(p-1)^{2n} \equiv 1 \pmod{q}$. En particulier l'ordre

de $p - 1$ modulo q existe (notons-le d), et divise $2n$. Par Petit Fermat, il divise aussi $q - 1$. Comme dans les exercices précédents, on montre que n et $q - 1$ sont premiers entre eux. Comme d divise $q - 1$, il est premier avec n . Comme d divise $2n$, on a donc que d divise 2, donc $(p - 1)^2 \equiv 1 \pmod{p}$.

De plus comme $q \geq 3$, n est impair, donc

$$-1 \equiv (p - 1)^n \equiv ((p - 1)^2)^{\frac{n-1}{2}} \times (p - 1) \equiv 1^{\frac{n-1}{2}} (p - 1) \equiv p - 1 \pmod{q}.$$

Ainsi q divise $p - 1 + 1 = p$, donc $q = p$.

Comme $n \leq 2p$, on a $n = p$ ou $n = 2p$, mais si $n = 2p$ alors $q = 2$ et on a supposé le contraire, donc $n = p$. On obtient alors que $p^{p-1} | (p - 1)^p + 1$. En développant avec le binôme de Newton, on obtient :

$$(p - 1)^p + 1 = p^p - \binom{p}{p-1} p^{p-1} + \dots + \binom{p}{3} p^3 - \binom{p}{2} p^2 + \binom{p}{1} p - 1 + 1$$

Tous les termes sont divisibles par p^3 sauf éventuellement les trois derniers. L'antépénultième vaut $\frac{p(p-1)}{2} p^2$ donc est divisible par p^3 car p est impair, donc $(p - 1)^p + 1 \equiv p^2 \pmod{p^3}$, donc n'est pas divisible par p^3 . Il faut donc que $p - 1 < 3$, donc $p = 3$.

On vérifie aisément que si $n = p = 3$, on a bien $0 < 3 \leq 2 \times 3$ et que $3^2 = 9$ divise $2^3 + 1 = 9$.

Les solutions sont donc finalement $(1, p)$ pour tout p premier, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.

6 Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Aurélien)

En stand-by...

7 Algèbre : Méthode sp et relations de Viète (Anatole et Théo)

Viète

L'objectif de ce cours est d'apprendre à manipuler les polynômes symétriques élémentaires et les relations de Viète avec 2, 3 ou 4 variables dans le cadre d'inégalités.

Considérons un problème mettant en jeu deux variables a et b . On peut s'intéresser à la fonction f définie par

$$f(x) = (x - a)(x - b)$$

Cette fonction est intéressante car elle s'annule exactement si $x = a$ ou $x = b$. On peut développer l'expression précédente :

$$f(x) = x^2 - (a + b)x + ab$$

Les deux coefficients obtenus $a + b$ et ab , jouent un rôle particulièrement important ici. Posons $s = a + b$ et $p = ab$.

Un premier résultat intéressant est qu'on peut retrouver les valeurs de a et b à partir de s et p :

Théorème 1.

Soit (a, b) et (c, d) deux couples de réels tels que $a + b = c + d$ et $ab = cd$.

Alors $a = c$ et $b = d$ ou $a = d$ et $b = c$.

Autrement dit, il existe au plus un couple de réels ayant une somme et un produit donnés, à l'ordre près.

Démonstration.

On considère la même fonction que précédemment : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(x - a)(x - b) = x^2 - sx + p = (x - c)(x - d)$$

En évaluant en $x = a$, le membre de gauche vaut 0 donc celui de droite aussi. Ainsi, $(a - c)(a - d) = 0$ donc $a = c$ ou $a = d$.

Si $a = c$, on a $b = s - a = s - c = d$ et si $a = d$, on a $b = s - a = s - d = c$, ce qui conclut. $\square$

Soit s et p deux réels. Expliquons maintenant comment retrouver les valeurs de a et b tels que $a + b = s$ et $ab = p$, et à quelle condition de tels a et b existent. Dans la suite, on impose $a \geq b$ pour n'avoir qu'une seule solution.

On a vu que a et b sont les deux réels qui annulent la fonction $f : x \mapsto x^2 - sx + p$. Or, pour x un réel,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - sx + p = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} + p = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2 - 4p}{4} \end{aligned}$$

On remarque déjà que cette équation a des solutions si et seulement si $s^2 - 4p \geq 0$ (car le membre de gauche est un carré, donc positif). Si c'est le cas, les solutions sont

$$x = \frac{s}{2} \pm \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Ainsi, on a nécessairement

$$a = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ et } b = \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

ou l'inverse.

Il est fondamental de retenir la méthode utilisée pour résoudre cette équation, plus que le résultat en lui-même. On a trouvé les valeurs que doivent avoir a et b , mais on n'a pas montré que ces valeurs conviennent (et elles n'ont aucune raison de vérifier $a + b = s$ et $ab = p$ a priori). Montrons donc que ces valeurs vérifient bien $a + b = s$ et $ab = p$.

Théorème 2.

Soit s et p deux réels. Il existe deux réels $a \geq b$ tels que $a + b = s$ et $ab = p$ si et seulement si $s^2 \geq 4p$. Si c'est le cas, on a même

$$a = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ et } b = \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Démonstration.

On a montré plus haut que si $s^2 < 4p$, il ne pouvait pas y avoir de solutions.

Montrons maintenant que si $s^2 \geq 4p$, les deux solutions fournies conviennent. On a déjà

$$a + b = \left[\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right] + \left[\frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right] = \frac{s}{2} + \frac{s}{2} = s$$

et

$$ab = \left[\frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right] \cdot \left[\frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right] = \left(\frac{s}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right)^2 = \frac{s^2 - (s^2 - 4p)}{4} = p$$

donc a et b vérifient les deux équations voulues, ce qui conclut. $\square$

Si on impose de plus que a et b soient positifs, on a le théorème suivant :

Théorème 3.

Soit s et p deux réels. Il existe deux réels $a \geq b \geq 0$ tels que $a + b = s$ et $ab = p$ si et seulement si s et p sont positifs, et $s^2 \geq 4p$. Si c'est le cas, on a même

$$a = \frac{s}{2} + \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ et } b = \frac{s}{2} - \frac{\sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Démonstration.

Le sens direct découle du théorème précédent, et du fait que si a et b sont positifs, leur somme et produit le suit.

Réciproquement, si s et p sont positifs, et $s^2 \geq 4p$, il existe a et b tels que $a+b = s$, et $ab = p$. Si a ou b est nul, l'autre vaut s , donc est positif ce qui conclut. Sinon, p est strictement positif, donc a et b ont même signe, donc comme $a+b = s$, les deux sont positifs, ce qui conclut. $\square$

Maintenant que l'on sait tout ça, ne reste plus qu'à généraliser avec plus de variables! Avec trois variables, on a

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

On considère donc naturellement les trois quantités

$$u = a+b+c, v = ab+bc+ca, w = abc$$

De même que pour deux variables, si on connaît u, v, w , on peut retrouver a, b, c à l'ordre près de façon unique sous les bonnes conditions.

u, v, w sont appelés les *polynômes symétriques élémentaires* de a, b, c . Ceci donne le théorème suivant qui se prouve à peu près comme le Théorème 1.

Théorème 4.

Soit (a, b, c) et (d, e, f) deux couples de réels tels que $a+b+c = d+e+f$, $ab+bc+ca = de+ef+fd$ et $abc = def$.

Alors (a, b, c) est une permutation de (d, e, f) .

Avec quatre variables, on a

$$\begin{aligned} & (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \\ &= (x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd. \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

On considère donc naturellement les quatre quantités

$$u = a+b+c+d, v = ab+ac+ad+bc+bd+cd, w = abc+abd+acd+bcd, x = abcd$$

De même que pour deux variables, si on connaît u, v, w, x , on peut retrouver a, b, c, d de façon unique à l'ordre près sous les bonnes conditions.

u, v, w, x sont appelés les *polynômes symétriques élémentaires* de a, b, c, d . Ceci donne le théorème suivant qui se prouve à peu près comme le Théorème 1.

Théorème 5.

Soit (a, b, c, d) et (e, f, g, h) deux couples de réels tels que $a+b+c+d = e+f+g+h$, $ab+ac+ad+bc+bd+cd = ef+eg+eh+fg+fh+gh$, $abc+abd+acd+bcd = efg+efh+egh+fgh$ et $abcd = efgh$.

Alors (a, b, c, d) est une permutation de (e, f, g, h) .

Que faut-il retenir?

1. Si mon problème met en jeu deux variables a et b et que je connais $a+b$ et/ou ab , je sais que je peux facilement exprimer a et b

2. Si je trouve deux couples (a, b) et (c, d) tels que $a + b = c + d$ et $ab = cd$, alors je sais que ces deux couples sont les mêmes, à permutation près!
3. De même, si je trouve deux triplets (a, b, c) et (d, e, f) tels que

$$a + b + c = d + e + f, ab + bc + ca = de + ef + fd, abc = def$$

alors je sais que ce sont les mêmes triplets, à permutation près.

4. Si mon problème me donne des informations sur $a + b + c$, $ab + bc + ca$ ou abc , je peux essayer de faire apparaître la fonction $(x - a)(x - b)(x - c)$ et de l'évaluer en des x intelligents pour obtenir de l'information.

Exercices**Exercice 1**

Trouver tous les réels x tels que $x + \frac{2}{x} = 3$.

Exercice 2

Trouver tous les couples de réels x, y tels que $x + y = 11$ et $xy = 24$.

Exercice 3

Trouver tous les réels a, b tels que $a + b = 3$ et $a^2 + b^2 = 29$

Exercice 4 (JBMO 2020, P1)

Trouver tous les réels a, b, c tels que

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Exercice 5 (JBMO Shortlist 2008, A4)

Trouver tous les réels x, y, z qui satisfont le système

$$\begin{cases} x + y + z = 2008 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6024^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2008} \end{cases}$$

Exercice 6 (JBMO 2010, P1)

Soit a, b, c, d des réels tels que

$$abc - d = 1, bcd - a = 2, cda - b = 3, dab - c = -6.$$

Prouver que $a + b + c + d \neq 0$.

Exercice 7

Soient $a, b, c, x, y, z > 0$ des réels tels que $a + b + c = x + y + z$ et $abc = xyz$. On suppose de plus que $a \leq x < y < z \leq c$. Montrer que $a = x, b = y, c = z$.

Transformation s, p

On va s'intéresser ici plus particulièrement au changement de variable où l'on considère $s = a + b$ et $p = ab$ plutôt que a et b . Maintenant qu'on sait qu'on peut retrouver a et b de façon unique en fonction de s et p sous les bonnes conditions, que faire ? s et p ont en fait un intérêt pratique très important : ils permettent d'exprimer tous les polynômes symétriques en a et b . Décortiquons ce résultat.

Un monôme en a et b est une expression de la forme $k \cdot a^u b^v$, avec u et v deux entiers positifs constants, et k un réel constant lui aussi. Un polynôme en a et b est une somme de monômes en a et b , c'est donc une expression du type

$$P(a, b) = k_1 a^{u_1} b^{v_1} + k_2 a^{u_2} b^{v_2} + \dots + k_n a^{u_n} b^{v_n}$$

Exemple 6.

- s est un polynôme en a et b : $s = a + b = a^1 b^0 + a^0 b^1$.
- p est un polynôme en a et b : $p = ab = a^1 b^1$.
- $a^2 b + 2b - 3$ est un polynôme en a et b .
- a^b n'est pas un polynôme en a et b , l'exposant n'est pas constant.
- $\frac{1}{a} = a^{-1}$ n'est pas un polynôme en a et b , l'exposant est négatif.

Un polynôme est dit symétrique si sa valeur ne change pas lorsqu'on échange a et b . Autrement dit, si $P(a, b)$ et $P(b, a)$ sont les mêmes expressions.

Exemple 7.

- s est un polynôme symétrique en a et b . En effet, $a + b = b + a$: la valeur ne change pas en échangeant a et b . Il en va de même pour p .
- $a^2 + b$ n'est pas un polynôme symétrique : en échangeant a et b , on obtient $b^2 + a$, qui n'est pas la même expression.
- $a^2 + 2b^2$ non plus : en échangeant a et b , on obtient $b^2 + 2a^2$.

Maintenant qu'on a toutes les définitions, on peut donner le théorème spoilé plus haut :

Théorème 8.

Soit P un polynôme symétrique en deux variables a et b . Alors P est un polynôme en s et p . Autrement dit, on peut exprimer $P(a, b)$ à partir de s et p .

La preuve de ce théorème dépasse le cadre de ce cours.

Exemple 9.

Considérons le polynôme $a^4 + b^4$. On peut écrire

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= (a + b)^4 - 4a^3b - 6a^2b^2 - 4ab^3 \\ &= s^4 - 4(a^3b + b^3a) - 6a^2b^2 \\ &= s^4 - 4ab(a^2 + b^2) - 6(ab)^2 \\ &= s^4 - 4p((a + b)^2 - 2ab) - 6p^2 \\ &= s^4 - 4p(s^2 - 2p) - 6p^2 \\ &= s^4 - 4ps^2 + 2p^2 \end{aligned}$$

qui est bien un polynôme en s et p .

Quelques conséquences de ce théorèmes :

- Ce théorème nous apprend en fait que toute expression simple en a et b peut aussi s'écrire en fonction de $a + b$ et ab . Autrement dit, le changement de variable où on considère $a + b$ et ab au lieu de a et b peut être particulièrement intéressant.
- Si je fais ce changement de variable, je dois garder en tête que $s^2 \geq 4p$. C'est en fait l'unique contrainte qui existe (avec s et p positifs si a et b le sont), et donc une idée intéressante est de regarder les variations de l'expression lorsque p varie, par exemple pour montrer qu'à s fixé, l'expression est minimale en $p = s^2/4$.
- De plus, si j'ai trois variables, je peux faire le même changement de variable avec $a + b + c$, $ab + bc + ca$ et abc , mais ça peut vite devenir très lourd. Il peut alors être intéressant, si l'inégalité est homogène, de poser $c = 1$, puis de faire le changement de variable s, p avec a et b seulement. Si l'inégalité est symétrique en deux variables mais pas en la troisième, c'est d'autant plus utile.
- Pour 3 variables il existe une condition similaire à $s^2 \geq 4p$. Mais celle-ci est en pratique très peu exploitable. Pour 5 variables ou plus cela n'existe pas.

Exercices

Exercice 8

Soit a, b des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} + \sqrt{ab} \leq a + b$$

Exercice 9

Soit $x, y > 0$ deux réels tels que $xy(x - y) = 4$. Montrer que $x + y \geq \sqrt{12}$

Exercice 10 (JBMO Shortlist 2024, A2)

Soit a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 0$ et $abc = -16$. Trouver la plus petite valeur que peut prendre

$$M = \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}$$

Exercice 11 (JBMO Shortlist 2019, A1)

Soit a, b deux réels tels que $a^3 + b^3 - 6ab = -11$. Montrer que

$$-\frac{7}{3} < a + b < -2$$

Exercice 12 (JBMO Shortlist 2020, A3)

Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) tels que l'expression

$$M = \frac{(a+b)(b+c)(a+b+c)}{abc}$$

prend sa plus petite valeur.

Exercice 13 (JBMO 2019, P2)

Soit a, b deux réels distincts et c un réel strictement positif tels que

$$a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c$$

Montrer que $-\sqrt{c} < ab < 0$.

Solutions

Exercice 1

Trouver tous les réels x tels que $x + \frac{2}{x} = 3$.

Solution de l'exercice 1

On peut réécrire l'équation comme $x^2 - 3x + 2 = 0$, ce qui est équivalent à l'énoncé ($x \neq 0$). Il suffit alors de résoudre cette équation. Or,

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} &= \pm \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= 2 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

On obtient donc deux solutions, et on vérifie réciproquement qu'elles conviennent.

NB : on aurait pu poser $y = 2/x$, et avoir l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ en disant que $xy = 2$ et $x + y = 3$.

Exercice 2

Trouver tous les couples de réels x, y tels que $x + y = 11$ et $xy = 24$.

Solution de l'exercice 2

On connaît la somme et le produit de x et y , donc on sait qu'on peut retrouver de façon unique x et y , à l'ordre près. Pour cela, on utilise le fait que x et y sont les deux solutions de l'équation $u^2 - (x + y)u + xy = 0$ à résoudre en u . Résolvons donc cette équation :

$$\begin{aligned} u^2 - 11u + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(u - \frac{11}{2}\right)^2 &= \frac{121}{4} - 24 = \frac{25}{4} \\ \Leftrightarrow u - \frac{11}{2} &= \pm \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow u &= 8 \text{ ou } 3 \end{aligned}$$

Ainsi, $(x, y) = (8, 3)$ ou $(3, 8)$. On vérifie réciproquement que ces deux couples sont bien solutions.

Exercice 3

Trouver tous les réels a, b tels que $a + b = 3$ et $a^2 + b^2 = 29$

Solution de l'exercice 3

On cherche à calculer le produit de a et b . On pourra ensuite conclure par le même argument qu'aux exercices précédents. Pour cela, on peut écrire

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = -20$$

donc $ab = -10$. On peut alors calculer a et b qui sont les solutions de l'équation $u^2 - 3u - 10 = 0$:

$$\begin{aligned} u^2 - 3u - 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{49}{4} \\ \Leftrightarrow u - \frac{3}{2} &= \pm \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow u &= 5 \text{ ou } u = -2 \end{aligned}$$

Ainsi $(a, b) = (5, -2)$ ou $(-2, 5)$. On vérifie réciproquement que les couples $(a, b) = (5, -2)$ et $(a, b) = (-2, 5)$ conviennent bien.

Exercice 4 (JBMO 2020, P1)

Trouver tous les réels a, b, c tels que

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Solution de l'exercice 4

On souhaite montrer que les triplets (a, b, c) et $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ ont les mêmes polynômes symétriques élémentaires. On saura alors que ce sont les mêmes triplets, à permutation près. On sait déjà que

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} ab + bc + ca &= \frac{1}{2} ((a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $abc = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}$. Or,

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow (a + b + c)abc = ab + bc + ca$$

$$ab + bc + ca = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \Rightarrow abc(ab + bc + ca) = a + b + c$$

Soit $u = a + b + c$ et $v = ab + bc + ca$. On a alors

$$abc \cdot u = v \text{ et } abc \cdot v = u$$

Si $u, v \neq 0$, le produit des deux égalités nous donne directement $(abc)^2 = 1$, donc $abc = \frac{1}{abc}$.

Si $u = 0$, on a $v = abc \cdot u = 0$.

On a alors

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 0$$

donc $a = b = c = 0$, mais alors $\frac{1}{a}$ n'est pas défini.

Si $v = 0$, on montre que $u = 0$ puis on conclut de même.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} a + b + c &= \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ ab + bc + ca &= \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \\ abc &= \frac{1}{abc} \end{aligned}$$

Les triplets (a, b, c) et $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ ont donc les mêmes polynômes symétriques élémentaires. Ainsi, ce sont les mêmes triplets à permutation près. On distingue globalement trois cas qui couvrent toutes les possibilités à permutation près (car la permutation peut avoir 0, 1 ou 3 points fixes).

1. $a = \frac{1}{a}, b = \frac{1}{b}, c = \frac{1}{c}$. On a alors $a, b, c = \pm 1$. On remarque que toutes les solutions de ce type et leurs permutations conviennent.
2. $a = \frac{1}{b}, b = \frac{1}{a}, c = \frac{1}{c}$. On obtient $(a, b, c) = (a, \frac{1}{a}, \pm 1)$. Réciproquement, tous les triplets de ce type et leurs permutations conviennent. De plus, ces cas couvrent aussi les précédents en prenant a, b ou c valant 1 ou -1 .
3. $a = \frac{1}{b}, b = \frac{1}{c}, c = \frac{1}{a}$. On obtient $a = \frac{1}{\frac{1}{c}} = c$ donc $c = \frac{1}{c}$ donc $c = \pm 1$. De même, $a = \pm 1$ et $b = \pm 1$ et on retombe sur le premier cas.

On a ainsi exhibé tous les cas, à symétrie près. Les solutions sont donc

$$(a, b, c) \in \left\{ \left(x, \frac{1}{x}, \pm 1\right), \left(x, \pm 1, \frac{1}{x}\right), \left(\pm 1, x, \frac{1}{x}\right) \right\}$$

Exercice 5 (JBMO Shortlist 2008, A4)

Trouver tous les réels x, y, z qui satisfont le système

$$\begin{cases} x + y + z = 2008 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6024^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2008} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 5

On commence par poser $a = \frac{x}{2008}, b = \frac{y}{2008}, c = \frac{z}{2008}$ pour simplifier les équations. Le système est équivalent à

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$$

Comme toujours, on essaie ensuite de se ramener aux valeurs de $ab + bc + ca$ et abc qui nous permettraient d'exprimer a, b, c de façon unique. Pour cela, on utilise que

$$2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = -8$$

donc $ab + bc + ca = -4$. De plus, la troisième égalité donne

$$ab + bc + ca = abc = -4$$

Ainsi, a, b, c sont les trois solutions de l'équation $u^3 - u^2 - 4u + 4 = 0$.

Or, pour tout u réel,

$$u^3 - u^2 - 4u + 4 = (u - 1)(u^2 - 4)$$

Ainsi, les trois solutions sont $u = 1$ et $u = \pm 2$. On obtient donc 6 solutions, où $\{a, b, c\} = \{1, 2, -2\}$. Réciproquement, on vérifie aisément que toutes ces solutions conviennent. On obtient donc que les solutions du système initial sont de la forme $\{x, y, z\} = \{2008, 2 \cdot 2008, -2 \cdot 2008\}$.

Exercice 6 (JBMO 2010, P1)

Soit a, b, c, d des réels tels que

$$abc - d = 1, bcd - a = 2, cda - b = 3, dab - c = -6.$$

Prouver que $a + b + c + d \neq 0$.

Solution de l'exercice 6

On remarque que si on somme les quatre égalités, les constantes s'annulent. On obtient :

$$abc + bcd + cda + dab = a + b + c + d$$

Supposons par l'absurde que $a + b + c + d = 0$. On a alors aussi $abc + bcd + cda + dab = 0$. Ceci nous incite à introduire les autres polynômes symétriques élémentaires de a, b, c, d . On pose donc

$$u = ab + bc + cd + da + ac + bd \text{ et } v = abcd$$

On sait que a, b, c, d sont les quatre nombres qui annulent la fonction

$$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

Or, on a aussi

$$f(x) = x^4 + ux^2 + v$$

car les deux autres coefficients sont nuls.

On remarque que f est paire : pour tout x , $f(x) = f(-x)$. Ainsi, si x annule cette fonction, $-x$ aussi.

On sait que $\{a, b, c, d\}$ est l'ensemble des nombres qui annulent cette fonction. On a montré que $-a$ l'annule aussi, donc $-a \in \{a, b, c, d\}$. On distingue alors 4 cas :

1. $-a = a$

On a alors $a = 0$. La première équation donne $d = -1$, la troisième $b = -3$, la quatrième $c = 6$ mais alors la deuxième équation n'est pas vérifiée.

2. $-a = b$

Comme $a + b + c + d = 0$, on a alors $c = -d$. La première et la quatrième égalité se réécrivent

$$c(1 - a^2) = 1, c(a^2 - 1) = -6$$

Ces égalités ne sont clairement pas compatibles.

3. $-a = c$

Comme $a + b + c + d = 0$, on a alors $d = -b$. De même, la première égalité se réécrit $b(-a^2 + 1) = 1$, et la troisième : $b(a^2 - 1) = 3$, absurde.

4. $-a = d$

Comme $a + b + c + d = 0$, on a alors $b = -c$. La première égalité se réécrit $a(-b^2 + 1) = 1$ et la deuxième : $a(b^2 - 1) = 2$, absurde.

Ainsi, on ne peut pas avoir $a + b + c + d = 0$.

Exercice 7

Soient $a, b, c, x, y, z > 0$ des réels tels que $a + b + c = x + y + z$ et $abc = xyz$. On suppose de plus que $a \leq x < y < z \leq c$. Montrer que $a = x, b = y, c = z$.

Solution de l'exercice 7

Le problème nous donne clairement envie d'introduire les polynômes symétriques élémentaires de a, b, c et x, y, z . On note donc

$$s = a + b + c = x + y + z$$

$$p = abc = xyz$$

$$q_1 = ab + bc + ca, q_2 = xy + yz + zx$$

Pour tout u , on a les deux égalités suivantes :

$$(u - a)(u - b)(u - c) = u^3 - su^2 + q_1u - p$$

$$(u - x)(u - y)(u - z) = u^3 - su^2 + q_2u - p$$

En soustrayant, on obtient

$$(u - a)(u - b)(u - c) - (u - x)(u - y)(u - z) = (q_1 - q_2)u$$

On peut évaluer cette égalité en diverses valeurs intelligentes. Commençons par l'évaluer en c :

$$-(c - x)(c - y)(c - z) = (q_1 - q_2)c$$

Le membre de gauche est négatif car $c \geq x, y, z$. Ainsi, $q_1 - q_2 \leq 0$. Évaluons maintenant en a :

$$-(a - x)(a - y)(a - z) = (q_1 - q_2)a$$

Le membre de gauche est positif car $a \leq x, y, z$. Ainsi $q_1 - q_2 \geq 0$. On a donc $q_1 - q_2 = 0$, et ainsi

$$(a - x)(a - y)(a - z) = 0 = (c - x)(c - y)(c - z)$$

Comme $a < y, z$, on a forcément $a = x$ et de même, comme $c > x, y$ on doit avoir $c = z$. Enfin, $a + b + c = x + y + z$ donne $b = y$, ce qui conclut.

Exercice 8

Soit a, b des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} + \sqrt{ab} \leq a + b$$

Solution de l'exercice 8

On pose $p = xy$ et $s = x + y$, exprimons chaque terme de l'inégalité en fonction de s et p .

Comme $a^2 + ab + b^2 = s^2 - p$, l'inégalité se réécrit donc

$$\sqrt{\frac{s^2 - p}{3}} + \sqrt{p} \leq s$$

En élevant au carré, elle est équivalente à $p + \frac{s^2 - p}{3} + 2\sqrt{\frac{(s^2 - p)p}{3}} \leq s^2$ donc à $2\sqrt{\frac{p(s^2 - p)}{3}} \leq \frac{2}{3}(s^2 - p)$, ce qui se réécrit $\sqrt{3p} \leq \sqrt{s^2 - p}$. Or $\sqrt{s^2 - p} \geq \sqrt{4p - p} = \sqrt{3p}$ ce qui conclut.

Exercice 9

Soit $x, y > 0$ deux réels tels que $xy(x - y) = 4$. Montrer que $x + y \geq \sqrt{12}$

Solution de l'exercice 9

Soit $p = xy$ et $s = x + y$. A priori la contrainte $xy(x - y)$ n'est pas symétrique, car $x - y$ ne l'est pas. Mais $x - y = \sqrt{(x - y)^2}$, qui est symétrique en x et y . Utilisons cela.

L'égalité se réécrit

$$p\sqrt{s^2 - 4p} = 4$$

soit

$$s^2 = \left(\frac{4}{p}\right)^2 + 4p = \frac{16}{p^2} + 4p$$

Or, par IAG, $\frac{16}{p^2} + 2p + 2p \geq 3\sqrt[3]{\frac{16}{p^2} \cdot 2p \cdot 2p} = 3 \cdot 4 = 12$. Ainsi, $s \geq \sqrt{12}$.

Exercice 10 (JBMO Shortlist 2024, A2)

Soit a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 0$ et $abc = -16$. Trouver la plus petite valeur que peut prendre

$$M = \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}$$

Solution de l'exercice 10

Déjà comme $abc = -16$, aucun réel parmi a, b, c n'est nul, et un ou trois sont strictement négatifs. Comme $a + b + c = 0$, on a donc que parmi a, b, c un est strictement négatif, et deux strictement positifs. Disons que c est strictement négatif. Posons $s = a + b$ et $p = ab$, on a $c = -s$ et $16 = -abc = sp$. Or $p \leq \frac{s^2}{4}$; donc $16 \leq \frac{s^3}{4}$, ainsi $s^3 \geq 64$, donc $s \geq 4$, et $c \leq -4$.

Notons que $W = \frac{a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + c^3a + a^3c}{abc}$. Or

$$a^3b + b^3a + b^3c + c^3b + c^3a + a^3c = a^3(b + c) + b^3(a + c) + c^3(a + b) = -a^4 - b^4 - c^4$$

Ainsi, on cherche à déterminer la valeur minimale de $\frac{a^4 + b^4 + c^4}{16}$. Or $c^4 \geq 4^4$, et par inégalité des moyennes, $a^4 + b^4 \geq \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \geq \frac{(a + b)^4}{8} \geq 32$.

Ainsi $W = \frac{a^4+b^4+c^4}{16} \geq \frac{32+4^4}{16} = 2 + 16 = 18$. De plus, si on a égalité alors $c = -4$, et on a égalité dans $p = \frac{s^2}{4}$, donc $a = b$. Comme $a + b = -c$, on a $a = b = 2$ et $c = -4$.

Réciproquement, pour ces valeurs, on a $W = \frac{4+4}{-4} + \frac{16+4}{2} + \frac{16+4}{2} = -2 + 10 + 10 = 18$.

Exercice 11 (JBMO Shortlist 2019, A1)

Soit a, b deux réels tels que $a^3 + b^3 - 6ab = -11$. Montrer que

$$-\frac{7}{3} < a + b < -2$$

Solution de l'exercice 11

Soit $s = a + b, p = ab$. On a $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = s^3 - 3sp$, donc $s^3 - 3sp - 6p = -11$, soit

$$p(3s + 6) = s^3 + 11$$

. On veut montrer d'abord que $s < -2$. On sait par IAG que $s^2 \geq 4p$. Supposons par l'absurde que $s \geq -2$. On a alors $3s + 6 \geq 0$, donc

$$s^3 + 11 \leq \frac{s^2}{4}(3s + 6)$$

soit

$$s^3 + 44 \leq 6s^2$$

Or, si $s \leq 0$, $s^3 + 44 \geq 44 - 8 \geq 36 > 6 \cdot (-2)^2 \geq 6s^2$ ce qui est absurde. Si $s \geq 0$, $s^3 + 44 > \frac{1}{2}(s^3 + s^3 + 64) \geq \frac{1}{2}(12s^2) = 6s^2$ par IAG. On obtient donc une contradiction dans les deux cas. Montrons maintenant que $s > -\frac{7}{3}$. Comme $3s + 6 < 0$, on a $s^3 + 11 \geq \frac{s^2}{4}(3s + 6)$, soit

$$s^2(6 - s) \leq 44$$

. Si $s \leq -\frac{7}{3}$, on a clairement $s^2 \geq (\frac{7}{3})^2$ et $6 - s \geq 6 + \frac{7}{3} = \frac{25}{3}$, donc $s^2(6 - s) \geq (\frac{7}{3})^2 \cdot \frac{25}{3} \geq \frac{49 \cdot 25}{27}$. Or, $49 \cdot 25 > 44 \cdot 27$, donc $s^2(6 - s) > 44$, ce qui est contradictoire. On a donc bien $-\frac{7}{3} < s < -2$.

Exercice 12 (JBMO Shortlist 2020, A3)

Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) tels que l'expression

$$M = \frac{(a+b)(b+c)(a+b+c)}{abc}$$

prend sa plus petite valeur.

Solution de l'exercice 12

Tout d'abord regardons comment M se comporte. C'est une expression homogène, symétrique en a et c , mais pas en b . A priori, il y a de bonnes chances que le cas d'égalité soit pour $a = c$ et b une fonction de a particulière. Notons aussi qu'il n'est pas clair que M a une valeur minimale.

Utilisons donc l'homogénéité : on peut fixer une des variables. Le plus intelligent est de fixer b , vu qu'à priori on aura $a = c$ et a sera déterminé en fonction de b . Posons donc $b = 1$, on cherche donc la valeur minimale de

$$M = \frac{(1+a)(1+c)(1+a+c)}{ac} = \frac{(1+a+c+ac)(1+a+c)}{ac}$$

Comme on a un terme dépend de deux variables, on peut poser $s = a + c$ et $p = ac$. En particulier $M = \frac{(1+s+p)(1+s)}{p} = 1 + s + \frac{(1+s)^2}{p} \geq 1 + s + 4\frac{(1+s)^2}{s^2}$

Ainsi $M \geq 5 + s + \frac{8}{s} + \frac{4}{s^2}$. Maintenant il reste à minimiser cette quantité. Pour cela, le plus naturel est de dériver. La dérivée de $f(s) = 5 + s + \frac{8}{s} + \frac{4}{s^2}$ est $1 - \frac{8}{s^2} - \frac{8}{s^3} = \frac{s^3 - 8s - 8}{s^3}$. On cherche alors une racine évidente de $s^3 - 8s - 8$ si possible entière. Si elle est entière, elle divise -8 . En testant, on obtient que -2 est racine! On a donc $f'(s) = \frac{(s+2)(s^2-2s-4)}{s^3}$. Or le discriminant de $s^2 - 2s - 4$ vaut 20 donc ses racines sont $x = \frac{2+\sqrt{20}}{2} = 1 + \sqrt{5}$ et $y = 1 - \sqrt{5}$.

Ainsi $f'(s) = \frac{(s-x)(s-y)(s+2)}{s^3}$ est strictement négative sur $]0, x[$, nulle en x et strictement positive sur $]x, +\infty[$. Ainsi f décroît strictement sur $]0, x]$ puis croît strictement sur $[x, +\infty[$. On a donc que $f(s) \geq f(x)$ avec égalité si et seulement si $s = x$.

Ainsi on a $M \geq f(x)$, avec égalité si et seulement si on a égalité dans l'inégalité entre p et s , i.e. $a = c$, et on a $s = x$, i.e. si et seulement si $a = c = \frac{x}{2}$.

Ainsi $f(x)$ est la valeur minimale de M (qu'on ne nous demande pas de calculer) atteinte exactement pour les triplets de la forme $(a, b, c) = (\frac{bx}{2}, b, \frac{bx}{2})$ pour $b > 0$ par homogénéité.

Exercice 13 (JBMO Shortlist 2019, P2)

Soit a, b deux réels distincts et c un réel strictement positif tels que

$$a^4 - 2019a = b^4 - 2019b = c$$

Montrer que $-\sqrt{c} < ab < 0$.

Solution de l'exercice 13

Tout d'abord, notons que $a^4 - 2019a = b^4 - 2019b$ donc $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = 2019(a - b)$ donc $2019 = (a + b)(a^2 + b^2)$.

De plus, en faisant la somme, on obtient que

$$2c = a^4 + b^4 - 2019(a + b) = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - 2019(a + b) = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - (a^2 + b^2)(a + b)^2.$$

Ainsi

$$2c = -2a^2b^2 + (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 - (a + b)^2) = -2a^2b^2 - 2ab(a^2 + b^2) = -2ab(a^2 + b^2 + ab).$$

Notons que $a^2 + b^2 + ab = \frac{(a+b)^2 + a^2 + b^2}{2}$ est strictement positif car ni a ni b n'est nul. Ainsi ab est strictement négatif.

De plus si on pose $p = ab$ et $s = a + b$, l'égalité précédente devient $2c = -2p(s^2 - p) \leq -2p(-p) = 2p^2$, donc $p^2 \leq c$, ainsi $p \geq -\sqrt{c}$. Si on a égalité dans l'inégalité précédente, alors $s = 0$, ce qui contredit $2019 = (a + b)(a^2 + b^2)$. Ainsi $ab > -\sqrt{c}$, ce qui conclut.

8 Arithmétique : Equations diophantiennes (Paul A)

Introduction

Les équations diophantiennes sont les équations dans lesquelles on recherche des solutions **entières**. Elles font souvent intervenir plusieurs inconnues et il n'y a pas de méthode systématique pour les résoudre. En première approximation, on peut déjà se demander :

1. Combien de solutions il peut y avoir (aucune, une, un nombre fini, une infinité...)
2. S'il y en a un nombre fini, peut-on les trouver et comment ?
3. S'il y en a un nombre infini, peut-on les caractériser par une formule ou un algorithme ?

Dans la suite de ce cours, on présentera une liste (non-exhaustive bien sûr) de techniques pouvant être appliquées à des exercices d'équations diophantiennes. Ces techniques n'ont pas toutes été présentées lors du cours mais peuvent s'avérer utiles face à une variété d'exercices.

Dans toute la suite de ce cours, et à moins que l'on précise le contraire, les variables seront prises entières.

Rappels

On rappelle quelques résultats importants qui ont été traités dans des cours ultérieurs, leurs démonstrations sont disponibles dans les cours correspondants du polycopié.

Proposition 1 (Factorisation de Bernoulli).

Soit n un entier naturel et a et b des nombres réels, alors on a :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Si de plus n est impair, on a alors

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

Remarque 2.

La factorisation de $a^n + b^n$ n'est pas vraie pour n pair !

Proposition 3 (Binôme de Newton).

Pour tout entier naturel n , et tous nombres réels a et b , on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Théorème 4 (Division euclidienne).

Soient a et b des entiers avec $b \neq 0$. Alors il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$

On dit que q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b

Théorème 5 (Théorème de Bézout).

Soient a et b deux entiers. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

Corollaire 6.

Soient a et b deux entiers, alors il existe u et v deux entiers tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$

Lemme 7 (Lemme de Gauss). Soient a, b et n trois entiers naturels tels que a et n soient premiers entre eux. Si n divise ab , alors n divise b .

De ces quelques résultats découlent des réflexes qu'il est bon de garder en tête :

- Si $ab = p^k$ avec p un nombre premier, alors a et b sont des puissances de p .
- Le PGCD de deux entiers dont la différence vaut n est un diviseur de n .
- Si on note $d = \text{pgcd}(a, b)$ et que ab est un carré parfait alors $a = dx^2$ et $b = dy^2$

Exercice 1

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$2^n + 1 = x^2$$

Solution de l'exercice 1

On fait passer le 1 de l'autre côté et on factorise pour obtenir :

$$2^n = (x - 1)(x + 1)$$

Puis on remarque qu'il faut que $x - 1$ et $x + 1$ soient alors des puissances de 2. On cherche donc deux puissances de deux distantes de 2, ce qui n'arrive que si l'une vaut 2 et l'autre 4. On en conclut donc que $x = \pm 3$ puis que $n = 3$.

Exercice 2

Trouver tous les entiers naturels n tels qu'il existe $x, y \in \mathbb{N}$ tels que

$$5x + 2y = n$$

Et s'il suffisait que $x, y \in \mathbb{Z}$?

Solution de l'exercice 2

On remarque que si n est une solution convenable, alors $n + 2$ l'est aussi en incrémentant y de 1. Dès lors, si on a deux entiers consécutifs qui sont solution, alors tous les entiers suivants sont clairement solution. Ainsi, il suffit de tester les petits cas pour trouver le plus grand entier n qui **ne vérifie pas** l'énoncé :

- 0 convient clairement (prendre $x = y = 0$)
- 1 ne convient pas (si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors $5x + 2y \geq 2$)
- 2 convient (prendre $x = 0, y = 1$)
- 3 ne convient pas (si $x \geq 1$ ou $y \geq 2$, alors $5x + 2y \geq 4$)
- 4 convient (prendre $x = 0, y = 2$)
- 5 convient (prendre $x = 1, y = 0$)

Ainsi, l'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathbb{N} \setminus \{1, 3\}}$$

Dans le cas où on autorisait les valeurs négatives de x et y , alors le théorème de Bézout nous affirme que 1 convient, et il nous suffit alors de tout multiplier par n'importe quelle constante positive pour obtenir que tous les entiers naturels sont solution.

Arguments modulaires

L'arithmétique modulaire est un outil très puissant dans la résolution d'équations diophantiennes. L'idée à retenir est que si une équation diophantienne admet une solution, alors elle admet en particulier une solution après avoir été réduite modulo n .

Plus précisément, la contraposée de cette proposition est que si une équation diophantienne n'admet pas de solution modulo n , alors elle n'admet juste pas de solution.

Exemple 8.

Supposons que l'on veuille résoudre l'équation diophantienne

$$x^2 = 4k + 3$$

Alors en regardant cette équation modulo 4, on trouve que

$$x^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

Mais on sait que les carrés sont tous congrus à 0 ou 1 modulo 4 (il suffit de tester tous les entiers jusqu'à 4), donc **cette équation n'a pas de solution**.

Attention : La réciproque n'est pas forcément vraie : ce n'est pas parce qu'une équation diophantienne admet une solution modulo n qu'elle en possède une dans l'absolu.

Exemple 9.

Exemple d'ED qui a une solution modulo quelque chose mais sans solution en vrai

La vraie difficulté de cette méthode est de trouver le bon entier naturel n qui donnerait une contradiction. Voici quelques conseils :

- Lorsque des carrés sont mis en jeu, il peut souvent être utile de regarder modulo 4, 8 ou 16. Les carrés sont alors :
 - ★ Modulo 4 : 0 et 1
 - ★ Modulo 8 : 0, 1 et 4
 - ★ Modulo 16 : 0, 1, 4 et 9
- Lorsque des cubes sont mis en jeu, il peut souvent être utile de regarder modulo 7 ou 9. Les cubes sont alors :
 - ★ Modulo 7 : 0, 1, 6 (ou -1)
 - ★ Modulo 9 : 0, 1 et 8 (ou -1)
- Si l'équation fait intervenir des puissances de n , il est particulièrement intéressant de regarder modulo n^2 ou n^3 (voire plus)... Cela fonctionne particulièrement bien si n est un nombre premier ! En effet, on fait alors disparaître certains termes à partir d'un certain rang, et grand nombre d'équations diophantiennes n'ont que des solutions relativement petites.
- Il est souvent judicieux de choisir un nombre premier p tel que les puissances mises en jeu dans l'équation diophantienne donnent 1 modulo p . Pour ça on pensera en particulier au **théorème d'Euler-Fermat**.
- Plus généralement, il peut être intéressant de regarder modulo n importe quelle constante qui apparaît dans l'énoncé.

Exercice 3

Déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2 + y^4 + 1 = 6^z$ avec x, y, z des entiers.

Solution de l'exercice 3

Si $z \geq 2$, on regarde modulo 4 et on a $x^2 + y^4 \equiv 3 \pmod{4}$, mais la somme de deux carrés n'est jamais congrue à 3 modulo 4. Il suffit donc de tester les petites valeurs de z , et d'utiliser la positivité des carrés pour obtenir que les seules solutions sont donc $z = 0, x = y = 0$ et $z = 1, x = 2, y = 1$. Donc

$$\mathbb{S} = \{(0, 0, 0), (2, 1, 1)\}$$

Exercice 4

Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que

$$x^{12} = 26y^3 + 2025$$

Solution de l'exercice 4

On a envie de regarder modulo 13 puisque 13 est premier, fait disparaître le terme $26y^3$ et par le petit théorème de Fermat, on a $x^{12} \equiv 0 \pmod{13}$ ou $x^{12} \equiv 1 \pmod{13}$. Or, $2025 \equiv 10 \pmod{13}$, ce qui conduit à une absurdité. Ainsi, il n'y a pas de solution.

Remarque 10.

Lorsque les problèmes deviennent plus complexes, ces techniques peuvent servir non pas à résoudre l'exercice mais à acquérir des informations sur les variables mises en jeu (on procède par analyse-synthèse). C'est typiquement ce qui va se passer dans l'exercice suivant :

Exercice 5 (Entraînement de mi-parcours Groupe B, 2020)

Trouver tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que

$$2^x - 3^y = 7$$

Solution de l'exercice 5

On a $2^n = 7 + 3^m \geq 8$, donc $n \geq 3$. On regarde modulo 8 : $3^m \equiv 1 \pmod{8}$, donc m doit être pair. Si $m = 0$, on a la solution $(3, 0)$

On suppose alors $m \geq 1$. De même, en regardant modulo 3, on trouve n pair, donc en notant $n = 2k, m = 2l$, on a $(2^k - 3^l)(2^k + 3^l) = 7$. Or, 7 est premier, et $2^k + 3^l$ est positif, donc on a finalement

$$\mathbb{S} = \{(3, 0), (4, 2)\}$$

Réciproquement, ces couples conviennent bien.

Descente infinie

Le principe de la descente infinie (ou descente infinie de Fermat) est de construire des solutions itérativement pour montrer qu'une équation diophantienne admet pas ou peu de solutions. Elle repose sur le théorème suivant :

Théorème 11. Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Exercice 6

A l'aide d'une descente infinie, montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Solution de l'exercice 6

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel. Alors il existe deux entiers naturels a et b tels que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

En élevant au carré, on trouve

$$a^2 = 2b^2$$

On trouve alors que a est pair, donc $a = 2a'$ avec $a' < a$ (car $a \neq 0$). Ainsi,

$$b^2 = 2a'^2$$

Donc b est pair et donc $b = 2b'$, soit finalement

$$a'^2 = 2b'^2$$

Finalement, on a trouvé une solution (a', b') strictement inférieure à (a, b) ce qui conduit à une descente infinie et donc une absurdité.

Exercice 7

Trouver tous les triplet d'entiers (x, y, z) tels que :

$$x^3 + 9y^3 = 3z^3$$

Solution de l'exercice 7

Supposons qu'il existe une solution $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Alors clairement x est divisible par 3, et on peut alors l'écrire $x = 3x'$ puis simplifier l'égalité pour obtenir :

$$9x'^3 + 3y^3 = z^3$$

Donc z est divisible par 3, et en notant $z = 3z'$, l'équation devient

$$3x'^3 + y^3 = 9z'^3$$

Enfin, y est alors divisible par 3 donc en notant $y = 3y'$, on remarque que le triplet (x', y', z') est toujours solution de l'équation de départ, et qu'il est plus petit que me triplet (x, y, z) dans le sens de :

$$|x'| + |y'| + |z'| < |x| + |y| + |z|$$

Donc le principe de la descente infinie permet de conclure que la seule solution potentielle est $(0, 0, 0)$. Réciproquement, on vérifie qu'elle est effectivement solution.

Arguments de taille

Il arrive souvent que les équations diophantiennes aient un nombre fini de solutions, et qu'un argument de taille permette de se limiter à un nombre fini de cas à tester. C'est typiquement le genre de problèmes où on dit que la propriété ne peut plus être vérifiée "à partir d'un certain rang".

Plus généralement, les arguments de taille sont souvent importants en arithmétique, et

savoir manipuler des inégalités, des encadrements ou d'autres outils d'analyse se révèle souvent utile.

On donne quelques propositions sur le sujet ci-dessous, à noter que des outils plus puissants existent aussi, mais ne relèvent a priori pas du cadre de ce cours. Le lecteur curieux pourra se référer au cours du [groupe D de Valbonne 2024](#)

Proposition 12.

Les relations de divisibilité donnent déjà un certain nombre d'inégalités intéressantes :

- Si $a \mid b$ et a et b sont non-nuls, alors $|a| \leq |b|$
Attention cependant la condition de non-nullité de b est **indispensable** !
- Si $a, b > 0$, que $a \neq b$ et $a \mid b$, alors $2a \leq b$
- Si $a \mid b$ alors pour tout nombre premier p , $v_p(a) \leq v_p(b)$

Proposition 13 (Comparaison de puissances).

Soient $p > q > 0$. Alors les puissances p -ièmes croissent plus rapidement que les puissances q -ièmes. Autrement dit, si les conditions du problème donnent une contrainte de la forme $x^p \leq Cx^q$ avec $C > 0$ alors elle ne peut être vérifiée que pour des valeurs de x suffisamment petites.

Proposition 14 (Croissances comparées).

Il faut toujours garder à l'esprit les croissances relatives de différentes fonctions : Les puissances croissent moins vite que les exponentielles, qui croissent moins vite que les factorielles. Ainsi, si $a > 1$, alors à partir d'un certain rang, on aura toujours

$$n! > a^n > n^a$$

En particulier, dès lors que dans un problème, une condition donne une condition du type $n! < a^n$, alors on sait qu'à partir d'un certain rang, aucune valeur de n ne conviendra.

Remarque 15.

Pour utiliser ces arguments "à partir d'un certain rang", on peut démontrer les inégalités à partir de ce rang par récurrence ou directement à partir d'inégalités connues. Ensuite il faut traiter les premiers cas à la main !

Remarque 16.

Comme mentionné précédemment, un autre outil important est l'encadrement d'une expression par deux autres expressions : typiquement, on peut vouloir encadrer un carré parfait entre deux autres carrés parfaits, de manière à aboutir à une absurdité (si les inégalités sont strictes) ou à une égalité (si elles sont larges).

Exercice 8

Trouver tous les couples (x, y) d'entiers positifs tels que $x^2 = y^2 + 7y + 6$

Solution de l'exercice 8

Remarquons que pour $y > 3$, on a

$$(y+3)^2 = y^2 + 6y + 9 < y^2 + 7y + 6 = x^2 < y^2 + 8y + 16 = (y+4)^2$$

Donc on doit avoir $y \in \{0, 1, 2, 3\}$. On peut alors tester tous les cas pour constater que la seule solution est donnée par $x = 6$ et $y = 3$.

Exercices Supplémentaires

Exercice 9

Quels sont les n tels que $4^n + 5^n$ est un carré parfait ?

Solution de l'exercice 9

Soient k et n tels que $4^n + 5^n = k^2$, on peut alors réarranger et factoriser pour obtenir :

$$5^n = (k - 2^n)(k + 2^n)$$

Si 5 divisait chacun de ces facteurs, il diviserait aussi la différence des deux, qui est une puissance de 2, ce qui est absurde, donc un de ces termes vaut 1 et l'autre est une puissance de 5. On trouve alors en regardant la différence des facteurs que

$$2^{n+1} = 5^n - 1$$

Il y a alors une solution pour $n = 1$ puis par récurrence on trouve que le membre de droite est strictement supérieur au membre de gauche, ce qui permet de conclure que la seule solution est $n = 1$ et $k = 3$, qui réciproquement est effectivement une solution.

Exercice 10 (Olimpíada Matemáticos por Diversão 2020)

Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y$$

Solution de l'exercice 10

On commence par remarquer que si $y > 2$, alors en regardant modulo 8, on obtient

$$x^4 - 6x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{8}$$

Ou encore en remarquant que $-6 \equiv 2 \pmod{8}$, on a :

$$(x^2 + 1)^2 \equiv 0 \pmod{8}$$

Ce qui implique que $x^2 + 1$ est divisible par 4, ce qui est impossible car 3 n'est pas un carré modulo 4. Ainsi, il n'y a pas de solution pour $y > 2$, et il ne reste plus qu'à traiter les petits cas à la main :

- Si $y = 0$, on a $x^2(x^2 - 6) = 6$, donc $x^2 \mid 6$, ce qui n'est possible que si $x = 1$ car 6 n'a pas de diviseur non-trivial qui est un carré parfait, mais cela n'est pas une solution.
- Si $y = 1$, on a $x^2(x^2 - 6) = 13$, donc $x^2 \mid 13$, ce qui n'est possible que si $x = 1$ car 13 n'a pas de diviseur non-trivial qui est un carré parfait, mais cela n'est pas une solution.
- Si $y = 2$, on trouve de même que $x^2 \mid 27$, donc $x \in \{1, 3\}$, ce qui mène à la solution $(3, 2)$.

Exercice 11

Déterminez tous les triplets (x, y, z) d'entiers naturels tels que

$$x^2 + y^2 = 7z^2$$

Solution de l'exercice 11

Supposons avoir une solution $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

On regarde les carrés modulo 7 : 0, 1, 2 et 4. On constate alors la seule manière pour avoir une somme de deux carrés qui est divisible par 7 est que chacun de ces carrés soit divisible par 7, donc on peut poser $x = 7x'$ et $y = 7y'$, et simplifier l'égalité pour donner :

$$7x'^2 + 7y'^2 = z^2$$

Donc z est divisible par 7 et on peut poser $z = 7z'$, ce qui nous donne une solution de l'équation initiale strictement plus petite, ce qui par le principe de descente infinie est impossible.

Donc la seule solution possible est $(0, 0, 0)$, et réciproquement c'est effectivement une solution.

Exercice 12 (Indian Olympiad Qualifier in Mathematics 2020, Q13)

Trouver tous les couples (n, x) d'entiers naturels tels que

$$2^n + 5^n = x^2 + 65$$

Solution de l'exercice 12

On commence par regarder modulo 3 : $x^2 + 2 \equiv 2 \times (-1)^n$. Or, modulo 3 les carrés sont 0 et 1, donc n est pair. On peut alors écrire $n = 2k$, puis $x^2 = 5^{2k} + 4^k - 65$, et pour $k \geq 4$, on a $4^k - 65 > 0$ d'où $(5^k)^2 < x^2 = 5^{2k} + 4^k - 65 < 5^{2k} + 2 \times 5^k + 1 = (5^k + 1)^2$.

Ainsi, il ne nous reste plus qu'à traiter les entiers de 0 à 3 pour k et la seule solution est alors donnée par $n = 4$ et $x = 24$

Exercice 13

Trouver tous les entiers naturels vérifiant $x! = x^3 - 11x + 4$

Solution de l'exercice 13

Intuitivement, on se doute qu'il ne va pas y avoir beaucoup de solutions, puisque la factorielle croît beaucoup plus rapidement qu'un polynôme de degré 3.

Plus précisément, on remarque que pour $x \geq 4$, on a $x! \geq x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ d'où

$$x! - (x^3 - 11x + 4) \geq x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 5x - 4 = (x-4)(x^3 - 3x^2 - x + 1)$$

Enfin, on remarque que pour $x \geq 5$, on a $x^3 - 3x^2 - x + 1 > 0$ ce qui rend l'égalité recherchée impossible. Reste alors à vérifier les entiers de 0 à 4, ce qui donne une unique solution : $x = 4$.

Exercice 14

Trouver tous les nombres premiers p et entiers $m, n \geq 0$ tels que $p^n + 144 = m^2$

Solution de l'exercice 14

On réécrit l'équation

$$p^n = m^2 - 144 = (m-12)(m+12)$$

Comme p est premier, il existe deux entiers k et l tels que $m-12 = p^l$ et $m+12 = p^k$. De plus, on a immédiatement $l < k$ car $m-12 < m+12$.

Ensuite, comme on a deux puissances de p séparées de 24, cela invite à regarder le pgcd de ces quantités : d'une part, $\text{pgcd}(m-12, m+12) = \text{pgcd}(m-12, 24) \mid 24$ et d'autre part, $\text{pgcd}(m-12, m+12) = p^{\min(k,l)} = p^l$, donc ce pgcd est une puissance d'un nombre premier qui divise 24. Reste alors la disjonction de cas :

- Si $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 1$, alors $m-12 = 1$, donc $m = 13$, ce qui nous donne la solution $m = 13, p = 5, n = 2$.
- Si $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 2$, alors $m-12 = 2$, donc $p = 2$ mais $m+12 = 26$ n'est pas une puissance de 2, donc ça n'apporte pas de solution.
- Si $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 3$, alors $m-12 = 3$, d'où $m = 15$, et $m+12 = 27 = 3^3$, donc on obtient la solution $m = 15, p = 3$ et $n = 4$.
- Si $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 4$, $m = 16$ et $m+12 = 28$ n'est pas une puissance de 2, donc ça n'apporte pas de solution.
- Si $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 8$, $m = 20$, $m+12 = 32$ et on trouve la solution $m = 20, p = 2$ et $n = 8$.

Il y a donc 3 triplets (m, n, p) qui sont des solutions : $(13, 2, 5)$, $(15, 4, 3)$ et $(20, 8, 2)$.

Exercice 15

Trouver tous les entiers $x, \alpha, \beta \geq 0$ vérifiant

$$x^2 + x = 2^\alpha 3^\beta$$

Solution de l'exercice 15

On factorise le membre de gauche :

$$x(x+1) = 2^\alpha 3^\beta$$

On remarque alors que $\text{pgcd}(x, x+1) = 1$, donc on se trouve dans l'un des trois cas suivants (car $x+1 > x$) :

- $x = 1$ et $x+1 = 2^\alpha 3^\beta$, donc $x+1 = 2$ d'où $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, ce qui donne une solution.
- $x = 2^\alpha$ et $x+1 = 3^\beta$ d'où $3^\beta - 2^\alpha = 1$. On a ensuite 3 sous-cas à traiter :
 - Si $\alpha = 0$, il n'y a pas de solution.
 - Si $\alpha = 1$, on a la solution $\beta = 1$.
 - Si $\alpha \geq 2$, alors on regarde l'équation modulo 4 et on trouve β pair (car il faut que $3^\beta \equiv 1 \pmod{4}$). On peut alors poser $\beta = 2\gamma$ factoriser l'expression en $2^\alpha = (3^\gamma - 1)(3^\gamma + 1)$. Ces deux facteurs étant séparés de 2, leur pgcd divise 2 et comme ils sont de même parité et tous deux des puissances de 2, $3^\gamma - 1 = 2$ d'où $\gamma = 1$ et $\alpha = 3$.
- $x = 3^\beta$ et $x+1 = 2^\alpha$ d'où $2^\alpha - 3^\beta = 1$, et on a deux cas à traiter :
 - Si $\beta = 0$, alors $\alpha = 1$ et $x = 1$.
 - Si $\beta \geq 1$, alors modulo 3, on trouve que α est pair, donc on peut poser $\alpha = 2\gamma$. Alors on peut réarranger et factoriser $3^\beta = (2^\gamma - 1)(2^\gamma + 1)$, et ces deux facteurs sont séparés de 2 donc leur pgcd est un diviseur de 2, et sont des puissances de 3, d'où $2^\gamma - 1 = 1$ et on trouve la solution $\alpha = 2, \beta = 1$ et $x = 3$.

Il y a donc quatre triplets solutions (x, α, β) : $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 1)$, $(8, 3, 2)$ et $(3, 2, 1)$.

Exercice 16 (IMO 2006, P4 (plus difficile))

Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que

$$2^{2x+1} + 2^x + 1 = y^2$$

Solution de l'exercice 16

On teste les petits cas.

- $x = 0$ donne $2^{2x+1} + 2^x + 1 = 2 + 1 + 1 = 4 = 2^2$ donc $(0, 2)$ est solution.
- $x = 1$ donne $2^{2x+1} + 2^x + 1 = 8 + 2 + 1 = 11$ qui n'est pas un carré parfait, donc $x = 1$ ne donne aucune solution.
- $x = 2$ donne $2^{2x+1} + 2^x + 1 = 32 + 4 + 1 = 37$ qui n'est pas un carré parfait, donc $x = 2$ ne donne aucune solution.

Supposons maintenant que (x, y) est une solution avec $x \geq 3$. Comme $x \geq 3 > 0$, y^2 doit être impair donc y aussi : on écrit $y = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Alors l'équation se réécrit $2^x(2^{x+1} + 1) = (2k + 1)^2 - 1 = 2k(2k + 2) = 4k(k + 1)$ donc $k(k + 1) = 2^{x-2}(2^{x+1} + 1)$, en particulier $k > 0$ (le membre de droite est non-nul). Comme k et $k + 1$ sont des entiers consécutifs, l'un est pair et l'autre impair. En particulier, 2^{x-2} divise $k(k + 1)$ mais est premier avec l'un des deux (celui qui est impair), donc 2^{x-2} divise l'un ou l'autre (d'après le lemme de Gauss).

- Supposons que 2^{x-2} divise k . On dispose d'un entier $m \geq 1$ tel que $k = 2^{x-2}m$, et alors $k + 1 = 2^{x-2}m + 1$. En réinjectant dans l'équation, $m(2^{x-2}m + 1) = 2^{x+1} + 1$ donc $2^{x-2}(m^2 - 8) = 1 - m$. Si $m \geq 3$, $2^{x-2}(m^2 - 8) > 0 > 1 - m$, c'est impossible. Si $m = 2$, $-4 \times 2^{x-2} = -1$, impossible car 4 ne divise pas 1. Enfin si $m = 1$, $-7 \times 2^{x-2} = 0$, impossible également. Donc ce cas est impossible.
- Supposons désormais que 2^{x-2} divise $k + 1$. On dispose d'un entier $m \geq 1$ tel que $k + 1 = 2^{x-2}m$, et alors $k = 2^{x-2}m - 1$. En réinjectant dans l'équation, $m \times (2^{x-2}m - 1) = 2^{x+1} + 1$ et donc $2^{x-2}(m^2 - 8) = 1 + m$. Comme $1 + m > 0$, alors $m^2 - 8 > 0$ et donc $m \geq 3$. Alors $1 + m = 2^{x-2}(m^2 - 8) \geq 2(m^2 - 8)$ car $x - 2 \geq 1$ et $m^2 - 8 > 0$. Alors $2m^2 - m - 17 \leq 0$ donc $m(2m - 1) \leq 17$. Le membre de gauche est croissant en m , et en $m = 4$ on a $4 \times (2 \times 4 - 1) = 28 > 17$ donc pour $m \geq 4$, l'inégalité n'est pas vérifiée. La seule possibilité est donc $m = 3$. En remplaçant, on obtient $2^{x-2} \times (3^2 - 8) = 1 + 3$ donc $2^{x-2} = 4$, d'où $x - 2 = 2$, et alors $x = 4$. On vérifie : $2^{2x+1} + 2^x + 1 = 512 + 16 + 1 = 529 = 23^2$, donc $(4, 23)$ est solution.

Finalement, il y a exactement deux solutions, $(x, y) = (0, 2)$ et $(x, y) = (4, 23)$.

2 Entraînement de mi-parcours

Veillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 1

Soit p un nombre premier. On suppose que p divise $2^{2^n} + 1$. Montrer que 2^{n+1} divise $p - 1$.

Exercice 2

Soit a, b, c trois réels strictement positifs, montrer que :

$$\frac{a^2 + 4}{b + c} + \frac{b^2 + 9}{a + c} + \frac{c^2 + 16}{a + b} \geq 9.$$

Exercice 3

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant pour tous les réels (x, y) :

$$f(x - f(x - y)) + x = f(x + y).$$

Exercice 4

Trouver tous les triplets d'entiers naturels (x, y, z) tels que

$$2^x + 9 \cdot 7^y = z^3.$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

On commence par remarquer que cette condition ne peut pas être vérifiée pour $p = 2$. On suppose donc $p \geq 3$ pour la suite.

On peut réécrire la condition de divisibilité avec des modulus :

$$2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$$

Ainsi, en élevant cette relation au carré, on trouve

$$2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$$

Ainsi, l'ordre de 2 modulo p divise 2^{n+1} mais ne divise pas 2^n puisque $2^{2^n} \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p}$. Donc, l'ordre de 2 modulo p vaut 2^{n+1} et par le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ car $p \geq 3$ est premier avec 2, donc finalement

$$2^{n+1} \mid p - 1$$

comme voulu.

Solution de l'exercice 2

En séparant chaque fraction en deux termes et en appliquant l'inégalité des mauvais élèves, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{a^2 + 4}{b + c} + \frac{b^2 + 9}{a + c} + \frac{c^2 + 16}{a + b} &= \frac{a^2}{b + c} + \frac{2^2}{b + c} + \frac{b^2}{c + a} + \frac{3^2}{c + a} + \frac{c^2}{a + b} + \frac{4^2}{a + b} \\ &\geq \frac{(a + 2 + b + 3 + c + 4)^2}{2(b + c + c + a + a + b)}. \end{aligned}$$

Notons désormais $s = a + b + c$. On a donc montré que

$$\frac{a^2 + 4}{b + c} + \frac{b^2 + 9}{a + c} + \frac{c^2 + 16}{a + b} \geq \frac{(s + 9)^2}{4s}.$$

Or, d'après l'inégalité de la moyenne,

$$\frac{(s + 9)^2}{4s} \geq \frac{(2\sqrt{9s})^2}{4s} = 9.$$

Remarque : Si l'on s'intéresse au cas d'égalité, on s'aperçoit que l'inégalité est stricte. En effet, il y a égalité seulement si on a égalité dans l'inégalité des mauvais élèves et dans l'inégalité des moyennes, c'est-à-dire seulement si $s = 9$ et s'il existe un entier k tel que $a^2 = k(b + c)^2$, $2^2 = k(b + c)^2$, $b^2 = k(a + c)^2$, $3^2 = k(a + c)^2$, $c^2 = k(a + b)^2$ et $4^2 = k(b + a)^2$. Ceci conduit à $a = 2$, $b = 3$ et $c = 4$, ce qui implique que $\frac{4}{49} = \frac{a^2}{(b+c)^2} = k = \frac{b^2}{(a+c)^2} = \frac{1}{4}$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 3

En posant $x = 0$, on trouve

$$f(-f(-y)) = f(y) \quad (1)$$

En posant $y = 0$, on trouve

$$f(x - f(x)) = f(x) - x \quad (2)$$

En posant $x = y$, on trouve

$$f(x - f(0)) = f(2x) - x \quad (3)$$

Enfin, en posant $y = -x$, on trouve

$$f(x - f(2x)) = f(0) - x \quad (4)$$

En multipliant par -1 puis en appliquant f de chaque côté de (3), on trouve que

$$f(x - f(2x)) = f\left(-f(-(f(0) - x))\right)$$

ce qui nous invite à appliquer (1) sur le membre de droite pour trouver, en combinant avec (4) que :

$$f(0) - x = f(f(0) - x)$$

Donc f est bijective et donc on trouve en simplifiant (1) que

$$-f(-y) = y$$

Donc la seule solution potentielle est $f(x) = x$, et réciproquement, on vérifie aisément que cette fonction est bien solution.

Solution de l'exercice 4

On commence par regarder cette équation modulo 9 (à la fois le facteur 9 et le cube du membre de droite nous y invitent). On trouve alors

$$2^x \equiv z^3 \pmod{9}$$

Or, un cube vaut 0, 1 ou -1 modulo 9, et les puissances de 2 valent 1, 2, 4, -1 , -2 , -4 , 1, ... donc on doit avoir $x \equiv 0 \pmod{3}$ et on pose donc $x = 3a$. On peut alors réécrire l'équation

$$\begin{aligned} 9 \times 7^y &= z^3 - (2^a)^3 \\ &= (z - 2^a)(z^2 + 2^a z + 2^{2a}) \end{aligned}$$

Désormais, essayons de calculer le pgcd des deux facteurs du membre de droite : modulo $z - 2^a$, on a $z \equiv 2^a$, donc le facteur de droite devient :

$$z^2 + 2^a z + 2^{2a} \equiv 3 \times 2^{2a} \pmod{z - 2^a}$$

Donc le pgcd des deux termes doit diviser 3×2^{2a} , donc en particulier, 7 ne peut pas diviser les deux termes.

De plus, si $3 \mid z - 2^a$, alors $3 \mid z^2 + 2^a z + 2^{2a}$: il suffit de remarquer que dans ce cas $z \equiv 2^a \pmod{3}$. Ainsi, il ne reste que 2 possibilités :

- Soit $z - 2^a = 1$ et $z^2 + 2^a z + 2^{2a} = 9 \times 7^y$, auquel cas on peut réécrire ça $(2^a + 1)^2 + 2^a(2^a + 1) + 2^{2a} = 9 \times 7^y$, absurde car en développant, le membre de gauche n'est pas divisible par 3.

- Soit $z - 2^a = 3$ et $z^2 + 2^a z + 2^{2a} = 3 \times 7^y$, auquel cas on peut réécrire ça $(2^a + 3)^2 + 2^a(2^a + 3) + 2^{2a} = 3 \times 7^y$ ou encore en développant :

$$3 \times 2^a + 2^{2a} + 3 = 7^y$$

Pour terminer, si $a \geq 3$, alors modulo 8, on trouve une absurdité car $7^y \equiv \pm 1 \not\equiv 3 \pmod{8}$, donc il ne reste que 3 cas à tester :

- Si $a = 0$, $3 + 1 + 3 = 7^1$ qui donne la solution $(x, y, z) = (0, 1, 4)$.
- Si $a = 1$, $6 + 4 + 3 = 13$, qui ne donne pas de solution.
- Si $a = 2$, $12 + 16 + 3 = 21$, qui ne donne pas de solution.

Donc la seule solution potentielle est $(x, y, z) = (0, 1, 4)$ et réciproquement, on vérifie qu'elle est bien solution.

3 Deuxième partie : Géométrie et Combinatoire

1 Géométrie : Révisions (Rémi)

Cours

L'objet de ce TD est de réviser les acquis de géométrie de base :

- Chasse aux angles (angle inscrit et cocyclicité notamment)
- Triangles semblables
- Puissance d'un point

L'objectif ici n'est pas de faire des rappels de cours. Si besoin, on pourra se référer aux cours correspondants du groupe A ci-dessus. Les exercices 1 à 6 ont été corrigés pendant la séance. La plupart des corrigés ci-dessous sont issus de cours de Paul A et d'Eva.

Exercices

Exercice 1 (Droite des milieux)

Soit ABC un triangle et E, D les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que $(ED) \parallel (BC)$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle. On note D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 3 (Puissance d'un point)

Soit ω un cercle, A, B, C, D des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites (AB) et (CD) (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point P . Montrer que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Exercice 4

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en A et B . On note t une tangente commune à Γ_1 et Γ_2 et P et Q les points de tangence respectifs. On note M le point d'intersection de (AB) avec t . Montrer que M est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme, et M un point de $[AC]$. On note E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F celui sur $[AD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un losange, F sur le segment $[AD]$ et E sur le segment $[AB]$. Soit L le point d'intersection de (FC) et (BD) , et K celui de (EC) et (BD) , Q celui de (FK) et (BC) et P celui de (EL) et (DC) . Montrer que $CP = CQ$.

Exercice 7

Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 , s'intersectant en deux points X et Y . Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y . On note B l'intersection de (AY) avec Ω_2 . Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

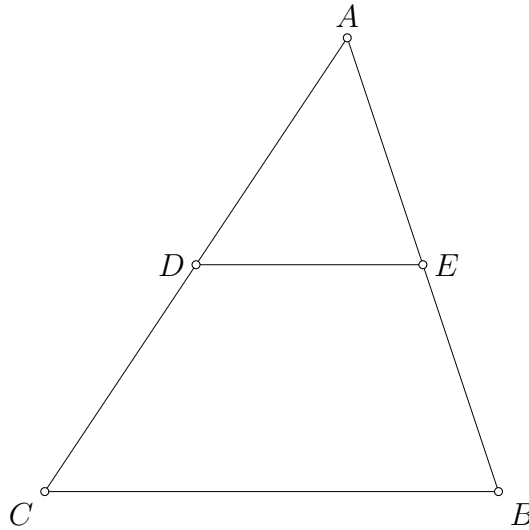
Exercice 8

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles disjoints (ne s'intersectant pas et non inclus l'un dans l'autre), de centres O_1 et O_2 . Soient M_1 et P_1 des points de Γ_1 , et M_2 et P_2 des points de Γ_2 tels que $(O_1M_1) \parallel (O_2M_2)$ et $(O_1P_1) \parallel (O_2P_2)$. On note enfin N (resp. Q) les points d'intersection de (M_1M_2) (resp. (P_1P_2)) avec Γ_2 .

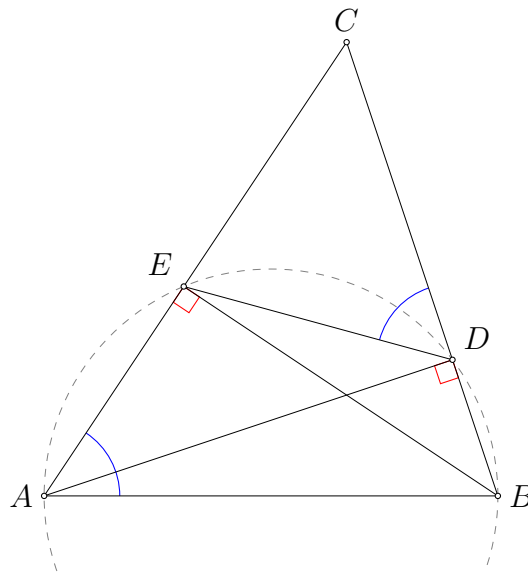
Montrer que les points M_1, N, P_1, Q sont cocycliques.

Solutions**Solution de l'exercice 1**

On a $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ et $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$. On a donc bien $AED \sim ABC$, donc $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$. De plus, ces angles sont correspondants, donc $(ED) \parallel (BC)$.

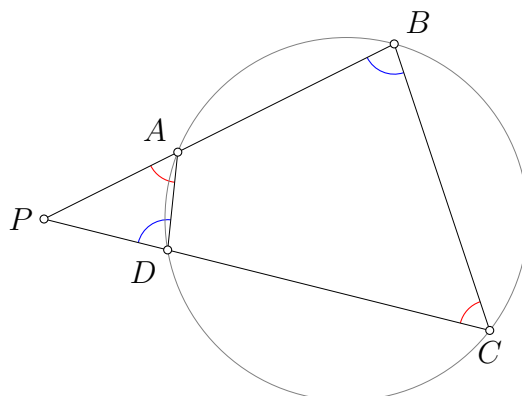
**Solution de l'exercice 2**

Les points A, B, D et E sont cocycliques donc $\widehat{CDE} = 180 - \widehat{BDE} = \widehat{BAC}$. Les triangles CAB et CDE partagent de plus l'angle $\widehat{C}$, donc on a bien $CAB \sim CDE$.



Solution de l'exercice 3

D'après l'exercice précédent, on a $PCA \sim PBD$. Ainsi, $\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD}$ d'où $PC \cdot PD = PA \cdot PB$.

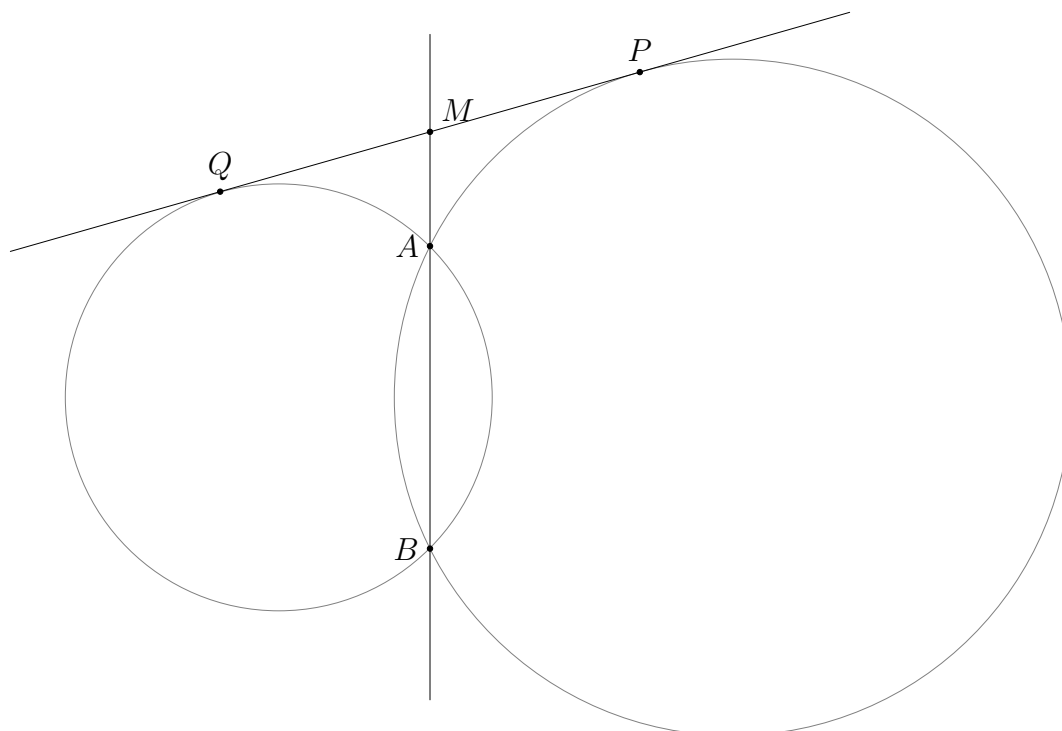


$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Remarque 1.

Cette égalité caractérise ce que l'on appelle la puissance du point P par rapport au cercle passant par A, B, C et D . Elle justifie que le produit des distances de P aux deux points d'intersection d'une droite passant par P avec ce cercle ne dépend pas de la droite choisie, ce qui permet de définir correctement cette quantité.

Solution de l'exercice 4



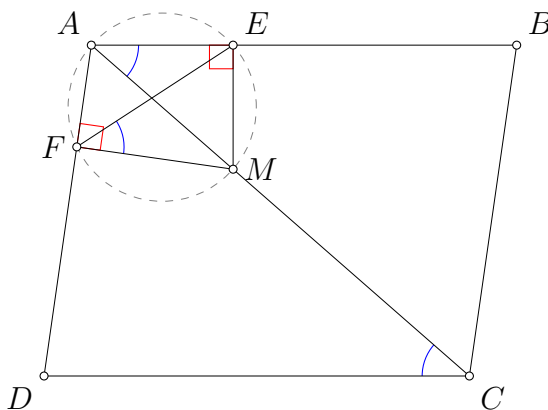
L'idée de cet exercice est de calculer la puissance de M par rapport à chacun des cercles :

- Par rapport à Γ_1 , la puissance de M vaut MP^2 , mais aussi $MA \times MB$
- Par rapport à Γ_2 , la puissance de M vaut MQ^2 , mais aussi $MA \times MB$

Ainsi, $MP = MQ$, donc M est bien le milieu du segment $[PQ]$

Solution de l'exercice 5

On a premièrement $\widehat{AFM} = 90 = 180 - 90 = 180 - \widehat{AEM}$ Donc $AEMF$ sont cocycliques. Donc $\widehat{EMF} = 180 - \widehat{FAE} = 180 - \widehat{BAD}$ Or on est dans un parallélogramme donc $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAD} = \widehat{EMF}$. On a de plus $\widehat{EFM} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ On a donc les triangles MFE et BAC semblables donc $\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$



Solution de l'exercice 6

On cherche des triangles semblables sur la figure. On remarque que $BQK \sim KFD$ (angles alternés-internes) ce qui nous donne $\frac{BQ}{FD} = \frac{QK}{DK}$

De même, on a donc $KEB \sim KCD$ donc $\frac{KB}{KD} = \frac{EB}{CD}$

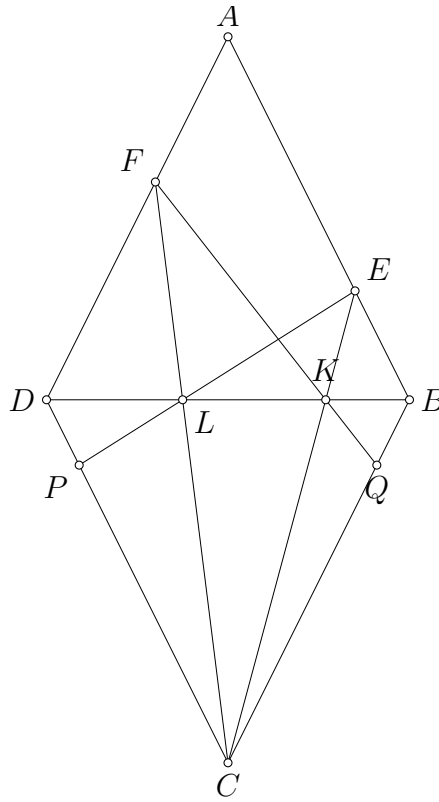
En combinant les deux on obtient $\frac{QK}{DF} = \frac{EB}{CD}$ soit $QB = \frac{EB \cdot DF}{CD}$

On réitère : $DPL \sim BEL$ donc $\frac{DP}{BE} = \frac{DL}{BL}$

De même $DFL \sim BCL$ donc $\frac{DF}{BC} = \frac{BL}{CD}$

en combinant on a donc $DP = \frac{DF \cdot BE}{BC} = \frac{EB \cdot DF}{CD} = BQ$

Finalement, on a bien $CQ = CP$

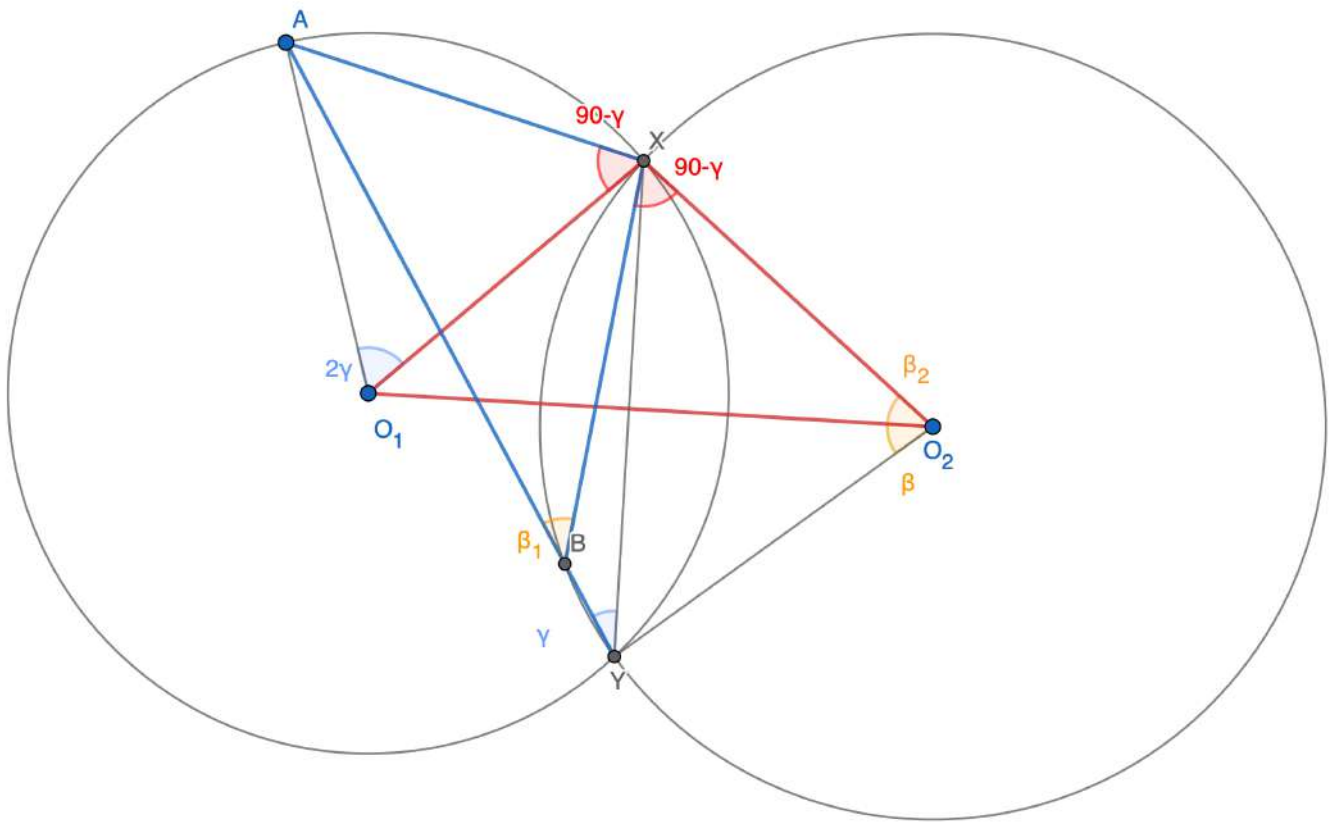


Solution de l'exercice 7

Soit $\beta = \widehat{ABX}$. On a alors $\widehat{XO_2O_1} = \frac{1}{2}\widehat{XO_2Y} = 180 - \widehat{XBY} = \beta$. De plus, soit $\gamma = \widehat{XYA}$, on a $\widehat{AO_1X} = 2\gamma$ donc $\widehat{AXO_1} = 90 - \gamma$. Dans le même temps on a $\widehat{BXO_2} = \widehat{YXO_2} + \widehat{BXY} = 90_\beta + (180 - (180 - \beta) - \gamma) = 90 - \gamma$. Ainsi,

$$\widehat{AXB} = \widehat{AXO_1} + \widehat{O_1XB} = \widehat{YXB} + \widehat{O_1XB} = \widehat{O_1XO_2}$$

Les deux triangles partagent deux angles, donc on a bien $XO_1O_2 \sim XAB$



Solution de l'exercice 8

Les triangles OMP et $O'M'P'$ sont isocèles en O et O' respectivement. De plus, les angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ et $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'P'})$ sont égaux, donc ces deux triangles sont directement semblables. Comme de plus (OM) et $(O'M')$ sont parallèles, (MP) et $(M'P')$ le sont. On en déduit que $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{M'P'}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{QP'}, \overrightarrow{QN'}) = (\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QN})$ donc le quadrilatère $MNPQ$ est circonscriptible.

Solution n°2 de l'exercice 8

Supposons que les cercles sont de rayons différents. Soit Ω le centre de l'homothétie h de rapport $\lambda > 0$ qui transforme le premier cercle en le deuxième. Le point $h(M)$ vérifie la même condition de l'énoncé que le point M' , donc $h(M) = M'$. De même, $h(P) = P'$. On a $\Omega N \times \Omega M' = \Omega Q \times \Omega P'$ (puissance d'un point par rapport à un cercle), donc $\lambda \Omega N \times \Omega M = \lambda Q \times \Omega P$. En simplifiant par λ et en utilisant encore la puissance d'un point par rapport à un cercle, on en déduit que M, N, P, Q sont cocycliques.

Si les cercles sont de même rayon, alors il existe une translation qui envoie M et P sur M' et P' respectivement, donc comme ci-dessus on a $(MP, MN) = (M'P', M'N) = (QP', QN) = (QP, QN)$.

2 Combinatoire : Révisions (Maryam)

Le TD provient des stages de Valbonne 2023 et 2018.

Principe des Tiroirs

Rappel :

Si on a n éléments (chaussettes) à placer dans k ensembles (tiroirs), alors il y a un ensemble avec au moins $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ éléments.

Exercice 1

On colorie le plan en noir et blanc, sans règle particulière. Montrer que quelle que soit la distance d que l'on se donne, on peut trouver deux points de la même couleur distants de d exactement.

Exercice 2

On choisit 10 entiers deux à deux disjoints quelconques inférieurs à 100. Montrer qu'on peut trouver 2 sous-ensembles de ces 10 entiers, A et B disjoints et non vides de même somme.

Exercice 3

On tire 51 nombres entre 1 et 100. Montrer que l'on peut en trouver deux tels que l'un des deux divise l'autre.

Exercice 4

Approximation de Gauss : Soit $x \in \mathbb{R}$ irrationnel. Montrer qu'il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$

Exercice 5

Théorème d'Erdős-Szekeres : Montrer qu'une suite de $n^2 + 1$ réels contient une sous-suite monotone de longueur $n + 1$.

Invariants

Rappel :

Un invariant, c'est une quantité qui ne varie pas au cours du processus. C'est utile pour montrer qu'une situation est inatteignable.

Invariants classiques : somme, parité, produit, etc...

Exercice 6

Théo a écrit les nombres 2, 3, 5, 7 et 11 sur un tableau. Il s'autorise ensuite, autant de fois qu'il le voudra, à remplacer deux nombres de même parité par deux copies de leur moyenne arithmétique. Peut-il se débrouiller pour obtenir cinq nombres égaux après un nombre fini de telles opérations?

Exercice 7

Rémi a écrit les nombres de 1 à 2024 au tableau. À chaque étape, il efface deux nombres au tableau et les remplace par leur différence. Peut-il se débrouiller pour finir avec un seul nombre égal à 1 sur son tableau?

Exercice 8

Martin a écrit les nombres $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$ et 2 au tableau. Il s'autorise ensuite, autant de fois qu'il le voudra, à effacer deux nombres écrits au tableau, disons a et b , et à écrire à la place les nombres $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ et $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Peut-il obtenir $-\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ après un nombre fini de telles opérations ?

Exercice 9

Six nids sont placés en cercle ; dans chacun des nids se trouve un oiseau. Chaque nuit, chaque oiseau s'envole vers un nid voisin. Est-il possible que tous les oiseaux se retrouvent dans un même nid après un nombre fini de nuits ?

Exercice 10

Dans l'espace, on part de l'ensemble de 7 sommets d'un cube. On s'autorise à remplacer un point par son symétrique par rapport à un autre point. Peut-on atteindre le huitième sommet de cette façon ?

Exercice 11

Sur un tableau, Henry écrit n fois le chiffre 1. Une opération consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire $\frac{a+b}{4}$ à la place. Montrer que le nombre écrit au tableau au bout de $n - 1$ étapes est supérieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

Exercice 12

Sur une ligne, Aurélien écrit 2018 entiers naturels. Ensuite, pour chaque ligne, il écrit en-dessous de chaque entier le nombre de fois qu'il apparaît dans la ligne, créant ainsi une nouvelle ligne en-dessous de la première, sur laquelle il réapplique le processus. Montrer qu'au bout d'un certain temps toutes les lignes qu'il écrit deviennent identiques.

Coloriages et jeux

Premièrement, dans un jeu qui se termine, sans égalité, et où les joueurs ont des rôles symétriques, il y a toujours un des deux joueurs qui a une stratégie gagnante.

C'est à dire qu'il peut s'assurer la victoire quelques soient les coupes de son adversaire ! D'ailleurs, s'il n'y a pas d'égalité possible, il suffit de montrer que le joueur a une stratégie pour ne pas perdre

Pour les jeux, on a plusieurs angles d'attaque intéressants :

- Si le dernier à ne pas pouvoir jouer perd, alors, il suffit de montrer qu'un joueur A peut éviter de perdre. Pour ça, on peut faire un pavage en dominos ou couples de cases, tels qu'à chaque fois que B joue sur une case, A joue la case correspondante (l'autre case du dominos). A ne perd donc pas.
- Dans le cas précédent, on peut aussi utiliser des arguments de symétrie ! Si les cases symétriques ne se superposent pas, alors le joueur peut jouer à chaque fois le symétrique du coup de son adversaire, s'assurant de pouvoir jouer tant que celui-ci joue.
- Parfois la stratégie gagnante n'est pas explicitable. Dans ce cas, on peut exploiter l'existence-même de la stratégie !

Exercice 13

Raphaël dispose d'une grille de dimensions 3×3 et de pièces en forme de L recouvrant trois cases. Peut-il recouvrir sa grille à l'aide de telles pièces ?

Exercice 14

Sur un tableau $n \times n$, composé exclusivement de cases blanches, Eva et Erik jouent au jeu suivant : Eva commence par noircir la case en haut à gauche, puis chacun leur tour, ils noircissent une case adjacente (par un côté) à la dernière case noircie. Le premier à ne plus pouvoir jouer perd la partie. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 15

Gabriel et Hadriel jouent avec une infinité d'assiettes rondes de 15 cm de rayon sur une table ronde d'un mètre de rayon au jeu suivant : chacun leur tour en commençant par Gabriel, ils placent une assiette sur la table de telle manière à ce que l'assiette soit entièrement sur la table et qu'elle ne recouvre aucune autre assiette. Le premier à ne plus pouvoir jouer a perdu. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 16

Chocolat empoisonné Maryam et Sébastien ont une tablette de chocolat de dimensions $m \times n$ ($m \geq 2$). Chacun leur tour en commençant par Sébastien, ils choisissent un carré, et mangent tous les carrés situés à la fois en-dessous et à droite du carré choisi. Le joueur qui mange le carré en haut à gauche, empoisonné, a perdu. Montrer que la position initiale est gagnante pour Sébastien.

Solutions**Solution de l'exercice 1**

On considère un triangle isocèle de côté d . Par le principe des tiroirs, deux de ses sommets (chaussettes) sont de même couleur (tiroir), ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

Les chaussettes sont les sous-ensembles non vides de 10 éléments : il y en a $2^{10} - 1 = 1023$. Les tiroirs sont les sommes atteignables, or elles valent entre 1 et $91 + 92 + 93 + \dots + 100 \leq 10 \times 100 = 1000 < 1023$. Par le principe des tiroirs, deux sous-ensembles ont la même somme. Il suffit de leur enlever leur intersection pour les rendre disjoints.

Solution de l'exercice 3

ça nous arrangerait d'avoir 50 tiroirs. **Première idée** : On fait des tiroirs sous forme $(n, 2n)$. Problème ? Les impairs au dessus de 50 n'entrent dans aucun tiroir donc tout tombe à l'eau.

On corrige ça ! On va donc plutôt faire des $(n, 2n, 4n, \dots)$.

Plus précisément, on écrit les nombres sous forme $n = 2^k \times m$ avec m impair. Nos tiroirs vont être les m , et il y en a bien 50 ! Deux nombres du même tiroir se divisent, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4

Remarque :

Clairement, on a que pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$, tel que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q}$. Là on montre un résultat plus fort.

On multiplie tout par q . On veut donc $|qx - p| \leq \frac{1}{q}$. Mais q apparaît 2 fois donc on est très limité ! Astuce : on va donc introduire un autre entier, que l'on fixe, pour obtenir plus de

liberté.

On montrera que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe q entier naturel inférieur à n tel qu'il existe p tel que

$$|qx - p| \leq \frac{1}{N}$$

On remarque que p n'a pas vraiment d'importance, on prendra l'entier le plus proche. Pour le moment on considérera alors les parties rationnelles : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Plus précisément, on considère $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{Nx\}$. On divise l'intervalle $[0; 1[$ en les $[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}[$. Par le principe des tiroirs, on dispose de $0 \leq a < b \leq N$ tels que $\{ax\}$ et $\{bx\}$ sont dans le même tiroir. Ils sont donc à distance moins que $\frac{1}{N}$!

On pose $q = b - a$, et $p = qx - (\{bx\} - \{ax\})$, On a donc bien $|qx - p| \leq \frac{1}{N} \leq \frac{1}{q}$.

Pourquoi cela conclut ? Comme x est irrationnel, $|qx - p|$ ne vaut jamais 0. Ainsi, chaque q ne convient que pour un nombre fini de N , ie ceux vérifiant justement $|qx - p| \leq \frac{1}{N}$.

Ainsi, comme on dispose d'un q pour tout N (une infinité donc), et que chaque q convient que pour un nombre fini de N , on dispose d'un nombre infini de q et on conclut !

Solution de l'exercice 5

On va supposer par l'absurde que les sous-suites monotones (croissante, ou décroissante) sont de longueur au plus n . Soient $a_1, \dots, a_{n^2+1}$ les éléments de la suite.

On associe à chaque a_i le couple (l_i, d_i) , respectivement la longueur de la plus longue sous-suite croissante se terminant par a_i et la plus longue sous-suite décroissante se terminant par a_i (qui compte dans la longueur donc). Par l'absurde, pour tout i , $1 \leq l_i, d_i \leq n$. On a donc au plus n^2 tels couples, pour $n^2 + 1$ nombres. Par le principe des tiroirs, il y a deux éléments a_i, a_j avec $i < j$ de la suite associés au même couple (l, d) . Mais

- Si $a_j \geq a_i$, alors on considère une sous-suite croissante de longueur l se terminant par a_i , et on y ajoute a_j : on obtient une sous-suite croissante de longueur $l + 1$ se terminant par a_j . Absurde car l est la longueur maximale
- Si $a_j \leq a_i$, on ajoute a_j à la sous-suite décroissante de longueur d se terminant en a_i et le raisonnement est le même.

Solution de l'exercice 6

L'invariant est la somme des éléments. Au début, elle vaut 28, non divisible par 5. Or la somme de 5 nombres égaux est divisible par 5, donc cette configuration est inatteignable.

Solution de l'exercice 7

Cette fois, l'invariant est la parité de la somme, paire au début. On y pense car c'est un invariant classique ET $a + b$ est de la même parité que $a - b$

Solution de l'exercice 8

On pense à nos identités remarquables adorées et on obtient $(\frac{a+b}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{a-b}{\sqrt{2}})^2 = a^2 + b^2$. La somme des carrés est donc un invariant.

Solution de l'exercice 9

On colorie alternativement les nids en noir et blanc. Au début, il y a donc 3 oiseaux dans des nids noirs et 3 dans des nids blancs. À chaque étape, tout oiseau va dans un nid voisin : il change de couleur de nid. Ainsi, il y aura toujours 3 oiseaux en nids noirs et 3 en nids blancs. Ils ne seront donc jamais dans le même nid.

Solution de l'exercice 10

On associe des coordonnées aux sommets du cube : on aura $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1),$

$(0, 1, 0) \dots$ Après une symétrie, la parité de chaque coordonnée est inchangée : le symétrique de (a, b, c) par rapport à (d, e, f) est $(a + 2 \times (d - a), b + 2 \times (e - b), c + 2 \times (f - c))$. Ainsi, disons par exemple que le 8ème sommet est $(1, 1, 1)$. Il est inatteignable car c'est le seul sommet avec trois coordonnées impaires.

Solution de l'exercice 11

Le monovariant est la somme des inverses.

Solution de l'exercice 12

cf exercice 12, groupe C 2018 : "Considérons un nombre a en dehors de la première ligne. Il représente le nombre d'occurrences d'un des nombres de la ligne du dessus. Ce dernier est donc présent a fois dans la ligne du dessus, et a est présent au moins a fois dans sa ligne. Dès lors, si on regarde une colonne, tous les nombres à l'exception du premier sont triés par ordre croissant. Comme de plus la somme des nombres d'une ligne autre que la première fait 2018, toutes les lignes deviennent identiques au bout d'un certain temps (sinon, la somme de chaque ligne augmenterait de 1 autant de fois que voulu, tout en restant inférieure à 2018). "

Solution de l'exercice 13

Il nous faudrait 3 pièces, or chacune couvre au plus 1 coin de la grille.

Solution de l'exercice 14

Idée : pavage de dominos

- Si n est pair : On considère un pavage en dominos du tableau. Erik complète donc à chaque fois le domino dans lequel Eva joue, et s'assure ainsi de ne pas perdre : c'est sa stratégie gagnante.
- Si n est impair : Eva pave avec des dominos la tableau auquel elle aura enlevé la case en haut à gauche, puis à chaque fois elle complète le domino d'Erik.

Solution de l'exercice 15

Idée : symétrie

Gabriel place son assiette au milieu. Puis il joue à chaque fois le symétrique de l'assiette d'Hadriel par rapport au centre (il n'y a pas de recouvrement d'assiettes, grâce à l'assiette posée au milieu).

Solution de l'exercice 16

Idée : on utilise l'existence de la stratégie gagnante !

On suppose par l'absurde que Maryam possède une stratégie gagnante. Sébastien mange le carré en bas à droite. Maryam répond en mangeant une case (n, m) . Et continue avec sa stratégie. Mais Sébastien aurait lui-même pu manger la case (n, m) ! Puis appliquer la stratégie de Maryam, c'est absurde. Donc c'est Sébastien qui gagne.

3 Combinatoire : Double comptage (Noé)

Cours

Ce cours est partiellement inspiré de celui donné par Raphaël ([Groupe C page 303](#)) et celui donné par Maena et Émile ([Groupe C page 366](#)) en 2023 au stage de Valbonne, ainsi que du cours au groupe C de cette année donné par Hadriel et Gaëtan.

Enfin, certains exercices ont été adaptés d'un TD donné au [groupe C](#) par Antoine.

La technique de double-comptage consiste à trouver une certaine quantité qui se dénombre naturellement de deux manières différentes dans le cadre de l'exercice. Cela permet d'en déduire des relations intéressantes utiles à sa résolution.

Voyons un exemple simple : pour choisir k personnes dans une assemblée de n , on peut choisir les k personnes, ce qui fait $\binom{n}{k}$ choix possibles, ou choisir les $n - k$ qu'on ne choisit pas, ce qui fait $\binom{n}{n-k}$ choix possibles. Ainsi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Autre exemple : prenons un graphe G avec m arêtes. Si on note S le nombre de paires sommet-arête (s, a) où s est une extrémité de a , on a à la fois $S = 2m$ car chaque arête est liée à deux sommets, et d'autre part $S = \sum_{s \text{ sommet}} \deg s$ car $\deg s$ est le nombre de paires reliées à s .

On peut aussi souvent ramener les problèmes à des problèmes de comptage dans une grille. Par exemple, pour l'exemple précédent, si on assigne à chaque colonne d'une grille un sommet du graphe et à chaque ligne un sommet du graphe, et qu'on place un 1 dans une entrée si le sommet de sa ligne et de sa colonne sont reliés et un 0 sinon, le double-comptage précédent revient à dire que le nombre de 1 dans la grille est égal à la somme des nombres de 1 dans chaque colonne.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Représenter par une grille la situation permet souvent de rendre plus naturel le double-comptage, en comptant par exemple tantôt relativement aux lignes tantôt aux colonnes.

La difficulté va être de déterminer quelle est la quantité à double compter : on se ramène alors à deux problèmes de comptage.

Pour trouver cette quantité, il faut chercher à relier ensemble les différentes informations que nous prodiguent l'exercice. On peut chercher à identifier laquelle de ces informations est la plus "extravagante", c'est-à-dire celle qui va être la plus dure à utiliser.

Exercices

Exercice 1

À Valbonne, n problèmes ont été accrochés sur un mur. Chacun des m stagiaires a résolu au moins $\frac{n}{2}$ problèmes. Montrer qu'il existe un problème qui a été résolu par au moins $\frac{m}{2}$ stagiaires.

Solution de l'exercice 1

On compte P = le nombre total de problème résolus par les stagiaires : Il y en a au moins

$$P \geq m \times \frac{n}{2} = \frac{nm}{2}.$$

Si on suppose par l'absurde qu'aucun exercice n'a été résolu par $\frac{m}{2}$ stagiaire on a

$$P < n \times \frac{m}{2} = \frac{nm}{2}.$$

Absurde.

Exercice 2

Dans une école, chaque club compte 3 membres et chaque élève est membre de 3 clubs. Montrer qu'il y a autant de clubs que d'élèves.

Solution de l'exercice 2

On compte N le nombre total d'inscriptions à un club. Avec C le nombre de clubs et E le nombre d'élèves on a

$$N = 3C \quad \text{et} \quad N = 3E.$$

Donc $C = E$.

Exercice 3 (Formule du Binôme de Newton)

- 1) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- 2) Soit a, b deux entiers **naturels** (c'est-à-dire positifs), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Solution de l'exercice 3

1. On compte de deux façons différentes le nombre de manières de sélectionner une équipe parmi n personnes. (La taille de l'équipe peut aller de 0 à n .)

Dans un premier temps, on fixe k le nombre de personnes que l'on veut avoir dans notre équipe. k peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et n , et une fois fixé, il y a exactement $\binom{n}{k}$ façons de choisir k personnes parmi les n .

Le nombre que l'on cherche est donc la somme des $\binom{n}{k}$ pour k allant de 0 à n .

Alternativement, on peut aussi regarder chacune des n personnes dans un certain ordre, et choisir si on la met dans l'équipe ou non.

Pour chaque personne il y a 2 choix, ce qui fait 2^n au total, montrant ainsi que :

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

2. Ici, comme a et b sont des entiers positifs, on peut les associer au cardinal d'un ensemble (c'est-à-dire à une quantité qu'on peut compter).

Par exemple, si parmi les Animateurs il y a a garçons et b filles, et que chaque jour l'un d'entre eux est responsable de surveiller la piscine (la même personne peut le faire plusieurs jours différents), alors on peut compter le nombre de choix possibles du responsable pendant n jours consécutifs.

Dans un premier temps, on peut se dire que l'on choisit un Animateur parmi $a + b$ d'entre eux, et ce n fois, ce qui donne $(a + b)^n$.

Ensuite, on peut choisir de regarder le nombre k de fois où c'est un garçon qui a été responsable de la piscine.

Premièrement il faut choisir les k jours en question, ce qui donne $\binom{n}{k}$ choix. Ensuite, on choisit un des a garçons pour chacun des k jours (a^k) et une des b filles pour les $n - k$ autres (b^{n-k}).

Finalement, on obtient bien :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exercice 4

Existe-t-il un polyèdre comportant un nombre impair de faces chacune ayant un nombre impair d'arêtes ?

Solution de l'exercice 4

On fait la somme du nombre d'arêtes de toutes les faces du polyèdres. On obtient alors un nombre impair. Or toutes les arêtes ont été compté deux fois. Ce nombre est donc égale à 2 fois le nombre d'arêtes du polyèdres qui est donc un nombre pair. Absurde.

Exercice 5 (Formule de Pascal)

Soit $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$. Montrer que

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

Solution de l'exercice 5

$\binom{n+1}{k+1}$ représente le nombre de façons de choisir $k+1$ objets parmi $n+1$. Lors de notre choix, on peut ou non choisir le premier objet. Si on le choisit, alors il nous reste à choisir k autres objets parmi les n objets restants. Si on ne le choisit pas, alors on doit encore choisir nos $k+1$ objets parmi les n autres objets. On a donc directement la formule annoncée.

Exercice 6

Une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est tirée au hasard. Combien a-t-elle de points fixes en moyenne ?

Solution de l'exercice 6

En tout, il y a $n!$ permutations. Comptons le nombre de couples (σ, k) avec σ une permutation et k un entier entre 1 et n , tel que k soit un point fixe de σ . Soit N le nombre de tels couples. Si m est la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation prise au hasard, on a donc que $N = n! \times m$.

Maintenant, pour un élément k dans $\{1, \dots, n\}$, le nombre de permutations qui fixent k est égal au nombre de permutations de $\{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$ (l'ensemble des entiers de 1 à n qui ne valent pas k), c'est-à-dire $(n - 1)!$. Comme il y a n valeurs de k différentes, on a donc $N = n \times (n - 1)! = n!$. Finalement, on obtient donc

$$m = 1.$$

Exercice 7

Prouver ces égalités sans utiliser la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$\binom{n}{s} = \frac{n}{s} \binom{n-1}{s-1}, \quad \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k},$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}, \quad \binom{n}{s} = \frac{n}{n-s} \binom{n-1}{s},$$

$$\sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p} = 2^{n-p} \binom{n}{p}, \quad \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k},$$

$$\sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$$

Solution de l'exercice 7

La bonne question ici est toujours : «*Que faut-il compter ?*».

Parmi n billes (alignés) il y a $s-1$ billes bleues et une bille rouge soit au total s billes de couleurs. Combien y a-t-il de configurations possibles (que l'on note C_1) ? Première méthode

1. Choisir la bille rouge : n choix possibles
2. Choisir les $s-1$ billes bleues parmi les $n-1$ billes restantes : $\binom{n-1}{s-1}$ choix possibles.

Donc $C_1 = n \times \binom{n-1}{s-1}$. On compte maintenant d'une autre manière :

1. Choisir les s billes de couleurs : $\binom{n-1}{s-1}$ choix possibles
2. Parmi ces s billes choisir la bille rouge : s choix possibles.

Donc $C_1 = s \times \binom{n}{s}$. Conclusion

$$s \times \binom{n}{s} = n \times \binom{n-1}{s-1}.$$

Parmi n billes (alignés) il y a k billes bleues et $r-k$ billes rouges soit au total r billes de couleurs. On note C_2 le nombre de configurations possibles. Comptons d'une première manière

1. Choisir les billes bleues : $\binom{n}{k}$ choix possibles
2. Choisir les $r-k$ billes rouges parmi les $n-k$ billes restantes : $\binom{n-k}{r-k}$ choix possibles.

Donc $C_2 = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{r-k}$. Et maintenant d'une autre manière :

1. Choisir les r billes de couleurs : $\binom{n}{r}$ choix possibles
2. Parmi ces r billes choisir les k billes bleues : $\binom{r}{k}$ choix possibles.

Donc $C_2 = \binom{n}{r} \times \binom{r}{k}$. Conclusion

$$\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{r-k} = \binom{n}{r} \times \binom{r}{k}.$$

On choisit n entiers parmi $\{1, \dots, 2n\}$ et on compte le nombre d'entiers choisies dans la première moitié $\{1, \dots, n\}$ que l'on note i . Sous cette condition dans la première moitié il y a donc $\binom{n}{i}$ configurations possibles. Dans la deuxième moitié il reste $n - i$ entiers ce qui donne $\binom{n}{n-i}$ configurations possibles donc au total $\binom{n}{i} \times \binom{n}{n-i}$. Lorsque i prend toutes les valeurs de 0 à n on obtient toutes les manières possibles de choisir n entiers dans $\{1, \dots, 2n\}$. Conclusion

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Parmi n billes (alignés) il y a s billes bleues et une bille rouge. Première de méthode

1. Choisir la bille rouge : n choix possibles
2. Choisir les s billes bleues parmi les $n - 1$ billes restantes : $\binom{n-1}{s}$ choix possibles.

Donc $C_4 = n \times \binom{n-1}{s}$. Deuxième méthode :

1. Choisir les s billes bleues : $\binom{n}{s}$ choix possibles
2. Parmi les $n - s$ billes restantes choisir la bille rouge : $n - s$ choix possibles.

Donc $C_4 = (n - s) \times \binom{n}{s}$. Conclusion

$$n \times \binom{n-1}{s} = (n - s) \times \binom{n}{s}.$$

On va compter N le nombre de manière de former une équipe de foot à p joueurs titulaires et un nombre arbitraire de remplaçants parmi n personnes initialement.

1. Dans le premier cas, le sélectionneur commence par choisir ses p titulaires, il y a donc $\binom{n}{p}$ possibilités. Pour chacune des $n - p$ personnes restantes, le sélectionneur peut choisir de les prendre en remplaçants ou non, ce qui fait 2^{n-p} possibilités, d'où

$$N = 2^{n-p} \binom{n}{p}$$

2. Dans le second cas, le sélectionneur commence par repérer k joueurs qui ont du potentiel, avec $p \leq k \leq n$.

Il y a $\binom{n}{k}$ manières de former cette présélection.

Ensuite, parmi les k joueurs, le sélectionneur doit choisir les p titulaires et les autres seront les remplaçants, ce qui laisse $\binom{k}{p}$ choix.

Pour compter N , il faut prendre en compte toutes les possibilités pour k . Donc $N = \sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p}$, ce qui conclut :

$$\sum_{k=p}^n \binom{n}{k} \binom{k}{p} = 2^{n-p} \binom{n}{p}$$

On cherche à calculer I_n le nombre de manière de choisir un nombre impair d'éléments parmi $\{1, \dots, n\}$ et on note également P_n le nombre de manière de choisir un nombre pair d'éléments parmi $\{1, \dots, n\}$. Pour calculer I_n on considère le premier élément $\{1\}$. Si $\{1\}$ est choisi, il reste à choisir un nombre pair d'éléments parmi $\{2, \dots, n\}$ soit P_{n-1} possibilités. Si $\{1\}$ n'est pas choisi il reste à choisir un nombre impair d'éléments parmi $\{2, \dots, n\}$ soit I_{n-1} possibilités. Conclusion

$$I_n = P_{n-1} + I_{n-1} = 2^{n-1}$$

car $I_{n-1} + P_{n-1}$ donne toutes les manière possibles de choisir un sous ensemble de $\{1, \dots, n-1\}$.

Parmi $n + r + 1$ billes il y a r billes bleues et $n + 1$ billes noires. On note k la position de la première bille noire. Sous cette condition les $k-1$ premières billes sont bleues et il reste $r-k+1$ billes bleues à choisir parmi les $(n + r + 1) - k$ billes restantes, il y a donc $\binom{n + r + 1 - k}{r - k + 1}$ configurations possibles. On a alors que

$$\binom{n + r + 1}{r} = \sum_{k=1}^{r+1} \binom{n + r + 1 - k}{r - k + 1} = \binom{n + r}{r} + \binom{n + r - 1}{r - 1} + \dots + \binom{n + 1}{1} + \binom{n}{0}$$

Exercice 8

Combien de façon peut-on sélectionner deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble à n éléments.

Solution de l'exercice 8

On note A et B les deux ensembles disjoints. Pour chaque élément, il peut appartenir soit à A soit à B soit à ni A ni B . On a alors 3^n configurations possibles.

Exercice 9

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Solution de l'exercice 9

On commence par calculer

$$A_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

Parmi n billes il y a une bille rouge et un nombre quelconque de billes bleues. Première méthode :

1. On choisit k billes de couleurs : $\binom{n}{k}$ choix possibles.
2. On choisit la bille rouge parmi ces k billes : k choix possibles.

Au total en parcourant tous les k possibles on a obtenu bien A_n . Deuxième méthode

1. On choisit la bille rouge : n choix possibles.
2. On choisit des billes bleues parmi les $n - 1$ billes restantes : 2^{n-1} choix possibles.

Et donc $A_n = n2^{n-1}$. Conclusion

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

On calcul maintenant $B_n = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k}$. Parmi n billes il y a une bille rouge, une bille verte et un nombre quelconque de billes bleues. Première méthode :

1. On choisit k billes de couleurs : $\binom{n}{k}$ choix possibles.
2. On choisit la bille rouge parmi ces k billes : k choix possibles.
3. On choisit la bille verte parmi ces $k - 1$ billes restante : $k - 1$ choix possibles.

Et on obtient B_n en considérant les différent k possibles. Deuxième méthode

1. On choisit la bille rouge : n choix possibles.
2. On choisit la bille verte : $n - 1$ choix possibles
3. On choisit des billes bleues parmi les $n - 2$ billes restantes : 2^{n-2} choix possibles.

Donc $B_n = n(n-1)2^{n-2}$. Conclusion

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} \\ &= B_n + A_n \\ &= n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\ &= n(n+1)2^{n-2} \end{aligned}$$

Exercice 10

Un polyèdre possède 20 faces triangulaires. Déterminer son nombre d'arêtes, puis de sommets.

Solution de l'exercice 10

Effectuons un double comptage entre les faces et les arêtes, en reprenant les notations S , A , F de l'exercice précédent. Soit N le nombre de couples (f, a) avec f une face et a un arête qui est un côté de f . Alors d'un côté, si on fixe f , il y a trois arêtes qui marchent car toutes les faces du polyèdre sont triangulaires, et donc $N = 3F$. D'un autre côté, si on fixe a , il y a 2 faces qui marchent car une arête est le côté d'exactly deux triangles. On obtient donc $N = 2A$, et donc

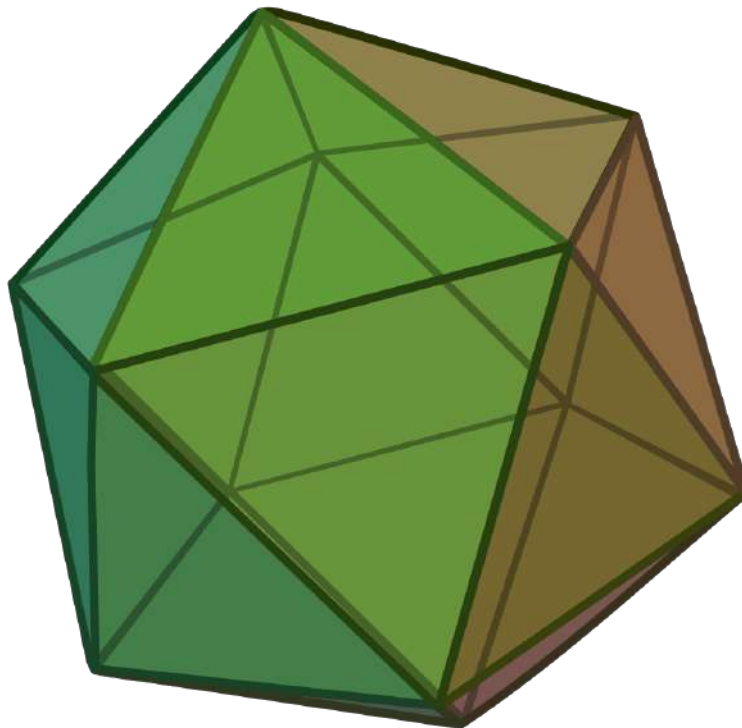
$$A = \frac{3}{2}F = 30.$$

Maintenant, il y a deux méthodes selon que l'on connaît la formule d'Euler ou non. Soit le nombre S de sommets est obtenu par cette formule

$$S = A - F + 2 = 12.$$

Sinon, on peut remarquer en traçant le polyèdre (qui s'appelle un icosaèdre) que chaque sommet appartient à exactement 5 faces triangulaires en même temps, et chaque face possède 3 sommets, d'où

$$3F = 5S$$



Réprésentation d'un icosaèdre

$$\text{Donc } S = \frac{3}{5}F = 3 \cdot 4 = 12.$$

Exercice 11

Au pays des lutins maléfiques, il y a un nombre pair d'habitants, et chacun a un nombre pair d'amis (personne n'est ami avec soi-même, et l'amitié est réciproque). Si Rémi est un habitant de ce pays, montrer qu'il existe un autre habitant qui a un nombre pair d'amis en commun avec Rémi.

Solution de l'exercice 11

On distingue deux groupes :

A : Les amis de Rémi, constitué d'un nombre pairs de lutins maléfiques.

B : Les ennemis de Rémi (tous ceux qui ne sont pas amis avec Rémi (sauf Rémi lui même)) en nombre impair (comme il y a en tout un nombre pair de trucs et que Rémi existe)

On suppose par l'absurde qu'il n'y a aucun habitant qui a un nombre pair d'amis en commun avec Rémi. Cela implique que :

-chaque membre de A a un nombre pair d'amis dans B (autrement cela contredirait l'hypothèse).

-chaque membre de B a un nombre impair d'amis dans A .

Comme il y a un nombre impair de lutins dans B alors la deuxième condition induit qu'il y a un nombre impair de relations d'amitiés entre des membres de B et de A .

Mais cela contredit la première condition qui induit clairement qu'il y a un nombre pair de relations d'amitiés entre des membres de A et de B .

Donc l'hypothèse est absurde et on conclut.

Exercice 12

Autour d'une table ronde sont placées 12 chaises de façon régulière et devant chaque chaise il y a une carte avec le nom d'un des Animateurs. Chacune des 12 cartes possède un nom différent. Au début de leur réunion les Animateurs se rendent compte qu'ils se sont tous assis devant une carte qui n'était pas la leur. Est-il possible de tourner la table de façon à ce qu'au moins 2 Animateurs se retrouvent devant leur propre carte ?

Solution de l'exercice 12

Il faut compter le nombre de points fixes quand on fait tourner la table 11 fois (c'est-à-dire quand on effectue un tour complet). Il y en a 12, car comme on effectue un tour complet, chaque personne assise tombera sur son étiquette exactement une fois.

Maintenant on peut compter en fonction du nombre de fois où l'on a déjà tourné la table. Comme dans la situation initiale il n'y a aucun point fixe, cela signifie que les 12 points fixes restants doivent être répartis dans les 11 autres configurations de la table. Par le principe des tiroirs il existe une rotation pour laquelle il y a au moins 2 points fixes, ce qui conclut.

Exercice 13

Soit S un ensemble de n points dans le plan tel que trois points de S ne soient jamais sur une même droite. Montrez que le nombre de triangles d'aire 1 dont les trois sommets sont dans S est d'au plus :

$$\frac{2n(n-1)}{3}.$$

Solution de l'exercice 13

Considérons tous les triplets de points (P, Q, R) de points de S tels que le triangle PQR soit d'aire 1, soit N le nombre de tels triplets. Si P, Q sont fixés, alors les points R tels que PQR soit d'aire 1 sont situés sur deux droites parallèles à (PQ) . Sur chacune des droites, il y a au plus 2 points de S , donc il y a au plus 4 points R qui fonctionnent. Ainsi, N est au plus $4 \times n(n-1)$. Maintenant, un triangle PQR correspond à 6 triplets comptés dans N , qui correspondent à toutes les permutations de P, Q, R . Le nombre de triangles est donc

$$\frac{N}{6} \leq \frac{4n(n-1)}{6} = \frac{2n(n-1)}{3}.$$

Exercice 14

Comptons les triplets (x, y, z) de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ qui vérifient $z > \max\{x, y\}$.

Solution de l'exercice 14

On compte T le nombre de triplet. Pour chaque $z \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ il y a $(z-1)^2$ couples (x, y) satisfaisant $x, y < z$. Donc

$$T = \sum_{z=1}^{n+1} (z-1)^2 = 1 + 2^2 + \dots + n^2.$$

On compte T d'une autre manière. Il y a

- $\binom{n+1}{2}$ triplets tels que $x = y < z$,
- $\binom{n+1}{3}$ triplets qui correspondent à $x < y < z$,
- $\binom{n+1}{3}$ triplets qui correspondent à $y < x < z$,

On en déduit que

$$T = 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

et on en déduit la formule bien connue

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 15

Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que

1. chaque professeur a exactement k élèves, et qu'un élève a toujours exactement ℓ professeur. Déterminer une relation entre m, n, k, ℓ .
2. chaque professeur a exactement k élèves, et que deux élèves ont toujours exactement ℓ professeurs *en commun*. Déterminer une relation entre m, n, k, ℓ .

Solution de l'exercice 15

1. On note I le nombre de relation élèves-professeurs alors

$$I = n \times \ell \quad \text{et} \quad I = m \times k$$

et donc $n \times \ell = m \times k$.

2. On compte T = le nombre de triplet élève-élève-professeurs dont le professeur est commun aux deux élèves.

Méthode 1 : Chaque professeur a $\binom{k}{2}$ binomes d'élèves dans sa classe et donc

$$T = m \times \binom{k}{2}.$$

Méthode 2, il y a $\binom{n}{2}$ pairs d'élèves possibles et alors

$$T = \binom{n}{2} \times \ell$$

On obtient alors comme relation

$$n(n-1)\ell = mk(k-1).$$

Exercice 16

200 élèves participent à une compétition de mathématiques comportant 6 problèmes. On sait que chaque problème a été résolu par au moins 120 participants. Montrer qu'il existe deux élèves qui à eux deux ont résolu tous les problèmes de la compétition.

Solution de l'exercice 16

De nouveau, on raisonne par l'absurde : plutôt que de chercher une telle paire d'élèves, on suppose que pour chaque paire d'élèves il existe un exercice auquel ils ont tous les deux échoué : on gagne une information significative.

On a alors deux informations : pour savoir quoi compter, on utilise celle qui semble la plus alambiquée, ie la moins simple à utiliser dans un comptage. Ici, cela semble être celle que l'on obtient par le raisonnement par l'absurde.

Représentons la situation sous forme d'un tableau afin de simplifier le comptage : on construit un tableau à 6 colonnes et 200 lignes où chaque ligne correspond à un étudiant et chaque colonne à un problème : on écrit un 1 dans une entrée si l'étudiant associé à la ligne a résolu l'exercice et un 0 sinon.

On traduit nos informations : d'une part il y a au plus 80 fois 0 dans chaque colonne, et d'autre, pour chaque paire de ligne il existe une colonne dans laquelle les deux lignes ont un 0. En se concentrant sur cette dernière information, il apparaît naturel de compter A le nombre de paires de deux 0 étant dans une même colonne. Comme chaque paire d'élèves en donne une de manière injective d'après la deuxième information, on a $A \geq \binom{200}{2}$. Comme il y a au plus 80 zéros dans une colonne donnée, il y a au plus $\binom{80}{2}$ paires dans chaque colonne, et donc $A \leq 6 \cdot \binom{80}{2}$. On conclut à une contradiction car $\binom{200}{2} = 19900 > 18950 = 6 \cdot \binom{80}{2}$.

Exercice 17

Soit $A_1, \dots, A_n$ des sous-ensembles à r éléments d'un ensemble X , tels que $|A_i \cap A_j| \leq k$ pour tous $1 \leq i < j \leq n$. Montrer que

$$|X| \geq \frac{nr^2}{r + (n-1)k}$$

Solution de l'exercice 17

On considère $Z = \bigcup_{i=1}^n A_i$. C'est l'union de tous les A_i , ou plus simplement, ce sont tous les éléments de X qui appartiennent à au moins un sous-ensemble A_i .

On a donc $Z \subseteq X$, d'où $|Z| \leq |X|$.

On va maintenant considérer

$$Q = \{(a, b, i, j) \in Z^2 \times \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid (a, b) \in (A_i \cap A_j)^2\}$$

C'est-à-dire qu'on considère tous les couples d'éléments et tous les couples de sous-ensembles tels que les deux éléments appartiennent tous les deux aux deux sous-ensembles.

(N.B : on peut très bien avoir $a = b$, ou $i = j$)

D'une part, soit $a \in Z$, comme on sait qu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $a \in A_i$ (c'est la définition de Z), on peut fixer a et i et dénombrer C l'ensemble des couples (b, j) tels que $(a, b, i, j) \in Q$.

On note

$$F = (A_i \times \{i\}) \cup \left(\bigcup_{j \neq i} (A_j \cap A_i) \times \{j\} \right)$$

(N. B : l'union est en fait disjointe grâce aux j).

On a alors $C \subseteq F$.

En effet, si l'on a $b \in Z$ et $1 \leq j \leq n$ tels que $(a, b) \in A_i \cap A_j$, alors soit $j = i$ donc $b \in A_i$ soit $j \neq i$ et $(a, b) \in A_i \cap A_j$ avec $i \neq j$ (et donc $|A_i \cap A_j| \leq k$).

$$\text{D'où } |Q| \leq |Z \times F| \leq |Z| \cdot \left(r + \sum_{j \neq i} |A_i \cap A_j| \right) \leq |Z| \cdot (r + (n-1)k)$$

D'autre part, en notant $Y = \{(a, a, i, i), a \in Z, 1 \leq i \leq n \mid a \in A_i\} = \bigsqcup_{i=1}^n \{(a, a), a \in A_i\}$

on a facilement l'inclusion : $Y \subseteq Q$ donc $|Q| \geq |Y| \geq \sum_{i=1}^r |A_i^2| = nr^2$.

On combine les deux inégalités :

$$|Z| \cdot (r + (n-1)k) \geq |Q| \geq nr^2.$$

Enfin,

$$|X| \geq |Z| \geq \frac{nr^2}{r + (n-1)k}$$

4 Géométrie : Configurations (Antoine)

Pour toute la feuille, on a fixé un triangle ABC , de centre de cercle inscrit I , de centre de cercle circonscrit O , d'orthocentre H , et de centre de cercle A -exinscrit I_A .

Considérez chacun de ces exercices comme du cours, ce sont des configurations à connaître et à savoir reconnaître et utiliser dans des figures plus compliquées, avec plus de points, à appliquer à un sommet autre que A dans ABC ou même dans un triangle autre que ABC .

À connaître absolument

Exercice 1

Montrer que la bissectrice issue de A et la médiatrice de $[BC]$ se recoupent sur le cercle circonscrit de ABC .

C'est le *théorème du Pôle Sud*.

Exercice 2

Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés de ABC sont sur le cercle circonscrit de ABC .

Exercice 3

Soit M le milieu de BC et A' l'antipode de A dans le cercle circonscrit de ABC . Montrer que M est le milieu de $[HA']$.

Exercice 4

Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

On dit que O et H sont *conjugués isogonaux*.

Exercice 5

Montrer que B, C, I, I_A sont cocycliques, et déterminer le centre de ce cercle.

Ce cercle est le *cercle antarctique* de A dans ABC .

Résultats déjà un peu plus marginaux mais utiles quand même

Exercice 6

Montrer que la bissectrice extérieure issue de A et la médiatrice de $[BC]$ se recoupent sur le cercle circonscrit de ABC .

C'est le *théorème du Pôle Nord*.

Exercice 7

Soient S_A, S_B, S_C les pôles Sud de A, B, C respectivement. Montrer que I est l'orthocentre de $S_A S_B S_C$.

Exercice 8

Soit M le milieu de BC , E le pied de la hauteur issue de B , F le pied de la hauteur issue de C . Montrer que MEF est un triangle isocèle en M .

Exercice 9

Soit ω le cercle inscrit de ABC , et Ω son cercle A -exinscrit. On note D, E les points de tangence de ω avec $[BC]$ et $[AB]$ respectivement. On note également J le point de tangence de Ω avec $[BC]$.

1. Montrer que $BD = BE$.
2. Montrer que $BD = CJ$.

Applications**Exercice 10**

Comparer les rayons des cercles circonscrits à ABC et BHC .

Exercice 11

Soit D le pied de la bissectrice issue de A . Les cercles circonscrits aux triangles ACD et ABD recoupent les côtés $[AB]$ et $[AC]$ en E et F respectivement. Montrer que $BE = CF$.

Exercice 12

(Shortlist JBMO G4 2014)

Soit M le milieu de $[BC]$, et N le milieu de $[AH]$. Soit O' le centre du cercle circonscrit à BHC . Montrer que $ANO'M$ est un parallélogramme.

Pour aller plus loin**Exercice 13**

(Queue point)

On garde la figure de l'exercice 3. On appelle Q le point d'intersection de (MH) avec (ABC) qui n'est pas A' . Soient D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement.

1. Montrer que les points A, H, E, F, Q et les points M, A, Q, D sont cocycliques.
2. Montrer que les droites $(AQ), (EF), (BC)$ sont concourantes.
3. Montrer que les triangles QFE et QBC sont semblables, et que les triangles QFB et QEC sont semblables.

Exercice 14

(Humpty point)

On garde la figure de l'exercice précédent. On appelle P le projeté orthogonal de H sur (AM) .

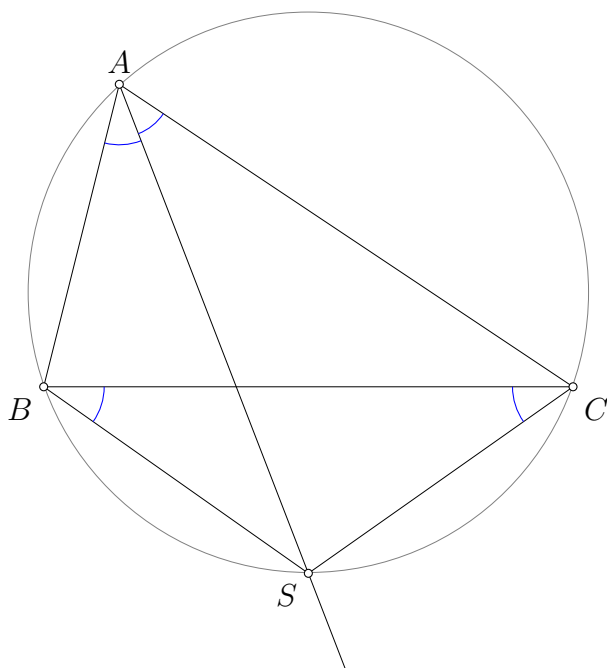
1. Montrer que les polygones $AEPHFQ, DMHP$ et $BHPC$ sont cycliques.
2. Montrer que les droites $(BC), (EF), (AQ), (HP)$ sont concourantes.
3. Montrer que les triangles PEF et PBC , ainsi que les triangles PEB et PFC sont semblables.

Exercice 15

(Iran Lemma)

Soient D, E, F les points de tangence du cercle inscrit avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient M et N les milieux de $[BC]$ et $[AC]$. Montrer que les droites (EF) , (MN) et (BI) sont concourantes.

Indice : Tracer des cercles intelligents et remarquer quelque chose. Le prouver. Ensuite, il y a un triangle isocèle qui se cache...

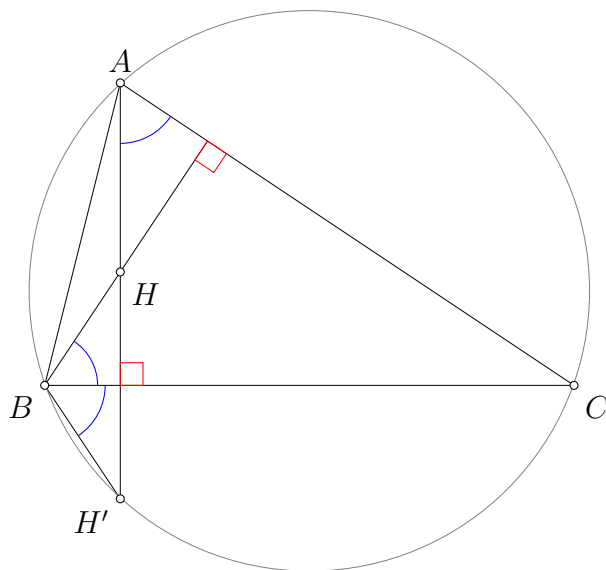
Solutions**Solution de l'exercice 1**

On redéfinit S comme l'intersection de la bissectrice issue de A et du cercle circonscrit. Une chasse aux angles donne alors

$$\widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \widehat{SAB} = \widehat{SCB},$$

et SCB est isocèle en S . Ainsi, S est sur la médiatrice de $[BC]$, comme voulu.

Solution de l'exercice 2

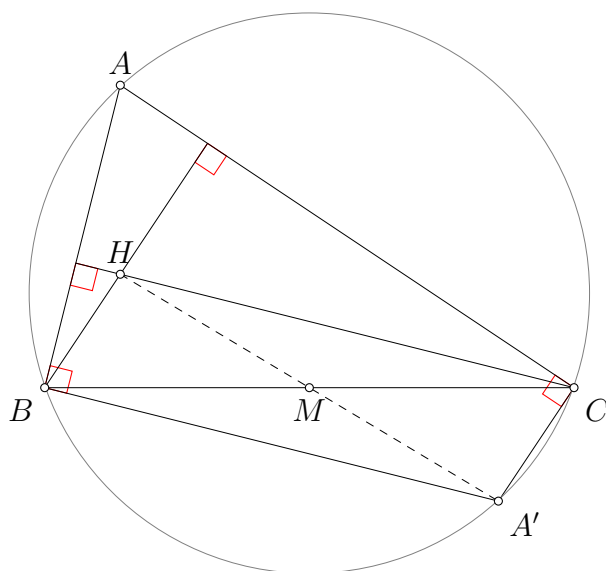


Il s'agit encore d'une chasse aux angles rapide. Ici, $\widehat{H'BC} = \widehat{HBC}$ par symétrie, et

$$\widehat{HBC} = 90^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{HAC}$$

par définition de H .

Solution de l'exercice 3

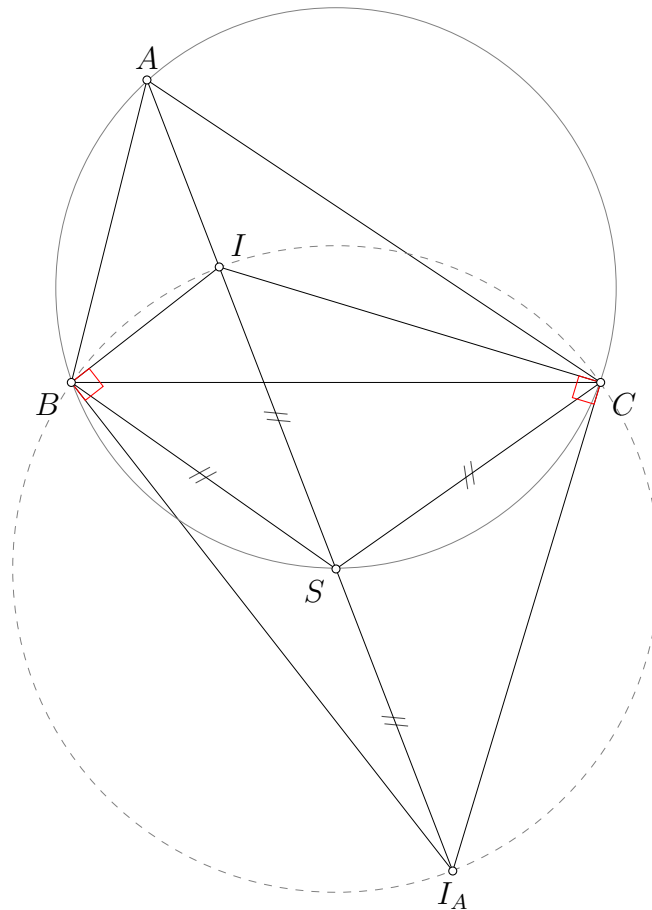


On montre les parallélismes grâce au fait qu'on a beaucoup d'angles droits dans la figure. En effet, (CA') et (BH) sont toutes deux perpendiculaires à (AC) , et sont donc parallèles. Le deuxième parallélisme se fait de la même manière.

Solution de l'exercice 4

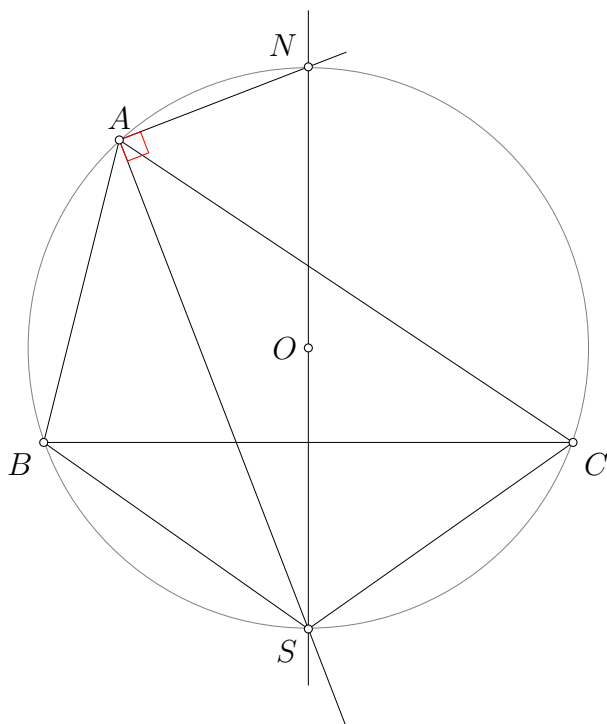
Par somme des angles dans un triangle isocèle et angle au centre, on a

$$\widehat{BAO} = \frac{180 - 2\widehat{AOB}}{2} = 90^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{CAH}.$$

Solution de l'exercice 5

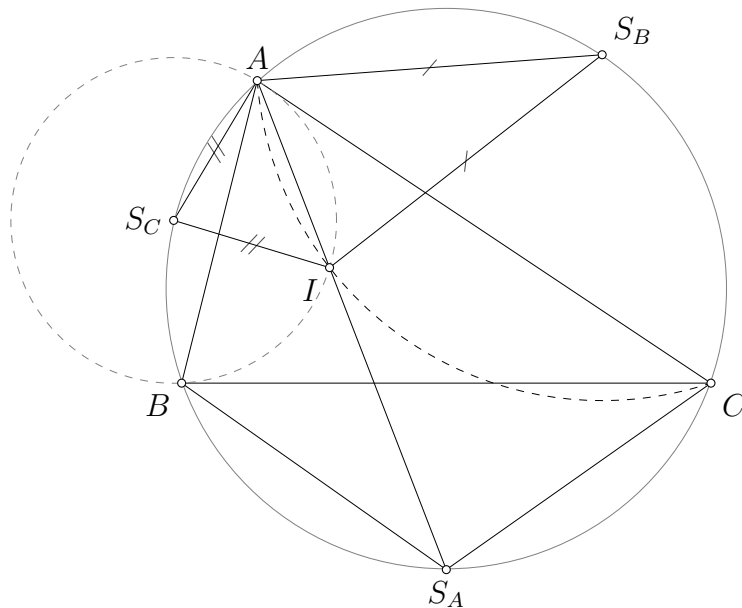
Comme les bissectrices intérieures et extérieures sont perpendiculaires, $\widehat{ICI_A} = \widehat{BI_A} = 90^\circ$. Ainsi, I, B, I_A, C sont cocycliques, et le centre du cercle est le milieu, mettons S , de $[II_A]$. Il s'agit donc d'un point à la fois sur la médiatrice de $[BC]$ et sur la droite (II_A) : c'est le pôle Sud de A dans ABC .

Solution de l'exercice 6



Définissons N comme l'intersection de la bissectrice extérieure et du cercle circonscrit. Puisque les bissectrices extérieures et intérieures sont perpendiculaires, $[NS]$ est un diamètre du cercle circonscrit. Par le théorème du Pôle Sud, $(OS) = (NS)$ est la médiatrice de $[BC]$, et on a fini.

Remarque : Le point N est également le centre d'un cercle passant par B, C, I_B et I_C , appelé le *cercle arctique*. La preuve se fait par chasse aux angles pour montrer qu'il y a beaucoup de triangles isocèles.

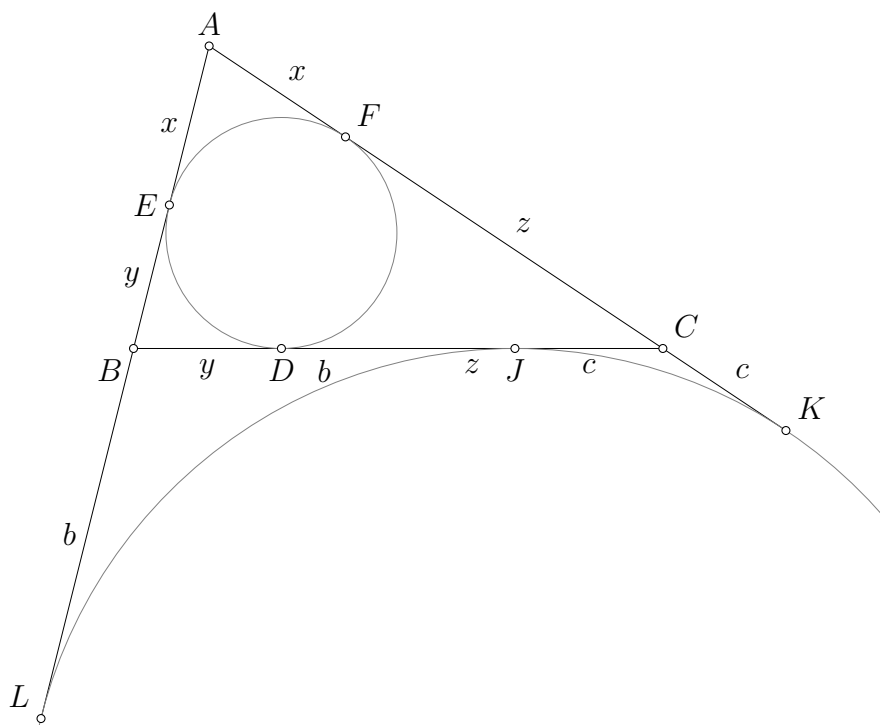
Solution de l'exercice 7

On montre que $(AI) \perp (S_C S_B)$, les autres orthogonalités se montrent de la même façon. Pour se faire, on montre que $(S_C S_B)$ est en fait la médiatrice de (AI) . Ce fait découle à son tour du fait que $AS_B = IS_B$ par l'exercice 5.

Solution de l'exercice 8

Comme le triangle BCE est rectangle en E , M est le centre du cercle circonscrit du triangle BCE . Ainsi, $ME = MB = \frac{BC}{2}$. Le même raisonnement donne également $MF = \frac{BC}{2}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9



La puissance d'un point nous donne une quantité d'égalités de longueurs assez faroucheuse. En effet,

$$BE = BD = y, \quad AE = AF = x, \quad CF = CD = z,$$

mais également

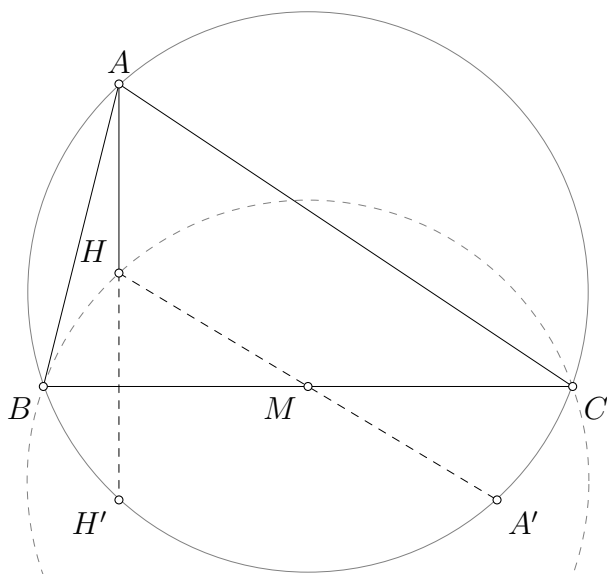
$$AL = AK = a, \quad BL = BJ = c, \quad CJ = CK = c.$$

Maintenant, la seule information qu'on n'a pas encore exploitée dans cette figure est le fait que des points sont alignés. On a ainsi

$$x + y + b = a = x + z + c \text{ et } b + c = BC = y + z,$$

donc $y + b = z + c$ et $b + c = y + z$. En faisant la différence des deux relations, on trouve $y - c = c - y$. Ainsi $y = c$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10

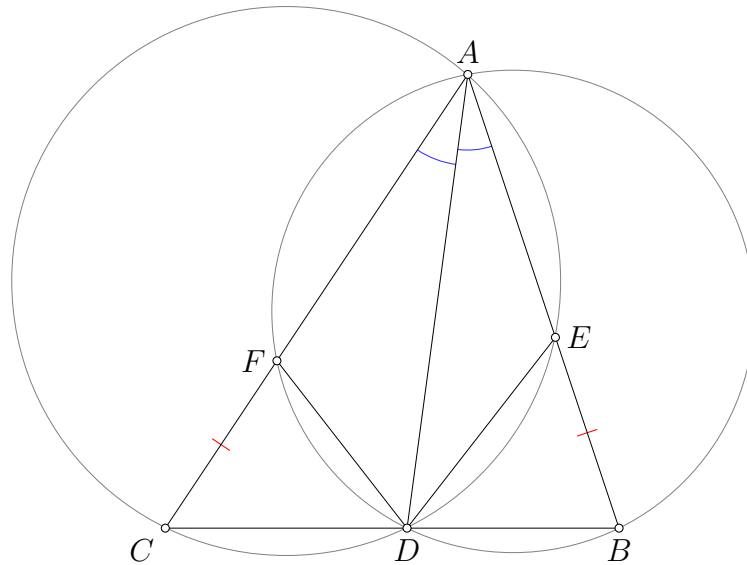


On remarque en faisant une *belle et grande figure propre* que les cercles ont le même diamètre. Bien que ce soit un fait qui est facilement montrable par la loi des sinus, nous ne sommes pas des barbares, et n'utilisons cet outil que dans des situations adaptées.

Il y a plusieurs manières de faire. Tout d'abord, puisque le symétrique H' de H par rapport à (BC) est sur le cercle (ABC) par l'exercice 2, la symétrie d'axe (BC) échange les cercles (BHC) et $(BH'C) = (ABC)$, ce qui conclut.

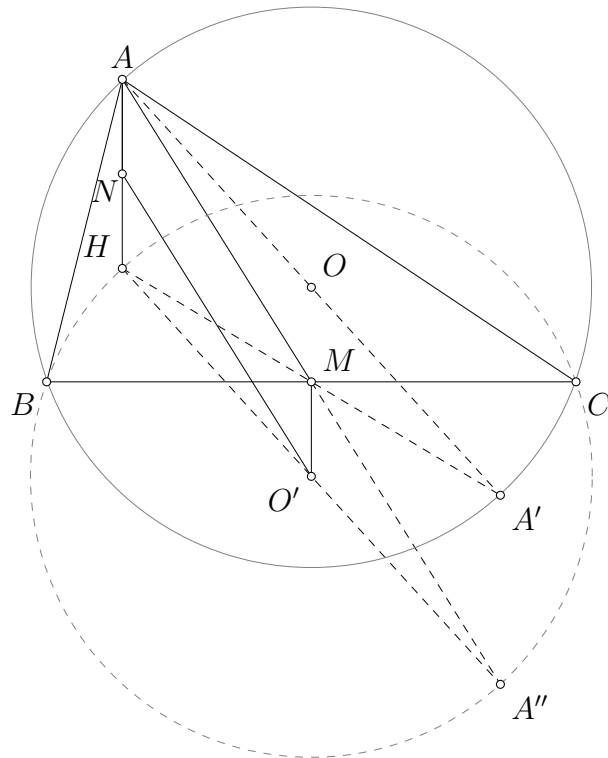
Une deuxième manière est de considérer la symétrie de centre M le milieu de $[BC]$. Celle-ci échange B et C , et échange également H et l'antipode A' de A dans (ABC) par l'exercice 3. Ainsi, elle échange les cercles (BHC) et $(CA'B) = (ABC)$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 11



On va montrer que BDE et DFC sont isométriques. Par le théorème du pôle Sud, comme AD est la bissectrice de $\widehat{EAC}$ et de $\widehat{BAF}$, on a $DE = DC$ et $DB = DF$. De plus par angle inscrit, $\widehat{BDE} = 180 - \widehat{EDC} = 180 - \widehat{EAC} = 180 - \widehat{BDF} = \widehat{FDC}$. Donc les triangles sont isométriques et la conclusion suit.

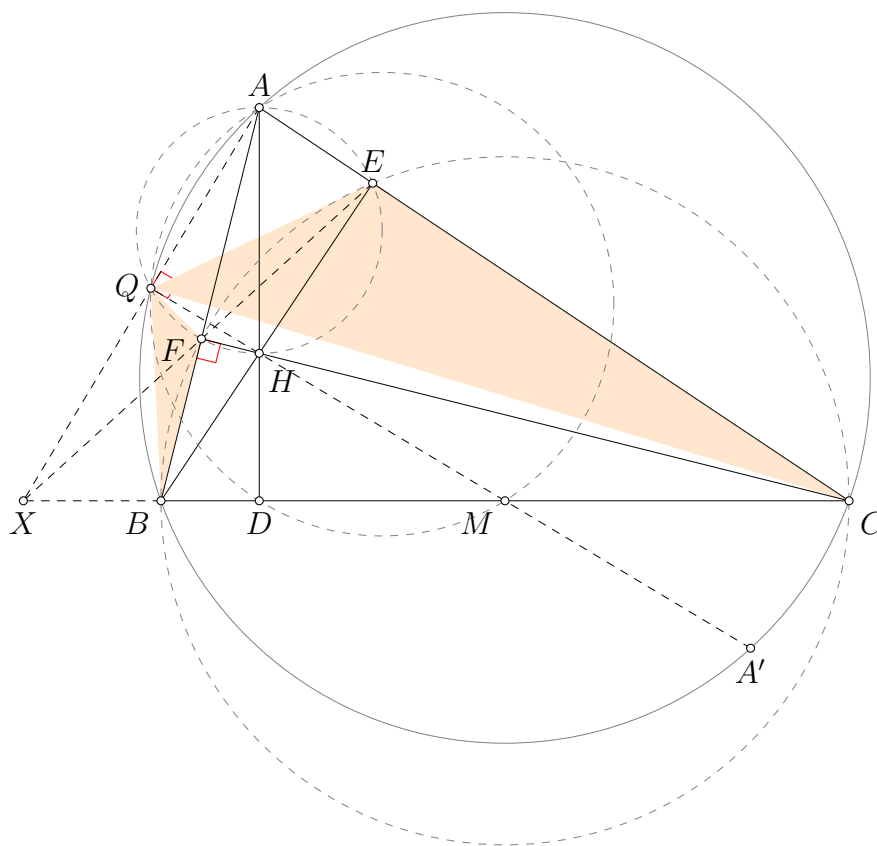
Solution de l'exercice 12



Cet exercice était difficile, mais connaître ses configurations autour de l'orthocentre simplifiait grandement le problème. En effet, par l'exercice 10, on sait que O' est le symétrique de O par rapport à (BC) , d'où $(O'M) \perp (BC)$. Comme on a aussi $(AN) \perp (BC)$, on obtient $(AN) \parallel (O'M)$. Il reste donc à montrer que $AN = O'M$, ou encore $AH = 2OM$. Cette identité découle d'un peu de trigonométrie ($AH = 2R \cos(\widehat{BAC})$), mais une manière élémentaire de la montrer est de remarquer que (OM) est la droite des milieux dans le triangle $AA'H$ par l'exercice 3.

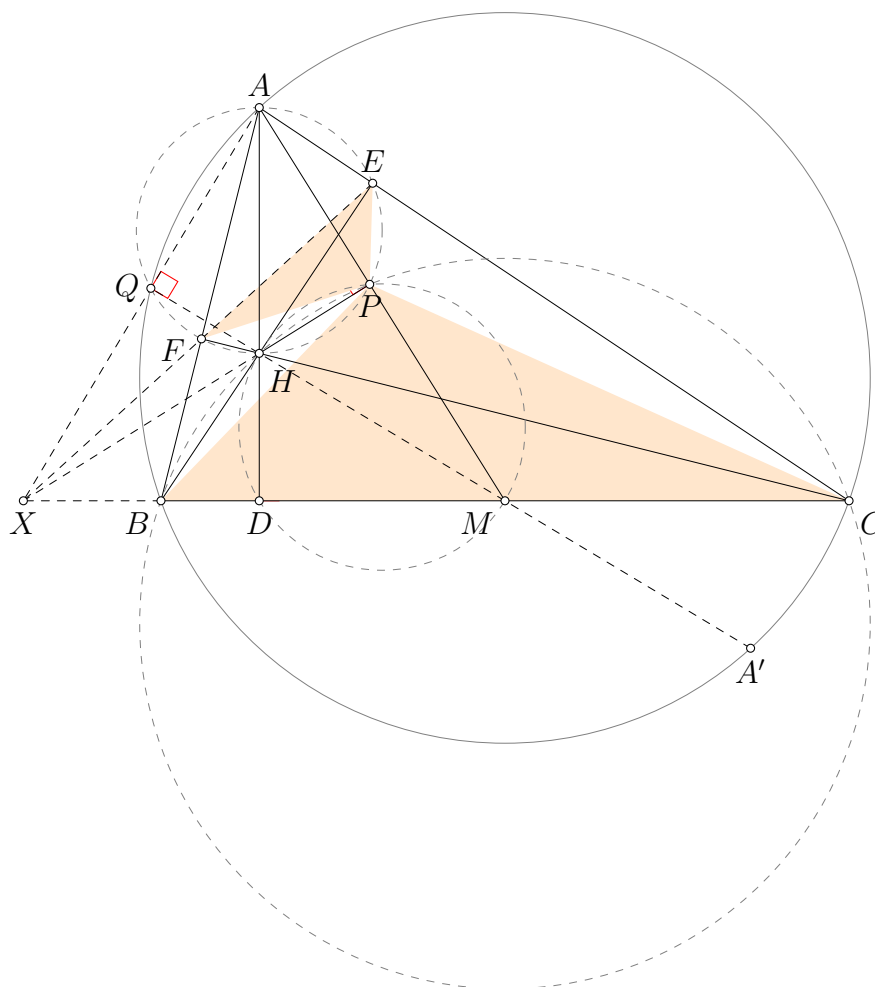
Enfin, une preuve astucieuse de ce problème consiste à remarquer que A est l'orthocentre du triangle BHC , et ainsi le symétrique A'' de A par rapport à M est également l'antipode de H dans (BHC) . Ainsi la droite de milieux dans AHA'' est nulle autre que $(O'M)$. On obtient alors directement $(AN) \parallel (O'M)$ et $AN = \frac{1}{2}AH = O'M$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13



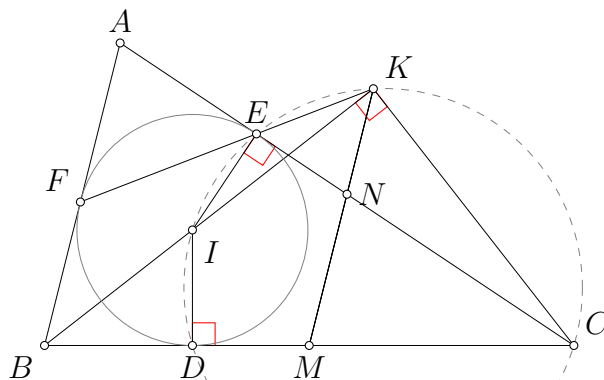
Les cocyclicités découlent du fait que A', H, Q sont alignés, et donc $\widehat{AQH} = 90^\circ$. Pour la concurrence, observons que les droites (AQ) , (EF) et (BC) sont les axes radicaux des cercles $(AHEFQ)$, $(BFEC)$ et (ABC) . Comme les axes radicaux de trois cercles concourent en leur centre radical, on a fini. Enfin, la similitude des triangles découle d'une chasse aux angles rapide laissée au lecteur, que je sais avide de s'y entraîner. De manière plus générale, le dernier résultat vient du fait que Q est le centre de la similitude échangeant B, F et C, E ; voir l'excellent poly de Martin, Proposition 3.2.

Solution de l'exercice 14



Puisque Q dans l'exercice précédent aurait aussi pu être défini comme le projeté de A sur (HM) , on remarque que P est le H -symmedian point de BHC ! L'entière des propriétés de P peuvent donc être déduites de celles de Q établies dans l'exercice précédent en échangeant A et H .

Solution de l'exercice 15



Soit K l'intersection de (EF) et (BI) . On montre tout d'abord que D, C, K, E, I sont cocycliques, par chasse aux angles. Si on note $\alpha = \widehat{BAI}$ et de même pour β et γ , on a d'un côté $\widehat{ECI} = \gamma$, et d'un autre côté

$$\widehat{EKI} = 180 - \widehat{BFK} - \widehat{FBK} = \widehat{AFE} - \beta = 90^\circ - \alpha - \beta = \gamma$$

puisque AFE est isocèle en A . Ainsi, les points E, K, C, I sont bien cocycliques. Mais alors BKC est rectangle en K , et comme M est le milieu de $[BC]$, par angle au centre,

$$\widehat{KMC} = 2\widehat{KBC} = 2\beta = \widehat{ABC}.$$

On en déduit que (KM) est parallèle à (AB) . Puisqu'on a aussi $(MN) \parallel (AB)$, les points K, M, N sont bien alignés, ce qui conclut.

5 Géométrie : Axes radicaux (Noam)

Exos introductifs : puissance d'un point

Exercice 1

Soient Γ et Ω deux cercles s'intersectant en A et B . Soient C et D des points de Γ , tels que (AD) et (BC) ne sont pas parallèles. On note E et F les points d'intersection de Ω avec (AC) et (BD) respectivement.

Montrer que (CD) et (EF) sont parallèles (faisable par chasse aux angles, mais utiliser de préférence la puissance d'un point).

Exercice 2

Soient Γ et Ω deux cercles s'intersectant en A et B . Soient C et D des points de Γ , et soient E et F des points de Ω tels que (AB) , (CD) , (EF) sont concourantes. Montrer que C, D, E, F sont cocycliques.

Exercice 3

Soit ABC un triangle acutangle. Soit D et E les pieds des hauteurs issues de A et B , et soient M et N les milieux de $[AC]$ et $[BC]$ respectivement. Montrer que E, D, M, N sont cocycliques.

Cours

On a défini la puissance d'un point par rapport à un cercle. Si on se donne deux cercles Γ_1 et Γ_2 , il est donc naturel de se demander quel est l'ensemble des points dont la puissance par rapport à Γ_1 est égale à celle par rapport à Γ_2 : c'est l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 .

La propriété principale à connaître sur l'axe radical est que c'est une droite.

De plus si O_1 et O_2 sont les centres des deux cercles, l'axe radical est perpendiculaire à (O_1O_2) . Si les cercles Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en A et B , alors l'axe radical est la droite (AB) : c'est habituellement la manière la plus facile d'utiliser un axe radical.

Exercices

Exercice 4

Soient deux cercles qui ne s'intersectent pas. On trace leurs quatre tangentes communes, puis on colorie chaque fois le milieu entre les deux points de tangence sur chacune des tangentes. Montrer que les quatre points coloriés sont alignés.

Exercice 5

Soient Γ et Ω deux cercles s'intersectant en A et B . Soit t une tangente commune aux deux cercles. On note P le point de tangence de t avec Γ et Q celui avec Ω . Montrer que (AB) coupe le segment $[PQ]$ en son milieu.

Exercice 6

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles tangents extérieurement en T . Soit (PQ) une tangente commune (avec P et Q les points de tangence avec Γ_1 et Γ_2 respectivement). Montrer que PQT est un triangle rectangle.

Exercice 7

Soit ABC un triangle d'orthocentre H . Soient M et N des points quelconques sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Soient P et Q les points d'intersection des cercles de diamètres $[BN]$ et $[CM]$.

Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 8

Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note C un point sur ω . Le projeté orthogonal de C sur $[AB]$ est H . Le cercle de centre C et de rayon CH recoupe ω en X et Y . Montrer que X, Y et le milieu de $[CH]$ sont alignés.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note M et N les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. On note P l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (AD)$ et Q l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (BC)$. Montrer que (MN) est perpendiculaire à (PQ) .

Exercice 10

Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la droite (BC) en un point P . Soient E et F les pieds des hauteurs issues des sommets B et C respectivement. Soit Q le point d'intersection de la droite (EF) avec la parallèle à la droite (BC) passant par le point A . Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les droites (AM) et (PQ) sont perpendiculaires.

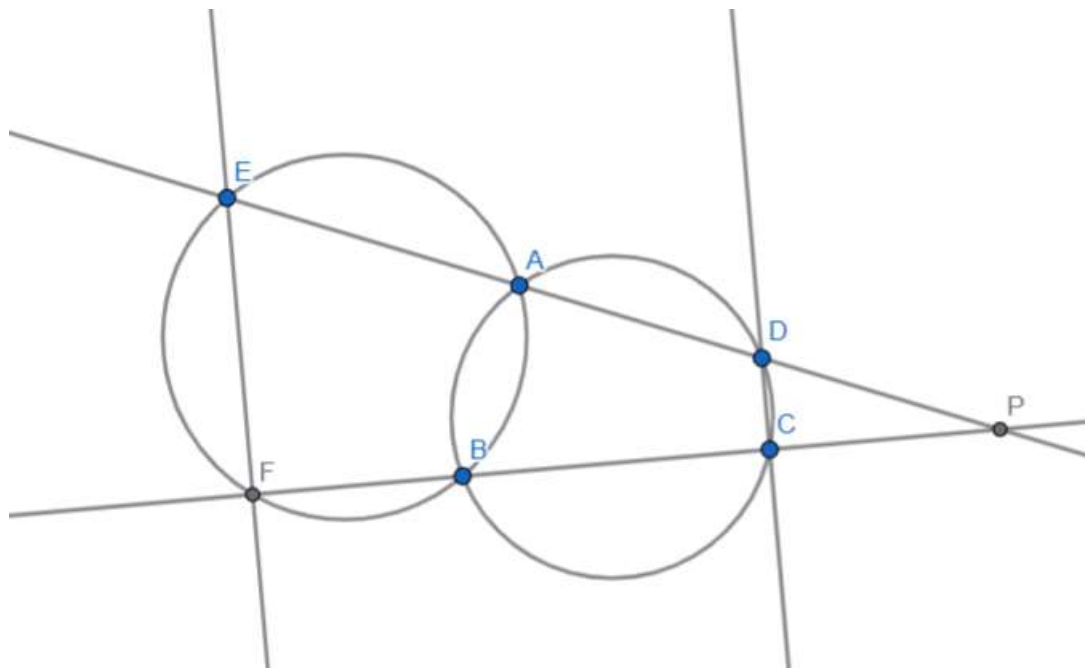
Exercice 11 (P1 TST Iran 2011, exo difficile à ne faire qu'à la fin)

Dans un triangle acutangle ABC où $AC > AB$, M est le milieu de $[BC]$, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C . K est le milieu de $[ME]$, L est le milieu de $[MF]$ et T est un point de la droite (KL) tel que $(TA) \parallel (BC)$. Montrer que $TA = TM$.

Solutions

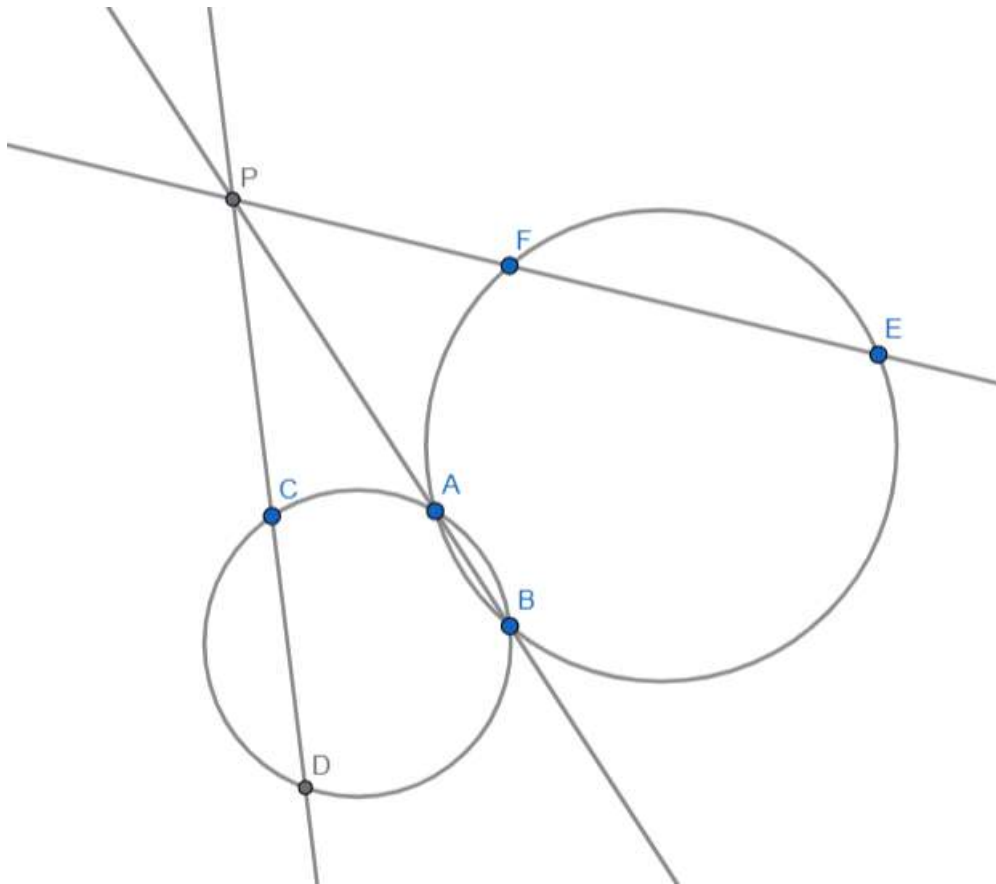
Solution de l'exercice 1

On introduit P le point d'intersection de (AD) et (BC) . Ensuite on utilise la puissance de point pour obtenir $PA \times PD = PB \times PC$ et $PA \times PE = PB \times PF$. On en déduit $\frac{PC}{PA} = \frac{PD}{PB}$ et $\frac{PA}{PF} = \frac{PB}{PE}$. En multipliant les égalités, $\frac{PC}{PF} = \frac{PC}{PA} \times \frac{PA}{PF} = \frac{PD}{PB} \times \frac{PB}{PE} = \frac{PD}{PE}$. Par la réciproque du théorème de Thalès, les droites (CD) et (EF) sont bien parallèles.

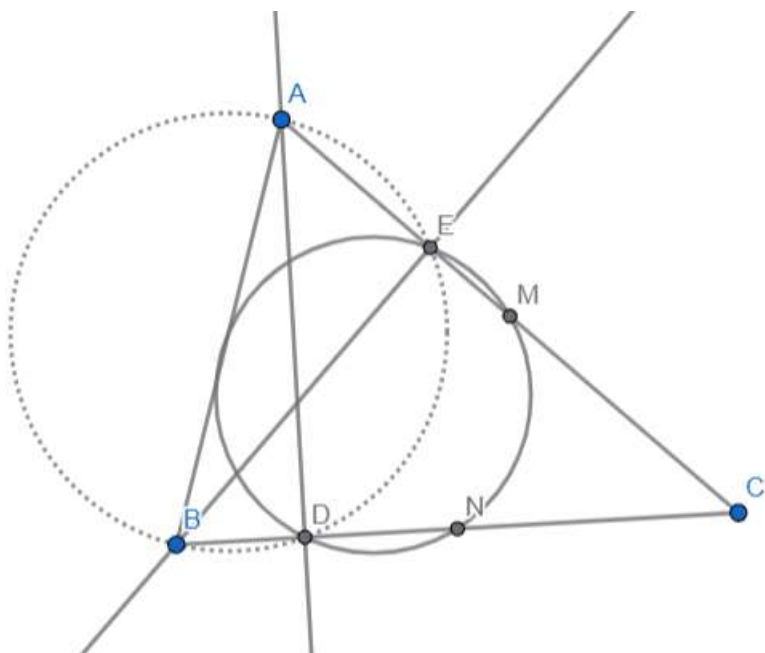


Solution de l'exercice 2

On note P le point d'intersection des trois droites. Par puissance de point par rapport à Γ , on a $PA \times PB = PC \times PD$ et par rapport à Ω , on a $PA \times PB = PE \times PF$. Donc $PC \times PD = PE \times PF$, et par la réciproque de la puissance d'un point, on en déduit que C, D, E, F sont cocycliques.

**Solution de l'exercice 3**

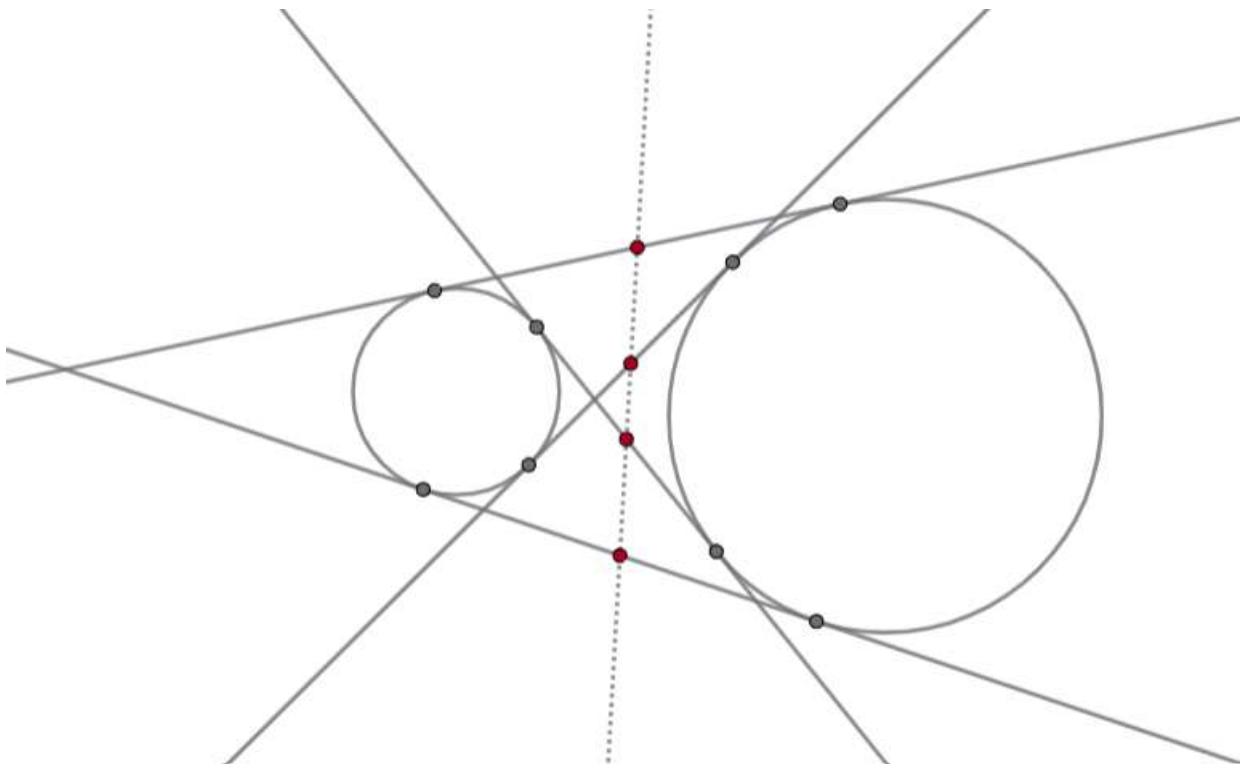
Comme $\widehat{AEB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$, les points A, B, D, E sont cocycliques par la réciproque de l'angle inscrit. Par puissance de point on a donc $CA \times CE = CB \times CD$. En divisant par deux des deux côtés, $CM \times CE = CN \times CD$ donc les points E, D, M, N sont cocycliques.



Axe radical**Solution de l'exercice 4**

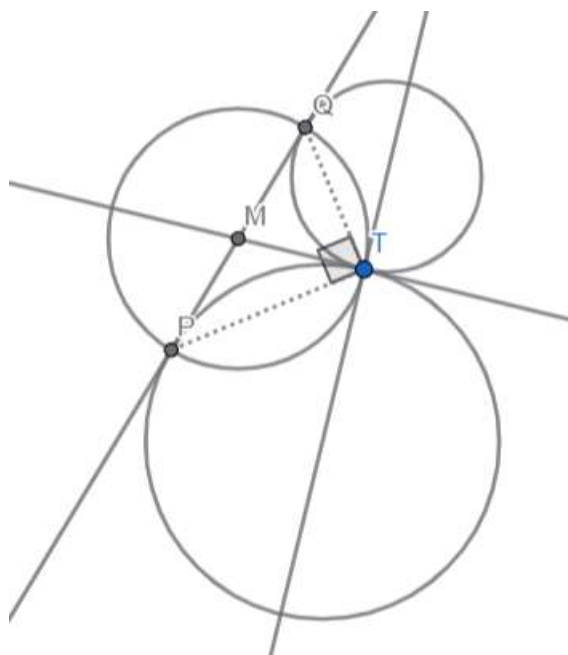
On remarque que chaque milieu a la même puissance par rapport aux deux cercles, car si A, B sont les points de tangence et M le milieu, $MA = MB$ donc $MA^2 = MB^2$.

Tous les milieux sont donc sur l'axe radical, donc ils sont bien alignés.

**Solution de l'exercice 5**

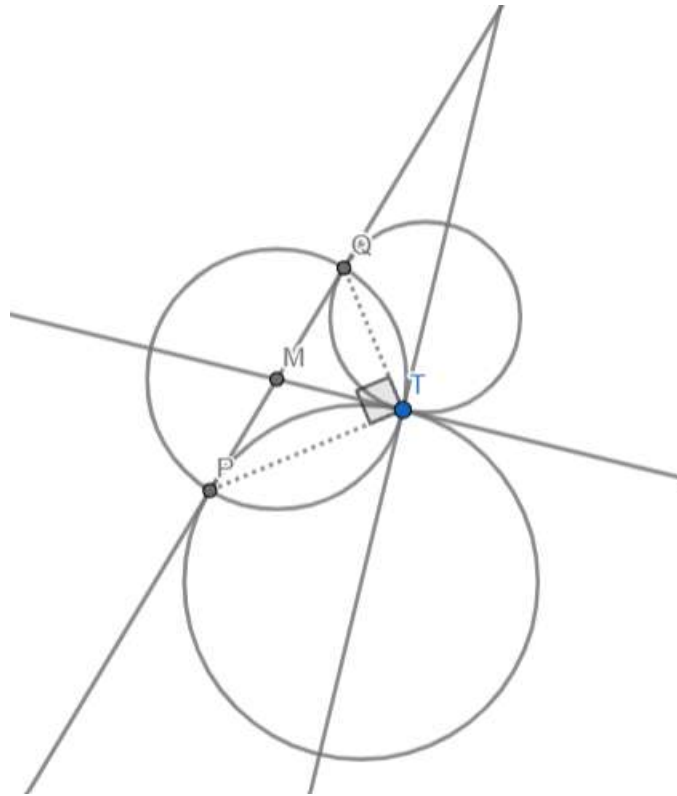
Comme Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en A et B , (AB) est l'axe radical de ces deux cercles.

Si on note M le point d'intersection de (AB) et $[PQ]$, on sait donc que la puissance de M par rapport aux deux cercles est la même, et donc $MP^2 = MQ^2$ d'où $MP = MQ$ et M est bien le milieu de $[PQ]$.

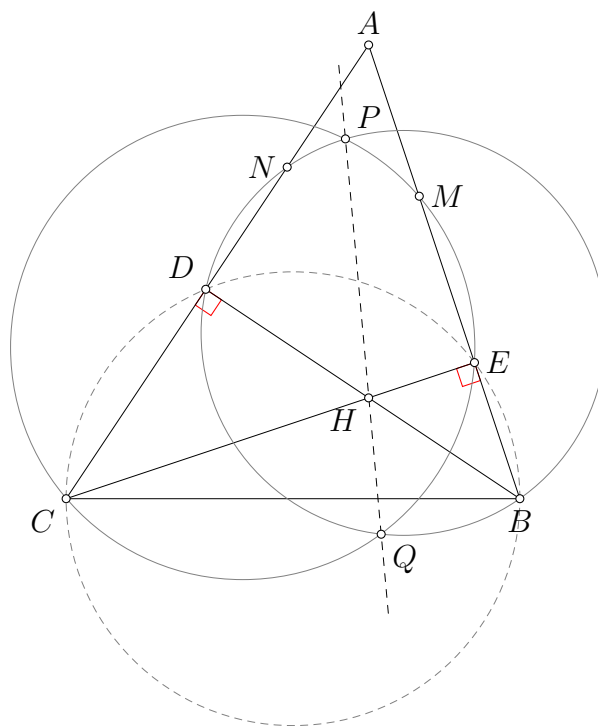


Solution de l'exercice 6

Traçons l'axe radical des deux cercles : c'est leur tangente commune. Si on pose M le milieu de $[PQ]$, on remarque que M est sur l'axe radical. Par puissance de point on a alors $MT^2 = MQ^2 = MP^2$ donc T est sur le cercle de diamètre $[PQ]$. Le triangle PQT est donc rectangle en T .



Solution de l'exercice 7



Notons D et E les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. Les angles $\widehat{CEM}$ et $\widehat{BDN}$ sont des angles droits, donc E appartient au cercle de diamètre $[CM]$ et F au cercle de diamètre $[BN]$.

De plus $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90$ donc par la réciproque de l'angle inscrit, B, E, D, C sont cocycliques.

On en déduit que $HB \times HD = HC \times HE$ donc H a la même puissance par rapport au cercle de diamètre $[CM]$ que par rapport au cercle de diamètre $[BN]$. H est donc sur l'axe radical des deux cercles, donc sur (PQ) .

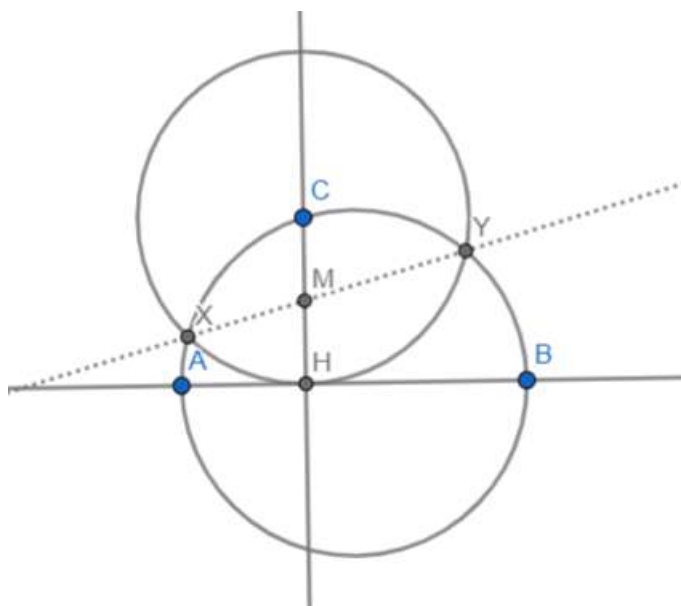
Solution de l'exercice 8

On note M le milieu de $[CH]$. On remarque que (XY) est l'axe radical des deux cercles. Il faut donc montrer que M est aussi sur cet axe radical, donc qu'il a la même puissance par rapport aux deux cercles.

On note x la distance CM . La puissance de M par rapport à ω vaut $3x \times x = 3x^2$, par symétrie d'axe (AB) .

La puissance par rapport au cercle de centre C vaut $CH^2 - MC^2 = 4x^2 - x^2 = 3x^2$.

Ainsi M a la même puissance par rapport aux deux cercles et est donc bien sur (XY) .

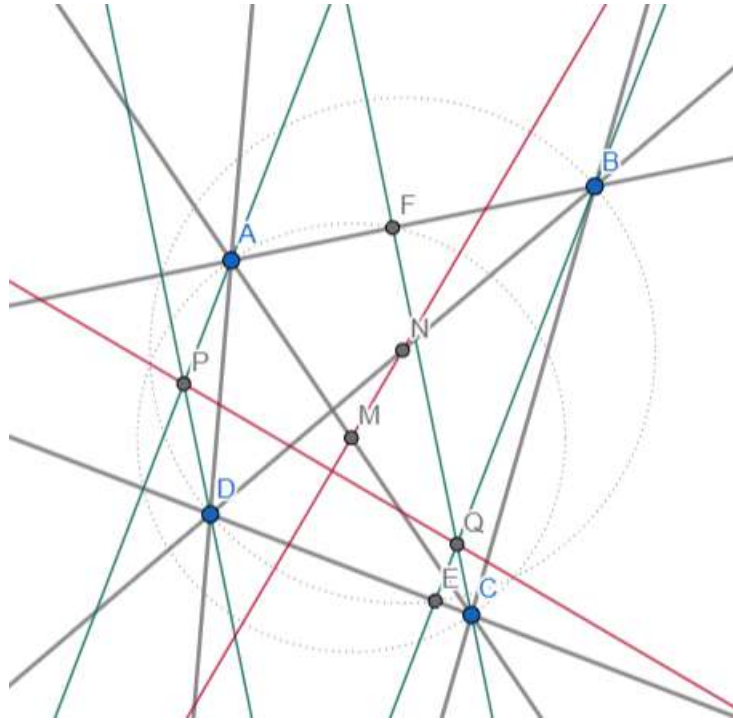


Solution de l'exercice 9

Traçons ω_1 le cercle de centre M passant par A et ω_2 le cercle de centre N passant par B .

Si on note E le projeté orthogonal de B sur (CD) et F celui de C sur (AB) , on a $(AB) \perp (CF)$ et $(CD) \perp (DE)$ donc $F \in \omega_1$, $E \in \omega_2$ et C, E, F, B sont cocycliques.

On en déduit par puissance de point que $QB \times QE = QF \times QC$ donc Q a la même puissance par rapport aux deux cercles. On fait de même pour P , et (PQ) est donc l'axe radical de ω_1 et ω_2 . Elle est donc perpendiculaire à la droite (MN) , qui relie les deux centres.

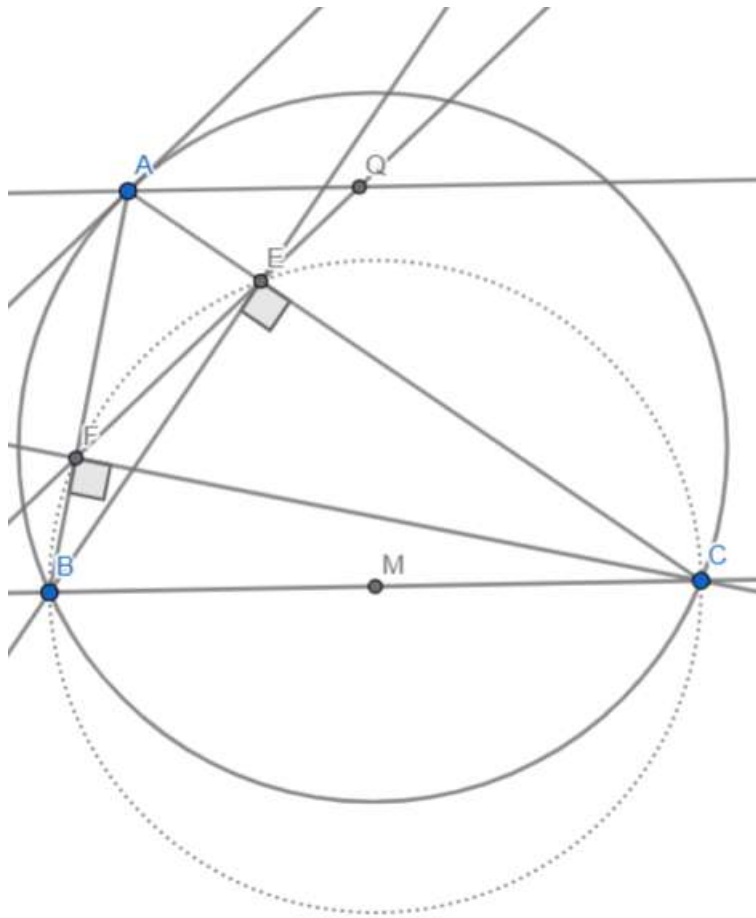


Solution de l'exercice 10

On a M le centre du cercle passant par B, C, E, F (angles droits en E et F). Montrons que (PQ) est l'axe radical de ce cercle et du cercle-point A . On a par puissance de point $PA^2 = PB \times PC$.

Le cercle circonscrit à AEF est tangent à (QA) car son centre est sur la hauteur issue de A , qui est donc perpendiculaire à (QA) . Ainsi, $QA^2 = QE \times QF$ et Q est aussi sur cet axe radical (il est aussi possible de montrer cette égalité par triangles semblables).

On en déduit que (PQ) est bien l'axe radical de ces deux cercles, donc perpendiculaire à la droite reliant les milieux.



Solution de l'exercice 11

Soit H l'orthocentre du triangle ABC , et O le milieu de $[AH]$.

Comme $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^\circ$, O est le centre du cercle passant par A, E, F, H .

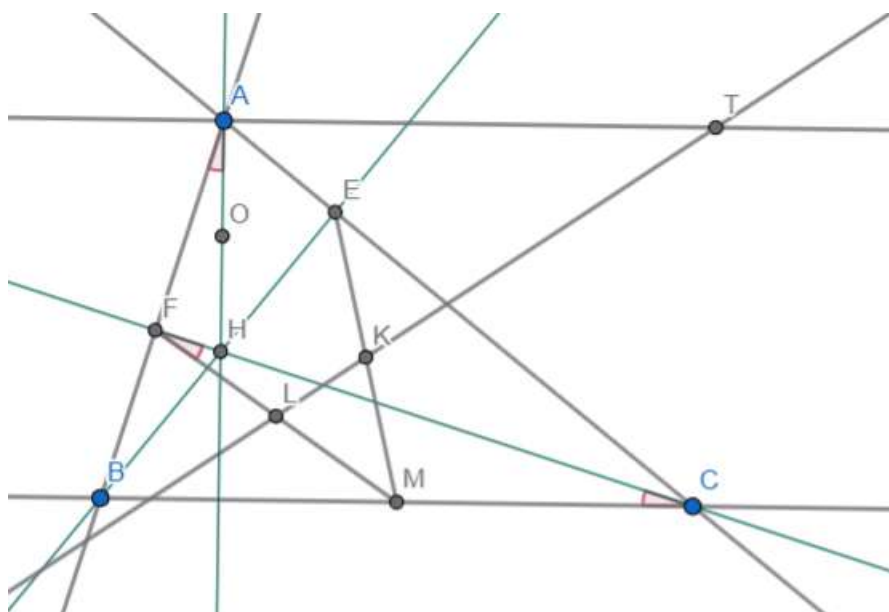
Si $\beta = \widehat{ABC}$, on a $\widehat{BCH} = \widehat{HAB} = 90^\circ - \beta$. Or MCF est isocèle en M et OAF est isocèle en O donc $\widehat{MFC} = \widehat{AFO} = 90^\circ - \beta$. Ainsi, $\widehat{MFO} = \widehat{MFH} + \widehat{HFA} - \widehat{AFO} = 90^\circ + (90^\circ - \beta) - (90^\circ - \beta) = 90^\circ$ donc (MF) est tangente au cercle de centre O .

De même, (ME) est aussi tangente au cercle.

On peut donc montrer que K et L sont sur l'axe radical du cercle circonscrit à $AEFH$ et du cercle-point M , car en effet $KM = KE$ donc $KM^2 = KE^2$. De même, $LM = LF$ donc $LM^2 = LF^2$.

Ainsi, (KL) est l'axe radical du cercle de centre O et du cercle-point M .

T est donc sur cet axe radical. De plus $(TA) \perp (AO)$ donc (TA) est tangente au cercle de centre O . On en déduit $TA^2 = TM^2$ donc $TA = TM$.



6 Combinatoire : Grilles (Oscar et Paul LL)

Exercices

Exercice 1

On considère un échiquier 8×8 auquel on a enlevé les coins en haut à gauche et en bas à droite. Montrer qu'on ne peut pas paver cet échiquier avec des dominos (des rectangles 2×1 , qu'on peut tourner dans le sens qu'on veut).

Exercice 2

On considère un échiquier 2025×2025 où on a colorié les cases en damier, de sorte qu'il y ait des cases blanches dans les coins. Autant de fois qu'on le souhaite, on peut inverser la couleur de deux cases adjacentes (une case choisie blanche devient noire, et vice et versa). Est-il possible de rendre l'échiquier intégralement noir.

Exercice 3

Paul et Oscar jouent à un jeu sur un échiquier 2025×2025 , avec initialement un 0 dans chaque case. En commençant par Paul, ils doivent ajouter 1 à un nombre de la grille, pour un total de 2^{2025} ajouts.

A la fin du jeu, on note $l_1, \dots, l_{2025}$ la somme des nombres dans chacune des lignes et $c_1, \dots, c_{2025}$ la somme des nombres dans chacune des colonnes. Oscar gagne si pour tout $1 \leq i \leq 2025$, il existe $1 \leq j \leq 2025$ tel que $l_i = c_j$ et pour tout $1 \leq j \leq 2025$, il existe $1 \leq i \leq 2025$ tel que $c_j = l_i$. Sinon, c'est Paul qui gagne.

Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 4 (C1 JBMO 2023)

On considère un échiquier 2025×2025 , dans lequel chaque case est coloriée soit en rouge ou en bleu. On suppose qu'il y a exactement 1013 lignes qui contiennent une majorité de cases rouges, et exactement 1013 colonnes qui contiennent une majorité de cases bleues.

Quelle est la taille du plus grand carré monochrome possible ?

Exercice 5 (Suisse 2015)

On considère un échiquier 8×8 , dans lequel chaque case est coloriée en blanc. Autant de fois qu'on le souhaite, on peut inverser les couleurs d'un rectangle 1×3 ou 3×1 .

Est-il possible de rendre l'échiquier intégralement noir ?

Exercice 6

Oscar et Paul jouent à un jeu sur un échiquier 5202×5202 . Chacun son tour, en commençant par Oscar, Oscar met un X dans une case vide, et puis Paul met un O dans une case vide. Oscar gagne s'il réussit à remplir un carré 2×2 de X, et sinon c'est Paul qui gagne.

Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 7

Soit $n \geq 1$. On considère une ligne constituée de n cases coloriées chacune en blanc ou en noir. Autant de fois qu'on le souhaite, on peut choisir une case blanche, la colorier en vert, et modifier la couleur de ses deux cases voisines (une case blanche devient noire, une case noire devient blanche et une verte reste verte).

Parmi les 2^n lignes possibles, combien y en a-t-il pour lesquelles il est possible de rendre la ligne entièrement verte ?

Exercice 8 (C2 JBMO 2023)

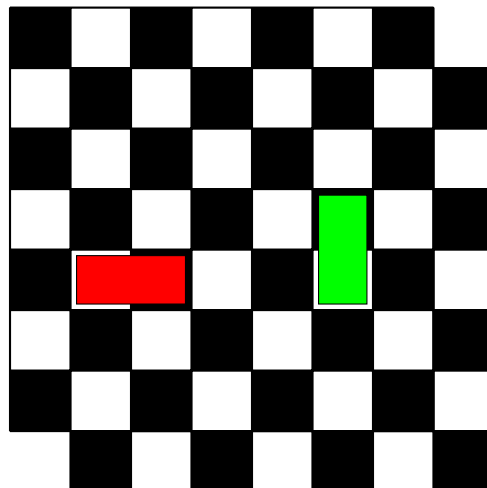
Soit $n \geq 2$. On considère un échiquier $n \times n$, sur lequel on place n obstacles, de sorte qu'il y ait exactement un par ligne et par colonne.

Quel est le nombre maximal de tours qu'il est possible sur les cases libres de l'échiquier de sorte que deux tours ne s'attaquent jamais (c'est-à-dire que si deux tours sont sur une même ligne ou une même colonne, alors il y a nécessairement un obstacle entre elles).

Exercice 9 (C1 2023)

Soit $m, n \geq 2$. On considère un échiquier $m \times n$ dans lequel Morgane place sur chaque case une pièce en position pile. Autant de fois qu'elle le souhaite, Morgane peut choisir un carré 2×2 , retourner la pièce dans le coin haut-gauche et bas-droite, et puis retourner la pièce dans le coin bas-gauche ou (exclusif) dans le coin haut-droit.

Morgane peut-elle mettre toutes les pièces sur face ?

Solutions**Solution de l'exercice 1**

On utilise le pavage de l'échiquier. On remarque que chaque domino recouvre exactement un case blanche et une case noire, quel que soit son orientation. Or, sur le échiquier, il y a 32 cases noires, et 30 cases blanches. Il serait donc impossible de le recouvrir avec $62/2 = 31$ dominos.

Solution de l'exercice 2

Il y a un nombre pair de cases noires au départ : il y a 1012 lignes avec 1013 cases noires, et 1013 lignes avec 1012 cases noires.

Or, quand on inverse les couleurs de deux cases, on ne change pas la parité du nombre de cases noires : s'il y a 2 cases blanches, on rajoute 2 cases noires, s'il y a 1 case noire et 1 blanche, on ne change pas le nombre de cases de chaque couleur, et s'il y a 2 cases noires, on enlève 2 cases noires.

Donc, on ne peut pas obtenir une grille entièrement noire, parce qu'il y a un nombre impair de cases dans la grille.

Solution de l'exercice 3

Oscar souhaite garantir que $c_i = l_i$ pour tout $1 \leq i \leq 2025$. Pour cela, lorsque Rémi joue sur la case (i, j) , Oscar joue sur la case (j, i) .

Au cours de ces deux tours, l_i et c_j ont augmenté de 1 du fait de l'action d'Oscar, et l_j et c_i ont augmenté du fait de l'action de Rémi. Donc, on conserve $l_j = c_j$ et $l_i = c_i$.

A la fin, $c_i = l_i$ pour tout $1 \leq i \leq 2025$ et donc Oscar remporte la partie.

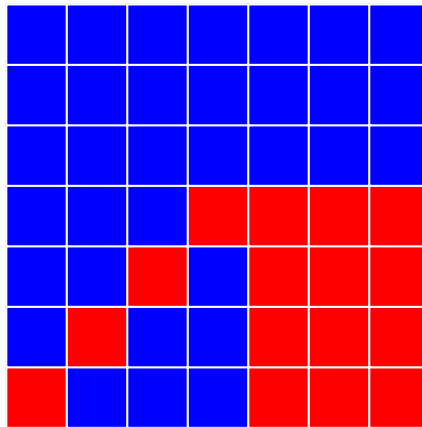
Oscar possède donc une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 4

Montrons que la solution est 1012 :

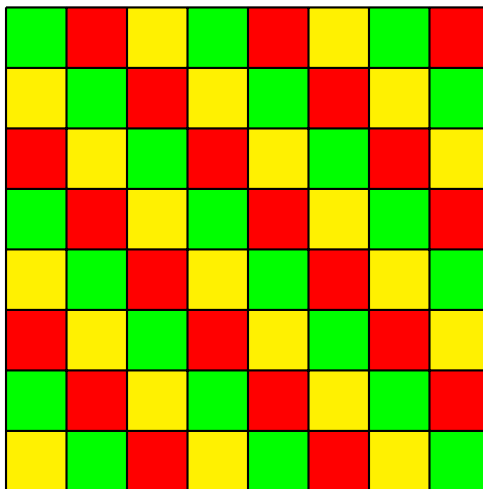
D'une part, on ne peut trouver de carré de taille 1013, en effet, cela signifierait qu'il y a ou bien 1013 lignes avec 1013 cases bleues, absurde, ou bien 1013 colonnes avec 1013 cases rouges, ce qui serait également absurde.

D'autre part, on peut trouver une configuration qui donne un carré monochromatique de taille 1012 (en prenant l'exemple d'une grille 7×7) :



Solution de l'exercice 5

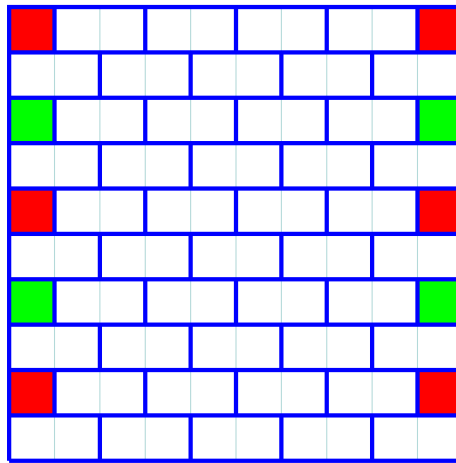
On pave la grille de cette manière :



On remarque qu'il y a 22 cases vertes, mais seulement 21 cases rouges et 21 cases jaunes. De plus, quel que soit la position du rectangle, il recouvre exactement une case de chaque couleur. Pour changer chaque case de couleur, il faut qu'elle soit recouverte un nombre impair de fois. Donc, pour les cases rouges, il faut $21 + 2k \equiv 1 \pmod{2}$ recouvrements, et pour les vertes, il en faudrait $22 + 2k \equiv 0 \pmod{2}$, c'est absurde.

Solution de l'exercice 6

On pave la grille de cette manière (en prenant comme exemple un grille 10×10) :



On remarque qu'en plaçant un carré 2×2 , il y a forcément exactement un domino entier qui est recouvert par le carré. On en déduit la stratégie suivante pour Paul :

- Si Oscar joue sur une case non colorée, Paul joue sur la case qui appartient au même domino.
- Si Oscar joue sur une case colorée, Paul joue sur la case colorée de la même ligne.

Ainsi, Oscar ne peut remplir un domino, et donc ne peut remplir un carré 2×2 .

Solution de l'exercice 7

On remarque que lorsque qu'une case devient verte, comme sa couleur ne peut plus changer, elle n'influe plus sur les autres cases. Ainsi, après avoir colorié une case en vert, on se ramène au cas de deux plus petites lignes indépendantes entre elles.

Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$ qu'il est possible de rendre la ligne entièrement verte si et seulement elle contient initialement un nombre impair de cases blanches :

- Initialisation : pour $n = 1$, si la case est blanche on peut la colorier en verte, et si elle est noire, on ne peut rien faire.
- Hérédité : pour $n \geq 2$, supposons la propriété vraie aux rangs $< n$, et montrons-la au rang n .

On considère une ligne de n cases.

- Si la ligne contient un nombre impair de cases blanches. On considère la première case blanche en partant de la gauche.

A sa gauche, soit il n'y a aucune case auquel cas c'est bon, soit il y a que des cases noires et après la modification, il y aura exactement une case blanche et donc par hypothèse de récurrence ça sera bon.

A sa droite, il y a donc initialement un nombre pair de cases blanches. S'il y a simplement aucune case, c'est bon. Sinon, comme on modifie la couleur d'exactlyement une case, on modifie la parité du nombre de cases blanches et ainsi on se retrouve avec un nombre impair de cases blanches : ça sera aussi bon par hypothèse de récurrence.

Donc, dans ce cas, on pourra effectivement rendre la ligne intégralement verte.

- Si la ligne contient un nombre pair de cases blanches.
Supposons par l'absurde que l'on peut obtenir une ligne intégralement verte. On considère la première case blanche que l'on modifie. Comme au total il y avait un nombre pair de cases blanches, elle-même comprise, il y a un nombre impair de cases blanches à sa gauche ou à sa droite. Mais alors, après la modification, il y a un nombre pair de cases blanches de ce côté : par hypothèse de récurrence, il est impossible de colorer toutes ces cases en vert : c'est absurde.
Donc, il est impossible de rendre toutes les cases vertes.

Donc, on peut rendre la ligne intégralement verte si et seulement si elle contient initialement un nombre impair de cases blanches.

On se ramène donc à compter le nombre de lignes de n cases avec un nombre impair de cases blanches. Pour cela, on peut d'abord fixer les $n - 1$ premières cases (il y a 2 choix à chaque fois), et enfin on a exactement un choix pour la dernière case afin que la ligne contienne un nombre impair de cases blanches.

Il y a donc exactement 2^{n-1} lignes avec un nombre impair de cases blanches.

Finalement, il y a 2^{n-1} lignes pour lesquelles il est possible de colorier la ligne intégralement en vert.

Solution de l'exercice 8

Tout d'abord, on remarque que l'on peut placer au plus 2 tours par colonne : une au-dessus de l'obstacle et l'autre en-dessous. De plus, sur la colonne avec un obstacle sur la première ligne, on peut seulement mettre une tour. De même, sur la colonne avec un obstacle sur la dernière ligne, on peut seulement mettre une tour. Donc, au total, on peut mettre au plus $2n - 2$ tours.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 2$, pour toute disposition des obstacles sur une grille $n \times n$, on peut placer $2n - 2$ tours.

- Initialisation : pour $n = 2$, on peut placer $2n - 2 = 2$ tours sur les deux cases ne contenant pas d'obstacle.
- Hérédité : pour $n \geq 3$, supposons la propriété vraie au rang $n - 1$ et montrons-la au rang n .

On considère un placement des obstacles sur la grille $n \times n$. On s'intéresse à la grille que l'on obtient en supprimant la première ligne, et la colonne C contenant l'obstacle de la première ligne. C'est une grille $(n - 1) \times (n - 1)$ qui contient bien exactement une tour par ligne et par colonne. Donc, par hypothèse de récurrence, il est possible d'y placer $2(n - 1) - 2 = 2n - 4$ tours. Ainsi, on place de la même manière ces tours sur notre échiquier $n \times n$, et elles ne s'attaquent toujours pas.

On fait une disjonction de cas :

- Si C est tout à gauche ou tout à droite. Par symétrie, supposons qu'elle est tout à gauche. Alors, on peut rajouter une tour juste à gauche de l'obstacle de la deuxième colonne, et une autre juste au-dessus de l'obstacle de la deuxième ligne : ces tours ne s'attaquent pas entre elles et n'attaquent pas les autres tours.
- Si C n'est pas tout à gauche ou tout à droite. Par symétrie, on suppose que la colonne où se trouve l'obstacle de la deuxième se trouve à gauche de C . On place alors une tour juste au-dessus de cet obstacle.
On s'intéresse à présent à l'obstacle se trouvant dans la colonne juste à droite de C .

- S'il n'y a pas de tours au-dessus de cet obstacle alors on peut placer une tour juste à droite de l'obstacle de la première ligne, et ainsi elle n'en attaquera aucune autre.
- Sinon, on retire cette tour, on en met une juste à sa gauche (donc sur la colonne C) et une juste à droite de l'obstacle de la première ligne. Toutes les tours ainsi placées ne s'attaquent pas et n'attaquent pas d'autres tours.

Dans tous les cas, on réussit à placer $2n - 4 + 2 = 2n - 2$ tours.

Finalement, le nombre maximal de tours qu'il est possible de placer sur un tel échiquier $n \times n$ est $2n - 2$, peut importe le placement des différents obstacles.

Solution de l'exercice 9

Ci-dessous, on numérote les lignes de bas en haut entre 1 et m , les colonnes de gauche à droite entre 1 et n , et on identifie chaque pièce située en ligne ℓ et colonne c au couple (ℓ, c) .

On commence par identifier certaines tailles de grilles pour lesquelles Morgane peut arriver à ses fins :

- Si $(m, n) = (2, 3)$, Morgane retourne les pièces
 - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la 1^{ère} minute;
 - $(1, 3)$, $(2, 3)$ et $(2, 2)$ lors de la 2^{ème} minute.
- Si $(m, n) = (3, 2)$, Morgane retourne les pièces
 - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la 1^{ère} minute;
 - $(2, 2)$, $(3, 2)$ et $(3, 1)$ lors de la 2^{ème} minute.
- Si $(m, n) = (3, 3)$, Morgane retourne les pièces
 - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la 1^{ère} minute;
 - $(1, 3)$, $(2, 3)$ et $(2, 2)$ lors de la 2^{ème} minute;
 - $(2, 2)$, $(3, 2)$ et $(3, 1)$ lors de la 3^{ème} minute;
 - $(2, 3)$, $(2, 2)$ et $(3, 2)$ lors de la 4^{ème} minute;
 - $(2, 3)$, $(3, 3)$ et $(3, 2)$ lors de la 5^{ème} minute.

Plus généralement, si la grille $m \times n$ avec laquelle travaille Morgane peut être décomposée en rectangles 2×3 , 3×2 et 3×3 , Morgane s'en sortira en traitant ces rectangles un par un.

C'est, en particulier, le cas lorsque 3 divise m ou n :

- si 3 divise m et n est pair, on peut décomposer la grille en rectangle 3×2 ;
- si 3 divise m et n est impair, on peut décomposer la grille en $m/3$ rectangles 3×3 , tous alignés à gauche, puis des rectangles 3×2 ;
- la situation est analogue lorsque 3 divise n .

Enfin, si 3 ne divise ni m ni n , soit $m = 3q + r$ et $n = 3q' + r'$ les divisions euclidiennes de m et n par 3.

On colorie alors les pièces (c, ℓ) en

- rouge si $c + \ell \equiv 0 \pmod{3}$; il y a R cases rouges.
- vert si $c + \ell \equiv 1 \pmod{3}$; il y a V cases rouges.
- bleu si $c + \ell \equiv 2 \pmod{3}$; il y a B cases rouges.

Or, chaque minute, Morgane retourne une case de chaque couleur. Par conséquent, la parité du nombre de cases qui montrent leur côté **FACE** est la même pour chaque couleur. Si toutes les pièces sont retournées simultanément, c'est donc que R, V et B sont de même parité.

Cependant, lorsque $q = q' = 0$, on constate que R, V et B ne sont pas tous trois de même parité. Dans le cas général, on vient juste de gagner $qn + q'r$ pièces de chaque couleur, donc R, V et B ne sont toujours pas tous trois de même parité.

En conclusion, les couples recherchés sont ceux pour lesquels 3 divise m ou n .

7 Combinatoire : TD de pot pourri (Emilhan)

Quelques exercices de ce TD proviennent du cours "Invariants/coloriages" donné par Lilas et Paul au groupe A.

Principe des tiroirs

Exercice 1

Soit $a, m \geq 1$. Montrer que la suite $1, a, a^2, a^3, \dots$ est périodique à partir d'un certain rang modulo m .

Exercice 2

Déterminer le plus petit entier naturel $k \geq 1$ tel que si l'on choisit k nombres entre 2 et 50, il y en a forcément deux qui ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 3

On définit la suite de Fibonacci par récurrence par $F_0 = F_1 = 1$, puis pour tout $n \geq 0$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Montrer qu'il existe un indice $n \geq 0$ tel que F_n se termine par 2025 zéros.

Exercice 4

On place 200 bonbons dans 100 boîtes de sorte que chaque boîte contienne au moins un bonbon et au plus 99 bonbons. Montrer qu'il existe un sous-ensemble des boîtes dont l'union contient exactement 100 bonbons.

Théorie des jeux

Exercice 5

Alice et Bob jouent au jeu suivant. Alice commence par choisir un entier entre 1 et 11. Ensuite, Bob ajoute n'importe quel entier entre 1 et 11, et le jeu continue ainsi à tour de rôle. Le premier joueur à atteindre 56 gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 6

Alice et Bob jouent à tour de rôle au jeu suivant. Le nombre 2 est écrit au tableau. Si l'entier n est écrit au tableau, le joueur dont c'est le tour l'efface et écrit un entier de la forme $n + p$, où p est un diviseur premier de n . Le premier joueur qui écrit un nombre plus grand que 2023^{2023} perd. Si Alice commence, déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante.

Exercice 7

Étant donnés $n \geq 2$ points sur un cercle, Alice et Bob jouent au jeu suivant. Initialement, un pion est placé sur l'un de ces points et aucun segment n'est tracé. Les joueurs jouent chacun à leur tour, en commençant par Alice. Chaque joueur, lorsque c'est à son tour de jouer, déplace le pion du point sur lequel il se trouve, disons P , vers un des $n - 1$ autres points, disons Q , puis trace le segment $[PQ]$. Ce déplacement n'est toutefois autorisé que si le segment $[PQ]$ n'avait pas déjà été tracé auparavant. Le premier joueur qui ne peut plus déplacer le pion perd la partie, et son adversaire gagne.

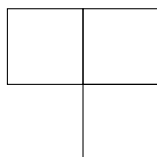
Déterminer, pour chaque n , lequel des deux joueurs peut s'assurer de gagner quels que soient les choix de son adversaire.

Exercice 8

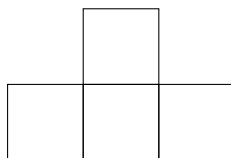
Alice et Bob jouent au jeu suivant. Les diviseurs positifs d'un entier $N > 0$ sont inscrits au tableau. Alice commence par effacer N . Ensuite, lorsqu'un joueur a effacé un nombre, le suivant efface un multiple ou un diviseur de ce nombre. Le premier joueur qui ne peut plus jouer perd. Déterminer, en fonction de N , quel joueur possède une stratégie gagnante.

Grilles/pavages**Exercice 9**

Montrer, à l'aide d'un coloriage, qu'il est impossible de paver une grille de taille 3×3 avec des pièces de la forme (les rotations de la pièce sont autorisées) :

**Exercice 10**

Pour quels $n > 1$ peut-on paver une grille carrée de taille $n \times n$ avec des pièces de la forme :

**Exercice 11**

Soit n et k deux entiers strictement positifs. On considère une grille de taille $n \times n$. On souhaite la recouvrir entièrement de dominos de taille $k \times 1$ ou $1 \times k$ sans qu'ils se chevauchent. Déterminer quand cela est possible.

Invariants/monovariants**Exercice 12**

On divise un cercle en six secteurs. On écrit la suite $1, 0, 1, 0, 0, 0$, un nombre dans chaque secteur dans l'ordre des aiguilles d'une montre. A une étape, on peut augmenter de 1 la valeur dans deux secteurs adjacents. Est-il possible de se retrouver avec le même nombre dans chaque secteur au bout d'un nombre fini d'étapes ?

Exercice 13

Soit $n \geq 1$. Les nombres $a_1, a_2, \dots, a_n$ valent 1 ou -1 . On pose $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ et $a_{n+3} = a_3$. Sachant que $S = a_1 a_2 a_3 a_4 + a_2 a_3 a_4 a_5 + \dots + a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}$ vaut 0, montrer que n est divisible par 4.

Exercice 14

Sur une île vivent des caméléons : 23 rouges, 12 verts et 9 bleus. Quand deux caméléons d'une

même couleur se rencontrent, ils se font peur et prennent chacun une des deux autres couleurs mais pas la même. Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils se font peur et prennent tout deux la troisième couleur. Après un an, tous les caméléons sont de la même couleur. Cette couleur peut-elle être le bleu ?

Dénombrement

Exercice 15

Dénombrer les couples (X, Y) de sous-ensembles de $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que $X \cap Y$ soit un singleton.

Exercice 16

Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 17

Combien y a-t-il de parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ ne contenant aucuns entiers consécutifs ?

Exercice 18

Montrer que pour tout entier positif n , on a l'égalité :

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv n[2]}}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{(n-k)/2} = \binom{2n}{n}.$$

Solutions**Solution de l'exercice 1**

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles modulo m (nos tiroirs), et que la suite contient un nombre infini d'éléments (nos chaussettes), le principe des tiroirs infinis nous dit qu'il existe une classe modulo m contenant une infinité de termes de la suite. En particulier, il existe $N \geq 0$ et $T \geq 1$ tels que

$$a^N \equiv a^{N+T} \pmod{m}.$$

Le point clef est maintenant de remarquer qu'un terme de la suite des restes modulo m des puissances de a ne dépend que du terme précédent, puisque $a^{k+1} \equiv a^k \cdot a \pmod{m}$. Ainsi, nous pouvons montrer par récurrence que pour tout $n \geq N$,

$$a^{n+T} \equiv a^n \pmod{m}.$$

Par définition, l'initialisation pour $n = N$ est vérifiée. Supposons maintenant disposer d'un certain $n \geq N$ tel que $a^{n+T} \equiv a^n \pmod{m}$. On a alors

$$a^{n+1+T} \equiv a \cdot a^{n+T} \equiv a \cdot a^n \equiv a^{n+1} \pmod{m},$$

ce qui conclut la récurrence. La suite est donc périodique de période T à partir d'un certain rang modulo m .

Solution de l'exercice 2

Montrons que la réponse est $k = 16$.

On remarque qu'il y a 15 nombres premiers ≤ 50 . Puisque les nombres premiers sont tous premiers entre eux deux-à-deux, on trouve que k doit être ≥ 16 .

Prenons maintenant 16 nombres quelconques entre 2 et 50. Les 15 nombres premiers ≤ 50 seront nos tiroirs. À chacun de nos 16 nombres (les chaussettes), on peut leur associer leur plus petit facteur premier (qui existe car ils sont ≥ 2). Par principe des tiroirs, deux nombres auront le même plus petit facteur premier, et ne seront donc pas premiers entre eux. Ainsi, $k \leq 16$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

Soit $m \geq 1$ un naturel quelconque. Nous allons montrer qu'il existe un indice $n \geq 0$ tel que F_n soit divisible par m . Il suffira alors d'appliquer ce résultat à $m = 10^{2025}$. Appliquons le principe des tiroirs infinis aux couples $(F_0, F_1), (F_2, F_3), \dots, (F_{2k}, F_{2k+1}), \dots$

Ceux-ci ne peuvent prendre qu'un nombre fini de couples de restes modulo m . On sait qu'il y a donc un couple de restes modulo m apparaissant une infinité de fois parmi nos chaussettes. En particulier, on dispose de $N_1 < N_2$ tels que $F_{2N_1} \equiv F_{2N_2} \pmod{m}$ et $F_{2N_1+1} \equiv F_{2N_2+1} \pmod{m}$. Posons $T = 2N_2 - 2N_1$. Puisque les termes de la suite de Fibonacci ne dépendent que des deux précédents, on montre alors par récurrence double que pour tout $n \geq 2N_1$,

$$F_n \equiv F_{n+T} \pmod{m}.$$

L'initialisation est vérifiée pour $n = 2N_1$ et $n = 2N_2$. Supposons disposer d'un $n \geq 2N_1$ tel que $F_n \equiv F_{n+T} \pmod{m}$ et $F_{n+1} \equiv F_{n+1+T} \pmod{m}$. On calcule alors :

$$F_{n+2+T} = F_{n+1+T} + F_{n+T} \equiv F_{n+1} + F_n = F_{n+2} \pmod{m},$$

donc $F_{n+1} \equiv F_{n+1+T} \pmod{m}$ et $F_{n+2} \equiv F_{n+2+T} \pmod{m}$.

On a donc montré que la suite de Fibonacci était T -périodique à partir d'un certain rang modulo m . Il nous reste enfin à remarquer que pour tout $n \geq 0$, $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$. Il est donc possible d'appliquer exactement le même argument en faisant décroître les indices pour montrer que toute la suite est T -périodique modulo m . Pour conclure, il faut enfin remarquer qu'il est possible de rajouter le terme $F_{-1} = 0$ à notre suite en gardant les mêmes formules de récurrence, ce qui montre que :

$$0 = F_{-1} \equiv F_{T-1} \pmod{m},$$

donc F_{T-1} convient.

Solution de l'exercice 4

On considère une numérotation arbitraire de nos boîtes, de 1 à 100. Soit, pour tout $1 \leq i \leq 100$, B_i le nombre de bonbons contenus dans l'union des boîtes de numéros compris entre 1 et i . On sait que $B_{100} = 200$, et que pour tout $1 \leq i \leq 99$, $1 \leq B_i < 200$. Si l'on dispose de deux indices $i < j$ tels que $B_i \equiv B_j \pmod{100}$, alors $B_j = B_i + 100$, donc l'ensemble des boîtes ayant un numéro entre $i + 1$ et j contient exactement 100 bonbons et on a terminé. Supposons donc que les B_i prennent tous des valeurs différentes modulo 100 (et ce, pour toute numérotation). Puisqu'ils sont au nombre de 100, le principe des tiroirs nous dit que les B_i prennent toutes les valeurs modulo 100 exactement une fois, car sinon on disposerait de plus de boîtes que de restes possibles modulo 100.

Remarquons maintenant que ce raisonnement est valable quelle que soit la numérotation initiale. On considère deux boîtes P et Q et une numérotation telle que P a le numéro 1 et Q a le numéro 2. Remarquons que si l'on échange les numéros de P et Q , tous les B_i restent inchangés pour $i \geq 2$, tandis que B_1 désignera le nombre de bonbons des boîtes P et Q respectivement. Ainsi, les nombres de bonbons des boîtes P et Q ont le même reste modulo 100 et sont compris entre 1 et 99, ils sont donc égaux.

On a donc montré que toutes les boîtes ont le même nombre de bonbons, donc 2. Il suffit enfin de choisir 50 boîtes quelconques pour conclure.

Solution de l'exercice 5

Alice commence avec 8, puis à chaque fois que Bob ajoute x , Alice ajoute $12 - x$. Ainsi, après le deuxième coup d'Alice, 20 sera écrit, puis 32 après le troisième coup d'Alice, et ainsi de suite. Alice sera la première à écrire $56 = 8 + 4 \cdot 12$.

Solution de l'exercice 6

Alice gagne par vol de stratégie. Les premiers coups sont forcés : Alice écrit 4 et Bob écrit 6. Ensuite, Alice peut choisir entre 8 et 9. Dans le premier cas, Bob doit écrire 10 et Alice peut écrire 12. Dans le second, Bob doit écrire 12. A partir de la position 12, comme le jeu se termine forcément, soit le joueur dont c'est le tour, soit l'autre joueur, a une stratégie gagnante. Or, Alice peut choisir quel joueur écrit 12, et donc atteindre 12 de manière à ce que soit son tour ou à l'autre joueur de jouer. Si Bob possède une stratégie gagnante lorsque c'est à lui de jouer quand 12 est écrit, il suffit donc à Alice de faire en sorte que c'est elle qui jouera après que 12 soit écrit et de voler la stratégie de Bob.

Solution de l'exercice 7

Montrons qu'Alice possède toujours une stratégie gagnante. Après avoir effectué son premier coup, qui consiste à tracer le segment $[AB]$, avec A et B deux points sur le cercle, elle possède une stratégie miroir. En effet, si Bob joue BQ , elle peut jouer QA , et si Bob joue ensuite AR ,

elle joue RB . Plus généralement, elle peut jouer de sorte que le pion se situe toujours sur A ou sur B après son tour, et pour n'importe quel sommet qui n'a pas encore été exploré, il est soit relié à A et B , soit à aucun des deux. Bob est donc le premier qui sera à court de coups légaux.

Solution de l'exercice 8

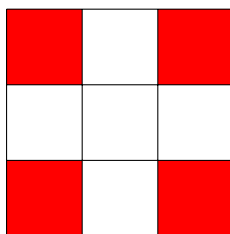
Montrons que Alice gagne ssi N est un carré parfait. Dans tous les cas, l'idée est de faire des paires (a, b) de diviseurs de N qui vérifient $a \mid b$ (on les appellera dans la suite des paires *gentilles*) afin de permettre des stratégies miroirs.

★ Si N n'est pas un carré parfait, on dispose d'un diviseur premier p de N tel que la valuation p -adique de N soit impaire. Notons $v_p(N) = 2k + 1$ et $N = p^{2k+1} \cdot n$, avec $(n, p) = 1$. Pour tout diviseur d de n , on crée les paires gentilles $(d \cdot p^{2j}, d \cdot p^{2j+1})$ pour $0 \leq j \leq k$. On a alors partitionné les diviseurs de N en paires gentilles, et Bob gagne en utilisant une stratégie miroir : lorsque Alice efface un élément d'une paire, Bob efface l'autre.

★ Si N est un carré parfait, on montre par récurrence sur le nombre de facteurs premiers que les diviseurs stricts de N (donc ceux qui sont $< N$) peuvent être partitionnés en paires gentilles. C'est le cas pour $N = 1$. Puis si $N = p^{2k} \cdot n$, avec $k > 0$ et $(n, p) = 1$, on dispose par hypothèse de récurrence d'une partition gentille des diviseurs stricts de n . On en déduit alors une partition gentille des diviseurs stricts de N dont la valuation p -adique vaut $2k$ en multipliant chaque élément par p^{2k} . Ensuite, on partitionne les diviseurs de N dont la valuation p -adique est $\leq 2k - 1$ comme dans le premier cas. Cette fois-ci, Alice gagne car elle applique sa stratégie miroir après avoir effacé N .

Solution de l'exercice 9

On considère le coloriage ci-dessous, où chaque coin est colorié en rouge.



Puisqu'une pièce ne peut pas recouvrir deux cases rouges, il faudrait au moins 4 pièces pour recouvrir la grille. Il faudrait donc que la grille possède au moins $12 > 9$ cases, ce qui n'est pas le cas.

Solution de l'exercice 10

Montrons que les solutions sont exactement les multiples de 4. Dans un premier temps, remarquons que $n = 4$ est une solution comme illustré ci-dessous. Si $n = 4k$ est un multiple de 4, il suffit de paver les k^2 carrés 4×4 .

Soit n une solution. Puisque chaque pièce recouvre un nombre pair de cases, n est pair car il y a n^2 cases dans la grille. En outre, si on pave notre grille comme un échiquier, on remarque qu'une pièce recouvre exactement 1 case noire et 3 cases blanches ou l'inverse. Puisque n est pair, il y a autant de cases blanches et noires dans la grille, et il doit donc y avoir le même nombre de pièces recouvrant une seule case blanche que de pièces recouvrant une seule case noire.

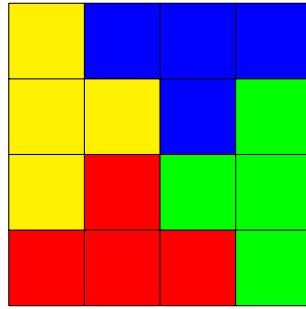
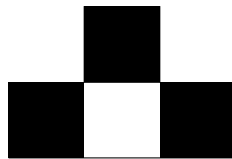
FIGURE 1 – Un pavage pour $n = 4$ 

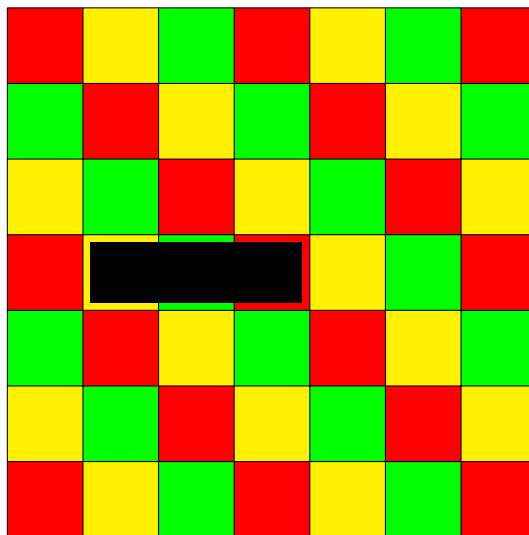
FIGURE 2 – Une pièce recouvrant 3 cases noires

Il y a donc un nombre pair de pièces, recouvrant chacune 4 cases, donc $8 \mid n^2$, ce qui montre que $4 \mid n$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 11

Tout d'abord, on remarque que c'est vrai si k divise n . En effet, dans ce cas, on peut paver la grille avec des dominos tous horizontaux, en remplissant séparément chaque ligne.

Montrons maintenant que cette condition est nécessaire. On colorie la grille diagonalement, avec k couleurs.

FIGURE 3 – Le coloriage avec $k = 3, n = 7$

On remarque alors que chaque domino couvre exactement une case de chaque couleur.

Par conséquent, pour pouvoir recouvrir toute la grille, il est nécessaire qu'il y ait autant de cases de chaque couleur. Il s'agit maintenant de montrer que cela n'est le cas que lorsque k divise n . Pour cela, écrivons $n = q \cdot k + r$ avec $0 \leq r < k - 1$ la division euclidienne de n par k . On commence par remarquer qu'on peut paver le complémentaire du carré $r \times r$ en bas à gauche. Pour cela, on pave le rectangle $qk \times n$ situé au-dessus, en ne mettant que des dominos verticaux. Ensuite, on remplit le rectangle $r \times qk$ situé en bas à droite, cette fois-ci avec des dominos horizontaux. Mais, puisque chaque domino recouvre autant de cases de chaque couleur, il y a autant de cases de chaque couleur dans le carré $n \times n$ si et seulement si il y en a autant dans le carré $r \times r$! Et, dans celui-ci, si $r > 0$, il y a une couleur qui apparaît r fois (celle qui est sur la diagonale) et une qui apparaît $r - 1$ fois (celle qui est sur la surdiagonale, qui ne réapparaît pas ailleurs car $r < k$). On a donc bien le résultat désiré.

Solution de l'exercice 12

On remarque que la somme alternée S des nombres écrits sur chaque secteur est un invariant du problème. Or, S vaut initialement 2, et il est donc impossible que tous les secteurs contiennent le même nombre car dans ce cas, S vaudrait 0.

Solution de l'exercice 13

Lorsque l'on change l'un des a_i de signe, on change le signe de la somme T de 4 termes consécutifs valant ± 1 . Or, T est pair (comme somme de 4 nombres impairs), donc S , qui change de $2T$, reste invariante modulo 4. Or, lorsque tous les a_i valent 1, on a $S = n$. Cela montre que $S \equiv 0 \pmod{4}$.

Solution n°2 de l'exercice 13

On sait par hypothèse que S est la somme de n termes valant ± 1 , et que le résultat est pair, donc n est pair. Notons $n = 2k$, avec $k \geq 1$. En outre, puisque $S = 0$, il y a autant de termes valant 1 que -1 dans la somme, c'est-à-dire qu'il y en a k de chaque. On calcule alors le produit suivant de deux manières différentes :

$$\prod_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} = 1^k \cdot (-1)^k = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^2,$$

donc k est pair. Cela montre bien que $n = 2k$ est divisible par 4.

Solution de l'exercice 14

Montrons qu'il n'est pas possible que tous les caméléons deviennent bleus. On note R , V et B les nombres respectifs de caméléons de couleurs rouge, vert ou bleu. On dispose alors de deux invariants. Le premier est $V + R + B = 44$. Le second est le reste modulo 3 de $X = B - V$. En effet, lorsque deux caméléons bleus se rencontrent, B diminue de 2 et V augmente de 1, donc $B - V$ diminue de 3. Lorsque deux caméléons verts se rencontrent, V diminue de 2 et B augmente de 1, donc $B - V$ augmente de 3. Lorsque deux caméléons rouges se rencontrent, B et V augmentent de 1 tous les deux, donc $B - V$ ne change pas. Les autres interactions possibles ont le même effet sur X à signe près.

Or, X est initialement divisible par 3, mais il y a 44 caméléons, donc ils ne peuvent pas tous devenir bleus.

Solution de l'exercice 15

Montrons qu'il y en a $n \cdot 3^{n-1}$. Il y a en effet n choix pour le nombre qui apparaît dans les deux sous-ensembles, et il reste ensuite à compter le nombre de couples de sous-ensembles disjoints d'un ensemble à $n - 1$ éléments. Puisque chacun des éléments restants peut apparaître soit dans X , soit dans Y , soit dans aucun des deux, on obtient la formule voulue.

Solution de l'exercice 16

Les deux membres comptent le nombre de façons de choisir n éléments parmi un ensemble E contenant $2n$ éléments. En effet, séparons les $2n$ éléments de E en deux parties disjointes A et B à n éléments. Choisir une partie de E à n éléments revient à choisir une partie à k éléments de A et une partie de $n - k$ éléments de B , pour un certain k entre 0 et n . La formule s'en déduit en remarquant que

$$\binom{n}{k}^2 = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n}{n-k}.$$

Solution de l'exercice 17

Notons, pour tout $n \geq 1$, x_n le nombre de parties de $\{1, 2, \dots, n\}$ ne contenant aucuns entiers consécutifs. On calcule les premières valeurs pour conjecturer la formule générale : $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$. On reconnaît les premières valeurs de la suite de Fibonacci (à décalage d'indice près). Montrons par récurrence forte sur $n \geq 0$ que $x_n = F_{n+1}$.

L'initialisation est vérifiée pour $n = 0, 1, 2$. Soit $n \geq 0$ tel que $x_k = F_{k+1}$ pour tout $k \leq n$. On exprime x_{n+3} en fonction des termes précédents. Si l'on choisit $n + 3$, il y a x_{n+1} parties possibles. Si l'on choisit $n + 2$, il y a x_n parties possibles. Et si l'on ne choisit ni $n + 2$, ni $n + 3$, il y a x_{n+1} parties possibles. Ainsi :

$$x_{n+3} = x_n + x_{n+1} + x_{n+1} = F_{n+1} + 2F_{n+2} = F_{n+3} + F_{n+2} = F_{n+4},$$

en utilisant la définition de la suite de Fibonacci. Cela conclut la récurrence.

Solution de l'exercice 18

L'idée est de calculer de deux façons différentes le nombre de façons de choisir n éléments parmi $2n$. Ce nombre est égal au membre de droite de notre égalité. Essayons maintenant de faire apparaître le membre de gauche. En observant ce membre, on voit un terme 2^k , qui correspond à k choix binaires, et un terme $\binom{n}{k}$, correspondant à un choix de k éléments. Comme $2 \cdot \frac{n-k}{2} + k = n$, on se dit que le deuxième coefficient binomial correspond à un choix de $\frac{n-k}{2}$ paires d'éléments. En mettant ces idées bout à bout, on arrive à la méthode de calcul suivante. Groupons nos $2n$ éléments en n paires. Choisissons k de ces paires ($\binom{n}{k}$ choix). Le nombre k correspond au nombre de paires contenant exactement un élément de notre ensemble à n éléments : dans chacune de ces k paires, choisissons un des deux éléments (2^k choix). Nous avons sélectionnés k éléments, il nous reste à en choisir $n - k$ pour aboutir à un ensemble à n éléments. Ces $n - k$ éléments correspondent aux $\frac{n-k}{2}$ paires qui apparaissent entièrement parmi les n nombres que l'on choisit. On voit que l'on construit ainsi une fois chaque ensemble à n éléments, et que la condition de parité sur k correspond simplement au fait que les $n - k$ éléments qu'il nous reste à choisir sont choisis par paires.

8 Géométrie : TD de Pot pourri (Mano)

En stand-by...

4 Entraînement de fin de parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices et les rapporteurs sont interdits.

Énoncés

Exercice 1

Soit ABC un triangle, et I le centre de son cercle inscrit. Soit N_A le pôle Nord de A , et S_A, S_B, S_C les pôles Sud de A, B, C respectivement. Quelle est la nature du quadrilatère $N_A S_B I S_C$?

Exercice 2

Alice et Bob jouent dans une grille $n \times n$. Ils écrivent tour à tour un entier entre 1 et n^2 inclus qui n'a pas encore été écrit dans la grille. Alice gagne si la somme des entiers dans une des lignes est divisible par n . Bob gagne sinon. En fonction de n , lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 3

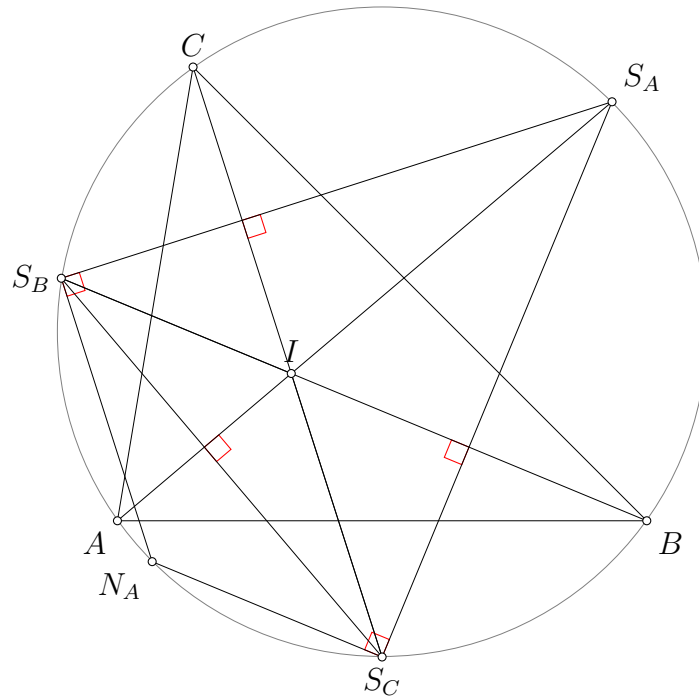
Soit ω et Ω deux cercles disjoints de centres respectifs O_1 et O_2 . On choisit t une tangente commune extérieure à ω et Ω qui les touche respectivement en T_1 et T_2 et M est le milieu de $[T_1 T_2]$. Le segment $[O_1 O_2]$ coupe ω et Ω en X et Y respectivement. On note Z l'intersection de $(T_1 X)$ avec $(T_2 Y)$. Montrer que la droite (ZM) est perpendiculaire à la droite $(O_1 O_2)$.

Exercice 4

On considère $n \geq 3$ points du plan qui ne sont pas tous alignés. On écrit un nombre réel sur chaque point, de sorte que si on prend une droite qui contient au moins deux des points, la somme des points sur cette droite est nulle. Montrer que tous les nombres sont nuls.

Solution de l'exercice 1

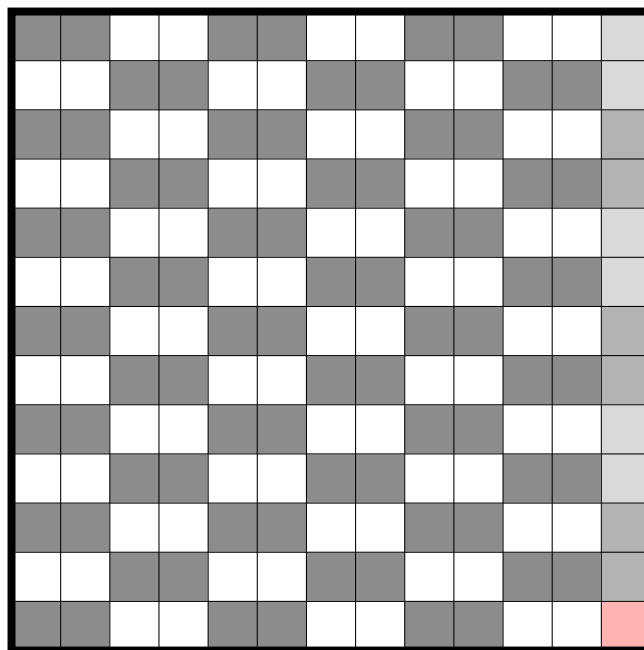
On combine deux configurations classiques d'un triangle. Tout d'abord, I est l'orthocentre du triangle $S_A S_B S_C$. Ensuite, on sait que si on est dans un triangle ABC d'orthocentre H et que A' est l'antipode de A , le quadrilatère $BHCA'$ est un parallélogramme. Dans le triangle $S_A S_B S_C$, S_B et S_C jouent les rôles de B et C , I joue le rôle de H et N_A joue le rôle de A' , ce qui conclut.



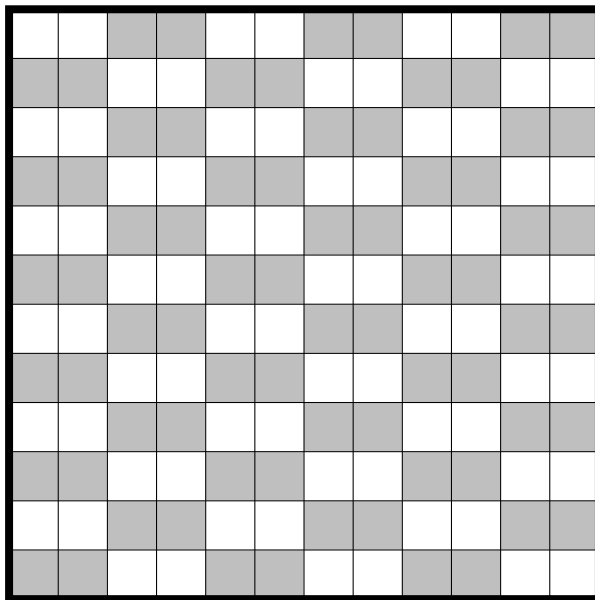
Solution de l'exercice 2

On montre que Bob gagne quand n est pair et qu'Alice gagne quand n est impair ; dans les deux cas on le montre à l'aide d'une stratégie miroir.

- Si n est impair, Alice pave le carré comme dans la figure ci dessous. Ensuite, elle commence par écrire le nombre n^2 dans la case vacante en bas à droite, et si Bob écrit le nombre a dans une case d'un domino, Alice écrit $n^2 - a$ dans l'autre case du domino. On n'a jamais $a = n^2 - a$ car n est impair, donc la stratégie miroir marche bien. À la fin, la ligne du bas est composée de $\frac{n-1}{2}$ dominos de somme n^2 et de la case en bas à droite qui vaut n^2 , la somme est donc bien divisible par n .



• Si n est pair, Bob pave le carré comme dans la figure ci-dessous. Ensuite, si Alice écrit le nombre a dans une case d'un domino, Bob écrit le nombre $n^2 + 1 - a$ dans l'autre case du domino. On n'a jamais $a = n^2 + 1 - a$ car n est pair, donc la stratégie miroir marche bien. À la fin, chaque ligne est composée de $\frac{n}{2}$ dominos sommant tous à $n^2 + 1$, de sorte que la somme totale est congrue à $\frac{n}{2}$ modulo n , et Bob gagne.



Solution de l'exercice 3

On va montrer que (ZM) est l'axe radical de ω et Ω .

Comme M est le milieu de $[T_1T_2]$, on a $MT_1 = MT_2$ donc $MT_1^2 = MT_2^2$ et M a la même puissance par rapport aux deux cercles. Donc M est sur l'axe radical.

On veut montrer que Z est sur l'axe radical, donc on veut prouver que $ZX \times ZT_1 = ZY \times ZT_2$. Cela revient à montrer que X, Y, T_1, T_2 sont cocycliques.

On peut le faire par chasse aux angles :

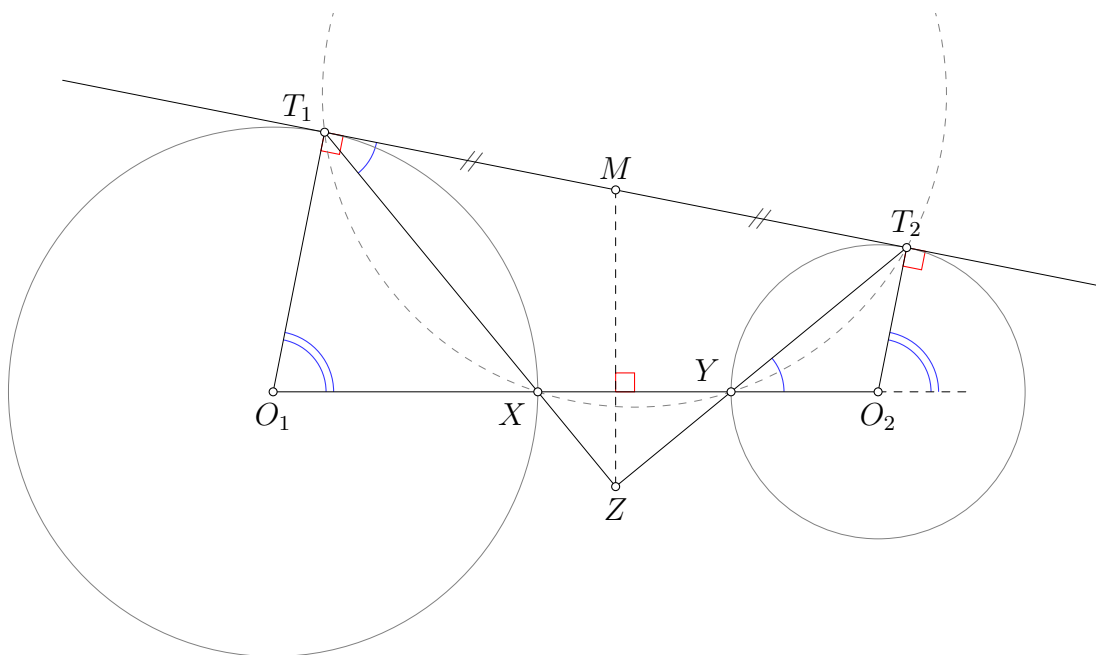
Posons $\widehat{T_2T_1X} = \alpha$. Par le théorème de l'angle inscrit-angle au centre avec la tangente (T_1T_2) , on a $2\alpha = \widehat{T_1O_1X} = \widehat{T_1O_1O_2}$.

Les droites (O_1T_1) et (O_2T_2) sont toutes les deux perpendiculaires à la tangente (T_1T_2) , donc sont parallèles. Par angle alterne-externe on en déduit $\widehat{T_2O_2O_1} = 180 - \widehat{T_1O_1O_2} = 180 - 2\alpha$.

Le triangle O_2YT_2 est isocèle en O_2 , donc $\widehat{O_2YT_2} = \widehat{O_2T_2Y}$ donc par somme des angles dans ce triangle $\widehat{O_2YT_2} = \frac{180 - \widehat{T_2O_2Y}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$.

Donc $\widehat{T_2YX} = 180 - \alpha = 180 - \widehat{T_2T_1X}$. Donc par la réciproque du théorème de l'angle inscrit, X, Y, T_1, T_2 sont cocycliques.

Par puissance de point, on en déduit $ZX \times ZT_1 = ZY \times ZT_2$ donc Z a la même puissance par rapport à ω et Ω . Comme Z et M sont tous les deux sur l'axe radical, (ZM) est l'axe radical des deux cercles et il est perpendiculaire à la droite passant par les deux centres, d'où $(ZM) \perp (O_1O_2)$.

**Solution de l'exercice 4**

Pour un point P , notons s_P la valeur portée par ce point.

Pour chaque point P , considérons l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites passant par P et au moins un autre des n points. Il y a au moins deux telles droites car tous les n points ne sont pas alignés. De plus, sur chaque droite de $\mathcal{D}$, la somme des nombres sur les points est nulle. En sommant, on a

$$0 = \sum_{(d) \in \mathcal{D}} \sum_{Q \in (d)} s_Q = S + (|\mathcal{D}| - 1)s_P$$

où S est la somme de des valeurs de tous les points. En effet, chaque point Q appartient à une et une seule droite de $\mathcal{D}$, sauf P qui appartient à toutes. Mais alors comme $|\mathcal{D}| - 1 > 0$, on remarque que si $S = 0$, alors tous les s_P sont nuls. Sinon, tous les s_P seraient de signe opposé à S , ce qui est absurde car S est la somme de tous les s_P . Ainsi, tous les s_P sont bien nuls.

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1	Première partie : Arithmétique et Combinatoire	298
1	Arithmétique : Problèmes de tailles (Aurélien et Camille)	298
2	Combinatoire : récurrence (Théo)	303
3	Combinatoire : invariants (Raphaël)	313
4	Arithmétique : ordre 2 (Melvil)	314
5	Arithmétique : TD de pot pourri (Akin et Emilhan)	325
6	Combinatoire : Double comptage (Gaëtan et Hadriel)	331
7	Combinatoire : TD pot pourri (Héloïse et Rémi)	340
8	Arithmétique : le Théorème des restes chinois (Hugo)	346
2	Entraînement de mi-parcours	357
3	Deuxième partie : Algèbre et Géométrie	360
1	Algèbre : Polynômes 1 (Paul)	360
2	Géométrie : Chasse aux rapports (Anatole)	371
3	Géométrie : Axe radical (Eva et Lilas)	392
4	Algèbre : Polynômes 2 (Gabriel)	398
5	Algèbre : Equations fonctionnelles 1 (Noé)	405
6	Géométrie : Similitudes (Maxime)	420
7	Géométrie : TD de pot pourri (Erik et Martin)	427
8	Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Noam et Paul LL)	442
4	Entraînement de fin de parcours	448

1 Première partie : Arithmétique et Combinatoire

1 Arithmétique : Problèmes de tailles (Aurélien et Camille)

Quelques idées :

- Il n'existe pas de carré parfait entre deux carrés d'entiers consécutifs.
- Si $a \mid b$ et $b \neq 0$, alors $a \leq b$.
- Comparer la croissance des différentes expressions.

Exercices

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p son plus petit diviseur premier. On suppose que $\sqrt[3]{n} < p < n$. Montrer que $\frac{n}{p}$ est un nombre premier.

Exercice 2

Trouver tous les entiers naturels n tels que $2^n = n^2 + 2n - 3$.

Exercice 3

Trouver tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a^2 = b^2 + 7b + 6$.

Exercice 4

Soient $(a, b, n) \in \mathbb{N}^3$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}, k \neq b, b - k \mid a - k^n$. Montrer que $a = b^n$.

Exercice 5 (APMO 2011, P1)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$. Montrer qu'il est impossible que $a^2 + b + c, b^2 + c + a$ et $c^2 + a + b$ soient tous des carrés parfaits.

Exercice 6

Trouver tous les entiers naturels n tels que $2^n + n \mid 8^n + n$.

Exercice 7

Trouver tous les entiers relatifs a tels que $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ est un carré parfait.

Exercice 8

Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2, a > b$. On suppose que $a - b \mid a^2 + b$. Montrer que $\frac{a+1}{b+1} \leq \text{pgcd}(a, b) + 1$.

Exercice 9 (OFM 2024)

Déterminer tous les entiers $n \geq 2$ pour lesquels il existe n entiers $a_1, \dots, a_n$ supérieurs ou égaux à 2 et tels que, pour tous $i \neq j, a_i \mid a_j^2 + 1$.

Exercice 10 (EGMO 2023 P5)

Soit $s \geq 2$ un entier. Pour tout entier k , on définit son twist k' de la façon suivante : si $k = as + b$ est la division euclidienne de k par s , alors $k' = bs + a$. Pour un entier strictement positif n , on définit (d_i) par $d_1 = n$ et d_{i+1} est le twist de d_i pour tout $i \geq 1$. Montrer que la suite contient 1 si et seulement si le reste de la division de n par $s^2 - 1$ est 1 ou s .

Exercice 11 (Shortlist IMO 2013 N1)

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que $m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$ pour tous entiers m, n strictement positifs.

Solutions

Solution de l'exercice 1

$n \neq p$ donc $n = p \cdot q \cdot k$ avec k un entier et q premier (on utilise la décomposition en produit de facteurs premiers), et on a donc $q \geq p$ car p est le plus petit diviseur premier de n . De plus on a soit $k = 1$, soit $k \geq p$, car p est le plus petit diviseur premier de n , donc le plus petit diviseur différent de 1. $\sqrt[3]{n} < p < n \iff pqk < p^3 < n$ Or si $k \neq 1$, $p \geq p$, $q \geq p$, $k \geq p$, donc $n = pqk \geq p^3$. On a donc une contradiction, donc $k = 1$. Donc $n = p \cdot q$, et $\frac{n}{p} = q$, avec q premier.

Solution de l'exercice 2

Intuition : 2^n grandit plus vite que le membre de droite, donc à partir d'un certain rang, l'égalité ne sera plus possible. On teste les premiers cas : $n = 0 : 1 > -3$ $n = 1 : 2 > 0$ $n = 2 : 4 < 5$ $n = 3 : 8 < 12$ $n = 4 : 16 < 21$ $n = 5 : 32 = 32$ $n = 6 : 64 > 45$ À partir de $n = 6$, le membre de gauche semble effectivement devenir trop grand. On veut donc montrer par récurrence que $2^n > n^2 + 2n - 3 \forall n \geq 6$ Initialisation : cas $n = 6$ déjà traité. Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$. On suppose que $2^n > n^2 + 2n - 3$

$$\begin{aligned} 2^n &> n^2 + 2n - 3 \\ \iff 2^{n+1} &> 2(n^2 + 2n - 3) \end{aligned}$$

On veut alors montrer que

$$\begin{aligned} 2(n^2 + 2n - 3) &\geq (n+1)^2 + 2(n+1) - 3 \\ \iff n^2 + 4n + n^2 - 6 &\geq n^2 + 4n \\ \iff n^2 - 6 &\geq 0 \end{aligned}$$

ce qui est effectivement vrai pour tout $n \geq 6$. La propriété est initialisée et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \geq 6$. Donc le seul n pour lequel cette égalité est vérifiée est $n = 5$.

Solution de l'exercice 3

On remarque que $(b+2)^2 = b^2 + 4b + 4 < a^2 = b^2 + 7b + 6 < (b+4)^2 = b^2 + 8b + 16$ Donc nécessairement $a^2 = (b+3)^2 \iff a = b+3$, car $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ On a donc $(b+3)^2 = b^2 + 6b + 9 = b^2 + 7b + 6 \iff b = 3$, et donc $a = 6$. On vérifie que $(6, 3)$ est effectivement une solution : $6^2 = 36 = 3^2 + 3 \cdot 7 + 6$.

Solution de l'exercice 4

$\forall k \neq b : a - k^n = a - b^n + b^n - k^n = a - b^n + (b - k) \sum_{i=0}^{n-1} b^{n-1-i} k^i$ Donc $b - k \mid a - b^n$. Or $a - b^n$ ne dépend pas de k est donc une infinité de diviseurs, donc est nécessairement nul. Donc $a = b^n$.

Solution de l'exercice 5

Supposons par l'absurde que ces trois expressions soient des carrés parfaits. Alors comme $a^2 + b + c > a^2$, on a donc $a^2 + b + c \geq (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1$, donc $b + c \geq 2a + 1$. De même, $c + a \geq 2b + 1$ et $a + b \geq 2c + 1$. En sommant ces trois inégalités, on obtient $0 \geq 3$, ce qui est absurde.

Solution n°2 de l'exercice 5

On suppose sans perte de généralité que $a \geq b \geq c$. Alors $a^2 < a^2 + b + c \leq a^2 + 2a < (a+1)^2$, donc $a^2 + b + c$ ne peut pas être un carré parfait.

Solution de l'exercice 6

On sait que $a \equiv b \pmod{a-b}$ Donc ici,

$$\begin{aligned} 2^n &\equiv -n \pmod{2^n+n} \\ \iff (2^n)^3 &\equiv (-n)^3 \pmod{2^n+n} \\ \iff 8^n &\equiv -n^3 \pmod{2^n+n} \end{aligned}$$

Donc $2^n + n \mid 8^n + n \iff 2^n + n \mid n - n^3$

On cherche désormais à tirer parti du fait que $2^n + n$ grandit plus vite que $n^3 - n$. En effet, on montre par récurrence que pour $n \geq 10$, $2^n + n > n^3 - n > 0$, ce qui rend absurde la divisibilité établie.

Initialisation : Si $n = 10$, on a bien $2^{10} + 10 = 1034 > 10^3 - 10 = 990$.

Hérédité : On suppose que $2^n + n > n^3 - n$ pour un $n \geq 10$ fixé et on montre que $2^{n+1} + n + 1 > (n+1)^3 - (n+1)$. En effet, on trouve que

$$2^{n+1} + (n+1) = 2(2^n + n) - n + 1 > 2n^3 - 3n + 1.$$

Il suffit donc de montrer que $2n^3 - 3n + 1 > (n+1)^3 - (n+1)$, ou encore que $n^3 > 3n^2 + 5n - 1$. Or, puisque $n \geq 10$,

$$n^3 \geq 10n^2 > 3n^2 + 5n^2 + 2 > 3n^2 + 5n - 1.$$

Ceci achève la récurrence.

On déduit que $n \leq 9$. Il reste à tester les différents cas :

- Si $n = 9$, $2^9 + 9 = 521$ et $9^3 - 9 = 720$, donc $2^n + n$ ne divise pas $n^3 - n$.
- Si $n = 8$, $2^8 + 8 = 264$ et $8^3 - 8 = 504$, donc $2^n + n$ ne divise pas $n^3 - n$.
- Si $n = 7$, $2^7 + 7 = 135$ et $7^3 - 7 = 336$, donc $2^n + n$ ne divise pas $n^3 - n$.
- Si $n = 6$, $2^6 + 6 = 70$ et $6^3 - 6 = 210$. Donc $2^n + n \mid n^3 - n$ et $2^n + n \mid 8^n + n$.
- Si $n = 5$, $2^5 + 5 = 37$ et $5^3 - 5 = 120$, donc $2^n + n$ ne divise pas $n^3 - n$.
- Si $n = 4$, $2^4 + 4 = 20$ et $4^3 - 4 = 60$. Donc $2^n + n \mid n^3 - n$ et $2^n + n \mid 8^n + n$.
- Si $n = 3$, $2^3 + 3 = 11$ et $3^3 - 3 = 24$, donc $2^n + n$ ne divise pas $n^3 - n$.
- Si $n = 2$, $2^2 + 2 = 6$ et $2^3 - 2 = 6$. Donc $2^n + n \mid n^3 - n$ et $2^n + n \mid 8^n + n$.
- Si $n = 1$, $2^1 + 1 = 3$ et $1^3 - 1 = 0$. Donc $2^n + n \mid n^3 - n$ et $2^n + n \mid 8^n + n$.

En conclusion, les seules solutions sont 1, 2, 4 et 6.

Solution de l'exercice 7

On suppose que a est solution : $a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$ est un carré parfait. Alors $4(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$ est aussi un carré parfait. On va chercher à encadrer ce nouveau carré entre deux carrés parfait pour déterminer a . On considère alors $(2a^2 + a)^2 = 4a^4 + 4a^3 + a^2$:

$$\begin{aligned} 4(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) &> (2a^2 + a)^2 \\ \iff 3a^2 + 4a + 4 &> 0 \\ \iff 2a^2 + (a+2)^2 &> 0 \end{aligned}$$

Donc $4(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) > (2a^2 + a)^2$ quelque soit a entier relatif. D'autre part, on considère $(2a^2 + a + 1)^2 = 4a^4 + 4a^3 + 5a^2 + 2a + 1$

$$\begin{aligned} 4(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) &< (2a^2 + a + 1)^2 \\ \iff 4a^2 + 4a + 4 &< 5a^2 + 2a + 1 \\ \iff a^2 - 2a - 3 &> 0 \\ \iff (a - 3)(a + 1) &> 0 \end{aligned}$$

$\iff a > 3$ ou $a < -1$ Donc $4(a^4 + a^3 + a^2 + a + 1)$ est encadré strictement par deux carrés consécutifs (et ne peut donc pas être lui-même un carré) pour $a > 3$ ou $a < -1$. Il ne reste plus qu'à tester $a = -1, a = 0, a = 1, a = 2, a = 3$. On trouve alors que les seules solutions sont $a = -1, a = 0, a = 3$.

Solution de l'exercice 8

Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$. On pose $a = dx$ et $b = dy$. On a alors $x > y$ et $\text{pgcd}(x, y) = 1$. La condition de l'énoncé devient

$$\begin{aligned} d(x - y) &| d(dx^2 - y) \\ \iff x - y &| dx^2 - y \\ \iff x - y &| dx^2 - y + x - y \\ \iff x - y &| x(dx + 1) \end{aligned}$$

Or $\text{pgcd}(x, y) = 1$ donc $\text{pgcd}(x - y, x) = 1$. Donc d'après le lemme de Gauss,

$$\begin{aligned} x - y &| dx + 1 \\ \iff x - y &| dx + 1 - d(x - y) \\ \iff x - y &| dy + 1 \end{aligned}$$

Comme $dy + 1 > 0$ et $x - y > 0$, on en déduit que $x - y \leq dy + 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{a + 1}{b + 1} &= \frac{dx + 1}{dy + 1} \\ &= \frac{dy + 1 + dx - dy}{dy + 1} \\ &= 1 + d \frac{x - y}{dy + 1} \\ &\leq 1 + d \\ &= \text{pgcd}(a, b) + 1 \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9

solution du neuvième exercice. On considère a_i et a_j quelconques avec $i \neq j$, $a_i | a_j^2 + 1$, et $a_j | a_i^2$. Soit d un diviseur commun à a_i et a_j . $d | a_i | a_j^2 + 1$ et $d | a_j | a_i^2$ donc $d | 1$. Donc les a_i sont premiers entre eux deux à deux. Sans perte de généralité, on ordonne les entiers : $a_1 > a_2 > \dots > a_n$. Supposons que $n \geq 3$. On a alors $a_1 | a_3^2 + 1$ et $a_2 | a_3^2 + 1$, et comme a_1 et a_2 sont premiers entre eux, $a_1 \cdot a_2 | a_3^2 + 1$, donc $a_1 \cdot a_2 \leq a_3^2 + 1$. Or on a supposé que $a_1 > a_2 > a_3$, donc $a_1 \geq a_2 + 1 \geq a_3 + 2$, donc $a_1 \cdot a_2 \geq a_3^2 + 3a_3 + 2 > a_3^2 + 1$. On a donc une contradiction.

Donc $n < 3$. On vérifie qu'il existe bien une solution pour $n = 2$: c'est le cas, si on prend les entiers 2 et 5. Donc $n = 2$.

Solution de l'exercice 10

La forme de l'énoncé pousse à regarder l'opération du twist modulo $s^2 - 1$. Notons que $s^{-1} \equiv s \pmod{s^2 - 1}$ puisque $s^2 \equiv 1 \pmod{s^2 - 1}$. En particulier

$$bs + a \equiv s^{-1}(b + as) \equiv s(as + b) \pmod{s^2 - 1}.$$

Ainsi, on a $d_{i+1} \equiv sd_i \pmod{s^2 - 1}$. Encore mieux, $d_{i+2} \equiv s^2 d_i \equiv d_i \pmod{s^2 - 1}$. Ainsi, la suite (d_i) prend uniquement deux valeurs modulo $s^2 - 1$, à savoir d_1 et sd_1 . En particulier, si il existe un rang d_j tel que $d_j = 1$, alors $1 \equiv d_1$ ou $1 \equiv sd_1$. Ceci impose que $d_1 \equiv 1$ ou $d_1 \equiv s$.

Réciproquement, si $n \equiv 1$ ou $n \equiv s \pmod{s^2 - 1}$, montrons que 1 appartient à la suite. L'opération *twist* semble faire décroître la suite (puisque $b \leq s - 1$), essayons de rendre cette intuition rigoureuse.

Cas 1 : Si $d_i \geq s^2$, alors $d_{i+1} < d_i$. En effet, posons $d_i = as + b$ avec $b \leq s - 1$. Puisque $d_i \geq s^2$, on a $a \geq s$. Mais alors on vérifie que

$$d_{i+1} = bs + a \leq (s - 1)s + a \leq as \leq as + b = d_i.$$

La première inégalité est une égalité lorsque $b = s - 1$, et la dernière lorsque $b = 0$. Ces deux conditions sont incompatibles, on a donc $d_{i+1} < d_i$.

Cas 2 : Si $d_i < s^2$, alors $d_{i+1} < s^2$ et $d_{i+2} = d_i$. En effet, écrivons $d_i = as + b$, avec $b \leq s - 1$. Comme $d_i < s^2$, $a \leq s - 1$. Ainsi, $d_{i+1} = bs + a \leq (s - 1)s + (s - 1) < s^2$. On a de même $d_{i+2} \leq s^2 - 1$. Comme $d_{i+2} \equiv d_i \pmod{s^2 - 1}$ et que $1 \leq d_i, d_{i+2} \leq s^2 - 1$, on a $d_i = d_{i+2}$.

De ces deux cas on déduit que la suite (d_i) est périodique de période 2 à partir d'un certain rang N , prenant alternativement les valeurs d_N et sd_N modulo $s^2 - 1$. Si $n \equiv 1, s \pmod{s^2 - 1}$, alors d_N ou sd_N vaut n modulo $s^2 - 1$. On déduit que d_N ou d_{N+1} vaut 1 modulo $s^2 - 1$. Comme d_N et d_{N+1} sont compris dans $\{1, \dots, s^2 - 1\}$, d_N ou d_{N+1} vaut 1.

Solution de l'exercice 11

On pose d'abord $m = f(n)$. Cela nous donne

$$\begin{aligned} & f(n)^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n \\ \iff & f(n)(f(n) + 1) \mid f(n)f(f(n)) + n \\ \implies & f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n \\ \implies & f(n) \mid n \\ \implies & f(n) \leq n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

En particulier, on a que $f(1) = 1$. De plus, si on pose $n = m$ dans l'expression initiale, cela nous donne

$$\begin{aligned} & n^2 + f(n) \mid nf(n) + n \\ \implies & n^2 + f(n) \leq nf(n) + n \\ \iff & n^2 - n \leq nf(n) - f(n) \\ \iff & n(n - 1) \leq f(n)(n - 1) \\ \implies & n \leq f(n) \quad \forall n > 1 \end{aligned}$$

Donc pour tout $n > 1$, $f(n) \leq n \leq f(n)$ donc $f(n) = n$, et comme $f(1) = 1$, $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Donc la seule fonction solution est l'identité.

2 Combinatoire : récurrence (Théo)

L'objectif de cet exercice était de revoir la récurrence (simple double ou forte) comme outil pour des problèmes de combinatoire.

- La première chose à faire dans une récurrence est de formuler proprement $P(n)$, la propriété qu'on veut montrer par récurrence. C'est une étape cruciale : parfois la propriété est celle donnée directement par l'énoncé, parfois c'est une propriété plus compliquée à identifier.
- Souvent l'idée de récurrence même est mal comprise. On retient qu'on veut montrer $P(n) \implies P(n+1)$, donc souvent que l'objectif est de passer de n à $n+1$. Or ce n'est pas du tout ça. On cherche à prouver $P(n+1)$, donc on se donne une situation avec $n+1$. Dans cette situation, on essaie de trouver une situation à n au moins (quitte à faire une récurrence forte). On applique l'hypothèse de récurrence à cette situation, et ensuite on essaie de prouver la propriété pour $n+1$. La clé est donc de comprendre comment dans une situation correspondant à $n+1$, on peut identifier une situation correspondant à k .
- La récurrence peut également être utilisée pour compter le nombre d'objets vérifiant une certaine propriété.

Exercice 1

Soit $n > 1$ un nombre impair. n élèves sont à la piscine, les distances entre deux élèves sont deux à deux distinctes. Chacun possède un pistolet à eau, et tire sur l'élève le plus proche. Montrez qu'un élève n'est pas arrosé.

Exercice 2

Démontrer que tout polygone convexe à n sommets peut être découpé en triangles disjoints. Démontrer que toute telle découpe utilise $n - 2$ triangles.

Exercice 3

On considère G un graphe non orienté à $2n$ sommets, on suppose qu'il ne contient pas de triangle. Démontrer qu'il a au plus n^2 arêtes.

Exercice 4

Anatole trace n droites distinctes. Démontrer qu'il est possible de colorier en rouge et bleu les régions délimitées par ces droites de sorte à ce que deux régions séparées par un côté ne soient jamais de même couleur.

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On dit que A est fade si pour tout x, y dans A , $x + y$ n'est pas dans A . Quel est le cardinal maximal d'une partie fade incluse dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?

Exercice 6

Soit $n \geq 1$ un entier. On dispose de n cubes de côtés $1, 2, \dots, n$. On veut les empiler dans un certain ordre, de sorte qu'un cube de côté k ne peut être posé que sur un cube de côté ℓ avec $\ell \geq k - 2$. Combien de tels empilements différents existe-t-il ?

Exercice 7

Soit n un entier vérifiant $n \geq 2$. Un tournoi de tennis à n joueurs est joué, et chaque joueur

joue contre chaque autre joueur une unique fois pendant le tournoi. A la fin, chaque joueur écrit la liste des joueurs qu'il a battu, et la liste des joueurs que chacun de ceux-ci a battu. Démontrer qu'un joueur a écrit le nom de tous les joueurs.

Exercice 8

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère une grille 2^n par 2^n , à laquelle on enlève une case. Peut-on paver la grille (mais pas la case enlevée) avec des formes L (composées chacune de 3 cases)?

Exercice 9

On a placé $n \geq 1$ dépôts d'essence autour d'un circuit. La quantité d'essence totale placée dans ces dépôts est suffisante pour qu'une voiture qui en disposerait puisse faire au moins un tour complet du circuit. Montrer qu'en partant d'un des dépôts, et en s'approvisionnant à chaque dépôt qu'elle croise, une voiture sans essence initialement peut bien réaliser ce tour.

Exercice 10

Soit $n \geq 3$. On appelle A_n l'ensemble, dans le plan, des couples (x, y) d'entiers vérifiant $0 \leq x, y, x + y \leq n - 1$. On souhaite recouvrir tous les points en traçant des droites. Montrer qu'il faut au moins n droites.

Exercice 11

On reprend les notations de l'exercice précédente. On dit qu'une droite est solaire si elle n'est parallèle ni à la droite $x = 0$, ni à la droite $y = 0$, ni à la droite $x + y = n - 1$. Déterminer, en fonction de n , les nombres possibles de droites solaires utilisées pour recouvrir A_n par n droites exactement.

Exercice 12

Soit $n \geq 1$, et E un ensemble de taille n . Quel est le k maximal pour lequel il existe des parties non vides $A_1, \dots, A_k$ de E , deux à deux distinctes, telles que pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ ou $A_i \subset A_j$ ou $A_j \subset A_i$?

Exercice 13

Pour tout ensemble A , on note $s(A)$ la liste composée des $a + a'$ pour tout $a < a'$ dans A . Montrer qu'il existe une infinité de $n \geq 2$, pour lesquels il existe A, B ensembles d'entiers strictement positifs de taille n tels que $A \neq B$, et à permutation près $s(A) = s(B)$.

Exercice 14

Soit n un entier strictement positif. Sur une grille carrée de taille $n \times n$, n blocs sont posés, de sorte à ce que chaque bloc occupe une case de la grille, et les n blocs sont sur des colonnes 2 à 2 distinctes, et sur des lignes 2 à 2 distinctes.

Déterminer la valeur maximale de k , en fonction de n , pour laquelle il est possible, quelque soit l'arrangement des blocs, de placer k jetons sur la grille de sorte à ce qu'aucun jeton ne soit sur un bloc et que deux jetons sur la même ligne ou colonne ait forcément un bloc entre eux.

Exercice 15

Soit G un graphe complet orienté de taille $n \geq 3$, contenant une arête orientée entre chaque paire de sommets distincts. On suppose que pour tout choix v, v' de sommets distincts, il existe un chemin orienté allant de v à v' . Démontrer que pour tout $k \in \{3, \dots, n\}$, il existe un cycle orienté de longueur k .

Solution de l'exercice 1

On note $P(n)$ la propriété, pour n impair, que si n élèves se tirent dessus comme dans l'énoncé, alors 1 élève n'est pas arrosé. Prouvons la propriété par récurrence sur n .

Initialisation : pour $n = 3$, considérons les deux élèves les plus près, ils se tirent dessus l'un sur l'autre. Ainsi le troisième élève n'est pas arrosé, ce qui conclut.

Hérédité : Maintenant fixons $n \geq 3$ et supposons $P(n)$. Nous allons montrer $P(n+2)$, considérons $n+2$ élèves se tirant les uns sur les autres. Considérons les deux élèves situés à distance minimale, qui se tirent l'un sur l'autre par hypothèse. Oublions les, et appliquons l'hypothèse de récurrence aux n autres. Il existe un élève qui n'est pas arrosé. Or si on rajoute les deux élèves proches, ceux-ci se tirent dessus, et parmi les n autres élèves, certains changent peut-être leur tir si un des deux élèves rajouté est plus près, mais aucun ne change de tire vers l'élève qui n'était pas arrosé. Ainsi il existe bien un élève pas arrosé, ce qui conclut l'hérédité, donc la récurrence.

Solution de l'exercice 2

Pour découper un polygone convexe en triangles, on peut fixer un sommet, et tracer toutes les diagonales possibles. Les triangles obtenus sont 2 à 2 disjoints, et au nombre de $n-2$.

Montrons par récurrence forte la propriété $P(n)$ suivante : toute telle découpe utilise $n-2$ triangles.

Initialisation : Pour $n = 3$, on a bien $3-2 = 1$ triangle.

Hérédité : soit $n \geq 3$, supposons $P(k)$ pour tout $k \leq n$, et montrons $P(n+1)$. On considère un $n+1$ -gone convexe, et une triangulation de celui-ci. On regarde $\mathcal{T}$ un triangle de la triangulation. Comme $n+1 \geq 4$, celui-ci peut occuper 0, 1 ou 2 côté du polygone, mais pas 3.

- Si le triangle ne contient aucun côté du $n+1$ -gone, il divise le $n+1$ -gone en 3 polygones. Notons A, B, C les extrémités du triangle, x le nombre de côtés dans le polygone sur le chemin reliant A à B (sans C), y le nombre de côtés dans le polygone sur le chemin reliant B à C (sans A), z le nombre de côtés dans le polygone sur le chemin reliant A à C (sans B). On a ainsi $x+y+z = n+1$, et le triangle subdivise le polygone en un $x+1$ gone, un $y+1$ gone et un $z+1$ gone. Il faut donc $x+1-2+y+1-2+z+1-2 = x+y+z-3$ triangles, plus le triangle considéré, c'est à dire $n+1-2$ triangles, ce qui prouve $P(n+1)$ dans ce cas.
- Si le triangle contient un côté du $n+1$ -gone, notons A, B les points du triangle formant le côté du $n+1$ -gone. Notons C l'autre extrémité du triangle, y le nombre de côtés dans le polygone sur le chemin reliant B à C (sans A), z le nombre de côtés dans le polygone sur le chemin reliant A à C (sans B). On a ainsi $1+y+z = n+1$, et le triangle subdivise le polygone en un $y+1$ gone et un $z+1$ gone. Il faut donc $y-1+z-1 = 1+y+z-3$ triangles, plus le triangle considéré, c'est à dire $n+1-2$ triangles, ce qui prouve $P(n+1)$ dans ce cas.
- Si le triangle contient deux côtés du $n+1$ -gone, notons A le point appartenant au triangle et aux deux côtés du $n+1$ -gone. Notons B et C les autres extrémités du triangle, z le nombre de côtés dans le polygone sur le chemin reliant B à C (sans A). On a ainsi $2+z = n+1$, et le triangle subdivise le polygone en un $z+1$ gone. Il faut donc $z-1 = 2+z-3$ triangles, plus le triangle considéré, c'est à dire $n+1-2$ triangles, ce qui prouve $P(n+1)$ dans ce cas et conclut l'hérédité donc la récurrence.

Solution de l'exercice 3

On montre par récurrence sur n la propriété suivante $P(n)$ tout graphe à $2n$ sommets sans triangle a au plus n^2 arêtes.

Initialisation : Pour $n = 1$, un graphe avec deux sommets a au plus une arête.

Hérédité : Soit n un entier strictement positif, supposons $P(n)$ vrai. Considérons un graphe à $2n + 2$ sommets. S'il ne possède aucune arête, il a bien au plus $(n + 1)^2$ arêtes. Sinon, considérons v_1 et v_2 deux sommets reliés, et posons G' le graphe composé des sommets de G excepté v_1 et v_2 . G' a $2n$ sommets donc au plus n^2 arêtes. De plus, un sommet de G' ne peut être relié à la fois à v_1 et v_2 , sinon il formerait un triangle. Ainsi en plus des arêtes de G' , il y a au plus $2n$ arêtes entre v_1 ou v_2 et un sommet de G' , et 1 arête entre v_1 et v_2 . Ainsi il y a au plus $n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$ arêtes, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4

On montre par récurrence la propriété $P(n)$: si n droites sont tracées, on peut colorier les régions formées pour que deux régions voisines ne soient jamais de même couleur.

Initialisation : Pour $n = 1$, il y a deux régions, on colorie une en rouge et une en bleu.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons $P(n)$ vraie. On considère $n + 1$ droites. Quitte à effectuer une rotation, on peut supposer qu'une droite d est verticale. On oublie cette droite pour l'instant, on a n droites, donc on peut colorier en rouge et bleu les régions formées par ces n droites. Pour colorier les régions obtenues avec les $n + 1$ droites, on garde le coloriage rouge bleu, mais on change la couleur de chaque région créée située à droite de la nouvelle droite (par exemple, si une région bleue a été coupée en deux, la partie de droite devient rouge, et l'autre reste bleue). Montrons que le coloriage obtenu fonctionne.

- Si on considère deux régions dont la frontière commune est située strictement à gauche de la droite, elles n'ont pas changé de couleur, donc comme avec n droites elles étaient de couleur différente, elles le sont toujours.
- Si on considère deux régions dont la frontière commune est située strictement à gauche de la droite, elles ont toutes les deux changé de couleur, donc comme avec n droites elles étaient de couleur différente, elles le sont toujours.
- Si deux régions ont une frontière commune sur la droite, alors elles ne formaient qu'une région avant de rajouter la nouvelle droite. Elles étaient toutes les deux de la même couleur, mais après l'ajout de la droite, la région de gauche a conservé sa couleur tandis que l'autre a changé, donc elles sont de couleurs différentes.

Ainsi on a obtenu un coloriage vérifiant l'énoncé pour $n + 1$, ce qui conclut l'hérédité.

Solution de l'exercice 5

En testant les petites valeurs de n , on trouve que si n est impair, notons $n = 2k + 1$, alors le cardinal maximal est $k + 1$, sinon si $n = 2k$ est pair, le cardinal maximal est k . Montrons cela.

Déjà si $n = 2k$ en considérant $\{1, 3, \dots, 2k - 1\}$ l'ensemble des impairs, on a un ensemble fade (car la somme de deux impairs est paire donc pas impaire) qui a cardinal k , et si $n = 2k + 1$ en considérant $\{1, 3, \dots, 2k + 1\}$, on a un ensemble fade de cardinal $k + 1$.

Ainsi pour montrer que le cardinal maximal est $k + 1$, sinon si $n = 2k$ est pair, le cardinal maximal est k il suffit de montrer la propriété $P(n)$ suivante : "si $n = 2k + 1$, tout ensemble fade inclus dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ a taille au plus $k + 1$, et si $n = 2k$, tout ensemble fade inclus dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ a cardinal au plus k ".

On montre $P(n)$ par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1$, tout ensemble a cardinal au plus 1, ce qui donne $P(1)$.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons $P(n)$. Soit A un ensemble fini inclus dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Distinguons deux cas :

- Si $n+1$ est impair, posons $n+1 = 2k+1$. $A \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ est fini donc a au plus k éléments, donc A a au plus $k+1$ éléments (tous ceux plus petits que n , et $n+1$), ce qui conclut.
- Si $n+1$ est pair, posons $n+1 = 2k+2$. $A \cap \llbracket 1, n \rrbracket$ est fini donc a au plus $k+1$ éléments. En particulier, si A ne contient pas $n+1$, il a au plus $k+1$ éléments, ce qui conclut. Sinon, $n+1$ contient $2k+2$. Parmi les k ensembles $\{1, 2k+1\}, \dots, \{k, k+2\}$, A ne peut contenir qu'un élément, sinon il existerait a, b dans A tels que $a+b = 2k+2$. De plus, A ne peut contenir $k+1$, car $k+1+k+1 = 2k+2$. Ainsi A a au plus $k+1$ éléments (en rajoutant $2k+2$) ce qui conclut l'hérédité, donc la récurrence et la preuve.

Solution de l'exercice 6

En testant les petits cas, on conjecture que le nombre de tels empilements est 2 pour $n = 2$ et $2 \times 3^{n-2}$ pour tout $n \geq 3$. Pour $n = 2$ c'est évident. Pour $n \geq 3$, montrons par récurrence $P(n)$ "il y a $2 \times 3^{n-2}$ tels empilements".

Initialisation : Pour $n = 3$, tout empilement vérifie la propriété, car si ℓ est au dessus de k , alors $k-2 \leq 1$ et $\ell \geq 1$.

Hérédité : Soit $n \geq 3$, supposons $P(n)$ vraie. Montrons que pour $n+1$ cubes, il y a $3^n \times 2$ possibilités.

Considérons une configuration des $n+1$ cubes, le cube $n+1$ est soit tout en bas, soit sur le cube n , soit sur le cube $n-1$. Enlevons ce cube de l'empilement et vérifions que l'empilement des n cubes est correct. Si le cube $n+1$ était en bas, c'est évident. Sinon notons ℓ le côté du cube en dessous, k celui au dessus, on a donc $k = n-1$ ou n , donc $\ell \geq n-1 \geq n-2 \geq k-2$, donc l'empilement convient.

Réciproquement, si on prend un empilement de n cubes, et on insère $n+1$ tout en bas, juste au dessus de n ou de $n-1$, alors l'empilement vérifie l'énoncé. En effet, si on note k le côté du cube au dessus de $n+1$ s'il existe, $n+1 \geq n-2 \geq k-2$. Si on note ℓ le côté du cube en dessous de $n+1$ s'il existe, $k \geq n-1 = n+1-2$. Ainsi l'empilement fonctionne.

Pour chaque empilement de $n+1$, on peut obtenir un empilement de n en enlevant le cube de côté $n+1$. Réciproquement, à partir d'un empilement de n , on peut obtenir 3 empilements de $n+1$ en rajoutant le cube (et ces empilements sont distincts, puisqu'en enlevant le cube $n+1$ on retrouve l'empilement de n). Il y a donc 3 fois plus d'empilement, donc $2 \times 3^{n-1}$ empilements, ce qui conclut l'hérédité donc la récurrence.

Solution de l'exercice 7

Montrons par récurrence sur n la propriété $P(n)$: un joueur a écrit le nom des autres joueurs.

Initialisation : Pour $n = 2$, un joueur a battu l'autre, et donc écrit son nom.

Hérédité : Soit $n \geq 2$, supposons $P(n)$. On considère un tournoi à $n+1$ personnes, mais on retire un joueur A . Sur le tournoi formé des n autres personnes, un joueur disons B a écrit le nom de tous les autres. Deux cas se présentent à nous :

- Si B a battu A , ou une personne battue par B a battu A , alors B a aussi écrit le nom de A , donc B a écrit tous les noms des autres joueurs.

- Si A a battu B et tous les joueurs battus par B , alors il a écrit tous les noms que B a écrit, et celui de B , donc il a écrit tous les noms des autres joueurs.

Ceci conclut l'hérédité, donc la récurrence.

Solution de l'exercice 8

On montre par récurrence sur $n \geq 2$ la propriété $P(n)$: on peut paver la grille sans la case enlevée avec des formes L .

Initialisation : Pour $n = 2$, en enlevant une case, la grille est directement pavable par un L .

Hérédité : Soit $n \geq 2$, supposons $P(n)$ vraie. On considère une grille de taille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$, à laquelle on enlève une case. On subdivise la grille en quatre grilles 2^n par 2^n . Quitte à tourner la grille, on peut supposer que la case enlevée est dans la grille en haut à droite. Par hypothèse de récurrence, on peut paver la grille en haut à droite, on peut aussi paver celle en haut à gauche, privée de son coin bas droit, celle en bas à gauche, privée de son coin haut droit, celle en bas à droite, privée de son coin haut gauche. Les trois coins enlevés forment un L , donc la grille entière peut être pavée, ce qui conclut l'hérédité et la récurrence.

Solution de l'exercice 9

On montre par récurrence la propriété $P(n)$: il est possible de partir d'un des dépôts, sans avoir d'essence initialement, et de faire tout le tour du circuit.

Initialisation : Pour $n = 1$, il y a assez d'essence dans le seul dépôt pour faire un tour, donc en commençant à ce dépôt la voiture fait le tour.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons $P(n)$ vraie. Donnons nous un circuit vérifiant l'énoncé avec $n + 1$ dépôt d'essence. Si chaque dépôt d'essence ne contenait pas assez d'essence pour aller au dépôt suivant, en sommant il n'y aurait pas assez d'essence pour faire un tour complet. Il existe donc un dépôt d tel qu'il y a assez d'essence dans d pour aller au dépôt suivant d' .

Considérons le circuit où on supprime d' , et on met toute l'essence de d' dans d . Par hypothèse de récurrence, il existe un dépôt d_0 duquel on peut partir et faire un tour complet. Si on part de d_0 dans le circuit avec $n + 1$ dépôts, et qu'on fait le tour, tout se passe pareil que dans le circuit avec n dépôts jusqu'à l'arrivée en d . Sauf que, dans le circuit avec $n + 1$ dépôts, arriver en d donne assez d'essence pour aller en d' et récupérer l'essence de d' : donc ceci est équivalent à récupérer toute l'essence directement en d , puisque la partie de d à d' ne pose pas de problème. Ainsi la voiture peut aller de d à d' , et poursuivre son tour comme dans la situation avec n dépôt, et donc faire un tour complet, ce qui conclut l'hérédité, donc la récurrence.

Solution de l'exercice 10

En fait, le résultat est aussi valable pour $n = 1$ et 2. On montre donc par récurrence la propriété $P(n)$: "pour recouvrir le triangle de points $0 \leq x, y, x + y \leq n - 1$, il faut au moins n droites".

Initialisation : Pour $n = 1$ le résultat est évident.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons que $P(n)$ est vraie. On considère le triangle $0 \leq x, y, x + y \leq n$, et on montre qu'il faut au moins $n + 1$ droites pour le recouvrir. Deux cas se présentent à nous :

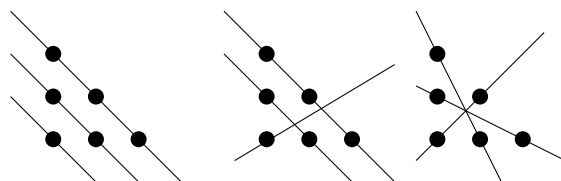
- Si on utilise la droite $x + y = n$ dans le recouvrement, dans ce cas, il reste encore à recouvrir tous les points du triangle $0 \leq x, y, x + y \leq n - 1$, donc il faut au moins n

autres droites (car la droite $x + y = n$ ne recouvre aucun point de ce triangle). Ainsi au total il faut au moins $n + 1$ droites.

- Si on n'utilise pas la droite $x + y = n$, cette droite contient $n + 1$ points $(x, y) = (0, n), \dots, (n, 0)$, et aucune droite ne peut couvrir deux points, sinon ce serait la droite $x + y = n$. Ainsi il faut $n + 1$ droites aussi dans ce cas, ce qui conclut l'hérédité donc la récurrence.

Solution de l'exercice 11

En testant les petits cas, on se rend compte qu'il y a forcément 0, 1 ou 3 droites solaires. Déjà pour $n = 3$ on peut voir les constructions suivantes avec 0, 1 ou 3 droites solaires.



De plus, il est possible pour $n \geq 3$ d'avoir une construction avec 0, 1, 3 droites solaires : il suffit de prendre les constructions précédentes, et d'ajouter les droites $x + y = 3, x + y = 4, \dots, x + y = n - 1$, pour obtenir n droites.

Montrons par récurrence la propriété $P(n)$ suivante : tout recouvrement par des droites du triangle $0 \leq x, y, x + y \leq n - 1$ utilise 0, 1 ou 3 droites solaires. Ceci pour $n \geq 3$.

Initialisation : Pour $n = 3$, il suffit de montrer qu'on ne peut pas utiliser 2 droites solaires. Si on utilise la droite $x + y = 2$ qui est non solaire, il faut recouvrir $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ avec deux droites, donc une droite contient deux points. Celle-ci est donc forcément non solaire, donc il n'y a qu'au plus une droite solaire. On peut faire le même raisonnement si la droite $x = 0$ ou $y = 0$ est utilisée.

Sinon, comme les droites $x + y = 2, x = 0$ et $y = 0$ sont les seules avec au moins 3 points alignés, et qu'on utilise trois droites pour recouvrir 6 points, il faut que chaque droite recouvre exactement 2 points. Ainsi $(2, 0)$ doit forcément être recouvert avec $(0, 1), (0, 2)$ avec $(1, 0)$ et $(0, 0)$ avec $(1, 1)$, donc aucune droite n'est solaire, ce qui est contradictoire. Ainsi on ne peut pas avoir exactement une droite solaire.

Hérédité : Soit $n \geq 3$, supposons que $P(n)$ est vraie. On considère le triangle $0 \leq x, y, x + y \leq n$, et on montre qu'il y a exactement 0, 1 ou 3 droites solaires :

- Si on utilise la droite $x + y = n$ dans le recouvrement, celle-ci n'est pas solaire, dans ce cas, il reste encore à recouvrir tous les points du triangle $0 \leq x, y, x + y \leq n - 1$ avec n droites. Il y a donc exactement 0, 1, 3 droites solaires. Idem si on utilise la droite $x = 0$ ou $y = 0$, où on obtient un translaté du triangle $0 \leq x, y, x + y \leq n - 1$.
- Si on n'utilise aucune de ces droites, alors comme chacune de ces droites a $n + 1$ points, et qu'une droite différente ne peut couvrir qu'un seul point, il faut que chacune des droites recouvre exactement un point de la droite $x = 0$, de la droite $y = 0$ et de la droite $x + y = n$. Comme il y a $n + 1$ points et $n + 1$ droites, chaque droite doit passer par des points distincts de ces droites. Or si on trace le triangle formé par ces 3 droites, toute droite l'intersecte en au plus 2 points. Donc comme chaque droite doit passer par un point de $x = 0, y = 0$ et $x + y = n$, il faut que chaque droite passe par $(0, 0), (0, n)$ ou $(n, 0)$ (qui sont communs à deux des trois droites). Comme une seule droite ne peut

passer par chaque point, il y a au plus 3 droites, et non pas $n + 1$ comme mentionné, ce qui est absurde, et conclut l'hérédité donc la récurrence.

Solution de l'exercice 12

Quitte à renommer les éléments, on peut supposer $E = \{1, \dots, n\}$. En testant les petites valeurs de n , on se rend compte que le nombre maximal semble être $2n - 1$. Une construction convenant par exemple est de choisir tous les singletons $\{i\}$ avec $1 \leq i \leq n$, et $\{1, \dots, j\}$ pour $2 \leq j \leq n$. Cet ensemble vérifie l'énoncé, si on prend A_i et A_j deux tels parties, si A_i est un singleton, soit $A_i \subset A_j$ soit $A_i \cap A_j = \emptyset$, idem si A_j est un singleton. Sinon A_i et A_j sont de la forme $\{1, \dots, k\}$ et $\{1, \dots, k'\}$ et l'un est inclus dans l'autre (celui avec le plus petit k). Ainsi on a une collection de $2n - 1$ ensembles qui convient.

Montrons maintenant la propriété $P(n)$ suivant par récurrence forte : toute collection de parties distinctes non vides de $\{1, \dots, n\}$ vérifiant les contraintes de l'énoncé contient au plus $2n - 1$ éléments.

Initialisation : Pour $n = 1$ il y a au plus une partie non vide, ce qui conclut.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, on suppose $P(k)$ vraie pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$. Montrons $P(n + 1)$: soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties non vides distinctes de $\{1, \dots, n + 1\}$ vérifiant l'énoncé. Si $\{1, \dots, n + 1\}$ est dans $\mathcal{A}$ on l'enlève. Deux cas se présentent à nous :

- Si aucun élément de $\mathcal{A}$ ne contient $n + 1$, alors par hypothèse de récurrence, $\mathcal{A}$ privé d'un élément a cardinal au plus $2n - 1$, donc $\mathcal{A}$ contient au plus $2n < 2n + 1$ ensembles.
- S'il existe un élément B de $\mathcal{A}$ contenant $n + 1$, on prend B de cardinal maximal. Considérons un autre élément C de $\mathcal{A}$ tel que $C \cap B \neq \emptyset$. On ne peut pas avoir $B \subset C$, sinon C serait un ensemble strictement plus grand que B contenant $n + 1$. Ainsi $C \subset B$.

On a donc pour tout C dans $\mathcal{A}$, soit $C \subset B$, soit $C \cap B = \emptyset$, i.e. $C \subset B^c$. De plus, $1 \leq |B|, |B^c| \leq n$ car B n'est ni vide ni $\{1, \dots, n + 1\}$. Par hypothèse de récurrence, il y a au plus $2|B| - 1$ éléments de $\mathcal{A}$ inclus dans B , et au plus $2|B^c| - 1 = 2(n + 1 - |B|) - 1$ éléments de $\mathcal{A}$ inclus dans B^c (il est clair que si $P(k)$ est vraie, celle-ci reste vraie en remplaçant $\{1, \dots, k\}$ par n'importe quel ensemble de taille k). Ainsi il y a au total au plus $1 + 2|B| - 1 + 2(n + 1 - |B|) - 1 = 2n + 1$ éléments dans $\mathcal{A}$, ce qui conclut l'hérédité et la récurrence.

Solution de l'exercice 13

Pour $n = 2$ on trouve $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$ qui ont les mêmes sommes. En fait on va montrer par récurrence pour $n \geq 1$ la propriété $P(n)$ suivante : il existe deux ensembles $A \neq B$ de taille 2^n pour lesquels $s(A) = s(B)$. D'ailleurs il est possible de prouver que si n n'est pas une puissance de 2 il n'est pas possible de trouver de tels A et B , mais c'est beaucoup plus compliqué que cet exercice. La preuve de cette propriété donnera alors immédiatement la preuve de la question de l'énoncé.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$ qui donnent les mêmes sommes.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons $P(n)$ vraie, et considérons A et B deux ensembles différents de taille 2^n tels que $s(A) = s(B)$. Prenons M un entier plus grand que tout élément de A et B , on considère $A' = A \cup (M + B)$ et $B' = B \cup (M + A)$. Montrons que $s(A') = s(B')$. Déjà $s(A)$ est constitué de $s(A)$, de $2M + s(B)$ et des éléments de la forme $M + a + b$ pour (a, b) dans $A \times B$. De même $s(B')$ est constitué de $s(B)$, de $2M + s(A)$ et des éléments de la forme $M + a + b$ pour (a, b) dans $A \times B$. Ainsi comme $s(A) = s(B)$, on a $s(A') = s(B')$. De

plus, A' et B' ont 2^{n+1} éléments, et sont distincts car les 2^n plus petits éléments de A' sont les éléments de A , et ceux de B' sont les éléments de B et $A \neq B$, ce qui conclut l'hérédité et donc la récurrence.

Solution de l'exercice 14

Déjà notons que la contrainte sur les blocs est équivalente à avoir un unique bloc par ligne et par colonne.

On voit assez facilement qu'on peut passer au plus 2 jetons par colonne. De plus, il y a deux blocs qui sont sur la ligne la plus basse et la ligne la plus haute. Dans les colonnes associées, il y a au plus un jeton. Donc quelque soit le placement des blocs on peut placer au plus $2n - 2$ jetons.

Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: on peut toujours placer au moins $2n - 2$ jetons.

Initialisation : Pour $n = 1$ c'est clair.

Hérédité : Supposons que pour n , $P(n)$ est vraie. Donnons nous une grille de taille $n + 1$ avec $n + 1$ blocs vérifiant les contraintes de l'énoncé.

On numérote les lignes de bas en haut, et les colonnes de gauche à droite. Quitte à effectuer une symétrie horizontale, on peut supposer que le jeton de la colonne $n + 1$ est plus haut que celui de la colonne n . On note i le numéro de ligne du jeton de la colonne n et j celui du jeton de la colonne $n + 1$: on a alors $i < j$.

Si $j = n + 1$, on applique l'hypothèse de récurrence à la grille formée par les n premières lignes et colonnes : on a donc $2n - 2$ jetons. On rajoute un jeton au dessus du bloc de la n -ème ligne, et un à droit du bloc de la n -ème colonne. On voit alors que la grille vérifie les contraintes de l'énoncé.

Si $j \neq n + 1$, on considère la grille obtenue en enlevant la colonne $n + 1$ et la ligne j , et on place $2n - 2$ jetons qui vérifient les contraintes de l'énoncé. En rajoutant la ligne j et la colonne $n + 1$, les jetons vérifient toujours les contraintes de l'énoncé.

On cherche donc à rajouter deux jetons pour en avoir placé $2n$. Déjà notons qu'on peut rajouter un jeton dans la colonne $n + 1$ ligne i . Comme à sa gauche il a un bloc, il ne casse pas les contraintes de l'énoncé. Maintenant on rajoute un jeton ligne $j + 1$ et colonne $n + 1$. Soit il ne casse pas les contraintes de l'énoncé, et dans ce cas on a bien placé $2n$ jetons. Soit il casse les contraintes de l'énoncé. Dans ce cas, le problème ne vient pas de sa colonne, puisqu'il y a un seul autre jeton dans sa colonne, et les deux jetons sont de part et d'autre du bloc de la colonne $n + 1$. Ainsi il existe une colonne $h < n + 1$ tel qu'il y a un jeton colonne h et ligne $j + 1$, et aucun bloc entre celui-ci et le jeton qui vient d'être rajouté. Enlever ce jeton fait qu'il n'y a plus de problème vis à vis des contraintes de l'énoncé : en effet, si un autre jeton est dans la ligne $j + 1$ sans bloc entre lui et le nouveau jeton, alors il n'y avait pas de bloc entre le jeton de la ligne $j + 1$ et colonne h , ce qui entraîne une contradiction.

Ainsi on déplace le jeton colonne h ligne $j + 1$, vers la case située colonne h ligne j . Il n'a aucun autre jeton sur sa ligne par hypothèse de récurrence. Et comme on a déplacé ce jeton que d'une seule case verticalement, tous les autres jetons de la même colonne ont toujours un bloc entre eux et le jeton.

Ceci conclut la récurrence. Ainsi il est toujours possible de placer $2n - 2$ jetons : $k = 2n - 2$.

Solution de l'exercice 15

Déjà montrons que G admet un cycle. En considérant v et v' deux sommets de G , on considère un chemin allant de v à v' , puis un chemin allant de v' à v , on obtient un chemin allant de v à

v , mais celui-ci peut utiliser plusieurs fois la même arête. En considérant le chemin minimal allant d'un sommet à lui-même (et de taille au moins 1), on a forcément que chaque sommet visité à l'intérieur du chemin n'est visité qu'une fois (sinon on aurait un chemin partant et arrivant au même sommet plus court), donc c'est un cycle, ses arêtes sont bien 2 à 2 disjointes.

Montrons que G a un cycle de longueur 3. Pour ça considérons un cycle de longueur minimale c . Celui-ci ne peut avoir longueur 2, sinon il prendrait une arête vv' , puis l'arête $v'v$, et une seule est dans le bon sens. Si le cycle a une longueur supérieure ou égale à 4, notons $v_1, \dots, v_\ell$ ses sommets dans l'ordre. Si l'arête de v_1 à v_3 va vers v_1 , alors v_1, v_2, v_3 forment un cycle dans cet ordre, donc il y a un cycle de longueur 3. Sinon, on peut enlever v_2 du cycle car l'arête va de v_1 à v_3 , et diminuer la longueur de celui-ci, on obtient ainsi également une contradiction. Ainsi il existe un cycle de longueur 3.

Montrons désormais par récurrence sur $k \in \{3, \dots, n\}$ la propriété $P(k)$: il existe un cycle de longueur k dans G .

Initialisation : le cas $k = 3$ a déjà été traité.

Hérédité : Soit $k \in \{3, \dots, n-1\}$ supposons $P(k)$ vraie. On se donne un cycle de longueur k (dont on note les sommets dans l'ordre $v_1, \dots, v_k$) dans G . Montrons qu'il existe un cycle de longueur $k+1$ dans G .

S'il existe un sommet v pour lequel l'arête entre un v_i et v va vers v , et l'arête entre un v_j et v va vers v_j , créons un cycle de longueur $k+1$. Déjà quitte à renuméroter les sommets (toujours dans l'ordre du cycle), on peut supposer que l'arête de v_1 à v est orientée vers v . On considère i le plus grand entier dans $\{1, \dots, k\}$ tel que toutes les arêtes entre v_i et v vont vers v . L'arête de v_j à v allant vers v_j , on a bien $i \neq k+1$. Ainsi l'arête de v_i à v va vers v , mais celle de v_{i+1} à v va vers v_{i+1} , on peut donc insérer v dans le cycle, entre v_i et v_{i+1} , et on obtient un cycle de longueur $k+1$.

Sinon il n'existe pas de tel sommet v . On a donc deux groupes de sommets : le groupe A où tout sommet de A est relié à tous les sommets du cycle avec une arête orientée vers le sommet du cycle, et le groupe B où tout sommet de B est relié à tous les sommets du cycle avec une arête orientée vers le sommet de B . Notons que comme le cycle n'a pas taille n , A ou B est non vide. Si A est vide, alors il n'est pas possible d'aller d'un sommet de B vers un sommet du cycle, donc A est non vide. De même, si B est vide, il n'est pas possible d'aller d'un sommet du cycle vers un sommet de A . Ainsi A et B sont non vides.

De plus, comme il est possible d'aller d'un sommet de B à un sommet de A en plusieurs arêtes, et que les seules arêtes possibles partant de B et n'allant pas dans B et bien orientées sont celles qui vont en A , il existe une arête orientée de B vers A . Notons $v_b \in B$ et $v_a \in A$ ses deux extrémités.

On a alors le cycle $v_1, v_b, v_a, v_3, v_4, \dots, v_k$ qui a longueur $k+1$, ce qui conclut la récurrence.

3 Combinatoire : invariants (Raphaël)

Ce cours reprend l'excellent cours d'invariants et de monovariants donné par Vincent Jugé au [Stage de Valbonne 2019 page 152](#)

4 Arithmétique : ordre 2 (Melvil)

Théorème d'Euler et introduction de l'ordre multiplicatif

On étudie dans ce cours, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$, les solutions $m > 0$ de $a^m \equiv 1 \pmod{n}$.

On remarque tout de suite qu'il est nécessaire pour l'existence de telles solutions que n et a soient premiers entre eux.

Réciproquement, si c'est le cas, on peut considérer les puissances successives de a modulo n : il y en a un nombre fini possible, donc par principe des tiroirs il existe $0 < u < v$ tels que $a^u \equiv a^v \pmod{n}$. Comme a est premier avec n , on peut diviser par a^u pour obtenir $a^{v-u} \equiv 1 \pmod{n}$. Il existe donc bien toujours de tels m .

L'avantage de connaître un tel m est par exemple de pouvoir simplifier les expressions de a^b modulo n . On effectue la division euclidienne de b par m : $b = mq + r$ avec $0 \leq r < m$. On a alors $a^b = a^{mq+r} = (a^m)^q \cdot a^r \equiv 1^q \cdot a^r \equiv a^r \pmod{n}$.

Bilan : pour simplifier a^b modulo n , on peut simplifier a modulo n et b modulo m .

Le théorème suivant montre que pour p premier, $m = p - 1$ convient pour tout a .

Théorème 1 (Petit théorème de Fermat).

Pour tout nombre premier p et tout entier a non divisible par p , le nombre p divise $a^{p-1} - 1$.

Démonstration (par bijection et factorielle). On suppose ici que $1 \leq a \leq p - 1$, et on note E l'ensemble des entiers $1, 2, \dots, p - 1$. Puis, pour tout entier $k \in E$, on note $f(k)$ le reste de la division de ak par p . Puisque le nombre premier p ne divise ni a ni k , il ne divise pas leur produit ak non plus, donc $f(k) \in E$. En outre, si k et ℓ sont deux éléments de E pour lesquels $f(k) = f(\ell)$, on sait que p divise

$$(ak - f(k)) - (a\ell - f(\ell)) = a(k - \ell),$$

et puisque p ne divise pas a , c'est qu'il divise $k - \ell$, donc que $k = \ell$. Ainsi, la fonction f est injective, et elle est même bijective.

On en conclut que

$$(p-1)! \equiv \prod_{k=1}^{p-1} k \equiv \prod_{k=1}^{p-1} f(k) \equiv \prod_{k=1}^{p-1} (ak) \equiv a^{p-1} \prod_{k=1}^{p-1} k = a^{p-1} (p-1)! \pmod{p}.$$

Ainsi, p divise $(a^{p-1} - 1)(p-1)!$, et puisque p ne divise pas $(p-1)!$, c'est donc que p divise $a^{p-1} - 1$. $\square$ On peut généraliser ce théorème modulo n'importe quel n pas forcément premier, avec le théorème d'Euler. Soit n un entier naturel non nul. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers

k premiers avec n et tels que $1 \leq k \leq n$. Ce nombre est appelé *indicateur d'Euler* de n .

Théorème 2 (Théorème d'Euler).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$ premier avec n , on a $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Ce théorème se démontre de manière analogue au précédent, nous n'en détaillerons pas la preuve ici.

Attention! Ce théorème ne fonctionne que si a est premier avec n . Par exemple, si $n = 12$ et $a = 15$, il ne fonctionne évidemment pas.

Remarquons que, lorsque p est un nombre premier, on a bien $\varphi(p) = p - 1$, ce qui nous permet de retrouver le petit théorème de Fermat. Par ailleurs, il existe en fait une manière simple de calculer $\varphi(n)$ dans le cas où n est un entier quelconque. C'est l'objet du résultat ci-dessous, dont la démonstration utilise le *théorème des restes chinois*.

Théorème 3 (Indicatrice d'Euler).

Soit n un entier naturel non nul dont la décomposition en tant que produit de facteurs premiers est

$$n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}.$$

L'indicatrice d'Euler de n est alors égale au produit

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i - 1) p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Ordre multiplicatif

Plus l'entier strictement positif m vérifiant $a^m \equiv 1 \pmod{n}$ est petit, moins on a de valeurs possibles pour les a^k puisqu'on peut réduire k modulo m . Cela motive la définition suivante : Pour tout entier a premier avec n , on définit $\omega_n(a)$, appelé *ordre de a modulo n* , le plus petit entier naturel strictement positif d tel que $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

Le théorème suivant est fondamental pour la notion d'ordre.

Théorème 4.

Les entiers k pour lesquels n divise $a^k - 1$ sont exactement les multiples de $\omega_n(a)$.

Démonstration. On note $d = \omega_n(a)$.

Soit $m > 0$ tel que $a^m \equiv 1 \pmod{n}$. Soit $m = dq + r$ la division euclidienne de m par q (on a donc $0 \leq r < d$). Ainsi $1 \equiv a^{dq+r} \equiv a^r \pmod{n}$: si $r \neq 0$, cela contredirait la minimalité de d : ainsi $r = 0$ et on a bien $d \mid m$.

L'autre implication est claire. □

En particulier, couplant ce théorème et le théorème d'Euler, on a toujours $\omega_n(a) \mid \varphi(n)$. Si p est premier, $\omega_p(a) \mid p - 1$.

Définition 5 (Racine primitive).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$ premier avec n . On dit que a est une racine primitive modulo n s'il y a égalité dans la relation de divisibilité $\omega_n(a) \mid \varphi(n)$, i.e. :

$$\omega_n(a) = \varphi(n)$$

Exemple 6. Regardons les puissances de 3 modulo 7

a	$3^a \pmod{7}$
0	1
1	3
2	2
3	6
4	4
5	5
6	1

L'ordre de 3 modulo 7 est $6 = \varphi(7)$, 3 est donc une racine primitive modulo 7.

Théorème 7 (Générateur).

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{Z}$ une racine primitive modulo n . On note E l'ensemble des éléments premiers avec n entre 1 et n , alors la fonction

$$f : \begin{matrix} \{1, \dots, \varphi(n)\} \\ x \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} E \\ \mapsto a^x \end{matrix}$$

est une bijection.

Démonstration. Les ensembles de départs et d'arrivée sont de même cardinal, il suffit de montrer l'injectivité pour obtenir automatiquement la bijectivité. Soient $0 < u \leq v < p$ tels que $a^u \equiv a^v \pmod{n}$, on obtient $a^{v-u} \equiv 1 \pmod{p}$ avec $0 \leq v-u < \omega_n(a)$ donc par définition de l'ordre, $v-u = 0$ donc $v = u$. $\square$

Remarque 8. Dans le théorème précédent, c'est souvent la surjectivité plus que l'injectivité qui nous intéresse le plus. En revanche la preuve précédente ne donne aucun moyen de savoir comment les valeurs de E sont atteintes.

Théorème 9 (Existence des racines primitives : admis).

Il existe des racines primitives pour chacun des modules de la forme $1, 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$ où p est un nombre premier impair et $\alpha \in \mathbb{N}$ et pour aucun autre.

Remarque 10. Ce théorème ne donne aucun renseignement concernant quelle valeur est une racine primitive. Toutefois, le seul fait de savoir qu'il existe une racine primitive pour certains modules peut s'avérer très utile.

Exercices d'application sur l'ordre :

Exercice 1

Calculer le reste de la division euclidienne de 5^{2025} par 11

Exercice 2

Quel jour de la semaine serons nous dans 10^{100} jours ?

Exercice 3

Montrer que pour tout n entier naturel, $7 \mid 3^{12n+1} + 2^{6n+2}$.

Exercice 4

Soit p un nombre premier. Montrer que tout diviseur premier de $2^p - 1$ est strictement plus grand que p .

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10. Montrer qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1.

Exercice 6

Montrer que pour tout entier $n > 0$ impair, $n \mid 2^{n!} - 1$.

Exercice 7

Soient p un nombre premier et q un diviseur premier du nombre $1 + p + \dots + p^{p-1}$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 8

Trouver tous les nombres premiers p tels que $2^p + p \mid 3^p + p$.

Exercice 9

Montrer que pour tout entier $n > 0$, $n \mid \phi(2^n - 1)$.

Exercice 10

Existe-il des entiers naturels a, b tels que $19^{19} = a^3 + b^4$?

Utiliser le plus petit diviseur :

Exercice 11

Trouver tous les entiers $n > 0$ tels que $n \mid 2^n - 1$.

Exercice 12

Trouver tous les entiers $n > 0$ impairs tels que $n \mid 3^n + 1$.

Exercice 13

Trouver tous les couples d'entiers (n, p) avec p premiers, $0 < n \leq 2p$ et :

$$n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$$

Exercice 14

Trouver tous les entiers $n > 0$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$

Exercice 15

Trouver toutes les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \mid 2^{u_{n+1}} - 1$

Corrigé des exercices :**Solution de l'exercice 1**

On calcule $5, 5^2, 5^3, 5^4, 5^5$ modulo 11. Il apparaît que l'ordre de 5 modulo 11 est 5. Donc $5^{2025} \equiv 1 \pmod{11}$.

Solution de l'exercice 2

D'après le petit théorème de Fermat, $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$. Il suffit donc de calculer le reste de 10^{100} dans la division euclidienne par 6. Il faut faire très attention à ne pas utiliser le théorème de Fermat ici car 10 et 6 ne sont pas premiers entre eux. On décompose alors

Solution de l'exercice 3

Les entiers 2 et 3 sont premiers avec 7, donc par petit Fermat $3^{12n+1} \equiv (3^6)^{2n} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{7}$ et $2^{6n+2} \equiv (2^6)^n \cdot 2^2 \equiv 2^2 \pmod{7}$. Finalement $3^{12n+1} + 2^{6n+2} \equiv 3 + 2^2 \equiv 3 + 4 \equiv 0 \pmod{7}$

Solution de l'exercice 4

Soit q un diviseur premier de $2^p - 1$. Il est bien premier avec 2 car $2^p - 1$ étant impair, il n'admet pas 2 comme diviseur. Alors, soit ω l'ordre de 2 modulo q . On a

$$2^p \equiv 1 \pmod{q} \quad \omega \mid p$$

Or p étant premier, $\omega = 1$ ou $\omega = p$ car il s'agit des seuls diviseurs positifs de p . Si $\omega = 1$, on a

$$2^1 \equiv 1 \pmod{q}$$

$$\implies 1 \equiv 0 \pmod{q} \implies q = 1$$

Ce qui est absurde. Donc $\omega = p$. De plus, d'après le petit théorème de Fermat, on a $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, d'où $\omega \mid q - 1$. En remplaçant ω par sa valeur, on obtient

$$p \mid q - 1$$

Comme $q - 1 \neq 0$, cela implique donc

$$p \leq q - 1 \implies p < q$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 5

Commençons par écrire sous une forme plus intéressante le nombre $a = 1\dots 1$ qui s'écrit avec x chiffres 1.

$$x = 1 + \dots + 10^{a-1} = \frac{10^a - 1}{9}$$

Pour obtenir le résultat il faut donc

$$10^a \equiv 1 \pmod{9n}$$

Comme $9n$ est premier avec 10, il suffit de choisir $a = \varphi(9n)$ et de conclure en utilisant le petit théorème de Fermat.

Solution de l'exercice 6

Puisque 2 est premier avec n , on a d'après le théorème d'Euler-Fermat $2^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. De plus, $1 \leq \phi(n) \leq n$ donc $\phi(n) \mid n!$, d'où $2^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$

Solution de l'exercice 7

Premièrement, rappelons la factorisation suivante :

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} q &| 1 + p + \cdots + p^{p-1} \\ \implies q &| (p - 1)(1 + p + \cdots + p^{p-1}) \\ \implies q &| p^p - 1 \end{aligned}$$

On a donc $p^p \equiv 1 \pmod{q}$. Bien entendu, $q \neq p$ (autrement on aurait $1 \equiv 0 \pmod{p} \implies p = 1$) et p admet donc un ordre ω modulo q . On a par conséquent :

$$\begin{aligned} \omega &| p \\ \implies \omega &= 1 \text{ ou } \omega = p \\ \omega &= 1 \text{ ou } \omega = p \end{aligned}$$

Ainsi, $\omega = 1$ nous donne

$$p^1 \equiv 1 \pmod{q}$$

. Mais alors,

$$0 \equiv 1 + p + \cdots + p^{p-1} \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 \equiv p \pmod{q}$$

D'où $q | p$ et donc $q = p$, absurde car $p \neq q$.

Comme $\omega | q - 1$ par Fermat, $\omega = p$ donne

$$\begin{aligned} p &| q - 1 \\ \iff q &\equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

On a donc bien $q \equiv 1 \pmod{p}$.

PS : le lecteur attentif aura remarqué qu'il s'agit d'une généralisation de l'exercice 2.

Solution de l'exercice 8

On peut tout de suite conclure que p est impair car lorsque $p = 2$, 4 ne divise pas 11.

Soit q un diviseur premier de $2^p + p$, q est impair car $2^p + p$ est impair.

Par ailleurs,

$$q | 2^p + p | 3^p + p$$

Donc

$$-p \equiv 2^p \equiv 3^p \pmod{q}$$

Puisque q est impair, 2 admet un inverse modulo q , ainsi

$$\left(\frac{3}{2}\right)^p \equiv 1 \pmod{q}$$

Soit ω l'ordre de $\frac{3}{2}$ modulo q , $\omega | p$ donc $\omega = 1$ ou $\omega = p$. Si $\omega = 1$, $3 \equiv 2 \pmod{q}$ ce qui est impossible donc $\omega = p$. Par petit Fermat, on sait que

$$\omega | q - 1$$

donc $p \mid q - 1$ d'où $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Ainsi, $2^p + p$ n'admet que des diviseurs premiers congrus à 1 modulo p , donc lui-même est congru à 1 modulo p . On obtient alors $2^p + p \equiv 1 \pmod{p} \implies 2 \equiv 1 \pmod{p}$ ce qui est impossible donc l'équation n'admet aucune solution.

Solution de l'exercice 9

Motivation derrière le raisonnement : on maîtrise très mal l'indicatrice d'Euler, on a souvent besoin de la décomposition en produit de facteurs premiers pour la calculer explicitement, et dans notre cas, nous n'avons pas beaucoup d'information à propos de la décomposition en facteurs premiers de $2^n - 1$. Ainsi, on ne va pas tenter de faire des calculs explicites avec l'indicatrice d'Euler : il ne nous reste plus qu'un choix pour avoir des informations et divisibilités sur ϕ , c'est le théorème d'Euler.

Pour faire apparaître $\phi(2^n - 1)$, il faut donc regarder modulo $2^n - 1$. Si on prend a premier avec $2^n - 1$ et ω_a son ordre, on aura

$$\omega_a \mid \phi(2^n - 1)$$

Ici, le a astucieux paraît être 2. Il nous faut donc calculer ω_2 et espérer qu'il vaille n . On a bien $2^n \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$, donc $\omega_2 \mid n$ d'où $\omega_2 \leq n$. De plus

$$2^{\omega_2} \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$$

$$\iff \text{Il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 2^{\omega_2} = k(2^n - 1) + 1$$

$k = 0$ donne $2^{\omega_2} = 1$ d'où $\omega_2 = 0$, ce qui est absurde car un ordre vaut au moins 1. Il s'ensuit que $k \geq 1$, autrement dit :

$$2^{\omega_2} = k(2^n - 1) + 1 \geq (2^n - 1) + 1$$

$$2^{\omega_2} \geq 2^n$$

Donc enfin, $\omega_2 \geq n$. On a $\omega_2 \geq n$ et $\omega_2 \leq n$: il s'ensuit que $\omega_2 = n$. On a donc bien $n \mid \phi(2^n - 1)$.

Solution de l'exercice 10

Nous avons des puissances troisièmes et quatrièmes. L'idée est donc de trouver un nombre premier tel que 3 et 4 divisent $p - 1$. Nous allons donc essayer avec 13 pour ces raisons. Premièrement, calculons 19^{19} .

$$19^{19} \equiv 6^{19-12} \pmod{13} \text{ par petit Fermat}$$

$$\equiv 6^7 \equiv (6^2)^3 \times 6 \pmod{13}$$

$$\equiv 36^3 \times 6 \equiv (-3)^3 \times 6 \pmod{13}$$

$$\equiv -27 \times 6 \pmod{13}$$

$$\equiv -6 \pmod{13}$$

Nous calculons donc toutes les valeurs possibles pour des puissances troisièmes modulo 13 (en faisant une table de congruences :

$$0, -5, -1, 5, 1$$

De même, les puissances quatrièmes prennent les valeurs suivantes modulo 13 :

$$0, 3, -4, 1$$

Nous testons les sommes possibles dans ces ensembles, et nous rendons compte que -6 n'est jamais atteint (en effet, nous trouvons $-5, -4, -2, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ comme sommes possibles : toutes les classes modulo 13 sont atteintes à part -6). Ainsi, cette égalité ne peut être vérifiée. Il n'y a aucune solution.

Solution de l'exercice 11

Tout d'abord, $n = 1$ est une solution.

Supposons maintenant $n > 1$ tel que $n \mid 2^n - 1$ et p le plus petit diviseur premier de n .

$$2^n \equiv 1 \pmod{p}$$

Donc l'ordre ω de 2 modulo p divise n . Par ailleurs

$$\omega \leq \phi(p) < p$$

donc ω est plus petit que tous les diviseurs premiers de n , pourtant $\omega \mid n$ donc $\omega = 1$. Ainsi,

$$2 \equiv 1 \pmod{p} \implies p = 1$$

Impossible, donc n ne peut admettre de plus petit diviseur premier, ainsi la seule solution de l'équation est 1.

Solution de l'exercice 12

Premièrement, $n = 1$ est solution. Maintenant, considérons le cas $n \geq 2$: n possède donc au moins un diviseur premier, soit p le plus petit d'entre eux. Nous avons

$$3^n \equiv -1 \pmod{p}$$

Nous savons manipuler l'ordre et le théorème de Fermat, et nous venons de voir à l'exo 7 que ces manipulations peuvent permettre de résoudre des exercices de ce type. Le seul problème est donc d'avoir un -1 plutôt qu'un 1. L'astuce consiste donc à mettre notre égalité au carré pour faire apparaître le 1 ! Ainsi,

$$(3^n)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{p}$$

$$3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$$

Maintenant, soit ω l'ordre de 3 modulo p . On a

$$1 \leq \omega < p$$

Puis, $3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ donne

$$\omega \mid 2n$$

Enfin, $3^n \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p}$. En effet, sinon on aurait $p = 2$ or n est impair. Ainsi,

$$\omega \nmid n$$

Alors, $\omega \mid 2n$ fait que s'il existe un nombre premier q autre que 2 divisant ω , on aurait $q \mid \omega \mid 2n$

$$q \mid 2n$$

Or $\text{pgcd}(q, 2) = 1$ donc par le lemme de Gauss, $q \mid n$. Donc q est un diviseur premier de n strictement inférieur à p (q divise ω donc il est inférieur à ω , lui-même strictement inférieur à p), absurde!

Alors, il s'ensuit que ω est une puissance de deux. D'autre part, n est impair donc la plus grande puissance de 2 divisant $2n$ est 1 : ainsi,

$$\omega = 2^1 = 2 \text{ ou } \omega = 2^0 = 1$$

$\omega = 1$ ne convient pas puisque $1 \mid n$ or $\omega \nmid n$.

Ainsi, $\omega = 2$.

Donc,

$$3^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$8 \equiv 0 \pmod{p}$$

D'où $p = 2$, or n est impair : absurde. En conclusion, la seule solution est $n = 1$.

Solution de l'exercice 13

Avant de commencer le cœur de l'exercice il est toujours bon d'exclure des petits cas, on remarque que pour tout p premier le couple $(1, p)$ est solution. Désormais on supposera $n > 1$. Si $p = 2$, $n \mid 2$ donc $(2, 2)$ est l'unique solution dans ce cas. Désormais on supposera p impair. Puisque n est strictement plus grand que 1, il admet un plus petit diviseur premier q .

$$(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$$

$$(p-1)^{2n} \equiv 1 \pmod{q}$$

Donc ω l'ordre de $p-1$ modulo q divise $2n$ et $\omega < q$ donc ω est premier avec tous les diviseurs premiers de n , ainsi $\omega \mid 2$.

Si $\omega = 1$, alors $(p-1)^1 \equiv 1 \pmod{q}$ donc $1 \equiv -1 \pmod{q} \implies q = 2$, impossible car le terme de droite dans la division est impair. Donc $\omega = 2$.

Puisque $\omega = 2$

$$(p-1)^2 \equiv 1 \pmod{q}$$

$$p(p-2) \equiv 0 \pmod{q}$$

Or $\omega \neq 1$ donc $(p-1) \not\equiv 1 \pmod{q} \implies p-2 \not\equiv 0 \pmod{q}$. Donc q divise p donc nécessairement $q = p$.

Retour à l'énoncé, on se rappelle que $0 < n \leq 2p$, or n est un multiple de p donc $n = p$ ou $n = 2p$. Si $n = 2p$ alors son plus petit diviseur est 2 et on a déjà traité ce cas. Donc $n = p$.

On obtient alors $(p-1)^p + 1 \equiv 0 \pmod{p^{p-1}}$. En développant avec le binôme de Newton on obtient

$$(p-1)^p + 1 = p^p - \binom{p}{1}p^{p-1} + \dots + \binom{p}{3}p^3 - \binom{p}{2}p^2 + \binom{p}{1}p - 1 + 1 \equiv p^2 \pmod{p^3}$$

Tous les termes sont divisibles par p^3 sauf éventuellement les 3 derniers et $\binom{p}{2}p^2 = \frac{p(p-1)}{2}p^2$ est un multiple de p^3 car $\frac{p-1}{2}$ est un entier. Conclusion : $p^3 \nmid (p-1)^p + 1$ donc $p-1 < 3 \implies p = 2$ ou $p = 3$.

Le cas $p = 2$ a déjà été traité, pour $p = 3$, la démonstration de $n = p$ tient toujours donc $n = 3$, et on trouve notre dernier couple solution $(3, 3)$ car $9 \mid 8 + 1$. Finalement les solutions de l'équation sont $(1, p)$; $(2, 2)$ et $(3, 3)$.

Solution de l'exercice 14

Remarquons que $n = 1$ convient. De plus, $2^n + 1$ étant toujours impair, n est impair. Maintenant, supposons $n > 1$ et soit p le plus petit diviseur premier de n , et ω l'ordre de 2 modulo p . Il faut commencer faire le même raisonnement qu'à l'exercice 8 maintenant, pour trouver $\omega = 2$. En effet, premièrement,

$$1 \leq \omega < p$$

Puis, $2^n \equiv -1 \pmod{p}$ implique

$$\omega \nmid n$$

Enfin, en mettant au carré, on a $2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ d'où

$$\omega \mid 2n$$

Si ω admet un diviseur premier q autre que 2, alors on a par le lemme de Gauss,

$$q \mid 2n \implies q \mid n$$

Mais donc q est un diviseur premier de n , et $q \leq \omega < p$: cela contredit la minimalité de p , absurde. ω est donc une puissance de 2, or

$$\omega \mid 2n \implies \omega \mid 2 \text{ par Gauss, puisque } n \text{ est impair}$$

De plus, $\omega \nmid n$, donc $\omega \neq 1$. On a donc finalement $\omega = 2$. Alors :

$$p \mid 2^2 - 1$$

$$p = 3$$

Le plus petit diviseur premier de n est donc 3. Cependant, nous n'en connaissons pas la puissance dans la décomposition en produit de facteurs premiers (valuation 3-adique, notée v_3). Nous allons montrer qu'il s'agit de 1. Il nous faut utiliser le LTE, **Lifting The Exponent Lemma** :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, p un nombre premier impair, $n \in \mathbb{N}$, tels que $p \mid a - b$, $p \nmid a$ ou b

Alors $v_p(a^n - b^n) = v_p(a - b) + v_p(n)$. Ainsi, pour n impair et en remplaçant b par $-b$, on obtient $v_p(a^n - (-b)^n) = v_p(a - (-b)) + v_p(n)$ quand $n \mid a + b$ et ni a ni b .

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a + b) + v_p(n)$$

n est impair, $3 \mid 2^1 + 1$, 3 ne divise ni 2 ni 1. On peut appliquer le LTE donc :

$$v_3(2^n + 1) = v_3(2 + 1) + v_3(n)$$

$$= 1 + v_3(n)$$

D'autre part, $v_3(n^2) = 2v_3(n)$, et

$$n^2 \mid 2^n + 1 \implies v_3(n^2) \leq v_3(2^n + 1)$$

Autrement dit, il nous faut avoir

$$2v_3(n) \leq 1 + v_3(n)$$

$$v_3(n) \leq 1$$

D'où $v_3(n) = 1$.

Ainsi, la plus grande puissance de 3 divisant n est 1. De plus, $n = 3$ convient. En effet, $3^2 \mid 2^3 + 1$.

Maintenant supposons $n > 3$: n possède donc au moins un autre diviseur premier (3 étant à la puissance 1). Soit donc p' le deuxième plus petit diviseur premier de n , et ω' l'ordre de 2 modulo p' . Nous avons donc, de même, $\omega' < p'$, $\omega' \nmid n$, $\omega' \mid 2n$. Premièrement, $2 \mid \omega'$ puisque sinon, ω' et 2 seraient premiers entre eux, ce qui est absurde par le lemme de Gauss : $\omega' \mid 2n \implies \omega' \mid n$. On a donc $\frac{\omega'}{2} \mid n$, or $\frac{\omega'}{2} < \omega' < p'$. Les seuls diviseurs de n strictement inférieurs à p' étant 1 et 3 (car on n'a pas de plus grande puissance de 3 divisant n . Sinon, on aurait par exemple pu avoir $9 \mid n$ et $p' = 11$), $\frac{\omega'}{2} = 1$ ou $\frac{\omega'}{2} = 3$. D'où

$$\omega' = 2 \text{ ou } \omega' = 6$$

Le premier cas donne donc $p' \mid 2^2 - 1$, donc $p' = 3$. Cela est absurde car $p' > 3$. Le deuxième cas nous donne $p' \mid 2^6 - 1$, autrement dit, $p \mid 7 \times 9$. Ainsi,

$$p' = 7$$

.

Le problème étant que $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod{7}$, donc $\omega' \mid 3$ (et c'est 3), d'où $\omega' \neq 6$. Cela est absurde. n n'admet donc pas de deuxième plus petit diviseur. En conclusion, les solutions sont $n = 1$ et $n = 3$.

Solution de l'exercice 15

Soit (u_n) une suite vérifiant l'énoncé. Montrons que (u_n) est constante égale à 1. On considère l'ensemble

$$E = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathbb{N}, p \mid u_n\}$$

On suppose par l'absurde que E est non vide. Soit q son plus petit élément, et m tel que $q \mid u_m$. On a donc $q \mid 2^{u_{m+1}} - 1$, donc l'ordre ω de 2 modulo q divise u_{m+1} . L'ordre ne vaut pas 1 car $q > 1$. Ainsi il existe r premier tel que $r \mid \omega \mid u_{m+1}$. Donc $r \in E$ et $r < q$, ce qui contredit la minimalité de q . E est donc vide. Ainsi (u_n) est constante égale à 1. Réciproquement cette suite vérifie bien les conditions de l'énoncé. La seule solution est donc la suite constante égale à 1.

5 Arithmétique : TD de pot pourri (Akin et Emilhan)

Pour s'échauffer

Exercice 1

Soit p un nombre premier. Trouver tous les couples de naturels non nuls et premiers entre eux (m, n) tels que

$$\frac{p+m}{p+n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{p^2}$$

Exercice 2

Soit $n > 0$. Montrer que $1+n+\dots+n^{46}$ n'admet aucun diviseur dans l'ensemble $\{2, 3, \dots, 46\}$.

Exercice 3

Trouver tous les $n > 0$ tels que

$$\frac{n^{3n-2} - 3n + 1}{3n - 2}$$

soit un nombre entier.

Pour s'entraîner

Exercice 4

Soit $n \geq 1$. Montrer que les nombres $1^1, 3^3, 5^5, \dots, (2^n - 1)^{2^n - 1}$ ont tous des restes différents modulo 2^n .

Exercice 5

Un sous-ensemble A des nombres naturels est appelé *bon* si tout naturel $n > 0$ possède au plus un diviseur premier p tel que $n - p \in A$.

- (a) Montrer que l'ensemble $S = \{0, 1, 4, 9, \dots\}$ des carrés parfaits est bon.
- (b) Trouver un ensemble bon infini qui ne contient aucun carré parfait.

Exercice 6

Soit n un entier strictement positif. Démontrer qu'il existe un nombre à n chiffres divisible par 5^n et dont tous les chiffres sont impairs.

Exercice 7

Trouver tous les entiers $n \geq 0$ tels que les nombres $2^n + 49$ et $2^{n+1} + 49$ sont chacun le produit de deux nombres premiers ayant la même différence.

Exercice 8

Soit $n \geq 1$ un entier. Trouver tous les diviseurs $d \geq 1$ de $3n^2$ tels que $n^2 + d$ soit un carré parfait.

Pour s'étirer**Exercice 9**

Trouver tous les entiers composés $n > 1$ qui ont la propriété suivante : si $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ sont les diviseurs de n rangés dans l'ordre croissant, alors d_i divise $d_{i+1} + d_{i+2}$ pour tout $1 \leq i \leq k - 2$.

Exercice 10

Trouver tous les carrés parfaits de la forme $20252025 \dots 2025$.

Exercice 11

Soit m et n deux entiers strictement positifs tels que $10^m - 1$ divise n . Montrer que la somme des chiffres dans l'écriture en base 10 de n vaut au moins $9m$.

Exercice 12

Soit k et d des entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe un entier N tel que pour tout entier impair $n > N$, les chiffres dans la représentation de n^k en base $2n$ sont tous plus grands que d .

Solution de l'exercice 1

On développe l'égalité qui nous est donnée, et on obtient :

$$np^3 + mnp^2 = p^3m + p^2nm + pn + n^2$$

$$\iff np^3 = p^3m + pn + n^2.$$

On en déduit que $p \mid n^2$, donc n s'écrit sous la forme pn' , avec $n' \in \mathbb{N}^*$. De plus, $(m, n) = 1$ donc $p \nmid m$. On réécrit donc :

$$n'p^2 = pm + n' + n'^2.$$

Puisque $(n, m) = 1$, on a également $(n', m) = 1$, donc $n' \mid p$. Il nous reste donc deux cas à traiter :

Cas 1 : $n' = 1$.

L'équation de départ est alors équivalente à

$$p^2 = pm + 2.$$

Il faut donc que $p = 2$, et $4 = 2m + 2$. Si $p = 2$, on vérifie en effet que $(1, 2)$ est bien solution.

Cas 2 : $n' = p$.

L'équation de départ est alors équivalente à

$$p^2 = m + 1 + p \iff m = p^2 - p - 1.$$

On vérifie réciproquement que $(p^2, p^2 - p - 1)$ est bien solution car $p \nmid p + 1$.

En conclusion, le seul couple solution est $(p^2, p^2 - p - 1)$, sauf si $p = 2$, auquel cas $(1, 2)$ est une solution également.

Solution de l'exercice 2

Si $n = 1$, l'expression qui nous est donnée vaut 47, qui est premier, et n'a donc pas de diviseur

premier < 47 .

Si $n > 1$, l'expression qui nous est donnée se réécrit en

$$X(n) = \frac{n^{47} - 1}{n - 1}.$$

Soit p un facteur premier de $X(n)$. On désire montrer qu'il est ≥ 47 . Par hypothèse, p divise $X(n)$, donc $n^{47} - 1$ aussi. Donc n est inversible modulo p , et son ordre o doit diviser 47. Puisque 47 est premier, on obtient $o = 1$ ou $o = 47$. De plus, par petit théorème de Fermat, o divise $p - 1$. Ainsi, si $p < 47$, on a $o = 1$. Cela veut dire que $n \equiv 1 \pmod{p}$. Par conséquent, $X(n) = 1 + n + \dots + n^{46} \equiv 47 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Cela est absurde, donc $p > 47$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

Soit $n > 1$ une potentielle solution. Soit p le plus petit facteur premier de $3n - 2$ (qui est bien > 1). On sait donc que $p \mid n^{3n-2} - 3n + 1 + (3n - 2) = n^{3n-2} - 1$. Donc p ne divise pas n , et l'ordre o de n modulo p divise $3n - 2$. Cependant, on sait également que o divise $p - 1$. Il est donc premier avec $3n - 2$, qui n'a aucun facteur premier $< p$. Donc $o = 1$, ce qui veut dire que $p \mid n - 1$. Mais par hypothèse, $p \mid 3n - 2$. Donc $p \mid 3n - 2 - 3(n - 1) = 1$, ce qui est absurde.

Il n'y a donc aucune solution lorsque $3n - 2 > 1$, et on vérifie que $n = 1$ soit une solution. Il s'agit donc de la seule.

Solution de l'exercice 4

Nous allons procéder par récurrence, l'initialisation correspondant au cas $n = 1$ étant claire. Soit à présent $n \geq 1$ un entier pour lequel les entiers de l'ensemble $A_n := \{1^1, 3^3, \dots, (2^n - 1)^{2^n-1}\}$ ont tous des restes différents modulo 2^n . Nous voulons démontrer que les entiers de $A_{n+1} = \{1^1, 3^3, \dots, (2^{n+1} - 1)^{2^{n+1}-1}\}$ ont tous des restes différents modulo 2^{n+1} . Pour ce faire, comparons les entiers k^k et $(k + 2^n)^{k+2^n}$ modulo 2^{n+1} lorsque k est un entier impair : d'après le théorème d'Euler,

$$1 \equiv (k + 2^n)^{\phi(2^{n+1})} \equiv (k + 2^n)^{2^n} \pmod{2^{n+1}}.$$

Ainsi,

$$(k + 2^n)^{k+2^n} \equiv (k + 2^n)^k = k^k + \binom{k}{1} k^{k-1} \times 2^n + \sum_{i=2}^k \binom{k}{i} 2^{ni} k^{k-i} \equiv k^k + 2^n \pmod{2^{n+1}}.$$

Autrement dit, les entiers $(k + 2^n)^{k+2^n}$ et k^k sont égaux modulo 2^n mais différents modulo 2^{n+1} . Nous pouvons maintenant montrer que tous les éléments de A_{n+1} sont distincts modulo 2^{n+1} : deux éléments de A_n sont différents modulo 2^n par hypothèse de récurrence, donc différents modulo 2^{n+1} . De même, deux éléments $(a + 2^n)^{a+2^n}$ et $(b + 2^n)^{b+2^n}$ de $A_{n+1} \setminus A_n$ (avec $1 \leq a \neq b < 2^n$) sont différents modulo 2^n car respectivement congrus à $a^a \not\equiv b^b \pmod{2^n}$, donc sont différents modulo 2^{n+1} . Enfin, soit a^a un élément de A_n et $(b + 2^n)^{b+2^n}$ un élément de $A_{n+1} \setminus A_n$. On a $(b + 2^n)^{b+2^n} - a^a \equiv b^b + 2^n - a^a \pmod{2^{n+1}}$. Par hypothèse de récurrence, si $a \neq b$, alors ce reste est non nul modulo 2^n et donc a^a et $(b + 2^n)^{b+2^n}$ sont différents modulo 2^n , puis modulo 2^{n+1} . Si par contre $a = b$, alors $(b + 2^n)^{b+2^n} - a^a \equiv 2^n \pmod{2^{n+1}}$, de sorte que ces deux éléments soient différents modulo 2^{n+1} . Deux éléments quelconques de A_{n+1} sont donc toujours différents modulo 2^{n+1} , ce qui conclut la récurrence.

Solution de l'exercice 5

- (a) Soit $n > 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe deux diviseurs premiers distincts $p < q$ de n et des naturels $k, l \geq 0$ tels que $n - p = k^2$ et $n - q = l^2$. Puisque $p \mid n$, on sait que $p \mid k^2$, donc $p \mid k$ et de même $q \mid l$. En outre, en soustrayant nos équations, on obtient $q - p = k^2 - l^2 = (k - l)(k + l) > 0$.

Puisque $p \mid n$ et que $p \neq q$, on sait que $l \neq 0$. Or, $q^2 \mid l$. Ainsi,

$$(k - l)(k + l) \geq 1 \cdot q^2 > q > q - p,$$

ce qui est absurde.

- (b) Considérons $B = \{2, 3, 5, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers. Il s'agit bel et bien d'un ensemble infini qui est disjoint de A . De plus, si $n > 0$ et si p est un diviseur premier de n pour lequel il existe $q \in B$ tel que $n - p = q$, alors p divise q , donc $q = p$ et $n = 2p$. Cela montre qu'il existe au plus un tel p , ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6

Montrons le résultat par récurrence sur $n \geq 1$. L'initialisation pour $n = 1$ se fait avec 5. Soit $n \geq 1$ tel qu'il existe un nombre à n chiffres x_n dont tous les chiffres sont impairs et tel que x_n soit divisible par 5^n . On veut construire une solution pour $n + 1$ en rajoutant un chiffre à gauche, ce qui revient à trouver un chiffre impair C tel que

$$C \cdot 10^n + x_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}} \iff 2^n C + \frac{x_n}{5^n} \equiv 0 \pmod{5}.$$

Écrivons $x_n = k \cdot 5^n$, avec $k \geq 1$. Il nous faut donc trouver un chiffre impair C tel que

$$2^n C + k \equiv 0 \pmod{5}.$$

Puisque 2^n est inversible modulo 5, il suffit d'avoir $C \equiv -k \cdot 2^{-n} \pmod{5}$. Puisque 5 est impair, on peut bien s'assurer que le chiffre choisi soit impair, qui à ajouter/enlever 5.

Solution de l'exercice 7

Notons que $n = 0$ n'est clairement pas solution, puisque 50 n'est pas le produit de deux nombres premiers. Soit $n \geq 1$ un entier solution. Soit x la différence commune, et p, q les deux nombres premiers tels que $2^n + 49 = p(p + x)$ et $2^{n+1} + 49 = q(q + x)$, avec $q > p$. On a de plus que $p + x$ et $q + x$ sont des nombres premiers. Les entiers $2^n + 49$ et $2^{n+1} + 49$ sont impairs, donc $p, q \geq 3$. Si $x = 1$, alors p et $p + 1$ sont des nombres premiers, donc $p = 2$, absurde. Supposons donc dorénavant $x \geq 2$. En particulier, $q + x > p + x > 3$, et $q > p \geq 3$.

Remarquons que, pour tout entier a impair, $2^a + 1 \equiv (-1)^a + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. L'un de n ou $n + 1$ est impair, donc l'un de $2^n + 49$ ou $2^{n+1} + 49$ est divisible par 3. L'un des quatre nombres premiers $p, q, p + x$ et $q + x$ est donc égal à 3. Il en découle que $p = 3$, puisque les 3 autres sont strictement plus grands que 3. Ensuite, remarquons que

$$2p(p + x) = 2^{n+1} + 98 > 2^{n+1} + 49 = q(q + x),$$

de sorte que $3 < q < \frac{2p(p+x)}{q+x} < 2p = 6$. Dès lors, $q = 5$. Nous avons enfin

$$5(5 + x) = 2^{n+1} + 49 = 2(2^n + 49) - 49 = 6(3 + x) - 49$$

donc $x = 56$, puis $2^n + 49 = 177$ donc $n = 7$. Réciproquement, $n = 7$ est bien solution puisque $2^7 + 49 = 3 \times 59$ et $2^8 + 49 = 5 \times 61$.

Solution de l'exercice 8

Soit $d \geq 1$ un diviseur de $3n^2$ tel que $n^2 + d$ soit un carré parfait. Puisque $n^2 < n^2 + d \leq n^2 + 3n^2 = (2n)^2$, il existe $1 \leq k \leq n$ tel que $n^2 + d = (n+k)^2$. En simplifiant, on obtient $d = 2kn + k^2$, de sorte que $k(k+2n) | 3n^2$. Notons $\alpha = \gcd(k, n) \geq 1$. On dispose d'entiers $\ell, m \geq 1$ premiers entre eux tels que $k = \alpha\ell$, $n = \alpha m$. La relation de divisibilité précédente s'écrit alors, après simplification, $\ell(\ell+2m) | 3m^2$. Or on a $\gcd(\ell+2m, m) = \gcd(\ell+2m-2m, m) = \gcd(\ell, m) = 1$, c'est-à-dire $\ell+2m$ premier avec m , donc avec m^2 . Comme $\ell+2m | 3m^2$, on a par le lemme de Gauss $\ell+2m | 3$, c'est-à-dire $\ell+2m \in \{1, 3\}$. Mais $\ell, m \geq 1$ donc $\ell+2m \geq 3$. Autrement dit, $\ell+2m = 3$ et donc nécessairement, $\ell = m = 1$. Alors $k = n = \alpha$, et $d = k(k+2n) = 3n^2$. Réciproquement, $d = 3n^2$ convient puisque c'est un diviseur de $3n^2$ et que $n^2 + 3n^2 = (2n)^2$.

Solution de l'exercice 9

Montrons que les entiers solutions sont exactement ceux de la forme p^l , où p est un nombre premier et $l \geq 2$.

Soit $n > 1$ un entier composé qui est une solution, et soit p son plus petit facteur premier. En appliquant notre hypothèse à $i = k-2$, on a

$$d_{k-2} = \frac{n}{d_2} \mid d_{k-1} + d_k = \frac{n}{p} + n.$$

Puisque d_{k-2} divise n , on en déduit que $\frac{n}{d_2} \mid \frac{n}{p}$, et donc que $p \mid d_2$. On peut donc écrire $d_2 = p \cdot k$, où $k > 1$. Or, $1 < k < d_2$ est un diviseur de n , donc $k = d_1 = p$. Ainsi, $p \mid d_1$ et $p \mid d_2$. Or, si $p \mid d_j$ et $p \mid d_{j+1}$, avec $1 \leq j \leq k-2$, alors puisque $d_j \mid d_{j+1} + d_{j+2}$, on a que $p \mid d_{j+2}$ également. Par récurrence, on en déduit donc que tous les diviseurs > 1 de n sont divisibles par p , donc n est de la forme annoncée.

Réciproquement, si $n = p^l$, avec p premier et $l \geq 2$, alors $k = l+1$ et pour tout $1 \leq i \leq k$, $d_i = p^{i-1}$. Ainsi, si $1 \leq i \leq k-2$, $d_i = p^{i-1} \mid p^i + p^{i+1} = d_{i+1} + d_{i+2}$.

Solution de l'exercice 10

Après division par 2025, qui est un carré, le problème est équivalent à trouver tous les $n \geq 0$ tels que $1 + 10^4 + \dots + (10^4)^n = \frac{10^{4(n+1)} - 1}{10^4 - 1}$ soit un carré. En enlevant le 9 du dénominateur (qui est un carré), on se ramène à trouver quand est-ce que $10^{4(n+1)} - 1 = 1111 \times x^2 = 11 \times 101 \times x^2$, ou encore, quand est-ce que

$$(10^{n+1} - 1)(10^{n+1} + 1)(10^{2(n+1)} + 1) = 11 \times 101 \times x^2.$$

Soit $n \geq 0$ un tel entier. Appelons les 3 facteurs du membre de gauche A, B et C respectivement. Notons que $AB = C - 2$. Ainsi, puisqu'ils sont tous les 3 impairs, on sait que C est premier avec A et B . De plus, A et B sont premiers entre eux puisque ce sont deux nombres impairs qui diffèrent de 2. Remarquons enfin que 11 et 101 sont tous deux premiers. Ainsi, puisque A, B et C sont premiers entre eux deux à deux, les trois facteurs valent $a^2, 11b^2$ et $101c^2$ dans un certain ordre, avec abc des entiers vérifiant $abc = x$. En particulier, l'un des trois est un carré. Clairement C n'est pas un carré, car $10^{2(n+1)}$ est déjà un carré et est strictement positif. B n'en est pas un non plus puisqu'il est congru à 2 modulo 3. Il en découle que A est un carré. Cependant, si $n \geq 1$, $10^{n+1} - 1 \equiv -1 \pmod{4}$ ne peut être un carré. Dès lors, $n = 0$. Réciproquement, $n = 0$ convient car 2025 est un carré.

Solution de l'exercice 11

L'idée de l'exercice est de remplacer n par une somme de puissances de 10 dont tous les

exposants sont $\leq m - 1$.

On écrit $n = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^i$ l'écriture de n en base décimale, et on pose $S = \sum_{i=0}^k a_i$. En utilisant le fait que $10^m \equiv 1 \pmod{10^m - 1}$, on peut se ramener à un nouveau multiple de $10^m - 1$ tel que $a_i = 0$ pour tout $i \geq m$ en conservant S , mais en autorisant les a_i à être ≥ 10 pour $i < m$. Dès qu'un a_i est ≥ 10 , on peut le diminuer de 10 et augmenter a_{i+1} de 1, de sorte que l'on garde un multiple non nul de $10^m - 1$ en ayant diminué strictement la valeur de S (et si $i = m - 1$, on augmente a_0 de 1 au lieu de a_m). Puisque S décroît strictement et reste > 0 lors d'une telle opération, on obtient après un nombre fini d'opérations un multiple > 0 de $10^m - 1$ possédant au plus m chiffres, et il s'agit donc exactement de $10^m - 1$. La somme des chiffres de $10^m - 1$ vaut $9m$, et la somme des a_i a diminué au fil de nos opérations, donc la somme initiale était bien $\geq 9m$.

Solution de l'exercice 12

Pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, on note $r_i(j)$ le reste de la division euclidienne de j par 2^i . Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit une suite $(b_i(n))_{0 \leq i \leq k}$ par $b_k = 1$ puis, pour tout $1 \leq i \leq k$, $b_{i-1} = r_{i-1}(nb_i)$. On a, pour tout i , $0 \leq b_i < 2^i$ et $nb_i \geq b_{i-1}$. Il en découle que chaque $c_i(n) := \frac{nb_{i+1} - b_i}{2^i}$ est un entier naturel strictement inférieur à $2n$. Cependant,

$$\sum_{i=0}^{k-1} (2n)^i c_i = \sum_{i=0}^{k-1} (2n)^i \cdot \frac{nb_{i+1} - b_i}{2^i} = \sum_{i=0}^{k-1} (n^{i+1} b_{i+1} - n^i b_i) = n^k b_k - b_0 = n^k$$

Dès lors, les chiffres de l'écriture en base $2n$ de n^k sont exactement les c_i . Il en découle que $N = 2^k(d + 1)$ convient. En effet, si $n > N$ est impair, alors b_i est impair dès que $i \geq 1$ par récurrence immédiate. En particulier $b_i \geq 1$ lorsque $i \geq 1$ et, pour tout $i \leq k - 1$, $c_i(n) = \frac{nb_{i+1} - b_i}{2^i} > \frac{N - 2^k}{2^k} = d$.

6 Combinatoire : Double comptage (Gaëtan et Hadriel)

Ce cours est partiellement inspiré de celui donné par Raphaël en 2023 au stage de Valbonne [Groupe C page 303](#) ainsi que du cours ["Counting in two ways"](#) disponible en anglais sur le site de Yufei Zhao.

La technique de double-comptage consiste à trouver une certaine quantité qui se dénombre naturellement de deux manières différentes dans le cadre de l'exercice. Cela permet d'en déduire des relations intéressantes utiles à sa résolution.

Voyons un exemple simple : pour choisir k personnes dans une assemblée de n , on peut choisir les k personnes, ce qui fait $\binom{n}{k}$ choix possibles, ou choisir les $n - k$ qu'on ne choisit pas, ce qui fait $\binom{n}{n-k}$ choix possibles. Ainsi $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Autre exemple : prenons un graphe G avec m arêtes. Si on note S le nombre de paires sommet-arête (s, a) où s est une extrémité de a , on a à la fois $S = 2m$ car chaque arête est liée à deux sommets, et d'autre part $S = \sum_{s \text{ sommet}} \deg s$ car $\deg s$ est le nombre de paires reliées à s .

On peut aussi souvent ramener les problèmes à des problèmes de comptage dans une grille. Par exemple, pour l'exemple précédent, si on assigne à chaque colonne d'une grille un sommet du graphe et à chaque ligne un sommet du graphe, et qu'on place un 1 dans une entrée si le sommet de sa ligne et de sa colonne sont reliés et un 0 sinon, le double-comptage précédent revient à dire que le nombre de 1 dans la grille est égal à la somme des nombres de 1 dans chaque colonne.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Représenter par une grille (voire un graphe, possiblement biparti) la situation permet souvent de rendre plus naturel le double-comptage, en comptant par exemple tantôt relativement aux lignes tantôt aux colonnes.

La difficulté va être de déterminer quelle est la quantité à double compter : on se ramène alors à deux problèmes de comptage.

Pour trouver cette quantité, il faut chercher à relier ensemble les différentes informations que nous prodiguent l'exercice. On peut chercher à identifier laquelle de ces informations est la plus "extravagante", ie celle qui va être la plus dure à utiliser (voir l'exercice 6 pour un exemple).

Exercices

Exercice 1

À Valbonne, n problèmes ont été accrochés sur un mur. Chacun des m stagiaires a résolu

au moins $\frac{n}{2}$ problèmes. Montrer qu'il existe un problème qui a été résolu par au moins $\frac{m}{2}$ stagiaires.

Solution de l'exercice 1

On compte P = le nombre total de problèmes résolus par les stagiaires : Il y en a au moins

$$P \geq m \times \frac{n}{2} = \frac{nm}{2}.$$

Si on suppose par l'absurde qu'aucun exercice n'a été résolu par $\frac{m}{2}$ stagiaire on a

$$P < n \times \frac{m}{2} = \frac{nm}{2}.$$

Absurde. Remarque : il ne faut pas hésiter à raisonner par l'absurde pour se donner une information de plus et avancer dans la résolution.

On peut également construire un tableau (ou de manière équivalente un graphe biparti) dont les colonnes correspondent aux stagiaires et les lignes aux problèmes : on compte alors le nombre de 1 dans le tableau d'une part comme la somme des sommes de chaque ligne et d'autre part comme la somme des sommes de chaque colonne.

Exercice 2

Dans une école, chaque club compte 3 membres et chaque élève est membre de 3 clubs. Montrer qu'il y a autant de clubs que d'élèves.

Solution de l'exercice 2

On compte N = le nombre total d'inscriptions à un club. Avec C le nombre de clubs et E le nombre d'élèves on a

$$N = 3C \quad \text{et} \quad N = 3E.$$

Donc $C = E$.

Remarque : l'exercice est très similaire au précédent, le double comptage peut à nouveau s'exprimer comme un comptage des arêtes dans un graphe biparti, ou des 1 dans un tableau défini de manière analogue à celui de l'exercice précédent.

Exercice 3

Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et qu'un élève a toujours exactement ℓ professeur. Déterminer une relation entre m, n, k, ℓ .

Solution de l'exercice 3

On note I le nombre de relations élèves-professeurs alors

$$I = n \times \ell \quad \text{et} \quad I = m \times k$$

et donc $n \times \ell = m \times k$.

Remarque : la remarque de l'exercice précédent tient encore.

Exercice 4

Comptons les triplets (x, y, z) de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ qui vérifient $z > \max\{x, y\}$.

Solution de l'exercice 4

On compte T le nombre de triplets. Pour chaque $z \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ il y a $(z-1)^2$ couples (x, y) satisfaisants $x, y < z$. Donc

$$T = \sum_{z=1}^{n+1} (z-1)^2 = 1 + 2^2 + \dots + n^2.$$

On compte T d'une autre manière. Il y a

- $\binom{n+1}{2}$ triplets tels que $x = y < z$,
- $\binom{n+1}{3}$ triplets qui correspondent à $x < y < z$,
- $\binom{n+1}{3}$ triplets qui correspondent à $y < x < z$,

On en déduit que

$$T = 2 \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

et on en déduit la formule bien connue

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 5

Existe-t-il un polyèdre comportant un nombre impair de faces, chacune ayant un nombre impair d'arêtes ?

Solution de l'exercice 5

On fait la somme du nombre d'arêtes de toutes les faces du polyèdre. On obtient alors un nombre impair. Or toutes les arêtes ont été comptées deux fois. Ce nombre est donc égal à 2 fois le nombre d'arêtes du polyèdre qui est donc un nombre pair. Absurde.

Exercice 6

200 élèves participent à une compétition de mathématiques comportant 6 problèmes. On sait que chaque problème a été résolu par au moins 120 participants. Montrer qu'il existe deux élèves qui à eux deux ont résolu tous les problèmes de la compétition.

Solution de l'exercice 6

De nouveau, on raisonne par l'absurde : plutôt que de chercher une telle paire d'élèves, on suppose que pour chaque paire d'élèves il existe un exercice qu'ils ont tous les deux échoué : on gagne une information significative.

On a alors deux informations : pour savoir quoi compter, on utilise celle qui semble la plus alambiquée, ie la moins simple à utiliser dans un comptage. Ici, cela semble être celle que l'on obtient par le raisonnement par l'absurde.

Représentons la situation sous forme d'un tableau afin de simplifier le comptage : on construit

un tableau à 6 colonnes et 200 lignes où chaque ligne correspond à un étudiant et chaque colonne à un problème : on écrit un 1 dans une entrée si l'étudiant associé à la ligne a résolu l'exercice et un 0 sinon.

On traduit nos informations : d'une part il y a au plus 80 fois 0 dans chaque colonne, et d'autre, pour chaque paire de ligne il existe une colonne dans laquelle les deux lignes ont un 0. En se concentrant sur cette dernière information, il apparaît naturel de compter A le nombre de paires de deux 0 étant dans une même colonne. Comme chaque paire d'élèves en donne une de manière injective d'après la deuxième information, on a $A \geq \binom{200}{2}$. Comme il y a au plus 80 zéros dans une colonne donnée, il y a au plus $\binom{80}{2}$ paires dans chaque colonne, et donc $A \leq 6 \cdot \binom{80}{2}$. On conclut à une contradiction car $\binom{200}{2} = 19900 > 18950 = 6 \cdot \binom{80}{2}$.

Exercice 7

Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et que deux élèves ont toujours exactement ℓ professeurs en commun. Déterminer une relation entre m, n, k, ℓ .

Solution de l'exercice 7

On compte T = le nombre de triplet élève-élève-professeurs dont le professeur est commun aux deux élèves.

Méthode 1 : Chaque professeur a $\binom{k}{2}$ binômes d'élèves dans sa classe et donc

$$T = m \times \binom{k}{2}.$$

Méthode 2, il y a $\binom{n}{2}$ paires d'élèves possibles et alors

$$T = \binom{n}{2} \times \ell$$

On obtient alors comme relation

$$n(n-1)\ell = mk(k-1).$$

Remarque : l'exercice est très similaire à l'exercice précédent et se fait également de manière analogue.

Exercice 8

Dans une compétition, il y a a participants et b juges, où $b \geq 3$ est un entier impair. Chaque juge donne à chaque participant une mention "succès" ou "échec". Soit k un entier tel que pour deux juges quelconques, leurs jugements coïncident pour au plus k participants. Montrer que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Solution de l'exercice 8

Source : IMO 1998

Construisons comme d'habitude un tableau. Plaçons b lignes, chacune représentant un juge, et a colonnes, chacune représentant un concurrent. On remplit les cases avec 1 (pour « admis ») ou 0 (pour « refusé »).

Soit T l'ensemble des paires d'entrées situées dans la même colonne et qui sont toutes deux égales (soit deux 0, soit deux 1). Nous allons compter $|T|$ de deux manières différentes.

1. Comptage par les lignes.

Puisque pour toute paire de juges, leurs évaluations coïncident pour au plus k concurrents, alors pour toute paire de lignes, il y a au plus k colonnes contribuant à T . Il y a $\binom{b}{2}$ façons de choisir deux lignes, donc

$$|T| \leq k \binom{b}{2} = k \cdot \frac{b(b-1)}{2}.$$

2. Comptage par les colonnes.

Fixons une colonne. Supposons qu'il y ait p uns et q zéros dans cette colonne, avec $p + q = b$. Le nombre de paires coïncidant dans cette colonne est

$$\binom{p}{2} + \binom{q}{2}.$$

Comme b est impair, on obtient à l'aide de l'inégalité de Karamata comme la fonction $x \rightarrow \frac{x(x-1)}{2}$ est convexe, on a

$$\binom{p}{2} + \binom{q}{2} \geq \binom{\frac{b+1}{2}}{2} + \binom{\frac{b-1}{2}}{2} = \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Ainsi, chaque colonne contribue au moins $\frac{(b-1)^2}{4}$. Comme il y a a colonnes, on a

$$|T| \geq a \cdot \frac{(b-1)^2}{4}.$$

3. Conclusion.

En combinant les deux bornes,

$$a \cdot \frac{(b-1)^2}{4} \leq |T| \leq k \cdot \frac{b(b-1)}{2}.$$

On en déduit

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 9

Soient n et p des entiers > 1 . Dans une assemblée de n personnes, deux personnes quelconques ont au plus p connaissances communes; bien sûr, si A connaît B , alors B connaît A . Montrer que le nombre de paires non ordonnées $\{A, B\}$ de personnes qui se connaissent est inférieur ou égal à $\sqrt{pn^3}$.

Solution de l'exercice 9

Source : TST français février 2014

Notons $A_1, \dots, A_n$ les personnes et, considérons le graphe simple et non orienté dont les sommets sont les A_i , et où deux personnes A_i et A_j sont reliées par une arête si et seulement si elles se connaissent.

Pour tout i , notons d_i le degré de A_i (c'est-à-dire le nombre de personnes que connaît A_i). Il s'agit de prouver que le nombre d'arêtes a de ce graphe vérifie

$$a \leq \sqrt{pn^3}.$$

Il est bien connu que

$$2a = \sum_{i=1}^n d_i.$$

Soit M le nombre de paires d'arêtes $\{XY, YZ\}$ ayant un sommet commun. Pour tout i , le sommet A_i joue le rôle de Y autant de fois que l'on peut choisir deux sommets adjacents à A_i . Ainsi,

$$M = \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2}. \quad (1)$$

D'autre part, d'après l'énoncé, deux sommets quelconques ont toujours au plus p sommets adjacents communs. Ainsi,

$$M \leq p \binom{n}{2}. \quad (2)$$

De (1) et (2), on déduit que

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} \leq p \binom{n}{2}. \quad (3)$$

Or, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x(x-1)$ est convexe sur $\mathbb{R}$ donc, d'après l'inégalité de Jensen, on a

$$\sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} \geq n \cdot \binom{\frac{2a}{n}}{2}. \quad (4)$$

De (3) et (4), on obtient que

$$2a(2a - n) \leq pn^2(n - 1) \leq pn^3,$$

ou encore

$$4a^2 - 2na - pn^3 \leq 0.$$

Si $a \geq \sqrt{pn^3}$, alors

$$0 \geq 4a^2 - 2na - pn^3 = (3a - 2n)a \geq (3\sqrt{pn} - 2)na \geq na > 0,$$

ce qui conclut.

Exercice 10

Prouver ces égalités sans utiliser la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$\binom{n}{s} = \frac{n}{s} \binom{n-1}{s-1}, \quad \binom{n}{r} \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \binom{n-k}{r-k},$$

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}, \quad \binom{n}{s} = \frac{n}{n-s} \binom{n-1}{s},$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1}, \quad \sum_{i=0}^r \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$$

Solution de l'exercice 10

La bonne question ici est toujours : «*Que faut-il compter ?*».

Parmi n billes (alignées) il y a $s-1$ billes bleues et une bille rouge soit au total s billes de couleurs. Combien y a-t-il de configurations possibles (que l'on note C_1) ? Première méthode

1. Choisir la bille rouge : n choix possibles
2. Choisir les $s-1$ billes bleues parmi les $n-1$ billes restantes : $\binom{n-1}{s-1}$ choix possibles.

Donc $C_1 = n \times \binom{n-1}{s-1}$. On compte maintenant d'une autre manière :

1. Choisir les s billes de couleurs : $\binom{n-1}{s-1}$ choix possibles
2. Parmi ces s billes choisir la bille rouge : s choix possibles.

Donc $C_1 = s \times \binom{n-1}{s-1}$. Conclusion

$$s \times \binom{n-1}{s-1} = n \times \binom{n-1}{s-1}.$$

Parmi n billes (alignées) il y a k billes bleues et $r-k$ bille rouge soit au total r billes de couleurs. On note C_2 le nombre de configurations possibles. Comptons d'un première manière

1. Choisir les billes bleues : $\binom{n}{k}$ choix possibles
2. Choisir les $r-k$ billes rouges parmi les $n-k$ billes restantes : $\binom{n-k}{r-k}$ choix possibles.

Donc $C_2 = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{r-k}$. Et maintenant d'une autre manière :

1. Choisir les r billes de couleurs : $\binom{n}{r}$ choix possibles
2. Parmi ces r billes choisir les k billes bleues : $\binom{r}{k}$ choix possibles.

Donc $C_2 = \binom{n}{r} \times \binom{r}{k}$. Conclusion

$$\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{r-k} = \binom{n}{r} \times \binom{r}{k}.$$

On choisit n entiers parmi $\{1, \dots, 2n\}$ et on compte le nombre d'entiers choisis dans la première moitié $\{1, \dots, n\}$ que l'on note i . Sous cette condition dans la première moitié il y a donc $\binom{n}{i}$ configurations possibles. Dans la deuxième moitié il reste $n - i$ entiers ce qui donne $\binom{n}{n-i}$ configurations possibles donc au total $\binom{n}{i} \times \binom{n}{n-i}$. Lorsque i prend toutes les valeurs de 0 à n on obtient toutes les manières possibles de choisir n entiers dans $\{1, \dots, 2n\}$. Conclusion

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Parmi n billes (alignées) il y a s billes bleues et une bille rouge. Première méthode

1. Choisir la bille rouge : n choix possibles
2. Choisir les s billes bleues parmi les $n - 1$ billes restantes : $\binom{n-1}{s}$ choix possibles.

Donc $C_4 = n \times \binom{n-1}{s}$. Deuxième méthode :

1. Choisir les s billes bleue : $\binom{n}{s}$ choix possibles
2. Parmi les $n - s$ billes restantes choisir la bille rouge : $n - s$ choix possibles.

Donc $C_4 = (n - s) \times \binom{n}{s}$. Conclusion

$$n \times \binom{n-1}{s} = (n - s) \times \binom{n}{s}.$$

On cherche à calculer I_n le nombre de manières de choisir un nombre impair d'éléments parmi $\{1, \dots, n\}$ et on note également P_n le nombre de manières de choisir un nombre pair d'éléments parmi $\{1, \dots, n\}$. Pour calculer I_n on considère le premier élément $\{1\}$. Si $\{1\}$ est choisi, il reste à choisir un nombre pair d'éléments parmi $\{2, \dots, n\}$ soit P_{n-1} possibilités. Si $\{1\}$ n'est pas choisi il reste à choisir un nombre impair d'éléments parmi $\{2, \dots, n\}$ soit I_{n-1} possibilités. Conclusion

$$I_n = P_{n-1} + I_{n-1} = 2^{n-1}$$

car $I_{n-1} + P_{n-1}$ donne toutes les manières possibles de choisir un sous-ensemble de $\{1, \dots, n-1\}$.

Parmi $n + r + 1$ billes il y a r billes bleues et $n + 1$ billes noires. On note k la position de la première bille noire. Sous cette condition les $k - 1$ premières billes sont bleues et il reste $r - k + 1$ billes bleues à choisir parmi les $(n + r + 1) - k$ billes restantes, il y a donc $\binom{n+r+1-k}{r-k+1}$ configurations possibles. On a alors que

$$\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=1}^{r+1} \binom{n+r+1-k}{r-k+1} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \dots + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}$$

Exercice 11

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Solution de l'exercice 11

On commence par calculer

$$A_n = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$$

Parmi n billes il y a une bille rouge et un nombre quelconque de billes bleues. Première méthode :

1. On choisi k billes de couleurs : $\binom{n}{k}$ choix possibles.
2. On choisi la bille rouge parmi ces k billes : k choix possibles.

Au total en parcourant tous les k possibles on a obtient bien A_n . Deuxième méthode

1. On choisi la bille rouge : n choix possibles.
2. On choisi des billes bleues parmi les $n - 1$ billes restantes : 2^{n-1} choix possibles.

Et donc $A_n = n2^{n-1}$. Conclusion

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

On calcul maintenant $B_n = \sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k}$. Parmi n billes il y a une bille rouge, une bille verte et un nombre quelconque de billes bleues. Première méthode :

1. On choisi k billes de couleurs : $\binom{n}{k}$ choix possibles.
2. On choisi la bille rouge parmi ces k billes : k choix possibles.
3. On choisi la bille verte parmi ces $k - 1$ billes restante : $k - 1$ choix possibles.

Et on obtient B_n en considérant les différent k possibles. Deuxième méthode

1. On choisi la bille rouge : n choix possibles.
2. On choisi la bille verte : $n - 1$ choix possibles
3. On choisi des billes bleues parmi les $n - 2$ billes restantes : 2^{n-2} choix possibles.

Donc $B_n = n(n-1)2^{n-2}$. Conclusion

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} \\ &= B_n + A_n \\ &= n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\ &= n(n+1)2^{n-2} \end{aligned}$$

7 Combinatoire : TD pot pourri (Héloïse et Rémi)

L'objectif de ce TD pot-pourri est de passer en revue diverses astuces et idées combinatoires. Les exercices 1 à 7 ont été corrigés pendant la séance.

Exercices

Exercice 1

5 bateaux sont dans le port ouest et 5 autres dans le port est. Ils se déplacent tous vers le port opposé, en partant les uns derrière les autres. Lorsque 2 bateaux se rencontrent, ils changent instantanément de direction. Lorsque tous les bateaux sont revenus à un port, combien y a-t-il eu de rencontres ?

Exercice 2

Combien y a-t-il de permutations $(a_1, a_2, \dots, a_{3n})$ de $(1, 2, \dots, 3n)$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 3n\}$, la différence $k - a_k$ est divisible par 3.

Exercice 3

Une limace place 100 cailloux sur une ligne en alternant leur couleur : noir, blanc, ..., noir, blanc. A chaque étape, soit elle choisit 2 cailloux noirs tel qu'il n'y ait que des cailloux blancs entre les deux, et repeint tous ces cailloux blancs en noir, soit elle fait la même chose entre 2 cailloux blancs. Déterminer si la limace peut arriver à une configuration où il y a 50 cailloux blancs d'affilée et 50 cailloux noirs d'affilée.

Exercice 4

Considérons $4n$ points dans le plan trois à trois non alignés. Montrer que l'on peut former n quadrilatères non-croisés disjoints dont les sommets sont ces $4n$ points.

Exercice 5

Montrer que pour tous entiers positifs $a_1, \dots, a_n$,

$$a_1! a_2! \cdots a_n! \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)!$$

Exercice 6

Rémi et Héloïse jouent à un jeu. Chacun leur tour ils vont tracer une droite orientée, horizontale ou verticale. Rémi commence. Héloïse peut-elle toujours faire en sorte d'atteindre tous les carrefours en se déplaçant sur les droites orientées, et en partant de n'importe quelle droite, après chacun de ses coups ?

Exercice 7

Est-il possible de paver une grille 2021×2021 avec des dominos 1×2 horizontaux et des triominos 3×1 verticaux ?

Exercice 8

Considérons une grille $n \times n$. Un T -tetramino est un ensemble de quatre cases de la grille en "T". Trouver les valeurs de n telles que la grille $n \times n$ peut être recouverte par des T -tetramino sans chevauchement des pièces.

Exercice 9 (Formule d'Euler)

Considérons un graphe planaire à S sommets, A arêtes et F faces. Montrer que $S + F = A + 2$.

Exercice 10 (Shortlist IMO 2022, C3)

Un jardinier et un pivert jouent au jeu suivant, dans leur jardin dont la forme est celle d'une grille 2022×2022 formée de 2022^2 cases. Deux cases sont considérées comme voisines si elles ont un sommet ou une arête en commun. Initialement, chaque case abrite un arbre de taille 0. Puis, à chaque tour de jeu,

- le jardinier choisit une case ; les arbres de cette case et des cases adjacentes (soit de quatre à neuf cases en tout) voient tous leur taille augmenter de 1 ;
- le pivert choisit alors quatre cases ; les arbres de ces cases voient tous leur taille diminuer de 1 (ou rester égale à 0 si le pivert a choisi une case avec un arbre de taille 0).

On dit qu'un arbre est *resplendissant* si sa taille vaut au moins 10^6 . Trouver le plus grand entier A pour lequel le jardinier pourra s'assurer, en un nombre fini de tours de jeu, et quels que soient les choix du pivert, d'avoir fait pousser au moins A arbres resplendissants.

Exercice 11 (EGMO 2025 P5)

Soit $n > 1$ un entier. Une configuration est une grille $n \times n$ où chaque case contient une flèche pointée en haut ou en bas ou à droite ou à gauche. Turbo l'escargot commence dans une case puis à chaque étape, il va se déplacer d'une case dans la direction pointée par la case dans laquelle il se trouve. A chaque mouvement, la flèche tourne de 90 dans le sens anti-horaire. Une case est bonne lorsque Turbo passe par toutes les cases de la grille une seule fois puis retourne à sa case initiale, en partant de cette case. Déterminer en fonction de n le nombre maximal de cases bonnes pour toutes les configurations.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Lorsque 2 bateaux se croisent, ils échangent leur direction de navigation. Puisque les bateaux sont identiques, on peut considérer de façon équivalente que les deux bateaux se sont simplement croisés en gardant leur cap initial. C'est donc comme si les 5 bateaux partant du port ouest naviguaient toujours vers le port est, et inversement. Le nombre de rencontres devient alors le nombre de croisements : chaque bateau va croiser les 5 autres qui vont dans la direction opposée, on obtient donc 25 rencontres.

Solution de l'exercice 2

Répartissons les nombres de 1 à $3n$ dans 3 groupes en fonction de leur reste modulo 3. On a les n choix du groupe congru à 1 pour a_1 , n choix du groupe congru à 2 pour a_2 , n choix pour a_3 , puis $n - 1$ choix du groupe congru à 1 pour a_4 puisque a_1 a déjà été choisi, etc. On obtient finalement $n \times n \times n \times (n - 1) \times \dots \times 1 = (n!)^3$ permutations.

Solution de l'exercice 3

Appelons *streak* une suite de cailloux de la même couleur 1, telle que chacun des 2 cailloux aux extrémités de la streak a un caillou voisin de couleur 2.

Montrons que il y a toujours un nombre impair de cailloux dans une streak :

Initialisation : Dans la configuration initiale, toutes les streaks sont de longueur 1.

Hérédité : Lorsque la limace repeint des cailloux en une couleur 1, elle repeint tous les cailloux d'une streak B qui était placée entre 2 streaks A et C de couleur 1. Elle obtient alors une nouvelle streak de couleur 1 dont le nombre de cailloux est égal à la somme des nombres de cailloux de A et de B et de C. Or, par hypothèse de récurrence, ces 3 nombres sont impairs, leur somme l'est alors aussi.

Comme 50 est pair, il est impossible de construire deux streaks de longueur 50 comme demandé dans l'énoncé, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4

On utilise ici une technique classique dans les problèmes de géométrie combinatoire : quitte à faire une rotation du plan, on peut considérer que tous les points ont une abscisse distincte, et on les note $A_1, \dots, A_{4n}$ par ordre d'abscisse croissante. On considère les quadrilatères non croisés formés par les points $A_{4k+1}, A_{4k+2}, A_{4k+3}, A_{4k+4}$ (pour $1 \leq k \leq n$). Ces quadrilatères sont compris entièrement entre les abscisses de A_{4k+1} et A_{4k+4} et sont alors deux-à-deux disjoints.

Solution de l'exercice 5

$$\frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)!}{a_1! a_2! \dots a_n!}$$

correspond au nombre d'anagrammes de mots formés de a_1 lettres de type 1, a_2 lettres de type 2, ..., a_n lettres de type n . Ce nombre est entier, donc supérieur à 1. On a en plus de l'énoncé que $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)!$ est divisible par $a_1! a_2! \dots a_n!$, ce qui met la combinatoire au service de l'algèbre et de l'arithmétique simultanément !

Solution de l'exercice 6

La stratégie d'Héloïse va être de créer et garder un rectangle magique autour des carrefours.

Le rectangle magique est un rectangle dont les côtés orientés forment un cycle.

Une entrée (respectivement sortie) est un carrefour entre une droite d avec une des droites du rectangle magique, tel que en partant de ce carrefour et en suivant la direction de d , on entre dans le (respectivement sort du) rectangle magique.

Si tous les carrefours se situent à l'intérieur de ce rectangle magique, Héloïse peut toujours choisir une droite quelconque, partir de l'entrée de cette droite, puis arriver à sa sortie, suivre le cycle du rectangle magique pour arriver à une entrée pas encore parcourue, etc. Comme chaque carrefour se situe entre au moins 1 entrée et 1 sortie et que Héloïse peut parcourir toutes les entrées et sorties, Héloïse pourra parcourir tous les carrefours.

Rémi trace une droite verticale par exemple, Héloïse va faire la même chose mais de direction opposée, si Rémi continue avec les droites verticales, Héloïse aussi mais en faisant en sorte que les 2 droites la plus haute et la plus basse soient de directions opposées. Lorsque Rémi va tracer une droite horizontale, Héloïse aussi mais de sens opposé et de sorte qu'il y ait un rectangle magique (cela va toujours être possible puisqu'il y a 2 positions pour la droite d'Héloïse : à droite ou à gauche de celle de Rémi, et qu'il y a 2 rectangles orientés possibles dont le rectangle magique).

Pour maintenir ce rectangle magique, dès que Rémi va jouer à l'extérieur du rectangle magique, Héloïse va jouer à l'extérieur de la droite de Rémi avec une droite parallèle à celle de Rémi et dans le sens qui permet de retrouver le rectangle magique. On s'assure ainsi l'existence de notre rectangle magique qu'Héloïse peut parcourir jusqu'à l'entrée de chaque droite, ce qui lui garantit bien d'avoir une stratégie gagnante.

Remarque 1.

Il est en fait possible pour Héloïse d'adapter sa stratégie pour gagner même si on lui impose de ne passer qu'une seule fois par chaque carrefour. Cela s'obtient en partant de deux droites extérieures verticales (resp. horizontales) orientées dans le même sens et en serpentant entre les droites horizontales (resp. verticales). Les détails sont laissés au lecteur.

Solution de l'exercice 7

On suppose par l'absurde que le pavage soit réalisable.

Méthode 1 :

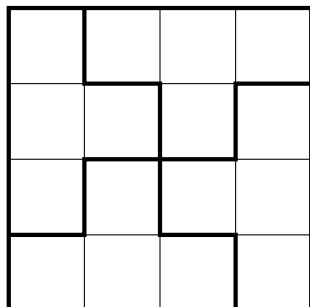
On colorie en noir 1 colonne sur 2 en commençant par la première. Soit n le nombre de cases noires recouvertes et b celui des blanches. On remarque que $n - b$ reste constant modulo 3. En effet, un rectangle 1×2 horizontal recouvre une case de chaque couleur, tandis qu'un rectangle 3×1 vertical en recouvre 3 de la même couleur. Comme $n - b$ est égal à 0 au début et à $2021 \times 1011 - 2021 \times 1010 = 2021$ à la fin, on obtient que $0 \equiv 2021 \pmod{3}$, ce qui est absurde.

Méthode 2 :

On colorie en noir 1 ligne sur 3 en commençant par la première. On remarque qu'on recouvre toujours un nombre pair de cases blanches. Or il y en a 2021×1347 (un nombre impair), ce qui est absurde. Il faudra déplacer la ligne coloriée si on a une grille $k \times k$ avec $k \equiv 1 \pmod{3}$.

Solution de l'exercice 8

Si $4|n$, alors on peut couvrir chaque grille de côté 4 par le pavage suivant :



Montrons maintenant que pour que la grille soit pavable par des T, il est nécessaire que $4|n$. On colorie la grille en échiquier (donc il y a autant de cases blanches que de cases noires). Il y a deux types de T : ceux qui recouvrent trois cases blanches et une case noire, et ceux qui recouvrent trois cases noires et une case blanche. On note k le nombre de T de type 1. Comme il y a autant de cases blanches que de cases noires, il y doit y avoir autant de T de type 1 que de T de type 2. Il y a donc également k T de type 2, ce qui nous donne $3k + k$ cases blanches, de même pour les cases noires. Il y a donc $4k + 4k = 8k$ cases au total. Donc $8|n^2$, ce qui implique que $4|n$.

Solution de l'exercice 9

Montrons par récurrence sur a que la propriété $P(a)$ suivante est vraie : "dans tout graphe planaire à a arêtes, en notant s le nombre de sommets et f le nombre de faces, on a : $f = a - s + 2$."

Initialisation : Au départ, on a 1 sommet, 0 arête et 1 face, et la relation $1 - 0 + 1 = 2$ est bien vérifiée.

Hérédité : Soit $a \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(a)$ est vraie. Il suffit donc de montrer qu'à chaque fois que l'on rajoute une arête (et éventuellement le sommet d'arrivée avec s'il n'existait pas encore), la valeur de $s - a + f$ reste inchangée. Deux cas de figure se présentent lorsqu'on rajoute une arête :

- Si le sommet d'arrivée de l'arête n'existe pas encore, alors on le rajoute en même temps que l'arête. En rajoutant cette arête et ce sommet, le nombre de faces reste inchangé (puisque la nouvelle arête ne coupe aucune face en deux). On a donc s qui devient $(s + 1)$ et a qui devient $(a + 1)$, et la valeur de $s - a + f$ ne change pas.
- Si le sommet d'arrivée de l'arête existe déjà, alors on ne rajoute aucun sommet. Par contre, la nouvelle arête coupe toujours une face en deux. Dans ce cas, a devient donc $(a + 1)$ et f devient $(f + 1)$, ce qui laisse à nouveau la valeur de $s - a + f$ inchangée.

Donc $P(a+1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la formule d'Euler $P(a)$ est toujours vraie.

Solution de l'exercice 10

Nous allons démontrer que l'entier recherché est $A = 5n = 2271380$, où l'on a posé $n = 674^2 = (2022/3)^2$.

Tout d'abord, voici une stratégie pour le pivot. Il numérote les lignes et les colonnes de 1 à 2022, puis colorie en noir chaque case située dans une colonne c et une ligne ℓ pour

lesquelles 3 ne divise ni c , ni ℓ . Parmi les quatre à neuf cases sur lesquelles le jardinier agit à chaque tour, au plus quatre sont noires. Le pivert choisit alors les cases noires en question ; si cela fait moins de quatre cases, il choisit d'autres cases au hasard.

Ce faisant, il s'assure, à la fin du tour de jeu, qu'aucun arbre situé dans une case noire n'aura vu sa taille augmenter. Une récurrence immédiate indique donc que nul arbre situé dans une case noire ne verra sa hauteur dépasser 1, et puisqu'il y a $4n$ cases noires, on ne pourra jamais dépasser un total de $2022^2 - 4n = 5n$ arbres resplendissants.

Réciproquement, voici une stratégie pour le jardinier ; on pose $m = 10^6$. Faisant fi de la coloration imposée par le pivert, il colorie en rouge chaque case située dans une colonne c et une ligne ℓ pour lesquelles $c \equiv \ell \equiv 2 \pmod{3}$. Il y a n cases rouges, et chaque case est soit rouge, soit adjacente à une case rouge. Le jardinier pose alors $k = (4n + 1)m + 1$ puis, au cours des kn premiers tours de jeu, il choisit chaque case rouge exactement k fois. Il a donc fait croître de k la hauteur de chaque arbre du jardin.

Soit a le nombre d'arbres qui ne sont *pas* resplendissants à l'issue de cette première partie du jeu : le pivert a dû choisir au moins $k - m$ fois chacun de ces a arbres. Puisqu'il a choisi $4kn$ arbres au cours des kn tours de jeu, en déduit que $a(k - m) \leq 4kn$, donc que

$$(k - m)(a - 4n - 1) \leq 4kn - (k - m)(4n + 1) = (4n + 1)m - k < 0.$$

Puisque $k \geq m$, cela signifie que $a < 4n + 1$, donc que $a \leq 4n = 9n - A$.

En conclusion, l'entier recherché est bien $A = 5n$.

Solution de l'exercice 11

Cet exercice a été corrigé par Maena sur la chaîne YouTube de la POFM, retrouvez la vidéo ici : <https://youtu.be/qLu2KayswYQ?feature=shared>

8 Arithmétique : le Théorème des restes chinois (Hugo)

Cours

Introduction

L'objectif de ce cours est de présenter le théorème des restes chinois ainsi que ses applications classiques. Son utilité principale est de ramener un problème d'arithmétique modulo un certain entier n à des cas plus simples, par exemple n premier ou puissance d'un nombre premier.

Soit x un entier et a, b deux entiers strictement positifs, si l'on connaît x modulo ab alors on connaît aussi x modulo a et modulo b . En effet, si $x \equiv c \pmod{ab}$, alors $ab \mid x - c$ donc $a, b \mid x - c$. L'intérêt du théorème des restes chinois est de faire le chemin inverse : passer d'une information modulo a et modulo b à une information modulo ab .

Prenons par exemple $a = 2$ et $b = 3$, on a alors le tableau suivant :

$x \bmod 6$	mod 2	mod 3
0	0	0
1	1	1
2	0	2
3	1	0
4	0	1
5	1	2

On remarque alors que tous les couples possibles de valeurs modulo 2 et 3 sont présents une et une seule fois dans ce tableau : ainsi, si l'on connaît x modulo 2 et 3, on peut bien retrouver x modulo 6.

Le théorème

Il est clair que des hypothèses manquent à ce résultat, en effet dans le cas extrême où $a = b$, connaître x modulo a ne va pas nous permettre de le connaître modulo a^2 . Pour passer de $a, b \mid x$ à $ab \mid x$, il faut que a et b soient premiers entre eux, on aboutit donc à l'énoncé du théorème.

Théorème 1.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, n_2, \dots, n_k$ des entiers strictement positifs et deux-à-deux premiers entre eux. Pour tous $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$, il existe un entier a , unique modulo $n_1 n_2 \dots n_k$, tel que pour tout $x \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{n_k} \end{cases} \iff x \equiv a \pmod{n_1 n_2 \dots n_k}$$

Démonstration. Pour commencer, supposons que l'on dispose d'une solution particulière x_0 au système, alors, puisque $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont deux-à-deux premiers entre eux :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \equiv x_0 [n_1] \\ x \equiv a_2 \equiv x_0 [n_2] \\ \vdots \\ x \equiv a_k \equiv x_0 [n_k] \end{cases} \iff \begin{cases} n_1 \mid x - x_0 \\ n_2 \mid x - x_0 \\ \vdots \\ n_k \mid x - x_0 \end{cases} \iff n_1 n_2 \cdots n_k \mid x - x_0$$

Ainsi, s'il existe une solution au système, on a montré le théorème en prenant $a = x_0$.

Il reste maintenant à trouver une telle solution particulière. Pour ce faire, on essaye d'abord de résoudre le système suivant :

$$(S_1) : \begin{cases} x \equiv 1 [n_1] \\ x \equiv 0 [n_2] \\ \vdots \\ x \equiv 0 [n_k] \end{cases}$$

Les $k - 1$ dernières équations reviennent à dire que $n_2 \cdots n_k$ divise x , ou à encore à ce qu'il existe $y \in \mathbb{Z}$ tel que $x = yn_2 \cdots n_k$. La première équation se réécrit alors $yn_2 \cdots n_k \equiv 1 [n_1]$. Or, $n_2 \cdots n_k$ est premier avec n_1 , donc ce nombre admet un inverse b modulo n_1 , ce qui nous fournit une solution à (S_1) : il s'agit de $bn_2 \cdots n_k$.

De la même façon, pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, en prenant b_i un inverse modulo n_i de $\frac{n_1 n_2 \cdots n_k}{n_i}$, on obtient une solution $x_i = b_i \frac{n_1 n_2 \cdots n_k}{n_i}$ au système :

$$(S_i) : \begin{cases} x_i \equiv 1 [n_i] \\ x_i \equiv 0 [n_j] \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, k \rrbracket \text{ avec } j \neq i \end{cases}$$

On vérifie alors que $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k$ est bien une solution au système initial, ce qui achève la preuve. □

Remarquons que, comme cela est utilisé dans la preuve, a est solution du système ; ainsi, il suffit de trouver une solution et d'appliquer le théorème des restes chinois pour les avoir toutes. La démonstration fournit d'ailleurs une méthode de calcul de a , même si cela est rarement demandé.

Remarques

Ce théorème peut s'utiliser dans deux "sens". À partir d'une liste de contraintes modulo des entiers premiers entre eux, il garantit l'existence d'une solution : il s'agit du sens utile dans les problèmes qui demandent de construire des entiers de façon astucieuse. À l'inverse, il permet aussi de décomposer une contrainte modulo n en plusieurs contraintes modulo chaque puissance de nombre premier qui apparaît dans la décomposition de n , ces nouvelles conditions étant parfois plus simples à manipuler.

Une question naturelle est maintenant de savoir comment gérer la résolution d'un tel système lorsque $n_1, n_2, \dots, n_k$ ne sont pas deux-à-deux premiers entre eux. Une technique systématique est de décomposer chaque n_i en produit de puissance de premiers et d'appliquer le théorème des restes chinois pour se ramener à un système où tous les modulus

sont des puissances de premiers. Il faut alors regarder pour chaque nombre premier si les équations sont compatibles entre elles ou non. Dans le premier cas elles peuvent se ramener à une seule équation modulo la plus grande des puissances. Dans le second cas, le système n'a aucune solution.

Pour finir, il est intéressant de noter que la "transformation" du théorème des restes chinois est compatible avec les opérations arithmétiques.

Proposition 2.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, n_2, \dots, n_k$ des entiers strictement positifs et deux-à-deux premiers entre eux. Soit $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_1, b_2, \dots, b_k \in \mathbb{Z}$. On suppose que les entiers a et b sont les solutions respectives des systèmes :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 [n_1] \\ x \equiv a_2 [n_2] \\ \vdots \\ x \equiv a_k [n_k] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \equiv b_1 [n_1] \\ x \equiv b_2 [n_2] \\ \vdots \\ x \equiv b_k [n_k] \end{cases}$$

Alors on vérifie aisément $a + b$ et ab sont les solutions respectives des systèmes :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 + b_1 [n_1] \\ x \equiv a_2 + b_2 [n_2] \\ \vdots \\ x \equiv a_k + b_k [n_k] \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x \equiv a_1 b_1 [n_1] \\ x \equiv a_2 b_2 [n_2] \\ \vdots \\ x \equiv a_k b_k [n_k] \end{cases}$$

Exercices

Exercice 1

Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x \equiv 7 [5] \\ x \equiv 5 [7] \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 8 [10] \\ x \equiv 5 [14] \end{cases} \quad \begin{cases} x \equiv 3 [10] \\ x \equiv 5 [14] \end{cases}$$

Exercice 2 (Origine du nom)

Supposons qu'un général veuille compter ses soldats, il décide de les faire se ranger par lignes de 11, 13, 15 et 17 et regarde combien de soldats n'appartiennent à aucune ligne. Quelle est la taille maximale de son armée pour qu'il connaisse alors avec certitude le nombre de soldats ?

Exercice 3

Montrer que deux suites arithmétiques de raison 15 et 49 ont un terme en commun. (Une suite arithmétique de raison r est une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 4 (Cours POFM)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Sur un tableau infini à gauche et à droite, Alice écrit n lignes d'entiers tels que la différence (positive ou négative) entre deux entiers adjacents soit constante sur une

ligne. On suppose de plus que pour tout choix de deux lignes, elles ont au moins un élément en commun. Montrer qu'il existe un nombre qui apparaît sur toutes les lignes.

Exercice 5 (Evan Chen)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $4a^2 + 9b^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

Exercice 6 (Entraînement Valbonne 2021 C)

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}$$

Exercice 7 (IMO 1989 P5)

Montrer que pour tout entier strictement positif n , il existe n nombres consécutifs qui ne sont pas des puissances de nombres premiers.

Exercice 8

On note φ l'indicatrice d'Euler ($\varphi(n)$ est le nombre de nombres premiers avec n et compris entre 1 et n). Montrer que φ est multiplicative, c'est-à-dire que pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

Exercice 9 (Entraînement Valbonne 2022 C)

Montrer que pour tout nombre premier p , il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que p divise $2025^n - n$.

Exercice 10 (Evan Chen)

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, combien il y a-t-il d'entiers $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $x^2 \equiv x \pmod{n}$? Et tels que $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$?

Exercice 11 (Valbonne 2024 D)

Pour tout nombre premier p et entier a , montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^n \equiv a \pmod{p}$

Exercice 12 (USAMO 1991)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite suivante est constante modulo n à partir d'un certain rang :

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, 2^{2^{2^{2^2}}}, \dots$$

Exercice 13 (USAMO 2008)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe des entiers $k_1, \dots, k_n > 1$ deux-à-deux premiers entre eux tels que $k_1 \dots k_n - 1$ soit égal au produit de deux entiers consécutifs.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1

Premier système : Comme dans la démonstration, on cherche :

- Un inverse de 5 modulo 7 : on peut tenter les 6 possibilités ou bien utiliser l'algorithme d'Euclide : $7 = 5 + 2$ donc $2 = 7 - 5$ mais $5 = 2 \times 2 + 1$ donc $1 = 5 - 2 \times 2 = 5 - 2 \times 7 - 5 = 3 \times 5 - 2 \times 7$. Ainsi $3 \times 5 \equiv 1 [7]$.
- Un inverse de 7 modulo 5 : la relation précédente nous indique que -2 convient.

Ainsi $a = -2 \times 7 = -14$ vérifie $a \equiv 1 [5]$ et $a \equiv 0 [7]$. De même, $b = 3 \times 5 = 15$ vérifie $b \equiv 0 [5]$ et $b \equiv 1 [7]$. Ainsi, une solution particulière est $7a + 5b = -98 + 75 = -23 \equiv 12 [35]$

Le théorème des restes chinois (5 et 7 sont premiers entre eux) nous indique donc que :

$$\begin{cases} x \equiv 7 [5] \\ x \equiv 5 [7] \end{cases} \iff x \equiv 12 [35]$$

On aurait aussi pu deviner que $5 + 7$ était une solution au système : les calculs ne sont pas toujours nécessaires.

Deuxième système : On a $10 = 2 \times 5$ et $14 = 2 \times 7$, or $\text{PGCD}(2, 5) = \text{PGCD}(2, 7) = 1$ donc par le théorème des restes chinois :

$$\begin{cases} x \equiv 8 [10] \\ x \equiv 5 [14] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 8 [2] \\ x \equiv 8 [5] \\ x \equiv 5 [2] \\ x \equiv 5 [7] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0 [2] \\ x \equiv 3 [5] \\ x \equiv 1 [2] \\ x \equiv 5 [7] \end{cases}$$

La première et la troisième ligne se contredisent : le système n'a aucune solution.

Troisième système : De même que précédemment, on a :

$$\begin{cases} x \equiv 3 [10] \\ x \equiv 5 [14] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 3 [2] \\ x \equiv 3 [5] \\ x \equiv 5 [2] \\ x \equiv 5 [7] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 [2] \\ x \equiv 3 [5] \\ x \equiv 1 [2] \\ x \equiv 5 [7] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 [2] \\ x \equiv 3 [5] \\ x \equiv 5 [7] \end{cases}$$

Car cette fois la première et la troisième ligne sont redondantes, on calcule alors :

- Un inverse de $5 \times 7 = 35$ modulo 2 : $35 \equiv 1 [2]$ et 1 convient. On pose $a = 1 \times 35 = 35$
- Un inverse de $2 \times 7 = 14$ modulo 5 : $14 \equiv -1 [5]$ et -1 convient. On pose $b = -1 \times 14 = -14$
- Un inverse de $2 \times 5 = 10$ modulo 7 : $10 \equiv 3 [7]$ et on a $5 \times 3 = 15 \equiv 1 [7]$ donc 5 convient. On pose $c = 5 \times 10 = 50$.

Ainsi, une solution particulière est $a + 3b + 5c = 35 - 42 + 250 = 243 \equiv 33$ et on a donc :

$$\begin{cases} x \equiv 3 [10] \\ x \equiv 5 [14] \end{cases} \iff x \equiv 33 [70]$$

Solution de l'exercice 2

Remarquons que 11, 13, 15 et 17 sont deux à deux premiers entre eux. Les manœuvres de l'armée consistent à regarder le reste modulo 11, 13, 15 puis 17, donc avec le théorème des restes chinois, on pourra connaître la taille de l'armée modulo $N = 11 \times 13 \times 15 \times 17$.

Alors, si la taille de l'armée est inférieure à N , on connaîtra exactement le nombre de soldats : remarquons que $N > 10\,000$. En fait, il suffit même d'avoir une estimation du nombre de soldats précise à 10 000 près pour le connaître alors avec certitude.

Solution de l'exercice 3

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites arithmétiques de raison 15 et 49 respectivement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + 15n \equiv u_0 [15]$ et $v_n = v_0 + 49n \equiv v_0 [49]$. D'après le théorème des restes chinois, il existe $x_0 \in \mathbb{Z}$, unique modulo 15×49 , tel que
$$\begin{cases} x_0 \equiv u_0 [15] \\ x_0 \equiv v_0 [49] \end{cases}$$

Il existe ainsi $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $x_0 = u_0 + 15n_0$ et $x_0 = v_0 + 49m_0$, on a presque le résultat désiré, il manque seulement $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ au lieu de $\mathbb{Z}$.

On peut alors rajouter 15×49 autant de fois que nécessaire à x_0 pour obtenir $x = x_0 + 15 \times 49k > u_0, v_0$. Alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_0 + 15n = u_n$ et $x = v_0 + 49m = v_m$. x est ainsi bien un terme commun aux deux suites.

Solution de l'exercice 4

Notons $r_1, r_2, \dots, r_n$ les différences entre deux termes adjacents sur chaque ligne et $a_1, a_2, \dots, a_n$ un élément de chaque ligne.

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, remarquons alors que la ligne i est exactement l'ensemble des entiers de la forme $a_i + kr_i$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire ceux congrus à a_i modulo r_i .

Ainsi, l'exercice revient à prouver l'existence d'une solution au système :

$$(S) : \begin{cases} x \equiv a_1 [r_1] \\ \vdots \\ x \equiv a_n [r_n] \end{cases}$$

Or, en décomposant les r_i en produit de facteurs premiers, le système peut se ramener à un ensemble de congruences modulo des puissances de nombres premiers $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_m^{\alpha_m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$: il existe donc $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{Z}$ et tels que :

$$(S) \iff \begin{cases} x \equiv b_1 [p_1^{\alpha_1}] \\ \vdots \\ x \equiv b_m [p_m^{\alpha_m}] \end{cases}$$

Afin d'appliquer le théorème des restes chinois, il faudrait que les $p_1, \dots, p_m$ soient deux-à-deux distincts. Soit donc $i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ avec $i \neq j$ et $p_i = p_j$, on suppose sans perte de généralité que $\alpha_i > \alpha_j$. On considère les deux équations
$$\begin{cases} x \equiv b_i [p_i^{\alpha_i}] \\ x \equiv b_j [p_j^{\alpha_j}] \end{cases}$$
. Ces deux équations ne peuvent pas être incompatibles car les deux lignes du tableau correspondant à chacune d'entre elles ont un nombre en commun $c \in \mathbb{Z}$, ainsi :

$$\begin{cases} x \equiv b_i [p_i^{\alpha_i}] \\ x \equiv b_j [p_j^{\alpha_j}] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv c [p_i^{\alpha_i}] \\ x \equiv c [p_j^{\alpha_j}] \end{cases}$$

Or, la deuxième équation implique alors la première puisque $p_j^{\alpha_j} \mid p_i^{\alpha_i}$, on peut donc supprimer cette dernière.

En répétant ce processus, on obtient un système équivalent avec des modulus qui sont bien deux-à-deux premiers entre eux, le théorème des restes chinois nous fournit alors une solution, c'est-à-dire un nombre commun à toutes les lignes.

Solution n°2 de l'exercice 4

Il est également possible de procéder par récurrence, on donne ici l'idée principale de la preuve.

Soit deux lignes, l'ensemble des nombres présent dans ces deux lignes correspond aux solutions d'un système $\begin{cases} x \equiv a \ [n] \\ x \equiv b \ [m] \end{cases}$. On sait qu'il existe au moins une solution c par hypothèse.

On peut alors remplacer ces deux lignes par une seule ligne contenant c et de raison $r = nm$ ou $r = \text{PPCM}(n, m)$. En effet, tout élément de cette nouvelle ligne est de la forme $x = c + kr$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $x \equiv c \equiv a \ [n]$ car $n \mid r$ et de même $x \equiv c \equiv b \ [m]$ car $m \mid r$. Il suffit alors d'itérer le processus jusqu'à n'avoir plus qu'une seule ligne.

Remarque : Prendre $r = \text{PPCM}(n, m)$ nous assure que les nombres de la nouvelle ligne sont exactement deux qui étaient présent dans les deux lignes antérieures. Si l'on choisit $r = nm$ alors on a seulement une inclusion, ce qui n'empêche pas de résoudre le problème.

Solution de l'exercice 5

On traite pour commencer le cas où n est une puissance d'un nombre premier, $n = p^\alpha$.

- Si $p \neq 2$ alors 2 admet un inverse c modulo p^α . On vérifie que $(a, b) \equiv (c, 0) \ [p^\alpha]$ convient.
- Si $p = 2$, alors 3 admet un inverse d modulo p^α . On vérifie cette fois que $(a, b) \equiv (0, d) \ [p^\alpha]$ convient.

Dans le cas général, on peut alors décomposer n en produit de puissances de nombres premiers, on obtient alors une liste de congruences qui garantissent que (a, b) soit solution. Le théorème des restes chinois nous fournit alors une solution modulo n .

Solution de l'exercice 6

D'après le théorème des restes chinois ($\text{PGCD}(a, b) = 1$), il suffit de trouver $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\begin{cases} 1 \equiv a^m + b^n \equiv b^n \ [a] \\ 1 \equiv a^m + b^n \equiv a^m \ [b] \end{cases}$$

On peut alors prendre $n = \varphi(a)$ et $m = \varphi(b)$.

Solution de l'exercice 7

Pour qu'un nombre ne soit pas une puissance de nombre premier, il faut qu'il soit divisible par au moins deux nombres premiers. On prend donc $2n$ nombres premiers deux-à-deux distincts $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ et on considère les n nombres consécutifs $x, x+1, \dots, x+n-1$. On voudrait donc que :

$$\begin{cases} x \equiv 0 \ [p_1 q_1] \\ x+1 \equiv 0 \ [p_2 q_2] \\ \vdots \\ x+n-1 \equiv 0 \ [p_n q_n] \end{cases}$$

Le théorème des restes chinois nous fournit l'existence d'une solution à ce système (les modulus sont bien deux-à-deux premiers entre eux car on a choisis des nombres premiers deux-à-deux distincts).

Solution de l'exercice 8

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Phi_n := \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \text{PGCD}(n, k) = 1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ premiers avec n de sorte que $\varphi(n) = |\Phi_n|$.

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$, on va associer à chaque élément de Φ_{ab} un unique élément de $\Phi_a \times \Phi_b$.

Soit $k \in \Phi_{ab}$, $\text{PGCD}(a, k) \mid \text{PGCD}(ab, k) = 1$ donc k est premier avec a . Or, il existe $k_a \in \llbracket 1, a \rrbracket$ tel que $k \equiv k_a [a]$ et par conséquent k_a est premier avec a donc $k_a \in \Phi_a$. On définit de même $k_b \in \Phi_b$ tel que $k \equiv k_b [b]$. Ainsi, $(k_a, k_b) \in \Phi_a \times \Phi_b$ et notre association est définie, il reste à montrer que tous les éléments de $\Phi_a \times \Phi_b$ sont atteints une seule et unique fois.

Pour cela on utilise le théorème chinois : pour tous $(c, d) \in \Phi_a \times \Phi_b$, il existe une unique solution modulo ab au système $\begin{cases} x \equiv c [a] \\ x \equiv d [b] \end{cases}$. On peut alors par division euclidienne ramener

cette solution à un unique entier $x \in \llbracket 1, ab \rrbracket$. Il reste alors à montrer que $x \in \Phi_{ab}$. Soit $d = \text{PGCD}(ab, x)$, alors $d \mid ab$ donc par le lemme de Gauss, $d \mid a$ ou $d \mid b$. Si $d \mid a$, alors $d \mid a \mid x - c$ mais $d \mid x$ donc $d \mid c$ et $d \mid a$ mais $\text{PGCD}(a, c) = 1$ donc $d = 1$. Si $d \mid b$, on a le même résultat. On a donc bien $x \in \Phi_{ab}$.

Ainsi, cette association montre que $\Phi_a \times \Phi_b$ et Φ_{ab} ont même cardinal, donc $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

Solution n°2 de l'exercice 8

On donne une autre façon de montrer que $x \in \Phi_{ab}$. Pour rappel, x est la solution dans $\llbracket 1, ab \rrbracket$ du système $\begin{cases} x \equiv c [a] \\ x \equiv d [b] \end{cases}$. Or $c \in \Phi_a$ et $d \in \Phi_b$ donc il existe $c^{-1}, d^{-1} \in \mathbb{Z}$ tels que $c^{-1}c \equiv 1 [a]$

et $d^{-1}d \equiv 1 [b]$. Le théorème des restes chinois nous fournit alors $y \in \mathbb{Z}$ tel que $\begin{cases} y \equiv c^{-1} [a] \\ y \equiv d^{-1} [b] \end{cases}$.

On a alors de la même façon que dans la proposition 2 :

$$\begin{cases} xy \equiv cc^{-1} \equiv 1 [a] \\ xy \equiv dd^{-1} \equiv 1 [b] \end{cases}$$

Ainsi $xy \equiv 1 [ab]$ donc x admet un inverse modulo ab et $x \in \Phi_{ab}$ comme désiré.

Solution de l'exercice 9

Pour commencer, si $p \mid 2025$ alors on peut prendre $n = 2025$. On suppose donc que p ne divise pas 2025.

Le terme en 2025^n est celui au comportement le plus compliqué, cependant, on le comprend très bien grâce au petit théorème de Fermat lorsque $n = p - 1$ puisqu'alors $2025^{p-1} \equiv 1 [p]$, cela reste même vrai si n est multiple de $p - 1$. Il faudrait alors que $1 - n \equiv 0 [p]$. On aboutit donc à montrer l'existence d'une solution au système :

$$\begin{cases} n \equiv 0 [p - 1] \\ n \equiv 1 [p] \end{cases}$$

Ce qui est assuré par le théorème des restes chinois puisque p et $p - 1$ sont premiers entre eux. On peut aussi vérifier que $(p - 1)^2$ convient.

Solution de l'exercice 10

Première question : On commence par traiter le cas où n est une puissance de nombre premier : $n = p^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{Z}$ alors :

$$x^2 \equiv x[n] \iff p^\alpha \mid x(x-1)$$

Or x et $x-1$ sont premiers entre eux et p est premier donc ne peut diviser que l'un d'entre eux et est premier avec l'autre, ainsi :

$$x^2 \equiv x[n] \iff \begin{cases} p^\alpha \mid x \text{ ou} \\ p^\alpha \mid x-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0 [n] \text{ ou} \\ x \equiv 1 [n] \end{cases}$$

Il y a ainsi exactement 2 solutions dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ si n est une puissance de nombre premier. En effet, chaque congruence modulo n est représentée une seule et unique fois dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On traite maintenant le cas général avec $n \in \mathbb{N}^*$, d'après la remarque précédente, il suffit de trouver le nombre de solutions modulo n à l'équation $x^2 \equiv x$. On décompose alors n en produit de facteurs premiers : $n = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_m$ des nombres premiers et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{N}^*$, de sorte qu'avec le théorème des restes chinois et le cas précédent :

$$x^2 \equiv x [n] \iff \begin{cases} x^2 \equiv x [p_1^{\alpha_1}] \\ \vdots \\ x^2 \equiv x [p_m^{\alpha_m}] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0 \text{ ou } 1 [p_1^{\alpha_1}] \\ \vdots \\ x \equiv 0 \text{ ou } 1 [p_m^{\alpha_m}] \end{cases}$$

On a alors 2 choix pour chaque ligne de ce système, soit 2^m choix au total qui fournissent chacun, en vertu du théorème des restes chinois à nouveau, une et une seule solution modulo n .

Il y a donc 2^m entiers $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $x^2 \equiv x [n]$ où m est le nombre de facteurs premiers distincts intervenant dans la décomposition de n .

Seconde question : La méthode est la même qu'à la question précédente. On donne ici seulement le calcul dans le cas des puissances de nombres premiers. Soit donc p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, comme avant :

$$x^2 \equiv 1[n] \iff p^\alpha \mid (x+1)(x-1)$$

Or $\text{PGCD}(x+1, x-1) \mid x+1 - (x-1) = 2$, on sépare donc deux cas :

- Si $p \neq 2$ alors p ne peut pas diviser $x+1$ et $x-1$ donc p^α est premier avec $x+1$ ou $x-1$ et doit donc diviser l'autre terme, ainsi :

$$x^2 \equiv 1[n] \iff \begin{cases} p^\alpha \mid x+1 \text{ ou} \\ p^\alpha \mid x-1 \end{cases} \iff x \equiv \pm 1 [p^\alpha]$$

Il y a ainsi 2 solutions.

- Si $p = 2$ alors on vérifie que pour $n = 2$ il y a 1 solutions et que pour $n = 4$ il y en a 2. On suppose alors $\alpha \geq 3$ et soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x^2 \equiv 1[p^\alpha]$. x est donc impair et :

$$p^\alpha \mid (x+1)(x-1) = 4 \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-1}{2} \text{ donc } p^{\alpha-2} \mid \frac{x+1}{2} \cdot \frac{x-1}{2}$$

Or, maintenant $\frac{x+1}{2} = \frac{x-1}{2} + 1$ donc $\frac{x+1}{2}$ et $\frac{x-1}{2}$ sont premiers entre eux et par le même raisonnement que précédemment, $2^{\alpha-2}$ divise l'un d'eux donc $2^{\alpha-1}$ divise $x-1$ ou $x+1$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pm 1 + k2^{\alpha-1}$. Selon la parité de k , cela signifie que :

$$\begin{cases} x \equiv \pm 1 [2^\alpha] \text{ si } k \equiv 0 [2] \\ x \equiv \pm 1 + 2^{\alpha-1} [2^\alpha] \text{ si } k \equiv 1 [2] \end{cases}$$

Si $\alpha \geq 3$, on vérifie que ces 4 congruences sont bien différentes. Il y a donc au plus 4 solutions qui sont de la forme $x \equiv \pm 1 + \varepsilon 2^{\alpha-1}$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$, pour x de cette forme :

$$x^2 \equiv 1 \pm \varepsilon \cdot 2 \cdot 2^{\alpha-1} + 2^{2\alpha-2} \equiv 1 [2^\alpha]$$

Puisque $\alpha \geq 3$.

Ainsi, il y a au final 1 solution pour $n = 2$, 2 solutions pour $n = 4$ et 4 solutions pour les autres puissances de 2 (sauf 1).

Ce travail fait, le même raisonnement qu'à la question précédente montre que le nombre de $x \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $x^2 \equiv 1 [n]$ est $a2^m$ où m est le nombre de facteurs premiers *impairs* de n et $a = 1$ si $4 \nmid n$, $a = 2$ si $4 \mid n$ et $8 \nmid n$ et $a = 4$ si $8 \mid n$.

Solution de l'exercice 11

On commence par écarter le cas où $p \mid a$, il suffit en effet de prendre $n = p$ pour avoir $n^n \equiv 0 \equiv a [p]$.

On suppose maintenant $p \nmid a$. On cherche une contrainte qui rendra n^n plus simple. On pourrait penser à $n = k(p-1)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ mais alors $n^n \equiv 1 [p]$ et on a plus aucune liberté. On choisit donc plutôt $n = k(p-1) + 1$ de sorte que $n^n \equiv n [p]$. Ainsi, il suffit de prendre pour n une solution au système :

$$\begin{cases} n \equiv 1 [p-1] \\ n \equiv a [p] \end{cases}$$

Le théorème des restes chinois nous fournit bien l'existence d'une telle solution car $\text{PGCD}(p, p-1) = 1$.

Solution de l'exercice 12

On montre le résultat par récurrence forte sur n , il est évident pour $n = 1$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$, on suppose avoir montré le résultat pour tous les entiers $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On décompose $n = 2^k m$ avec $k \in \mathbb{N}$ et m impairs. D'après le théorème des restes chinois, il suffit alors de montrer le résultat pour 2^k et m . En effet, une fois la suite constante modulo 2^k et m , elle sera constante modulo $2^k m = n$. Il y a alors plusieurs cas.

- Si $2^k > 1$ et $m > 1$ alors $2^k < n$ et $m < n$ et on conclut grâce à l'hypothèse de récurrence.
- Si $m = 1$ alors $n = 2^k$, alors la suite $1, 2^2, 2^{2^2}, \dots$ est strictement croissante, à partir du moment où elle devient supérieure à k , la suite de l'énoncé est constamment nulle modulo n .
- Si $2^k = 1$ alors $n = m$ est impair et 2 est donc premier avec n . On remarque que c'est l'exposant de 2 qui évolue alors. Or, on sait que pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $2^{l\varphi(n)} \equiv 1 [n]$. Ainsi, si $a \equiv b [\varphi(n)]$, on a $2^a \equiv 2^b [n]$. Or, la suite $1, 2, 2^2, 2^{2^2}, \dots$ est constante modulo $\varphi(n)$ par hypothèse de récurrence à partir d'un certain rang (car $\varphi(n) \leq n-1$), on a donc démontré le résultat.

Solution de l'exercice 13

Récrivons un peu l'énoncé, on veut montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a(a+1)+1 = k_1 \cdots k_n$ avec $k_1, \dots, k_n$ deux-à-deux premiers entre eux. Pour cela, il suffit que $a(a+1)+1$ ait au moins n facteurs premiers distincts car alors si $a(a+1) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ avec $r \geq n$, $k_1 = p_1^{\alpha_1}, \dots, k_{n-1} = p_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ et $k_n = p_n^{\alpha_n} \cdots p_r^{\alpha_r}$ conviennent. On voudrait donc trouver n premiers $p_1, \dots, p_n$ et $a \in \mathbb{Z}$ tels que $p_1, \dots, p_n \mid a^2 + a + 1$.

Que nous apprend alors le théorème des restes chinois? Il nous dit que si on réussit à trouver n premiers $p_1, \dots, p_n$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_i^2 + a_i + 1 \equiv 0 \pmod{p_i}$, alors on pourra construire $a \in \mathbb{Z}$ tel que $a \equiv a_i \pmod{p_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ donc $a^2 + a + 1 \equiv 0 \pmod{p_i}$, c'est-à-dire exactement ce que l'on veut.

Ainsi, il suffit de prouver qu'il y a une infinité de nombres premiers qui divisent $x^2 + x + 1$ pour au moins un $x \in \mathbb{Z}$. Supposons par l'absurde qu'il n'y en ait qu'un nombre fini $q_1, q_2, \dots, q_m$, on pose $N = q_1 \cdots q_m$. Alors, $N^2 + N + 1 > 1$ donc $N^2 + N + 1$ admet un facteur premier q_i pour un certain $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$. Or $q_i \mid N$ donc $q_i \mid N^2 + N$ et $q_i \mid N^2 + N + 1$ donc $q_i \mid 1$, absurde.

Ainsi, on a bien montré qu'il y a une infinité de tels nombres premiers et cela conclut le problème comme expliqué plus haut.

Remarque : En fait, pour tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant, l'ensemble $\{p \text{ premier} / \exists x \in \mathbb{Z}, p \mid P(x)\}$ est infini. Ce résultat est parfois utile en olympiades, sa preuve ressemble à l'argument utilisé ici en un peu plus subtil.

Remarque bis : Il est aussi possible de résoudre directement l'équation $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ si p a des bonnes propriétés mais cela nécessite des outils un peu plus avancés.

2 Entraînement de mi-parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 1

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on note $p_1, \dots, p_k$ les k premiers nombres premiers. Pour tous $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^*$, existe-t-il un entier n tel que : na_1 soit une puissance p_1 -ème, na_2 soit une puissance p_2 -ème, etc... et na_k soit une puissance p_k -ème ?

Exercice 2

On considère une triangulation d'un n -gone convexe. On dit qu'un triangle de cette triangulation est beau si deux de ses côtés sont des côtés de n -gone. On dit qu'un triangle est moche si aucun de ses côtés n'est un côté du n -gone. Montrer qu'il y a deux triangles beaux de plus que de triangles moches.

Exercice 3

Soit $p > 10$ premier. Montrer qu'il existe $m, n > 0$ entiers tels que $m + n < p$ et $p \mid 5^n 7^m - 1$.

Exercice 4

Dans le groupe C à Valbonne il y a n élèves. Ces élèves sont très gentils les uns avec les autres et passent leur temps à s'inviter manger les uns les autres chez eux. On constate les choses suivantes :

- Pour toute paire d'élèves (A, B) , soit A a mangé chez B, soit B a mangé chez A, soit les deux.
- Pour tout élève A, A a mangé chez exactement un quart des élèves qui a mangé chez A.

Pour quels n est-ce possible ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

On va construire un tel n en appliquant le théorème des restes chinois dans les exposants. Etre une puissance m -ème implique que la multiplicité de chaque facteur premier est divisible par m . Soit $P = \{p \text{ premier, il existe } i \text{ tel que } p \mid a_i\}$. On note $q_1, \dots, q_m$ les éléments de P . Si $1 \leq i \leq m$, nos conditions imposent que

$$\begin{cases} v_{q_i}(n) \equiv -v_{q_i}(a_1) \pmod{p_1} \\ \vdots \\ v_{q_i}(n) \equiv -v_{q_i}(a_k) \pmod{p_k} \end{cases}$$

Les p_i sont premiers entre eux, donc on peut choisir une valeur de $v_{q_i}(n)$ qui vérifie ce système d'équations modulaires par les restes chinois. Faisant ça pour tout i et choisissant n vérifiant toutes ces contraintes sur ses valuations, on obtient bien un n qui fonctionne. On peut donc toujours trouver n qui satisfait l'énoncé.

Solution de l'exercice 2

Soit b le nombre de triangles beaux, m le nombre de triangles moches, x le nombre d'autres triangles. On sait d'une part qu'il y a $n - 2$ triangles dans notre triangulation, donc

$$m + b + x = n - 2$$

d'autre part, en comptant les cotés du n -gone, on sait que

$$2b + x = n$$

Ainsi en soustrayant la première équation de la deuxième, on obtient :

$$b - m = 2$$

Autrement dit,

$$b = m + 2$$

C'est ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 3

On voit des puissances de 5 et de 7 qu'on doit prendre modulo p . Ça nous donne envie d'introduire l'ordre de 5 modulo p , qu'on note ω , et l'ordre de 7 modulo p qu'on note ζ . On veut que le produit $5^n 7^m$ soit congru à 1 modulo p . Ça serait pratique de pouvoir créer des 1 de façon relativement économe en m et n . En particulier, ce qui nous arrangerait serait que $\omega + \zeta < p$. Ça se passe en particulier si $\omega \leq \frac{p-1}{2}$ et $\zeta \leq \frac{p-1}{2}$, et dans ce cas là, on a bien $p \mid 5^\omega 7^\zeta - 1$ et $\omega + \zeta < p$.

Si on a ω ou ζ qui est strictement plus grand que $\frac{p-1}{2}$, alors puisque ω et ζ divisent $p - 1$ par petit fermat, il y en a un qui vaut $p - 1$. Donc 5 ou 7 est une racine primitive modulo p . Si 5 est racine primitive, on a $k \in \{1, \dots, p - 2\}$ tel que $5^k \equiv 7^{-1} \pmod{p}$. On a donc $(m, n) = (1, k)$ qui convient, car $1 + k < p$ et $p \mid 5^k 7$. Dans le cas où 7 est racine primitive, on fait un raisonnement analogue. On a donc montré ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 4

Soit $E_1, \dots, E_n$ nos élèves. On note a_k le nombre d'élèves chez qui E_k a déjeuné, et b_k le

nombre d'élèves que E_k a invités à déjeuner. L'énoncé nous indique alors que ces b_k élèves-là sont, d'une part, les $n - 1 - a_k$ élèves chez qui E_k n'a pas déjeuné et, d'autre part, $a_k/4$ des élèves chez qui E_k a déjeuné, de sorte que $b_k = n - 1 - 3a_k/4$.

On va maintenant compter le nombre de repas, que l'on note C , de deux manières différentes. D'une part, il s'agit du nombre de fois où un élève a déjeuné chez un ami, de sorte que $C = a_1 + \dots + a_n$. D'autre part, il s'agit aussi du nombre de fois où un élève a invité un ami à déjeuner, de sorte que $C = b_1 + \dots + b_n$. On en déduit que

$$C = \sum_{1 \leq k \leq n} b_k = \sum_{1 \leq k \leq n} (n - 1 - 3a_k/4) = n(n - 1) - 3C/4,$$

c'est-à-dire que $7C = 4n(n - 1)$. Ainsi 7 divise n ou $n - 1$.

On aurait pu aussi obtenir ce résultat en comptant le nombre de paires (a, b) où a et b sont deux élèves distincts tels que a a mangé chez b et b chez a : on dit qu'une telle paire est jolie et on note N le nombre de paires jolies. En effet à a fixé il y a 4 fois moins de b tels que (a, b) jolie que de couple (a, b) tel que a a déjeuné chez b , donc quatre fois moins que le nombre de repas. Or il y a $N/2 + \binom{n}{2}$ déjeuners car si on choisit deux élèves, l'un a mangé chez l'autre (le $N/2$ vient du fait qu'on compte une seule fois pour (a, b) et (b, a) tous deux jolis), donc $7N = 2\binom{n}{2}$, donc on obtient le même résultat.

On sait donc que 7 divise soit n , soit $n - 1$, et on étudie ces deux cas séparément :

- Si 7 divise $n - 1$, posons $\ell = (n - 1)/7$. Ci-dessous, on identifie les élèves aux éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Une manière d'obtenir la situation décrite dans l'énoncé est alors que chaque élève k aille déjeuner chez les élèves $k + 1, k + 2, \dots, k + 4\ell$ (soit 4ℓ élèves), et reçoive donc à déjeuner les élèves $k - 4\ell, \dots, k - 1$. En effet, et puisque $-4\ell \equiv 3\ell + 1 \pmod{n}$, les élèves qui ont invité k à déjeuner et ont déjeuné chez lui sont les élèves $k + 3\ell + 1, \dots, k + 4\ell$ (soit ℓ élèves).
- Si 7 divise n , posons $\ell = n/7$. Cette fois-ci, on identifie les élèves aux éléments de $\mathbb{Z}/(n - 1)\mathbb{Z}$, ainsi qu'à un élément spécial, que l'on notera $\bullet$. On décide alors que l'élève $\bullet$ recevra tout le monde à déjeuner mais n'ira manger chez personne, puis que chaque élève k (avec $k \neq \bullet$) ira déjeuner chez $k + 1, \dots, k + 4\ell - 1, \bullet$ (soit 4ℓ élèves), et recevra les élèves $k - 4\ell + 1, \dots, k - 1$ à déjeuner. Cette fois-ci, puisque $-4\ell + 1 \equiv 3\ell \pmod{n - 1}$, les élèves qui ont invité k à déjeuner et ont déjeuné chez lui sont les élèves $k + 3\ell, \dots, k + 4\ell - 1$ (soit ℓ élèves).

Par conséquent, les valeurs de n possibles sont tous les entiers n tels que $n \equiv 0 \pmod{7}$ ou $n \equiv 1 \pmod{7}$.

3 Deuxième partie : Algèbre et Géométrie

1 Algèbre : Polynômes 1 (Paul)

Introduction

Les polynômes sont des objets fondamentaux en mathématiques et essentiels à la résolution de grand nombre de problèmes de maths olympiques. Ils sont présentés dans le cadre d'un cours d'algèbre et font l'objet de problèmes à part entière, mais apparaissent aussi fréquemment dans des exercices en combinatoire ou en arithmétique.

Dans ce cours, nous présenterons quelques propriétés de base des polynômes dans l'objectif d'apprendre à les manipuler et à les utiliser pour résoudre des problèmes variés. Dans cette optique, nous ne ferons pas de différence entre polynôme et fonction polynomiale. Le lecteur curieux pourra se référer à l'excellent cours d'Igor Kortchemski disponible sur le site de la POFM pour découvrir cette distinction mais elle n'est nullement utile à l'utilisation que nous aurons de polynômes.

Définition

Définition 1 (Polynôme à coefficients réels).

On appelle *fonction polynomiale* (ou *polynôme*) à coefficients réels toute fonction $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à une variable x associe une somme pondérée de puissances entières positives de x . Autrement dit, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des réels appelés **coefficients** de P .

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Remarque 2.

Il est tout à fait possible de définir des polynômes à coefficients dans un autre ensemble que $\mathbb{R}$. En effet, il suffit que l'ensemble d'appartenance des coefficients soit un ensemble dans lequel on peut faire des additions, soustractions et multiplications (on dit alors qu'un tel ensemble est *stable* par addition, soustraction et multiplication). Des exemples de tels ensembles sont $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, ou bien sûr $\mathbb{R}$.

Il ne faut donc pas avoir peur si un énoncé parle de $\mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{Z}[X]$: cela signifie simplement que les coefficients des polynômes sont à prendre dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{Z}$ respectivement.

L'intérêt d'avoir de tels ensembles est de remarquer que la somme de deux polynômes est un polynôme, tout comme la différence et le produit. On reviendra là dessus dans la partie suivante.

Exemple 3.

Des exemples de polynômes à coefficients réels sont :

- $P(x) = 3x^3 + 6x^2 + 4$ (on remarquera d'ailleurs ce polynôme est également à coefficients rationnels et même entiers)
- $Q(x) = \pi x^4 + \sqrt{2}$

— $R(x) = 4$ (une fonction constante est bien un polynôme : c'est un coefficient fois x^0).

Remarque 4.

On appelle les puissances de x des monômes (par exemple 1, x , x^2 , ...). Cela explique l'appellation de polynôme : c'est la somme de plusieurs monômes.

Exemple 5.

Des exemples de fonctions qui ne sont pas des polynômes sont :

- La fonction $S(x) = \sqrt{x}$ n'est pas un polynôme puisqu'elle n'est même pas définie sur tout $\mathbb{R}$
- La fonction $T(x) = \sqrt{|x|}$ n'est pas un polynôme (cela sera démontré dans un exercice par la suite)
- La fonction $U(x) = |x|$ n'est pas un polynôme (cela sera démontré dans un exercice par la suite)

Opérations sur les polynômes

Proposition 6 (Somme de Polynômes).

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. Alors la fonction $R : x \mapsto P(x) + Q(x)$ (resp. $P(x) - Q(x)$) est un polynôme dont les coefficients sont la somme (resp. la différence) terme à terme des coefficients de P et de Q .

Démonstration. On choisit n tel qu'on puisse écrire

$$P(X) = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n$$

et

$$Q(X) = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + \dots + b_n \cdot X^n$$

avec éventuellement les coefficients de tête nuls pour l'un ou l'autre des polynômes. Alors on a clairement en réarrangeant les termes :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) + Q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

Il suffit donc de poser $R(X) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + \dots + (a_n + b_n)X^n$ pour conclure. $\square$

Proposition 7 (Produit de Polynômes).

Soient $P(X) = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + \dots + b_n \cdot X^n$ deux polynômes à coefficients réels. Alors la fonction $R : x \mapsto P(x) \times Q(x)$ est un polynôme dont le k -ième coefficient c_k s'exprime :

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}$$

Démonstration. Il suffit d'exprimer le produit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \times Q(x) = (a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n)(b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \dots + b_n \cdot x^n)$$

Puis de développer et de regrouper les termes en fonction de la puissance de x : pour obtenir du x^k , on peut multiplier du x^i par du x^{k-i} pour chaque i entre 0 et k , ce qui explique la somme que l'on obtient finalement. $\square$

Définition 8 (Composée de polynômes).

On définit la composée de deux polynômes comme on définit la composée de deux fonctions : Si P et Q sont deux polynômes à coefficients réels, alors on définit R la composée de Q par P par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad R(x) = P(Q(x))$$

On note alors $R = P \circ Q$.

Proposition 9 (Composition de Polynômes).

Soient $P(X) = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + \dots + b_n \cdot X^n$ deux polynômes à coefficients réels. Alors la fonction $R : x \mapsto (P \circ Q)(x)$ est un polynôme à coefficients réels

Démonstration. Il suffit d'injecter l'expression de Q dans la variable de P et de tout développer puis de regrouper par terme de même degré. $\square$

Caractérisation des polynômes

Proposition 10 (Caractérisation du polynôme nul).

Soit $P(X) = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n$ un polynôme. Alors P est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls. Autrement dit :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 0 \iff \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = 0$$

Démonstration. Le sens réciproque est évident. Supposons maintenant que P soit le polynôme nul, et par l'absurde, supposons qu'au moins un de ses coefficients soit non-nul. Soit k le plus petit indice tel que $a_k \neq 0$. Alors on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^k(a_k + a_{k+1}x + \dots + a_n x^{n-k}) = 0$$

On peut alors diviser par x^k pour $x \neq 0$ puis faire tendre x vers 0 (sans le prendre égal à 0 bien sûr) pour obtenir que $a_k = 0$, et donc conclure à une absurdité. $\square$

Proposition 11 (Identification des coefficients).

Soient $P(X) = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n$ et $Q(X) = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2 + \dots + b_m \cdot X^m$. Alors si $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = Q(x)$, on a $n = m$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_k = b_k$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $P - Q$ est un polynôme comme vu précédemment, donc que $P - Q$ est le polynôme nul, et donc que tous ses coefficients doivent être nuls. $\square$

Degré d'un polynôme

Définition 12.

On appelle *degré* d'un polynôme $P = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$ et on note $\deg(P)$ le plus grand indice k tel que $a_k \neq 0$.

Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$.

Remarque 13.

Par convention, lors de l'écriture de P sous la forme $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n$, on choisira n de façon à avoir $n = \deg(P)$. Cela évite de trainer des coefficients inutiles.

Définition 14 (Coefficient dominant, polynôme unitaire).

On appelle coefficient dominant d'un polynôme P le coefficient devant le terme de degré $\deg(P)$ dans l'écriture de P .

On dira alors que P est unitaire lorsque son coefficient dominant vaut 1.

Exemple 15.

Voici quelques exemples de polynômes, de leurs degrés et de leurs coefficients dominants :

- $A(X) = X^2 + 3X + 7$ est un polynôme de degré 2 unitaire (de coefficient dominant 1).
- $B(X) = \sqrt{2} - 2X^{19} + \pi X^{42}$ est un polynôme de degré 42 de coefficient dominant π .
- $C(X) = 4$ est un polynôme de degré 0 de coefficient dominant 4.
- $D(X) = 0$ est le polynôme nul, de degré $-\infty$, ce n'est pas très utile de parler de son coefficient dominant.

Proposition 16 (Propriétés du degré).

Soient P et Q deux polynômes. On a les propriétés suivantes :

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité si les degrés de P et de Q sont différents ou si ils sont les mêmes mais que les coefficients dominants ne sont pas opposés
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P(Q)) = \deg P \times \deg Q$

Démonstration. On montre les propriétés dans l'ordre :

- Clairement, si $\deg P > \deg Q$ (resp. $\deg Q > \deg P$), alors $\deg(P + Q) = \deg P$ (resp. $\deg Q$) puisqu'il n'y a qu'un terme de degré maximal dans la somme. De la même manière, on ne fera jamais apparaître de terme de degré n en sommant des termes de degré strictement inférieurs à n , ce qui nous donne bien l'inégalité attendue. Le cas d'égalité est dès lors trivial.
- Il suffit de développer le produit pour se rendre compte que le plus grand monome de coefficient non-nul sera celui obtenu en multipliant le terme monome de degré $\deg P$ de P avec celui de degré $\deg Q$ de Q .
- Ici encore, il suffit de développer.

□

Proposition 17 (Intégrité de $\mathbb{R}[X]$).

Soient P et Q deux polynômes. On a l'équivalence :

$$PQ = 0 \iff [P = 0 \text{ ou } Q = 0]$$

Démonstration. L'implication réciproque est évidente. Pour l'implication directe, il suffit de regarder le degré : $\deg(PQ) = -\infty$ donc si les deux polynômes étaient de degré finis (ie non-nuls), on aurait une absurdité : donc au moins l'un des deux est le polynôme nul. □

Remarque 18.

Le degré et les coefficients (dominants et constants) sont particulièrement intéressants dans le cadre d'équations fonctionnelles polynomiales. On donne des exemples de tels exercices ci-dessous.

Exercice 1

Montrer que $\sqrt{|X|}$ n'est pas un polynôme.

Solution de l'exercice 1

Il suffit de remarquer en notant $P(X) = \sqrt{|X|}$ que

$$4 \deg P = \deg(X^2) = 2$$

Ce qui est absurde car le degré est toujours un entier.

Exercice 2

Déterminer toutes les paires de polynômes P et Q à coefficients réels vérifiant la relation :

$$P(X)^2 = XQ(X)^2$$

Solution de l'exercice 2

On s'intéresse au degré de chacun des côtés de cette égalité :

- Le degré du membre de gauche vaut $2 \deg P$
- Le degré du membre de droite vaut $1 + 2 \deg Q$

Ainsi, si les degrés de P et Q sont finis, on a un nombre pair égal à un nombre impair : absurde. Ainsi, au moins l'un des deux polynômes est nul, donc l'autre est obligatoirement nul également.

Finalement, cette égalité n'est possible que si P et Q sont tous deux le polynôme nul.

Exercice 3

Déterminer tous les polynômes à coefficients réels P vérifiant la relation :

$$P(X^2) = X^2 P(X)$$

Solution de l'exercice 3

On remarque en passant cette équation au degré que $2 \deg P = 2 + \deg P$ donc P est de degré 2. Notons $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$. Alors l'équation peut se réécrire $ax^4 + bx^2 + c = ax^4 + bx^3 + cx^2$, donc d'après la proposition sur l'identification des coefficients, on a $b = 0$ et $b = c$ donc

$$P(x) = ax^2$$

Réciproquement, tous les polynômes de la forme aX^2 conviennent avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 4

Déterminer tous les polynômes à coefficients réels P vérifiant

$$P(X) = P(2X)$$

Solution de l'exercice 4

Supposons P non nul.

Alors si on note a le coefficient dominant de P , et n son degré, on trouve $a = 2^n a$, donc $n = 0$ car $a \neq 0$ (car $P \neq 0$). Alors P doit être un polynôme constant.

Réciproquement, on vérifie aisément que tous les polynômes constants (même le polynôme nul) conviennent.

Exercice 5

Soient $P_1, P_2, \dots, P_{2025}$ des polynômes non-constants à coefficients réels. On suppose que :

$$P_1 \circ P_2 = P_2 \circ P_3 = \dots = P_{2024} \circ P_{2025} = P_{2025} \circ P_1$$

Montrer que les degrés de tous ces polynômes sont égaux.

Solution de l'exercice 5

On passe chacune de ces égalités au degré pour trouver que

$$\deg P_1 \times \deg P_2 = \deg P_2 \times \deg P_3 = \dots = \deg P_{2025} \times \deg P_1$$

Puis en divisant successivement dans chacune des égalités, on trouve

$$\deg P_1 = \deg P_3 = \deg P_5 = \dots = \deg P_{2025} = \deg P_2 = \deg P_4 = \dots = \deg P_{2024}$$

D'où le résultat recherché.

Division euclidienne

On s'est intéressés plus haut à la somme, la différence et au produit de polynômes. La question naturelle qui vient alors est : quid du rapport de deux polynômes ? Il semble relativement clair que diviser un polynôme par un autre ne va pas nous permettre de rester avec un polynôme dans le cas général. Cependant, c'est également le cas des entiers : a priori si on veut travailler avec des entiers, on ne va pas en diviser l'un par l'autre, puisqu'on sortirait des entiers... C'est sans compter sur la division euclidienne, qui malgré son apparente simplicité va être très utile en arithmétique, et qui se transpose très bien dans les polynômes. On va alors parler d'**arithmétique des polynômes**.

De manière analogue aux entiers, on peut également établir une relation de divisibilité :

Définition 19 (Divisibilité dans les polynômes).

Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels. On dit que P divise Q et on note $P \mid Q$ lorsqu'il existe un polynôme R à coefficients réels tel que $Q = P \times R$.

Rappel 20 (Division euclidienne).

Soient a et b des entiers avec $b \neq 0$. Alors il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}$$

On dit que q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b

La problématique qui va intervenir dans le cadre des polynômes est de choisir une manière de décider du sens dans lequel le reste doit être "plus petit" que le diviseur : on utilisera ici le degré comme analogue de la valeur absolue dans $\mathbb{Z}$, ce qui nous donne le théorème de division euclidienne suivant :

Théorème 21 (Division euclidienne dans les polynômes). Soient A et B deux polynômes à coefficients réels avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple de polynômes à coefficients réels (Q, R) tels que

$$\begin{cases} A = B \cdot Q + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

Pour effectuer la division euclidienne dans les polynômes, on applique exactement le même algorithme que dans $\mathbb{Z}$. En voici une version un peu détaillée :

Idée générale : On soustrait à $A(X)$ un multiple convenable de $B(X)$ afin d'annuler son terme de plus haut degré, et on répète l'opération sur le reste obtenu, jusqu'à ce que le degré du reste devienne strictement inférieur à celui de $B(X)$.

Étapes de l'algorithme :

1. Initialiser :

$$Q(X) \leftarrow 0, \quad R(X) \leftarrow A(X).$$

2. Tant que $\deg(R) \geq \deg(B)$:

(a) Calculer le monôme correcteur :

$$m(X) = \frac{\text{lc}(R)}{\text{lc}(B)} X^{\deg(R) - \deg(B)},$$

où $\text{lc}(P)$ désigne le *coefficient dominant* du polynôme P .

(b) Mettre à jour le quotient :

$$Q(X) \leftarrow Q(X) + m(X).$$

(c) Mettre à jour le reste :

$$R(X) \leftarrow R(X) - m(X) \cdot B(X).$$

3. Le processus s'arrête et $Q(X)$, $R(X)$ sont les polynômes cherchés.

Exemple 22.

Voici un exemple de la division euclidienne de $X^3 - 2X + 4$ par $X - 1$:

$x^3 + 0x^2 - 2x + 4$	$x - 1$
$-(x^3 - x^2) \quad \quad \quad \downarrow \quad \downarrow$	$x^2 + x - 1$
$x^2 - 2x + 4$	
$-(x^2 - x) \quad \quad \quad \downarrow$	
$-x + 4$	
$-(-x + 1)$	
3	

Exemple 23.

Voici un exemple de la division euclidienne de $2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - X + 5$ par $X^2 - 2X + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - x + 5 & x^2 - 2x + 1 \\
 \hline
 -(2x^4 - 4x^3 + 2x^2) & \downarrow \downarrow \\
 \hline
 x^3 + 2x^2 - x + 5 & \\
 \hline
 -(x^3 - 2x^2 + x) & \downarrow \\
 \hline
 4x^2 - 2x + 5 & \\
 \hline
 -(4x^2 - 8x + 4) & \\
 \hline
 6x + 1 &
 \end{array}$$

Exercice 6

Effectuer la division euclidienne de $X^7 - 1$ par $X^3 + X + 1$.

Solution de l'exercice 6

$$\begin{array}{r|l}
 X^7 + 0X^6 + 0X^5 + 0X^4 + 0X^3 + 0X^2 + 0X - 1 & X^3 + X + 1 \\
 \hline
 -(X^7 + 0X^6 + X^5 + X^4) & \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \\
 \hline
 -X^5 - X^4 + 0X^3 + 0X^2 + 0X - 1 & \\
 \hline
 -(-X^5 + 0X^4 - X^3 - X^2) & \downarrow \downarrow \\
 \hline
 -X^4 + X^3 + X^2 + 0X - 1 & \\
 \hline
 -(-X^4 - 0X^3 - X^2 - X) & \downarrow \\
 \hline
 X^3 + 2X^2 + X - 1 & \\
 \hline
 -(X^3 + 0X^2 + X + 1) & \\
 \hline
 2X^2 - 2 &
 \end{array}$$

Exercice 7

Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{100} - 2X^{51} + 1$ par $X^2 - 1$.

Solution de l'exercice 7

On note Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne. On a $X^{100} - 2X^{51} + 1 = (X^2 - 1)Q(X) + R(X)$ avec R qui est de degré 1. On écrit alors $R(X) = aX + b$. En évaluant la relation précédente en 1 et en -1 , on trouve que $R(1) = 0$ et $R(-1) = 4$, ce qui donne finalement

$$R(X) = -2X + 2$$

Racines**Définition 24** (Racine).

On appelle *racine* d'un polynôme P tout nombre a tel que $P(a) = 0$.

Exemple 25.

Voici quelques exemples de polynômes et de racines :

- $P(X) = X + 1$ admet -1 comme racine
- $Q(X) = X^2 - 1$ admet 1 et -1 comme racines.
- $R(X) = X^2 + 1$ n'admet aucune racine réelle.
- $S(X) = X^2 - 2$ admet deux racines réelles : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$

Théorème 26. Soit P un polynôme à coefficients réels et α un nombre réel. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- α est une racine de P
- Il existe un polynôme Q à coefficients réels pour lequel $P(X) = (X - \alpha)Q(X)$

Démonstration. Remarquons que comme α est une racine de P , $P(\alpha) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
 P(x) &= P(x) - P(\alpha) \\
 &= \sum_{k=0}^n a_k x^k - \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k (x^k - \alpha^k) \\
 &= \sum_{k=1}^n a_k (x - \alpha) \left(\sum_{l=0}^{k-1} x^l \alpha^{n-1-l} \right) \\
 &= (x - \alpha) \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k \left(\sum_{l=0}^{k-1} x^l \alpha^{n-1-l} \right)}_{:=Q(x)}
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 27.

Soit $n \geq 0$ un entier. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels de degré n . Alors P possède au plus n racines distinctes.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe un polynôme P non-nul et à coefficients réels, de degré n qui possède au moins $n + 1$ racines distinctes. Prenons-le même de degré minimal et notons z une de ses racines. Alors par le théorème précédent, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) = (x - z)Q(x)$. Comme toutes les racines de P autres que z sont des racines de Q , Q va avoir au moins $\deg Q + 1$ racines alors qu'il est de degré Q , ce qui est absurde car $\deg Q < \deg P$, et qui contredit donc la minimalité du degré de P . □

Corollaire 28.

Soit $n \geq 0$ un entier. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients réels de degré n . Si P possède au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

Exercice 8

Soient P et Q deux polynômes de degré au plus $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $n + 1$ points $x_1, \dots, x_{n+1}$ deux à deux distincts en lesquels P et Q coïncident (c'est-à-dire $P(x_i) = Q(x_i)$ pour tout i entre 1 et $n + 1$). Montrer que $P = Q$.

Solution de l'exercice 8

Il suffit de remarquer que $R := P - Q$ est également un polynôme de degré au plus n , et qu'en chacun des x_i , $P - Q$ s'annule. Alors $P - Q$ doit être le polynôme nul, c'est-à-dire que $P = Q$.

Exercice 9

Montrer que $|X|$ n'est pas un polynôme.

Solution de l'exercice 9

Il suffit de remarquer que $|X|$ coïncide avec X sur $\mathbb{R}_+$, donc en suffisamment de points pour que les deux fonctions doivent être égales si elles sont toutes deux des polynômes. Or, elles ne coïncident pas sur $\mathbb{R}_*$, donc $|X|$ ne peut pas être un polynôme.

Plus généralement, un polynôme de degré n est défini par $n + 1$ valeurs, on dit en cela que les polynômes sont **rigides**.

Pour un polynôme constant, il suffit de connaître sa valeur en un point pour caractériser le polynôme. Pour un polynôme de degré 1, il suffit de connaître la valeur en deux points. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 29 (Interpolation de Lagrange). Soient $x_1, \dots, x_{n+1}$ des réels deux à deux distincts. Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des réels. Alors il existe un unique polynôme P à coefficients réels de degré au plus n tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P(x_i) = a_i$.

Démonstration. Pour l'existence, on note

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n+1} \frac{(x - x_k)}{(x_i - x_k)}$$

C'est un polynôme de degré n qui s'annule en tous les x_k , sauf en x_i où il vaut 1. On peut donc poser

$$P = \sum_{k=0}^n b_k L_k$$

qui vérifie toutes les conditions et qui est de degré au plus n car somme de polynômes de degré au plus n .

Réciproquement, s'il existe deux polynômes P et Q qui vérifient ces conditions, alors P et Q sont de degré au plus n et coïncident en $n + 1$ points donc ils sont égaux. □

Exercice 10

Trouver tous les polynômes à coefficients réels P tels que pour tout $q \in \mathbb{Q}$, $P(q) \in \mathbb{Q}$.

Solution de l'exercice 10

Soit n un entier naturel. Cherchons tous les polynômes P vérifiant la propriété ci-dessus avec P de degré inférieur ou égal à n . Pour cela, on remarque que l'on peut déterminer entièrement

P à partir de ses valeurs en $1, 2, \dots, n+1$ et que la construction donnée par le polynôme d'interpolation de Lagrange donne bien un polynôme à coefficients rationnels.

Exercice 11

Déterminer tous les polynômes à coefficients réels P tels que $P(0) = 0$ et

$$P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$$

Solution de l'exercice 11

On remarque en évaluant en 0 que $P(1) = 1$. Ensuite, en évaluant en 1, on trouve $P(2) = 2$, puis en 2 on trouve $P(5) = 5$. On peut alors montrer par récurrence qu'on a $P(x) = x$ pour une infinité de valeurs de x distinctes. Ainsi, on trouve que $P = X$.

2 Géométrie : Chasse aux rapports (Anatole)

Ce TD rassemble des exos qui ont vocation à être résolus par une méthode de chasse aux rapports. Voici les outils récurrents que vous utiliserez :

- **La puissance d'un point.**
Donne ou utilise une cocyclicité.
- **Les triangles semblable**, plus généralement.
Donne ou utilise des égalités d'angles / des similitudes.
- **Le théorème de Thalès**, moins généralement.
Donne ou utilise des parallèles.
- **Le théorème de la bissectrice.**
Donne ou utilise une bissectrice.
- **La loi des sinus** (en dernier recours).
Donne ou utilise des rapports de sinus.

Comment résoudre un problème en chasse aux rapports? L'idée générale est assez simple :

1. Je transcris ce que je dois montrer comme une condition sur des rapports. Cela peut paraître étrange de commencer par la fin mais ça m'aide à savoir comment m'orienter dans le problème. Si je vois que je dois montrer une égalité mettant en jeu la longueur AB , je garde ça en tête et j'essaierai de faire apparaître AB au cours des étapes suivantes.
2. Je transcris ensuite les conditions de l'énoncé en égalités de rapports. J'ai des points cocycliques? J'écris les puissances de points! J'ai des parallèles? J'écris Thalès!
3. Je cherche des propriétés dans la figure, comme je suis censé faire sur tout problème de géométrie. Si j'arrive à prouver ces propriétés, rebelote. J'ai montré que deux triangles sont semblables? J'écris les rapports! J'ai montré qu'une droite bissecte un angle? J'écris le théorème de la bissectrice!
4. Si ça ne suffit pas, j'essaie d'introduire des points intelligents pour faire apparaître des configurations ou des propriétés particulières. Qu'est-ce qu'un point intelligent? C'est un point qui fait apparaître des objets utiles pour ma chasse aux rapports (par exemple des parallèles, des triangles isocèles...). Si je trouve un bon point, je reprends l'étape précédente avec ce nouveau point sur la figure et je repars à la chasse aux propriétés.
5. Enfin, je calcule pour montrer que les égalités que j'ai montrées impliquent l'égalité que je veux montrer. Cette étape est rarement technique : si le reste est fait correctement, elle doit suivre naturellement. Il ne faut pas oublier ici qu'on peut avoir des longueurs directement égales grâce à des milieux ou des triangles isocèles.

Évidemment, ce n'est pas une méthode magique. Mais il est bon d'avoir le réflexe de penser en termes de rapports. Ça peut souvent aider à montrer ne serait-ce qu'une propriété intermédiaire dans un problème. De plus, les rapports apparaissent même dans des pans plus avancés de la géométrie, que ce soit les similitudes, les cercles d'Apollonius ou la géométrie projective!

Enfin, avant de vous lancer, n'oubliez pas le plus important :

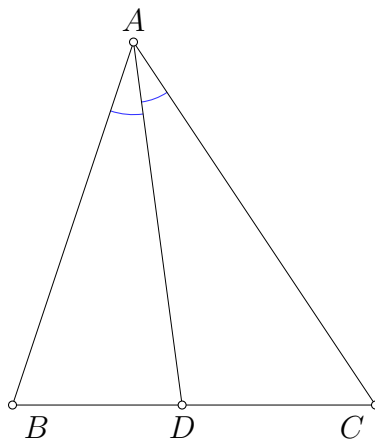
Je ne fais jamais des calculs dans le vent !

Si je calcule des rapports, je dois savoir ce que je veux montrer. Autant on peut trouver par hasard une propriété en calculant des angles aléatoires, autant on peut très vite se perdre en calculant des longueurs aléatoires. De plus, les tortueux chemins de la chasse aux rapports amènent très vite les aventuriers peu aguerris au douloureux pays de la trigonométrie, ou pire, au funeste royaume de l'analytique...

Si vous pensez être capables d'éviter ces pièges et de ne pas sombrer dans des calculs éternels, les exercices suivants n'attendent que vous !

Exemple 1.

Soit ABC un triangle, D le pied de la bissectrice issue de A . Soit $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. On a alors $BD = \frac{ac}{b+c}$ et $CD = \frac{ab}{b+c}$.



Démonstration. On a $\frac{BD}{CD} = \frac{c}{b}$ par le théorème de la bissectrice. Ainsi,

$$BD \cdot b = c \cdot (a - BD)$$

donc $BD \cdot (b + c) = ac$. Ainsi, on obtient directement

$$BD = \frac{ac}{b+c}$$

On procède de même pour CD . □

Quelques exercices de découverte

Exercice 1

Soit $ABCD$ un trapèze avec $(AB) \parallel (CD)$. Soit X l'intersection de BC et AD , Y l'intersection de BD et AC . Montrer que XY passe par le milieu de AB .

Exercice 2

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A .

Montrer que $\frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$

Exercice 3

Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A . Le cercle circonscrit à ACD recoupe AB en E , le cercle circonscrit à ABD recoupe AC en F . Montrer que $BE = CF$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que la bissectrice de $\widehat{CAB}$, la bissectrice de $\widehat{BDC}$, et la droite BC sont concourantes. Montrer que la bissectrice de $\widehat{ABD}$, la bissectrice de $\widehat{DCA}$ et la droite AD sont concourantes.

Des problèmes plus corsés

La plupart des exercices de cette section sont inspirés des TDs de chasse aux rapports donnés par Martin Rakovsky aux précédents stages.

Exercice 5 (Sharygin 2011)

Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel (AD) et (BC) sont parallèles. Soit O le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) . Soit M un point du segment $[CD]$. La parallèle à (BD) passant par M coupe le segment $[BC]$ en P . La parallèle à (AC) passant par M coupe le segment $[AD]$ en Q . Montrer que les points P , O et Q sont alignés.

Exercice 6

Soit ABC un triangle. Soit D, E sur les segments AB et AC respectivement tels que $BD = CE$. Soit X le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits à ABE et ACD . Montrer que la droite AX est la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Exercice 7 (France TST)

Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice intérieure de $\widehat{BAD}$ coupe BC en E et sa bissectrice extérieure coupe DC en F . Soit M le milieu de AE . Montrer que BM est parallèle à EF .

Exercice 8

Soit $ABCD$ un losange. Soit E sur le segment AB et F sur le segment AD . Le segment BD recoupe FC et EC en L et K respectivement. FK recoupe BC en Q et EL recoupe DC en P . Montrer que $CP = CQ$.

Exercice 9 (Iran MO 2015 Round 3)

Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Soit E un point appartenant au segment $[AC]$. La parallèle à la droite (BE) passant par C coupe la droite (BD) en F . Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BED appartient à la droite (AC) .

Exercice 10 (BMO 2020, P1)

Soit ABC un triangle isocèle en A . Soit D le milieu de AC . Soit γ le cercle circonscrit à ADB . La tangente en A à γ recoupe BC en E . Soit O le centre du cercle circonscrit à ABE . Montrer que le milieu de AO appartient à γ .

Exercice 11 (MEMO 2021, Team P6)

Soit ABC un triangle, M le milieu de BC . Soit E sur $[AB)$ hors du segment $[AB]$ tel que

$\widehat{AEC} = \frac{1}{2}\widehat{AMC}$. De même, soit F sur $[AC)$ en dehors de $[AC]$ tel que $\widehat{AFB} = \frac{1}{2}\widehat{AMB}$. Soit X et Y les intersections du cercle circonscrit à AEF avec (BC) . Montrer que $BX = CY$.

Et des problèmes d'IMO

Ces problèmes ne sont pas nécessairement plus durs que les précédents, mais peuvent utiliser quelques outils autres que ceux présentés dans l'introduction de ce TD.

Exercice 12 (IMO 2003, P4)

Soit A, B, C, D quatre points cocycliques. Soit P, Q, R les projetés orthogonaux de D sur AB, AC, BC respectivement. Montrer que $PQ = QR$ si et seulement si les bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ s'intersectent sur AC .

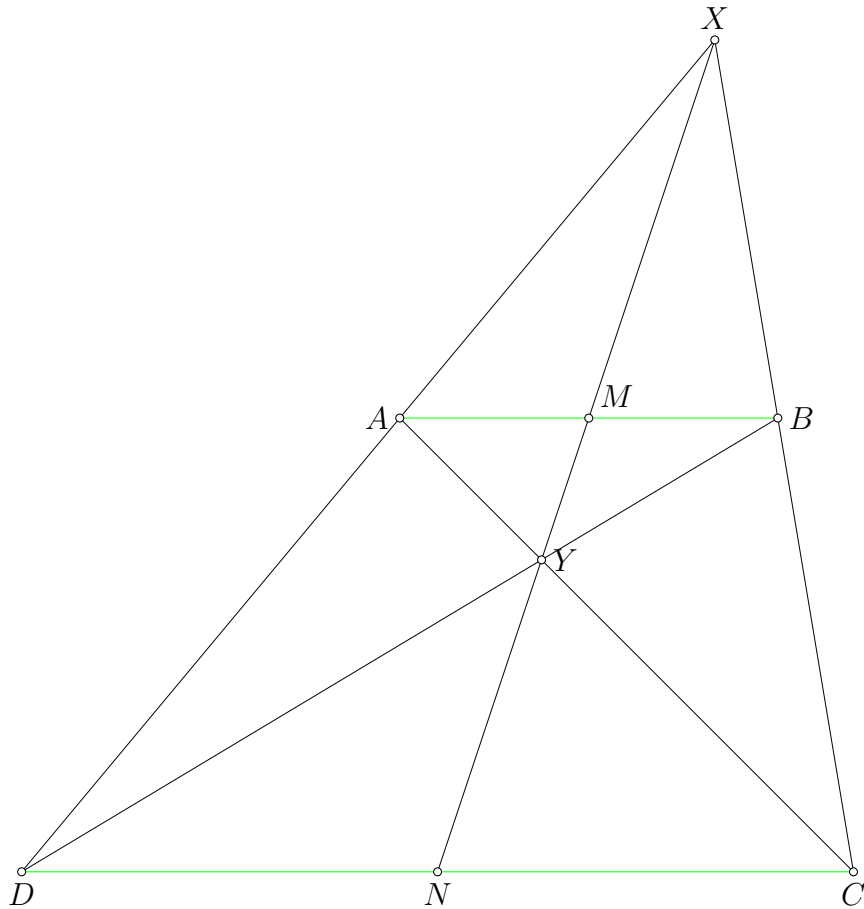
Exercice 13 (IMO 2015, G3)

Soit ABC un triangle rectangle en C , H le pied de la hauteur issue de C . Soit D un point à l'intérieur du triangle CHB tel que CH passe par le milieu du segment $[AD]$. Soit P l'intersection de BD et CH . Soit ω le demi-cercle de diamètre $[BD]$ qui coupe de segment BC . Une droite passant par P est tangente à ω en Q . Montrer que CQ et AD se coupent sur ω .

Exercice 14 (IMO 2009, P2)

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et P, Q des points sur les segments AC et AB respectivement. Soit K, L, M les milieux de BP, CQ, PQ respectivement. On suppose que le cercle circonscrit à KLM est tangent à PQ . Montrer que $OP = OQ$.

Solution de l'exercice 1



Soit M l'intersection de XY avec AB , N l'intersection de XY avec CD . On a envie d'exprimer AM et MB en fonction d'un même segment avec Thalès. On remarque qu'on peut justement calculer les deux rapports $\frac{AM}{ND}$ et $\frac{BM}{ND}$. Donc on le fait, on obtient les deux expressions suivantes :

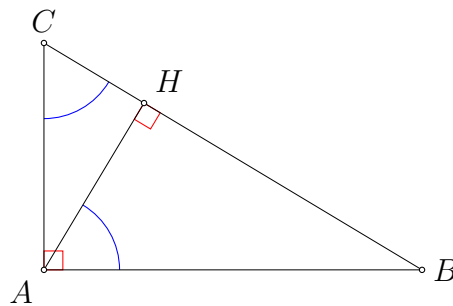
$$\frac{AM}{DN} = \frac{XA}{XD} \text{ et } \frac{MB}{DN} = \frac{YB}{YD}$$

On peut maintenant exprimer les deux rapports obtenus à droite en fonction de AB et CD , toujours avec Thalès :

$$\frac{XA}{XD} = \frac{AB}{CD} = \frac{YB}{YD}$$

Ainsi, $\frac{AM}{DN} = \frac{MB}{DN}$, donc $AM = MB$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2



Notons que puisque $\widehat{CHA} = \widehat{CAB}$, les triangles ACH et BCA sont semblables. On a donc $\frac{AC}{CB} = \frac{CH}{AC}$ qui se réécrit

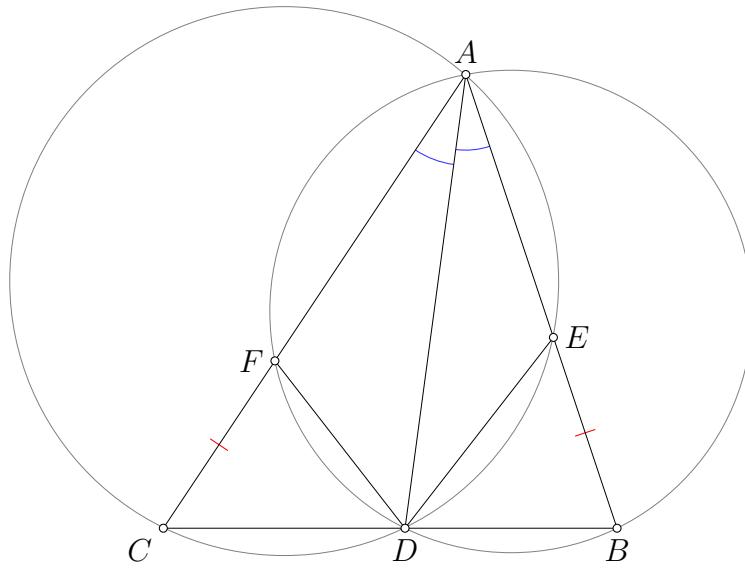
$$AC^2 = CB \cdot CH$$

On montre de même que

$$AB^2 = CB \cdot HB$$

Le rapport des deux égalités donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 3



On présente une solution utilisant le théorème de la bissectrice. D'après la puissance du point B par rapport au cercle passant par A, F, D et C :

$$BD \cdot BC = BE \cdot BA$$

De même, d'après la puissance du point C par rapport au cercle passant par A, E, D et B :

$$CD \cdot CB = CF \cdot CA$$

Ainsi :

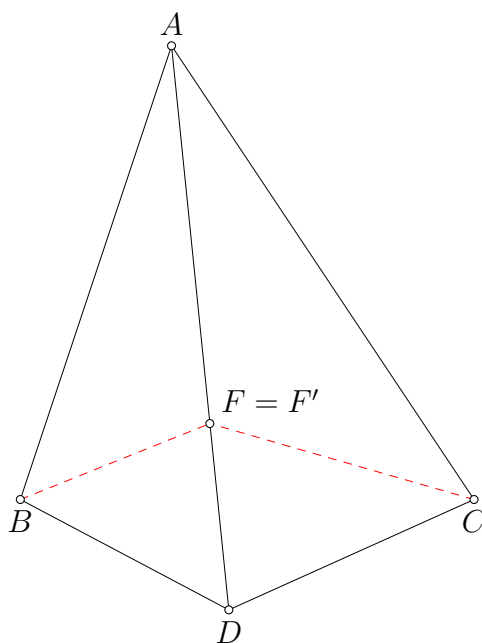
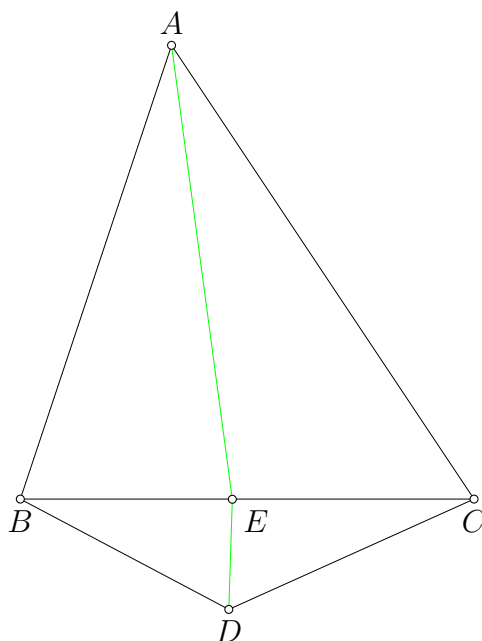
$$\frac{CF \cdot CA}{BE \cdot BA} = \frac{CD \cdot CB}{BD \cdot BC}$$

donc

$$\frac{CF}{BE} = \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BA}{CA} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{BA}{CA} = 1$$

où la dernière égalité provient du théorème de la bissectrice.

Solution de l'exercice 4



Soit E le point d'intersection de la bissectrice de $\widehat{CAB}$ avec BC . Par le théorème de la

bissectrice, on a

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$$

De même, comme E est sur la bissectrice de $\widehat{BDC}$, on a

$$\frac{BE}{EC} = \frac{DB}{DC}$$

Ainsi,

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

On a réussi à se ramener à une égalité de rapports mettant uniquement en jeu les côtés du quadrilatère $ABCD$. Il ne reste plus qu'à faire l'argument inverse pour obtenir la concourance des trois droites à partir de cette égalité de rapports. Soit maintenant F l'intersection de la bissectrice de $\widehat{ABD}$ avec AD et F' l'intersection de la bissectrice de $\widehat{DCA}$ avec AD . On veut montrer que $F = F'$. Or, on sait, toujours par le théorème de la bissectrice, que

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BA}{BD} \text{ et } \frac{AF'}{F'D} = \frac{CA}{CD}$$

Ainsi, d'après l'égalité de rapports obtenue précédemment, on a

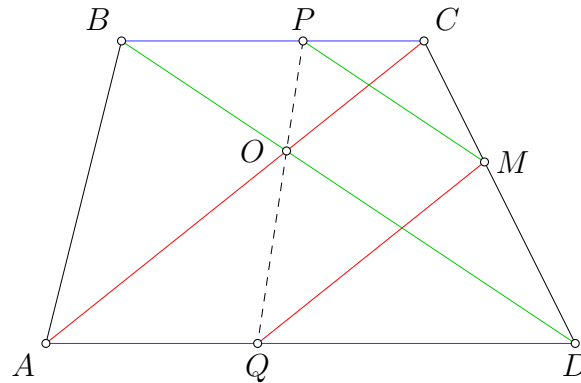
$$\frac{AF}{FD} = \frac{AF'}{F'D}$$

d'où

$$\frac{AD}{FD} = \frac{AD}{F'D}$$

Ainsi, $F = F'$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5



Il suffit de montrer que $\frac{AQ}{AO} = \frac{CP}{CO}$.

On a trois paires de droites parallèles, dont on écrit les égalités de rapports de Thalès :

$$\frac{CM}{CP} = \frac{CD}{CB}$$

$$\frac{AQ}{CM} = \frac{AD}{CD}$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{CO}{AO}$$

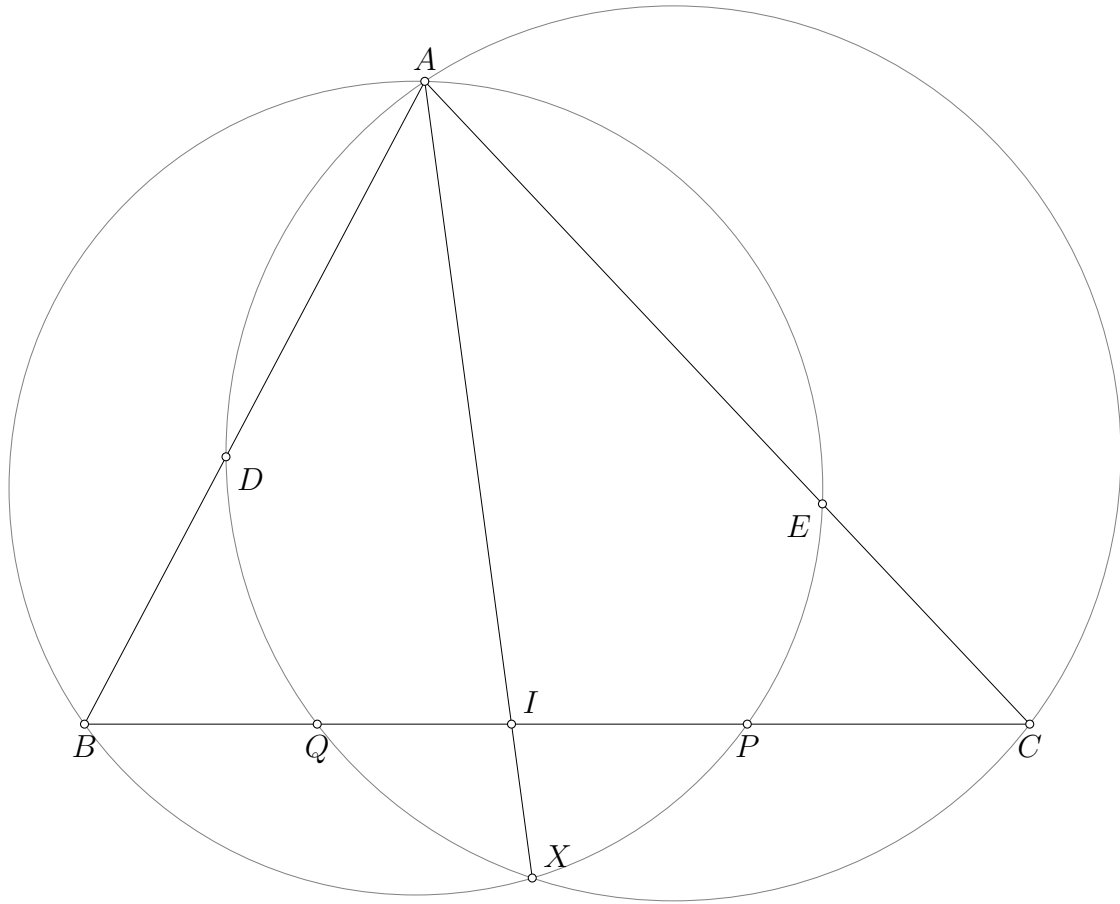
Comment savoir quelles égalités écrire? Eh bien, on regarde l'égalité à montrer, et on écrit les formules qui mettent en jeu des longueurs apparaissant dans ce qu'on veut montrer. Ainsi, l'égalité en vert met en jeu CP , celle en rouge AQ et celle en bleu AO et CO .

En combinant ces trois égalités, on obtient :

$$\frac{AQ}{CP} = \frac{AQ}{CM} \cdot \frac{CM}{CP} = \frac{AD}{CD} \cdot \frac{CD}{BC} = \frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO}$$

ce qui est l'égalité voulue.

Solution de l'exercice 6



On veut montrer que la bissectrice de ABC est l'axe radical des deux cercles. Pour cela, il suffit de trouver un point sur la bissectrice autre que A qui a la même puissance par rapport aux deux cercles. Le point le plus naturel à considérer est le pied de la bissectrice issue de A ; appelons-le I . Soit a, b, c les longueurs des côtés du triangle ($a = BC, b = AC, c = AB$). Soit P la deuxième intersection du cercle circonscrit à ABE avec la droite BC et Q la deuxième intersection du cercle circonscrit à ACD avec la droite BC . Pour calculer les puissances de I par rapport aux cercles, il suffit d'exprimer simplement les distances IB, IC, IP et IQ . Or, on a vu dans l'exemple 1 comment calculer les deux premières :

$$IB = \frac{ac}{b+c} \text{ et } IC = \frac{ab}{b+c}$$

Pour calculer IP , on va commencer par exprimer CP . Par puissances de points, $CP \cdot CB = CE \cdot CA$ d'où $CP = \frac{b \cdot CE}{a}$ et de même $BQ = \frac{c \cdot BD}{a}$. Ainsi,

$$IP = CI - CP = \frac{ab}{b+c} - \frac{b \cdot CE}{a}$$

et de même

$$IQ = BI - BQ = \frac{ac}{b+c} - \frac{c \cdot BD}{a}$$

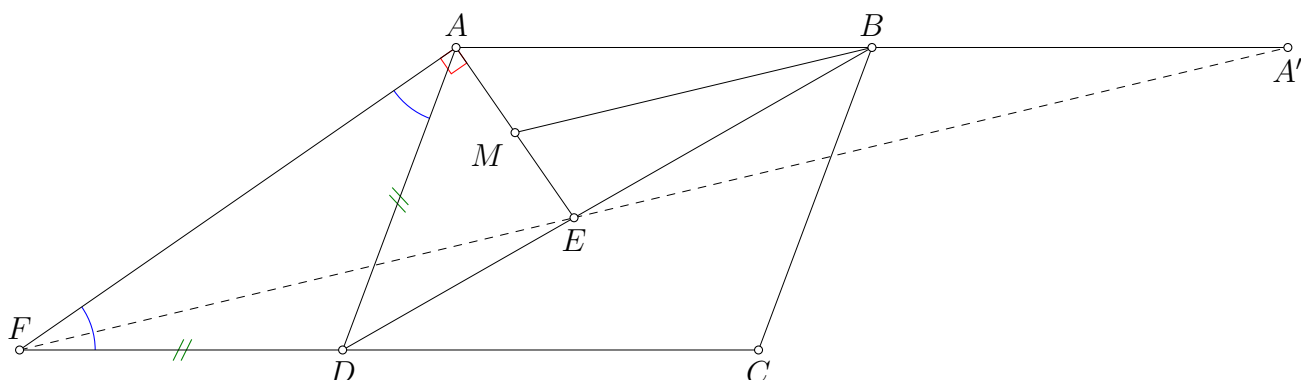
On peut alors calculer nos deux produits :

$$IQ \cdot IC = \left(\frac{ac}{b+c} - \frac{c \cdot BD}{a} \right) \cdot \frac{ab}{b+c} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} - \frac{BD \cdot bc}{b+c}$$

$$IP \cdot IB = \left(\frac{ab}{b+c} - \frac{b \cdot CE}{a} \right) \cdot \frac{ac}{b+c} = \frac{a^2bc}{(b+c)^2} - \frac{CE \cdot bc}{b+c}$$

On a directement le résultat voulu en utilisant le fait que $BD = CE$.

Solution de l'exercice 7



Quand on regarde la figure, on voit un milieu impliqué dans une affaire de droites parallèles. Automatiquement, on pense droite des milieux et homothéties. On force donc l'apparition d'une droite des milieux en introduisant le symétrique A' de A par rapport à B . B est alors le milieu de $[AA']$ donc $(BM) \parallel (EA')$. Il suffit donc de montrer que A', E et F sont alignés.

Reprenons du recul sur la figure. On voit trois points alignés, dont deux d'entre eux sur deux droites parallèles, on pense immédiatement à Thalès. Il suffit de montrer, par le théorème de Thalès, que

$$\frac{ED}{DF} = \frac{EB}{BA'}$$

pour avoir l'alignement voulu.

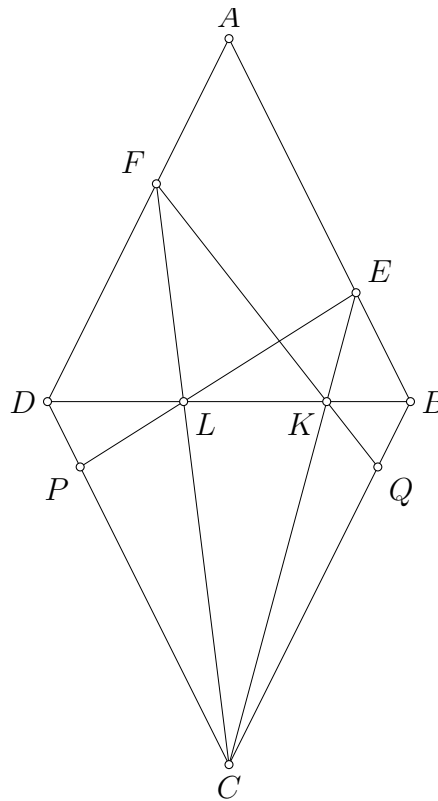
Intéressons-nous aux longueurs mises en jeu. On connaît le rapport $\frac{ED}{EB}$ par le théorème de la bissectrice, on connaît la longueur BA' (puisque c'est aussi BA). Ainsi, il nous suffirait de maîtriser la longueur DF . L'énoncé est équivalent à $DF = \frac{ED}{EB} \cdot BA'$. Or, par le théorème de la bissectrice, $\frac{ED}{EB} = \frac{AD}{AB}$. Il nous suffit donc de montrer que $DF = \frac{AD}{AB} \cdot AB'$, c'est-à-dire que $DF = AD$!

On souhaite donc montrer que ADF est isocèle en D , il ne reste qu'à conclure par chasse aux angles. On a en effet

$$\begin{aligned} \widehat{DFA} &= 180 - \widehat{FAB} \\ &= 180 - \widehat{FAE} - \widehat{EAB} \\ &= 180 - 90 - \widehat{DAE} \\ &= 90 - \widehat{DAE} \\ &= \widehat{FAD} \end{aligned}$$

ce qui conclut!

Solution de l'exercice 8



On dispose de plusieurs configurations "papillons", on va donc les examiner chacune et tirer les informations utiles.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $QBKDF$, $\frac{QB}{DF} = \frac{BK}{DK}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $EBKDC$, $\frac{EB}{DC} = \frac{BK}{DK}$ et ainsi, en combinant les deux égalités $\frac{QB}{DF} = \frac{EB}{DC}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DPLEB$, $\frac{DP}{EB} = \frac{DL}{LB}$.

D'après le théorème de Thalès dans le papillon $DFLCB$, $\frac{DF}{CB} = \frac{DL}{LB}$. Ainsi, en combinant les deux égalités, $\frac{DP}{EB} = \frac{DF}{CB}$.

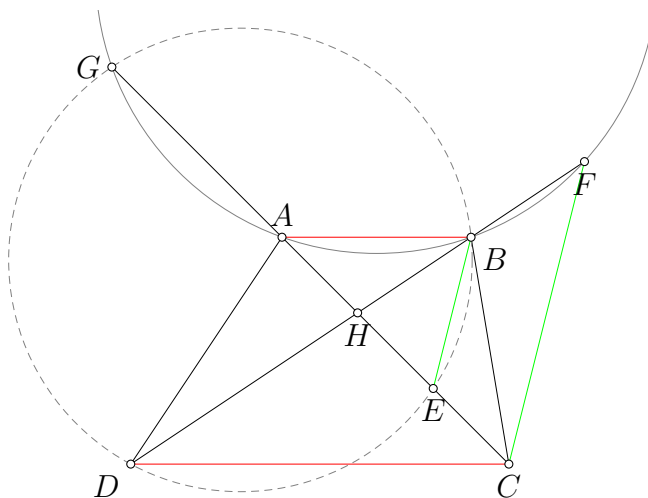
On voit que les calculs concernent plutôt les longueurs DP et QB , et que l'énoncé est équivalent à montrer que $DP = QB$.

On utilise alors les égalités de rapport que l'on a établies :

$$DP = \frac{DF \cdot EB}{BC} = \frac{DF \cdot EB}{CD} = QB$$

On a donc bien $CP = CQ$.

Solution de l'exercice 9



La présence de nombreuses droites parallèles nous encourage à essayer une chasse aux rapports et donc à utiliser la puissance d'un point.

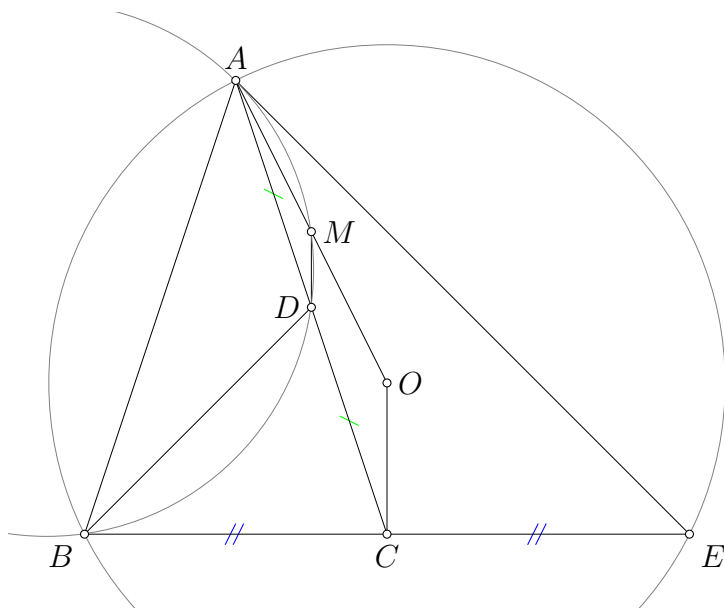
Soit G le second point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ABF . Plutôt que de montrer que deux cercles se coupent sur la droite (AC) , nous allons montrer que le point G appartient au cercle circonscrit au triangle BED .

Soit H le point d'intersection des droites (AC) et (BD) . D'après la puissance du point H par rapport au cercle circonscrit au triangle ABF , $HG \cdot HA = HB \cdot HF$. De plus le fait que les droites (BE) et (CF) soient parallèles se traduit, d'après le théorème de Thalès, par $HE \cdot HF = HB \cdot HC$. N'oublions pas que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, donc par le théorème de Thalès, on sait aussi que $\frac{HC}{HA} = \frac{HD}{HB}$. Nous avons désormais tous les outils pour démontrer que $HG \cdot HE = HB \cdot HD$:

$$HG \cdot HE = \frac{HB \cdot HF \cdot HE}{HA} = HB \cdot HB \cdot \frac{HC}{HA} = HB^2 \cdot \frac{HD}{HB} = HD \cdot HB$$

ce qui signifie, par la réciproque de la puissance d'un point, que les points G, B, E et D sont cocycliques.

Solution de l'exercice 10



La première chose qui frappe est que le point C est manifestement le milieu du segment $[BE]$. Commençons par essayer de montrer ce point.

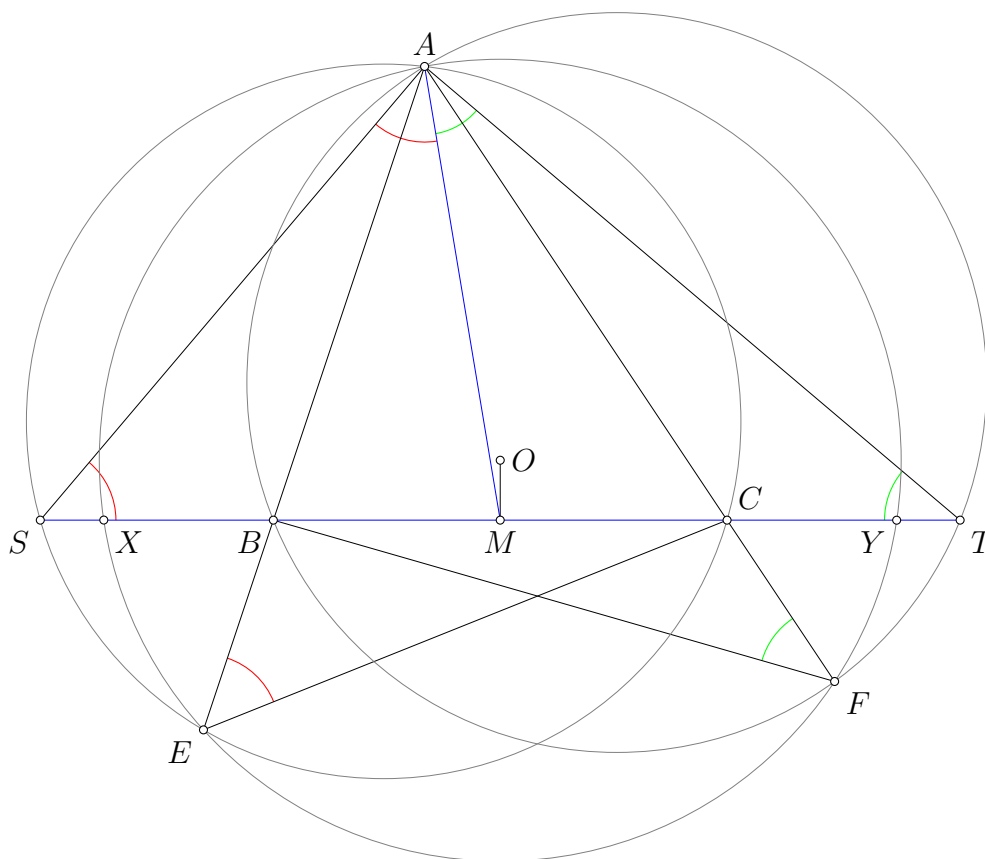
Les milieux et triangles isocèles nous incitent à chercher des longueurs ou rapports de longueurs égaux, et donc des triangles semblables. On peut par exemple s'intéresser aux triangles BDC et EAB . En effet, on a $\widehat{DCB} = \widehat{ABE}$ et, par angle tangentiel, $\widehat{BDC} = 180 - \widehat{ADB} = \widehat{EAB}$. Ainsi, nos deux triangles ont les mêmes angles donc sont bien semblables. On en déduit que $\frac{BC}{BE} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{2}$, donc C est le milieu de $[BE]$ comme voulu.

Ainsi, OC est la médiatrice de $[BE]$. On maîtrise donc la valeur de l'angle $\widehat{AOC}$, ce qui va nous permettre de conclure par chasse aux angles :

$$\begin{aligned}
 \widehat{AMD} &= \widehat{AOC} \\
 &= \widehat{AOB} + \widehat{BOC} \\
 &= 2\widehat{AEB} + \frac{1}{2}\widehat{BOE} \\
 &= 2(180 - \widehat{BAE} - \widehat{ABE}) + \widehat{BAE} \\
 &= 180 - 2\widehat{ABE} + (180 - \widehat{BAE}) \\
 &= 180 - 2\widehat{ABC} + \widehat{ADB} \\
 &= 180 - \widehat{ABC} - \widehat{ACB} + (\widehat{DBC} + \widehat{DCB}) \\
 &= 180 - \widehat{ABC} + \widehat{DBC} \\
 &= 180 - \widehat{ADB}
 \end{aligned}$$

d'où la cocyclicité de A, D, M, B .

Solution de l'exercice 11



On connaît la valeur de l'angle de l'arc $\widehat{AEC}$, mais on n'a rien à quoi relier cet angle. On force donc l'apparition d'un angle inscrit en considérant le cercle circonscrit à AEC , et de même le cercle circonscrit à ABF . On note leurs seconds points d'intersection avec la droite (BC) respectivement S et T .

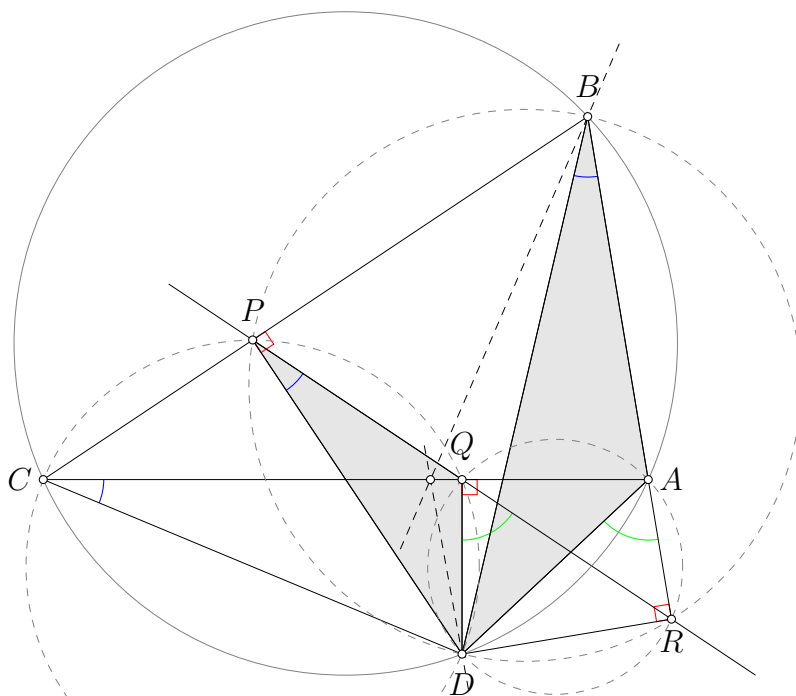
Par une courte chasse aux angles, $\widehat{ASM} = \widehat{AEC} = \frac{\widehat{AMT}}{2}$ et on calcule également

$$\widehat{SAM} = 180^\circ - \widehat{AMS} - \widehat{ASM} = 180^\circ - \widehat{AMS} - \frac{\widehat{AMT}}{2} = \widehat{AMT} - \frac{\widehat{AMT}}{2} = \frac{\widehat{AMT}}{2} = \widehat{ASM}$$

Ainsi, le triangle AMS est isocèle en M . De la même manière le triangle AMT est isocèle en M . Ainsi, $MS = MA = MT$, donc M est le milieu de ST . On a donc $BS = CT$ (par la symétrie de centre M).

Pour conclure on remarque que la puissance de B par rapport au cercle circonscrit du triangle AEF est $BA \cdot BE = BC \cdot BS$ et la puissance de C par rapport à au cercle circonscrit du triangle AEF est $CA \cdot CF = CT \cdot CB = BC \cdot BS$. Donc B et C ont la même puissance par rapport au cercle AEF , ils sont donc à égale distance du centre du cercle circonscrit du triangle AEF . La médiatrice de $[XY]$ est donc la même que la médiatrice de $[AB]$, d'où la conclusion de l'exercice.

Solution de l'exercice 12



L'énoncé indique que les points P, Q et R sont alignés sur la droite de Simson du point D pour le triangle ABC . Du fait des divers angles droits, les quadrilatères $CDQP, ARDQ$ et $PDRB$ sont cycliques. Observons quelques propriétés additionnelles :

Tout d'abord, par le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $DPBR$, on a $\widehat{DPQ} = \widehat{DPR} = \widehat{DBR} = \widehat{DBA}$. Ensuite, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le quadrilatère $DQAR$, on a $\widehat{DQR} = \widehat{DAR}$, ce qui implique

$$\widehat{PQD} = 180^\circ - \widehat{DQR} = 180^\circ - \widehat{DAR} = \widehat{BAD}$$

Ainsi, on a $\triangle DPQ \simeq \triangle DBA$. De la même façon, on a $\triangle DQR \simeq \triangle DCB$.

On déduit notamment que

$$\frac{PQ}{RQ} = \frac{PQ}{DQ} \cdot \frac{DQ}{RQ} = \frac{BA}{DA} \cdot \frac{DC}{BC}$$

On montre désormais l'équivalence voulue, par double implication.

On suppose que les bissectrices des angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{CDA}$ se coupent sur la droite (AC) et on note X ce point d'intersection. Alors d'après le théorème de la bissectrice :

$$\frac{CD}{AD} = \frac{CX}{AX} = \frac{CB}{AB}$$

si bien que $\frac{PQ}{RQ} = \frac{BA \cdot CD}{DA \cdot BC} = 1$ et $PQ = QR$.

Supposons maintenant que $PQ = QR$. Alors $\frac{BA \cdot CD}{DA \cdot BC} = \frac{PQ}{RQ} = 1$, si bien que $\frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD}$.

Soit maintenant X_B le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ sur le segment $[AC]$ et X_D le pied

de la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$ sur le segment $[AC]$. D'après le théorème de la bissectrice, on a donc

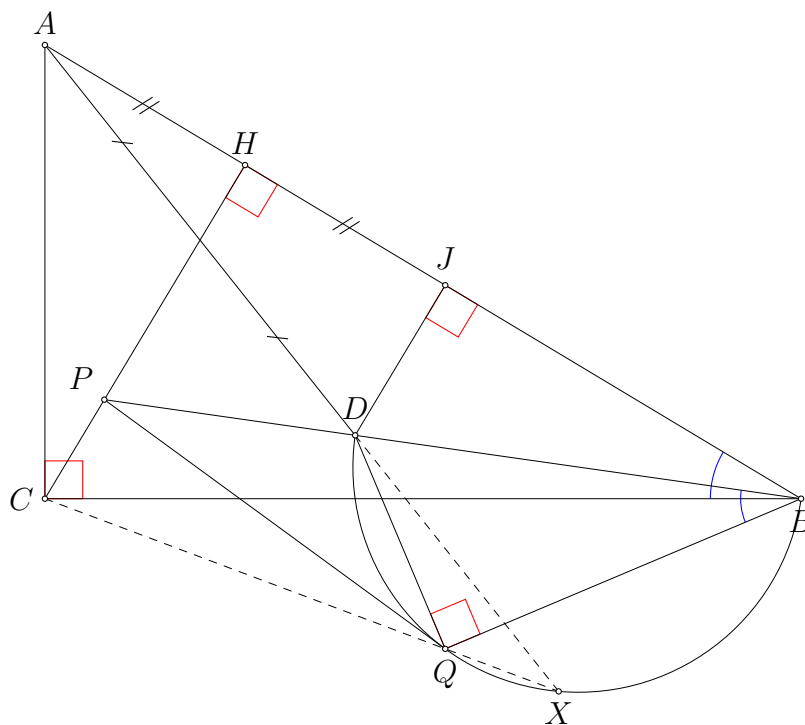
$$\frac{AX_B}{CX_B} = \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD} = \frac{AX_D}{CX_D}$$

et puisque X_B et X_D sont tous les deux à l'intérieur du segment $[AC]$, on trouve $X_B = X_D$ et les bissectrices se coupent bien sur le segment $[AC]$.

Remarque n°1 : Attention, ici il est bien nécessaire de procéder par double implication. On est dans un cas (rare) de la géométrie où montrer une implication ne permet pas d'avoir l'équivalence en remontant le raisonnement. Il est nécessaire de détailler les deux étapes.

Remarque n°2 : La condition que les bissectrices de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ se coupent sur le segment $[AC]$ est équivalente au fait que D est sur la médiane issue du sommet A dans le triangle ABC .

Solution de l'exercice 13



Pour utiliser le fait que la droite (HC) coupe le segment $[AD]$ en son milieu, il peut être intéressant d'introduire d'autres milieux, afin d'obtenir des droites parallèles et des égalités de rapport. Ainsi, on introduit $J \neq A$ le point sur le segment $[AB]$ tel que $AH = HJ$. Les droites (DJ) et (PH) sont alors parallèles et les triangles PHB et DJB sont semblables.

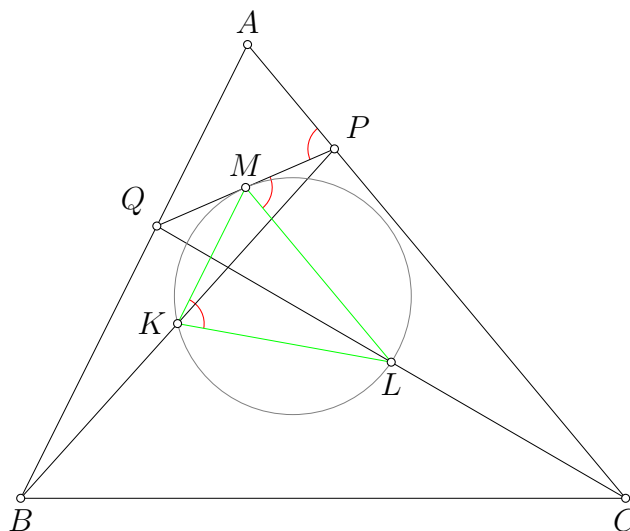
$\widehat{DQB} = 90^\circ = \widehat{ACB}$ car le segment $[DB]$ est un diamètre du cercle ω . La droite (PQ) est tangente au cercle ω donc les triangles PDQ et PQB sont semblables. D'où

$$\frac{DQ^2}{BQ^2} = \frac{DQ}{BQ} \cdot \frac{DQ}{BQ} = \frac{PQ}{PB} \cdot \frac{PD}{PQ} = \frac{PD}{PB} = \frac{HJ}{HB} = \frac{AH}{HB} = \frac{AH}{CH} \cdot \frac{CH}{BH} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AC}{CB} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

donc $\frac{DQ}{BQ} = \frac{AC}{BC}$ et les triangles ACB et DQB sont semblables. Donc le point B est le centre de la similitude qui envoie Q sur C et D sur A . Si on note X le point d'intersection des droites (AD) et (CQ) , cela signifie que le point B appartient aux cercles circonscrits aux triangles DQX et ACX donc le point X appartient au cercle ω , ce que nous voulions.

Solution de l'exercice 14

La figure semble être ardue à tracer, mais ce n'est pas vraiment le cas : on peut raisonnablement supposer que l'implication est une équivalence. Il suffit alors de choisir P et Q tels que $OP = OQ$.



Ici, il peut être plus naturel de raisonner à partir de la conclusion du problème, idée récurrente en géométrie. En effet, utiliser ce qu'on veut montrer pour essayer de découvrir de nouvelles choses sur la figure peut très souvent amener à remarquer des propriétés qui "doivent" être vraies si le problème est vrai. Il suffit alors de montrer ces propriétés pour conclure.

Ici, l'énoncé nous demande de montrer que $OP = OQ$. Ce n'est pas une égalité très conviviale *a priori*, d'autant plus que le point O n'est pas introduit. Mais en fait, cela revient à montrer que P et Q ont la même puissance par rapport au cercle circonscrit à ABC (puisque la puissance d'un point X par rapport à ce cercle dépend uniquement de la distance XO). Et ça, c'est une propriété plus conviviale ! On veut donc montrer que $PA \cdot PC = QA \cdot QB$.

Or, on a justement $PC = 2ML$ et $QB = 2MK$ (par droites des milieux). On veut donc en fait montrer que

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML}$$

Cette égalité de rapports fait tout de même fortement penser à des triangles semblables... Plus que cela, le fait que AQP et MLK soient semblables semble être la seule façon à peu près raisonnable de démontrer cette égalité. On a déjà utilisé un aspect des triangles semblables : les rapports de longueurs. Pour continuer, on utilise l'autre aspect : les angles égaux. Alors on y va. On veut montrer que $\widehat{MKL} = \widehat{APQ}$.

Le moment est venu d'utiliser la tangence : par angle tangentiel, $\widehat{MKL} = \widehat{PML}$. Par angles alternes internes dans les droites parallèles (AP) et (ML) , on a aussi $\widehat{PML} = \widehat{APM}$. Ainsi, $\widehat{MKL} = \widehat{APM} = \widehat{APQ}$, comme voulu.

On montre de même que $\widehat{MLK} = \widehat{AQP}$.

Ainsi, nos deux triangles sont bel et bien semblables. Il suffit alors de remonter les arguments pour conclure.

3 Géométrie : Axe radical (Eva et Lilas)

Définition 1.

Soit w_1 et w_2 deux cercles, l'axe radical associé est l'ensemble des points ayant la même puissance d'un point par rapport aux deux cercles.

Proposition 2.

- Si les deux cercles sont disjoints, alors l'axe radical est une droite perpendiculaire à la droite (OO') .
- Si les deux cercles s'intersectent en P et Q alors l'axe radical est la droite (PQ)

Proposition 3.

Soient w_1, w_2 et w_3 trois cercles de centres non alignés. Les axes radicaux de ces trois cercles pris deux à deux sont concourants : ils se rencontrent en un unique point appelé centre radical de w_1, w_2 et w_3 .

Exercices

Exercice 1 (Propriété de cours)

Soient ω_1 et ω_2 des cercles disjoints extérieurs l'un à l'autre. On trace les 4 tangentes communes à ces deux cercles et, pour chaque tangente, un lutin maléfique se place sur le milieu du segment formé par les points de contact aux deux cercles. Montrer que tous les lutins maléfiques sont alignés.

Exercice 2 (Orthogonalité de l'axe radical)

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note M et N les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. On note P l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (AD)$ et Q l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (BC)$. Montrer que (MN) est perpendiculaire à (PQ) .

Exercice 3

Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note O un point sur ω . Le projeté orthogonal de O sur $[AB]$ est H . Le cercle de centre O et de rayon OH recoupe ω en X et Y . Montrer que X, Y et le milieu de $[OH]$ sont alignés.

Exercice 4

Soit ABC un triangle isocèle en B . Les tangentes en A et B au cercle circonscrit Γ de ABC se coupent en D . Soit E le second point d'intersection de (DC) avec Γ . Prouver que (AE) coupe $[DB]$ en son milieu.

Exercice 5 (Réciproque centre radical)

Soient A, B, C, D, E, F six points. On suppose que A, B, C, D sont cocycliques, et que C, D, E, F sont cocycliques. On suppose de plus que les droites $(AB), (CD)$ et (EF) sont concourantes. Montrer que les points E, F, A, B sont cocycliques.

Exercice 6

Soient C_1 et C_2 deux cercles qui s'intersectent en $U \neq V$, A, X des points de C_1 et B, Y

des points de C_2 . On suppose que les angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AYB}$ sont droits. Montrer que (AX) , (BY) , (UV) sont concourantes.

Exercice 7

Soient D, E, F les pieds des hauteurs dans un triangle non équilatéral ABC issues de A, B, C respectivement. Le centre du cercle circonscrit de ABC est noté O . Montrer que les cercles (AOD) , (BOE) et (COF) s'intersectent en un point X autre que O .

Exercice 8

f Soit ABC un triangle, et I le centre de son cercle inscrit. Soit D, L , et M les points de tangence du cercle inscrit avec (BC) , (AC) , (AB) . Soit P l'intersection de (ML) et (BC) . Montrer que $(AD) \perp (IP)$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle, et $P \in [AB]$, $Q \in [AC]$ tels que $AP = AQ$. Soient R, S des points qui appartiennent au segment $[BC]$ tels que $S \in [BR]$ et tels que $\widehat{BPS} = \widehat{PRS}$, et $\widehat{CQR} = \widehat{QSR}$. Montrer que P, Q, R, S sont cocycliques.

Exercice 10

Soit ABC un triangle acutangle, L, M, N les milieux de $[BC]$, $[AB]$, $[AC]$ respectivement. (LM) recoupe le cercle Γ_1 de diamètre $[AB]$ au dessus de la droite (BC) en U et (LN) recoupe le cercle Γ_2 de diamètre $[AC]$ au dessus de la droite (BC) en V . On note X l'intersection des tangentes en U à Γ_1 et en V à Γ_2 . Montrer que (XA) est perpendiculaire à (BC) .

Exercice 11

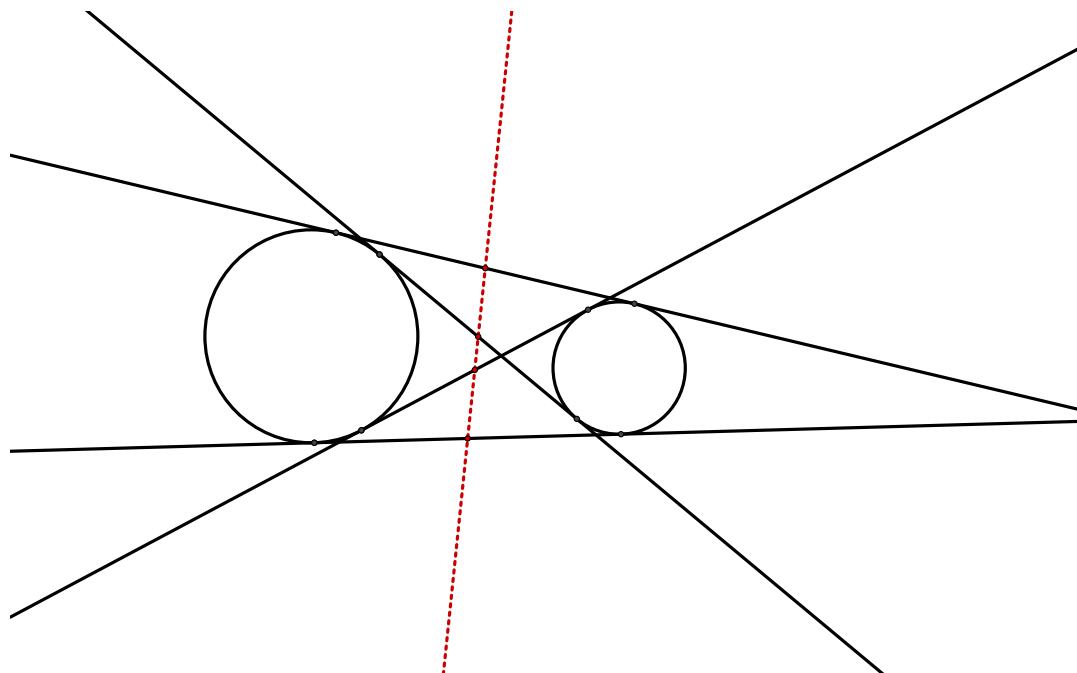
Soit ABC un triangle de centre de cercle inscrit I . Le cercle circonscrit à ABC est recoupé par (AI) en D , par (BI) en E et par (CI) en F . La droite passant par I parallèle à (BC) (respectivement (AC) , (AB)) intersecte (EF) (respectivement (DF) , (DE)) en un point K (respectivement L, M). Montrer que K, L, M sont alignés.

Exercice 12 (IMO 1995 P1)

Soient A, B, C et D quatre points distincts alignés dans cet ordre. Soient Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètre respectifs $[AC]$ et $[BD]$, qui s'intersectent en X et Y . On considère O un point arbitraire sur (XY) qui ne soit pas sur la droite (AB) . (CO) recoupe Γ_1 en M , (BO) recoupe Γ_2 en N . Montrer que (AM) , (DN) et (XY) sont concourantes.

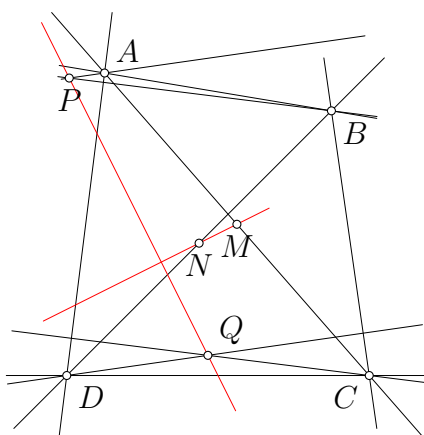
Solutions

Solution de l'exercice 1



Tous les points ont la même puissance par rapport à chaque cercle. Ils sont donc tous sur l'axe radical des deux cercles et sont de la sorte alignés.

Solution de l'exercice 2



Considérons les cercles Ω_1 et Ω_2 de centre M et N et de rayons respectifs MA et NB . Montrons que P est sur l'axe radical des deux cercles. Soit X et Y les pieds des hauteurs issus de A et D respectivement sur $[CD]$ et $[AB]$. L'angle droit donne de façon immédiate que X appartient à Ω_1 et que Y appartient à Ω_2 . Comme $XYAD$ est cyclique, P a la même puissance par rapport aux deux cercles et il est sur l'axe radical. De la même manière on montre que Q est sur l'axe radical de Ω_1 et Ω_2 . L'axe radical de deux cercles étant perpendiculaire à la droite qui relie leurs centres, on peut conclure.

Solution de l'exercice 6

A, X, B, Y sont cocycliques donc par centre radical.

Solution de l'exercice 7

On veut montrer que le lieu des points ayant la même puissance par rapport aux trois cercles est une droite. Pour ce faire il suffit de trouver un point autre que O convenant.

Or en notant H l'orthocentre de ABC , comme $AEBD$ et $FECB$ sont cocycliques on a $HA \cdot HD = HB \cdot HE = HF \cdot HC$.

Ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8

On va appliquer la théorie de l'axe radical au cercle de centre A et de rayon $AM = AL$ et au cercle-point D que l'on note ω .

$$P_{(D)}(P) = PD^2 \text{ et } P_{(\omega)}(P) = PM \cdot PL = P_{(MLD)}(P) = PD^2.$$

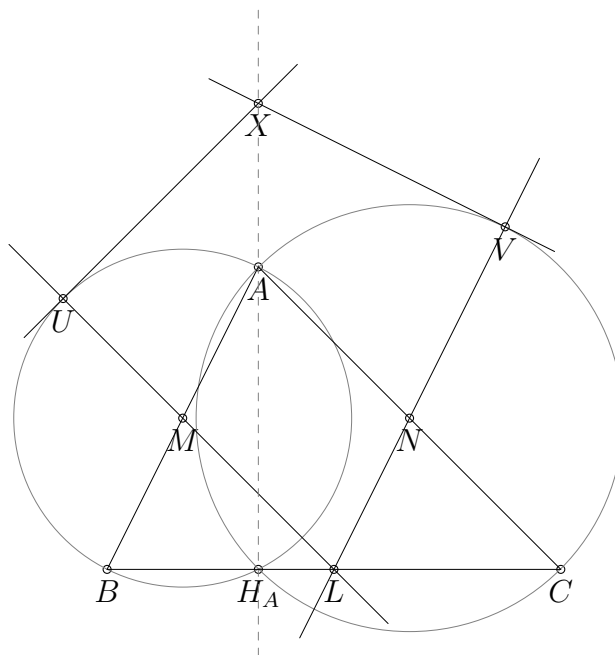
Donc P est sur l'axe radical des deux cercles.

De même (IM) est tangent à ω donc $P_{(\omega)}(I) = IM^2 = ID^2 = P_{(D)}(I)$.

Donc (PI) est l'axe radical aux deux cercles donc bien perpendiculaire à (AD) .

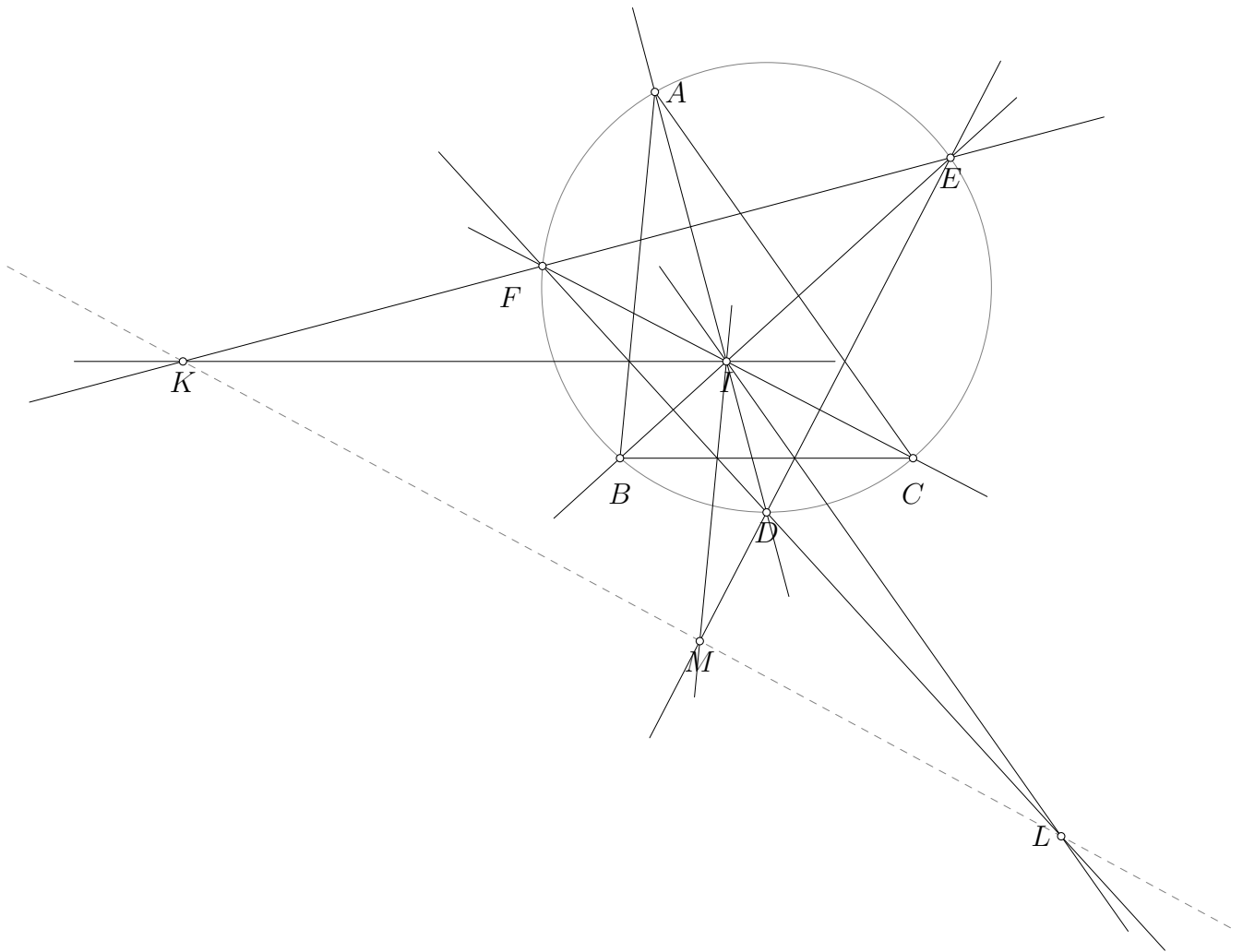
Solution de l'exercice 9

Voir le [poly de valbonne de 2022](#), TD de géométrie d'Antoine groupe C, exercice 9.

Solution de l'exercice 10

Puisque Γ_1 et Γ_2 passent par H_A le pied de hauteur issue de A dans ABC , il suffit de montrer que X est sur leur axe radical, c'est-à-dire $XU = XV$. On remarque alors $LM = NA = NV$ et $LN = MA = MU$ donc $LU = LV$. De plus $\widehat{LMX} = 90 = \widehat{LNX}$, ce qui nous donne bien l'égalité voulue.

Solution de l'exercice 11



Par angle inscrit puis parallélisme on a $\widehat{FEI} = \widehat{FCB} = \widehat{FEI} = \widehat{FIK}$ et donc (KI) est tangente à (FIE) : cela signifie $KI^2 = KE \cdot KF$ et donc K est sur l'axe radical de (ABC) et du cercle point (I) . De même, L et M sont également sur cet axe et on en déduit l'alignement voulu.

Solution de l'exercice 12

Voir le [poly de valbonne de 2019](#), TD de géométrie de Martin groupe C, exercice 4.

4 Algèbre : Polynômes 2 (Gabriel)

Variations, oscillations

Un polynôme de degré n admet au plus n racines, en ceci un polynôme est *rigide*. Plus généralement, on maîtrise les variations d'un polynôme au-delà de ses racines : il oscille peu, et son comportement en $\pm\infty$ est celui de son monôme dominant : monotone et allant vers $\pm\infty$ si le polynôme est non-constant.

Exercice 1

Déterminez tous les polynômes P tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

Solution de l'exercice 1

Soit u_n , la suite telle que $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ et $u_0 = 0$. Par récurrence immédiate $P(u_n) = u_n$. Or la suite u_n est strictement croissante et prend donc une infinité de valeurs. Ainsi, le polynôme $P(X) - X$ a une infinité de racines donc vaut 0. Ainsi, $P(X) = X$.

Exercice 2 (Un contrôle des oscillations)

Soit n un entier, et P un polynôme non-nul tel que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ on ait :

$$1^k P(1) + 2^k P(2) + \dots + n^k P(n) = 0$$

Montrez que le degré de P est supérieur ou égal à n .

Solution de l'exercice 2

Notons E_k l'équation obtenue pour un q donné. Supposons par l'absurde que $\deg(P) < n$, de sorte que $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$. Alors avec $a_0E_1 + \dots + a_{n-1}E_n$ on obtient $1P(1)^2 + 2P(2)^2 + \dots + nP(n)^2 = 0$ donc $P(1) = P(2) = \dots = P(n) = 0$ donc P a n racines et donc est nul.

Exercice 3

Soit P et Q des polynômes dont le coefficient dominant est positif et tels que pour tout x , $P(P(x)) = Q(Q(x))$ montrez que P et Q sont égaux.

Solution de l'exercice 3

Posons $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ et $Q(X) = b_0 + b_1X + \dots + b_qX^q$. Tout d'abord, $P \circ P$ et $Q \circ Q$ sont de degrés p^2 et q^2 , donc $p = q$. En outre, si $p = q = 0$, on constate que $P(X) = a_0 = P(P(X)) = Q(Q(X)) = b_0 = Q(X)$.

On suppose maintenant que $P \neq Q$, soit k le plus grand entier tel $a_k \neq b_k$; quitte à échanger P et Q , on suppose $a_k > b_k$. Dans ces conditions, $P(X) - Q(X)$ est de degré k , et de coefficient dominant $a_k - b_k > 0$, donc $P(x) > Q(x)$ quand x est assez grand.

En outre, comme $a_q > 0$ et $b_q > 0$, et puisque P et Q sont non constants, on sait que P et Q sont croissants et arbitrairement grands au voisinage de $+\infty$. Lorsque x est assez grand, on en déduit donc que $P(P(x)) > P(Q(x)) > Q(Q(x))$, ce qui est absurde. Les deux polynômes P et Q sont donc égaux.

Exercice 4 (non traité en cours)

Quel est le $n \in \mathbb{N}$ minimal pour lequel il existe P un polynôme à $2n + 1$ termes

$$P(x) = a_{2n}x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

où les pour tout i , $100 \leq a_i \leq 101$, et admettant au moins une racine réelle.

Solution de l'exercice 4

On remarque d'abord qu'une racine ne peut être que négative. On regarde donc plutôt $Q(x) = P(-x)$ pour rester avec $x > 0$. Il s'agit maintenant de ne s'intéresser qu'à un seul cas extrême : comme $Q(0) = a_0 \geq 0$ il suffit de trouver y tel que $Q(y) \leq 0$ pour avoir une racine. Or pour x positif on a $Q(x) \geq 100x^{2n} - 101x^{2n-1} + 100x^{2n-2} - \dots - 101x + 100$. Notamment on a bien une racine pour $n = 100$ et $x = 1$ (c'est à dire $x = -1$ si on revient à P). Montrons maintenant qu'on a $n \geq 100$. Ceci revient à montrer que pour $n < 100$, $Q(x) > 0$ i.e

$$x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + 1 > \left(1 + \frac{1}{100}\right) (x^{2n-1} + x^{2n-3} + \dots + x).$$

Or on a par l'IAG $x^{2k+2} + x^{2k} \geq 2x^{2k+1}$ d'une part, c'est-à-dire

$$\frac{x^{2n}}{2} + x^{2n-2} + \dots + x^2 + \frac{1}{2} \geq x^{2n-1} + \dots + x$$

et d'autre part $\frac{2k+1}{2n}x^{2n} + \frac{2n-2k+1}{2n} \geq x^{2k+1}$ donc $x^{2n} + 1 \geq x^{2k+1} + x^{2n-2k-1}$ donc en sommant

$$\frac{x^{2n}}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{n}(x^{2n-1} + x^{2n-3} + \dots + x)$$

Donc en sommant tout on obtient bien l'inégalité souhaitée.

Viète, expressions symétriques

$X - r$ divise P si et seulement si r est racine de P . Ce constat devient moins naïf lorsqu'on s'intéresse à son incidence sur les coefficients de P .

Proposition 1 (Degré 2).

$$(X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab$$

Remarquons par ailleurs que a et b sont interchangeables à gauche (on dit que l'expression est symétrique) et ainsi ils sont interchangeables pour chaque coefficient obtenu.

Exercice 5

Trouver tous les réels x et y tels que :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 5

On cherche à trouver les valeurs xy et $x + y$. On a $x + y = 2$. Or, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 4$ donc $2xy = -6$ et $xy = -3$. Ainsi x et y sont les racines de

$$X^2 - 2X - 3$$

On trouve 1 et -3 comme racines, donc les solutions sont $(1, -3)$ et $(-3, 1)$.

Remarque 2.

L'idée derrière cet exo, c'est qu'on cherche à exprimer une fonction symétrique en x et y (ici $x^2 + y^2$) seulement en fonction de $x + y$ et xy .

Proposition 3 (Degré 3).

$$(X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ca)X - abc$$

Là encore remarquez que les coefficients $a + b + c$, $ab + bc + ca$ et abc sont symétriques en les variables a , b et c . Par ailleurs n'oubliez pas le signe qui alterne.

Remarque 4.

Oublier l'alternance des signes c'est dire que 1 est racine de $X + 1$...

Exercice 6

Trouver tous les triplets de réels (x, y, z) tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 6

De la même façon que dans l'exercice précédent, on essaye de trouver les polynômes de Viète : $x + y + z$, $xy + yz + zx$ et xyz .

On a déjà $x + y + z = 2$, par ailleurs :

$$(x + y + z)^2 = 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

donc $xy + yz + zx = -5$. De plus :

$$(x + y + z)^3 = 8 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3(xy^2 + yz^2 + zx^2 + yx^2 + xz^2 + zy^2)$$

En utilisant,

$$(x + y + z)(xy + yz + zx) = (xy^2 + yz^2 + zx^2 + yx^2 + xz^2 + zy^2) + 3xyz$$

On a donc $xyz = -6$, ainsi, x, y, z sont les racines du polynôme

$$X^3 - 2X^2 - 5X + 6$$

On observe que 1, -2 et 3 sont racines de ce polynôme donc $(x, y, z) = (-2, 1, 3)$ ou une permutation de ces nombres.

Exercice 7 (Canada 1996 P1)

Soit a, b, c les racines de $x^3 - x - 1$, calculez $\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}$.

Solution de l'exercice 7

La piste la plus naturelle est le calcul direct. Par les formules précédentes on a $a + b + c = 0$, $ab + bc + ca = -1$ et $abc = 1$. Par ailleurs, pas besoin de Viètes pour calculer $(1-a)(1-b)(1-c)$ qui vaut directement $1^3 - 1 - 1 = -1$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c} &= \frac{(1+a)(1-b)(1-c) + (1+b)(1-c)(1-a) + (1+c)(1-a)(1-b)}{(1-a)(1-b)(1-c)} \\
&= \frac{3 - (a+b+c) - (ab+bc+ca) + 3abc}{(1-a)(1-b)(1-c)} \\
&= \frac{3-0+1+3}{-1} = -7.
\end{aligned}$$

Solution n°2 de l'exercice 7

Une autre manière de voir les choses est de se dire qu'on a fait un changement de variable de $u \mapsto \frac{1-u}{1+u}$ (la réciproque de $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$) et que plutôt de regarder son action sur les racines, on peut regarder son action sur le polynôme. Alors les termes en $\frac{1+a}{1-a}$ etc sont solutions de

$$\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^3 - \left(\frac{u-1}{u+1}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow u^3 + 7u^2 - u + 1 = 0$$

et ainsi on retrouve le résultat -7 .

Exercice 8 (JBMO P1 2020)

Trouvez tous les triplets (a, b, c) de réels tels que

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 8

Voir <https://artofproblemsolving.com/community/c6h2266856p17600186>.

Exercice 9 (Argentine P1 2012, peut être pour l'entraînement)

Trouve les valeurs maximales et minimales que peut prendre c si a, b, c sont des réels tels que

$$\begin{cases} a+b+c = 9 \\ ab+bc+ca = 15 \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 9

Soit $P = X^3 - 7X^2 + 11X + K$ dont a, b, c sont les racines et où $K \in \mathbb{R}$. En faisant le dessin d'une courbe de degré 3 (le Z tourné à l'horizontal) on se rend compte que les valeurs extrémales de c sont atteintes lorsque P a une racine double $a = b$. Ainsi nos équations deviennent

$$\begin{cases} 2a+c = 9 \\ a^2+2ac = 15 \end{cases}.$$

donc $a^2 + 2a(9-a) - 15 = -3a^2 + 18a - 15 = -3(a-1)(a-5) = 0$ donc $a = 1$ ou $a = 5$, et les valeurs extrémales sont $c = 7$ et $c = -1$.

Proposition 5 (Relations coefficients-racines, dues à Viète).

$$(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n$$

où les σ_k sont les *fonctions symétriques élémentaires* en les α_i :

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \prod \alpha_{i_k}$$

(ce qu'on peut lire souvent en "la somme des doubles produits", "... des triples produits" ou encore les "... des k -produits".)

Exercice 10

Soit a, b, c et d des réels. On suppose

$$\begin{cases} abc - d = 1 \\ bcd - a = 2 \\ cda - b = 3 \\ dab - c = -6 \end{cases}$$

Montrer que $a + b + c + d \neq 0$

Solution de l'exercice 10

On suppose par l'absurde que $a + b + c + d = 0$. On remarque alors qu'en sommant les hypothèses, on a :

$$abc + bcd + cda + dab = 0$$

Cela signifie que a, b, c et d sont les racines d'un polynôme de la forme

$$X^4 + kX^2 + l$$

En particulier, si x est une racine du polynôme alors $-x$ aussi. On ne peut clairement pas avoir tous les a, b, c et d nuls, donc deux nombres sont opposés. Supposons par exemple $a = -b$ (les autres cas se traitent la même façon), alors par la deuxième et la troisième égalité, on a :

$$-acd - a = 2 \quad \text{et} \quad cda + a = 3$$

C'est absurde. Donc $a + b + c + d \neq 0$

Jamais assez d'exos !

Exercice 11

Résoudre

$$\sqrt{x} + \sqrt{13 - x} = 5$$

Solution de l'exercice 11

On peut mettre au carré astucieusement deux fois pour se ramener à un trinôme mais on peut également utiliser les formules de Viète. On note $y = \sqrt{x}$ et $z = \sqrt{13 - x}$. On a alors :

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y^2 + z^2 = 13 \end{cases}$$

Ainsi, $yz = 6$ et donc y et z sont les racines du polynôme $X^2 - 5X + 6$ soit 2 et 3. Selon que $y = 2$ ou $y = 3$, on a $x = 4$ ou $x = 9$

Exercice 12

Existe-t-il un polynôme P tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Solution de l'exercice 12

Si un P existait, pour $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Donc $|P(n)| \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$, donc P est borné donc constant, donc la réponse est négative.

Exercice 13

Existe-t-il un polynôme P tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Solution de l'exercice 13

Si un P existait, pour $k \geq 1$, $\frac{1}{k} \leq 1$. Donc $P(n) \leq n$, donc P est de degré au plus 1, or $\tilde{P} = \frac{x+1}{2}$ intersecterait P en deux points mais non en 3, absurde. Donc la réponse est négative.

Exercice 14

Existe-t-il un polynôme P tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(n) = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}.$$

Solution de l'exercice 14

Remarquons que pour P un polynôme, $DP(x) = P(x+1) - P(x)$ en est aussi un. Si un tel P existait on aurait que $D(DP)$ serait un polynôme, or $|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}|$ est borné par 1 et non-constant, absurde. Donc la réponse est négative.

Exercice 15

Soit a, b des entiers positifs premiers entre eux tels que $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ soit entier. Montrez que $\sqrt[3]{a}$ et $\sqrt[3]{b}$ sont entiers.

Solution de l'exercice 15

En effet $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = a + b + 3\sqrt[3]{ab}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})$. A partir de là, $\sqrt[3]{ab}$ est rationnel puis par primalité $\sqrt[3]{a}$ ainsi que $\sqrt[3]{b}$ sont rationnels puis entiers.

Exercice 16

Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients positifs et admettant n racines réelles. On suppose que $P(0) = 1$ montrez que $P(2) \geq 3^n$.

Solution de l'exercice 16

P est croissant et comme $P(0) > 0$ les racines de P sont négatives. Ainsi on peut écrire $P = \prod_{i=1}^n (X + a_i)$ où $a_i \geq 0$. En fait comme $P(0) = \prod_{i=1}^n a_i = 1$ on a $2 + a_i = 1 + 1 + a_i \geq 3\sqrt[3]{a_i}$ puis $P(2) \geq 3^n$.

Exercice 17 (Iran 3rd round P4)

Soit P tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1 \implies P(z) \in \mathbb{R}$. Montrez que P est constant.

Solution de l'exercice 17

Notons $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. Pour z tel que $|z| = 1$, on passe au conjugué :

$$P(z) = \overline{P(z)} = \sum_{k=0}^d \overline{a_k} z^{-k}.$$

De là on a $z^d P(z) = \sum_{k=0}^d \overline{a_k} z^{n-k}$. Le degré du terme de gauche est au moins deux fois celui du terme de droite, donc le degré est nul.

5 Algèbre : Equations fonctionnelles 1 (Noé)

Exercices

Exercice 1

(Slovénie 1999) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Solution de l'exercice 1

Soit f une solution éventuelle. Soit y quelconque, en remplaçant x par $f(y)$, on trouve

$$f(0) = 1 - f(y) - y$$

ce qui se réécrit

$$f(y) = -y + 1 - f(0).$$

Ainsi, f est de la forme $f(y) = -y + c$ avec c un réel. Réciproquement, si $f(y) = -y + c$ est solution, alors

$$f(x - f(y)) = -x + f(y) + c = -x - y + 2c = 1 - x - y.$$

On déduit que $c = 1/2$. La seule fonction solution est donc la fonction $f(x) = -x + 1/2$.

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2

Pour $x = y = 0$, on trouve $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Ensuite, pour $x = y$, on obtient $f(x)^2 = f(0)$.

Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

Sinon $f(0) = 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, en prenant successivement $x = 0, y = a$ et $x = a, y = 0$, on trouve $f(a) = f(-a)$, donc f est paire.

Soit $a \in \mathbb{R}$. $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$.

Donc (en évaluant successivement en $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ puis en $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$) :

$$f(a) = f\left(\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot f\left(\frac{a}{2}\right) = f(0) = 1.$$

Les solutions potentielles sont alors les fonctions constantes $f : x \mapsto 0$ et $f : x \mapsto 1$. Réciproquement elles conviennent bien.

Exercice 3

Trouver les $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y.$$

Solution de l'exercice 3

La fonction nulle est solution. Si f est non-identiquement nulle, il existe a tel que $f(a) \neq 0$. Montrons que f est injective.

Soit $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(b) = f(c)$.

On substitue x par a et y par b et c : $f(a)b = f(f(a)f(b)) = f(f(a)f(c)) = f(a)c$.

Or $f(a) \neq 0$, donc $b = c$.

Avec $y = 1, \forall x, f(f(x)f(1)) = f(x)$, par injectivité : $\forall x, f(x)f(1) = x$.

Enfin $x = 1$ donne $f(1) = \pm 1$.

Conclusion : On vérifie les trois éventuelles solutions : $x \mapsto x, x \mapsto -x$, et $x \mapsto 0$.

Elles conviennent toutes.

Solution n°2 de l'exercice 3

Dans cette équation, le terme de gauche est symétrique en x et y alors que le terme de droite ne l'est pas. Dans ce genre de situation il est intéressant de se servir de cette symétrie, ici cela donne : $f(f(x)f(y)) = f(x)y = xf(y)$.

Donc pour tous réels x, y non nuls, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$ donc le terme $\frac{f(x)}{x}$ est constant et on peut écrire $f(x) = cx$ pour tout x non nul.

De plus $f(0) \cdot 1 = 0 \cdot f(1) \implies f(0) = 0$, donc $f(x) = cx$ pour tout réel x . $f(f(x)f(y)) = c^3xy = f(x)y = cxy$ donc $c = 0$ ou $c = 1$.

On vérifie que les fonctions $f : x \mapsto 0, f : x \mapsto x$ et $f : x \mapsto -x$ sont bien solutions de l'équation.

Exercice 4

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R} :$

$$f(f(x) + y) + yf(x) = xy + f(x) + f(f(y)).$$

Solution de l'exercice 4

Analyse : Avec $x = y = 0$, on a que $f(0) = 0$.

Montrons que si f est solution alors f est injective.

Premièrement, si $f(r) = 0$, on prenant $x = y = r :$

$$f(f(r) + r) + rf(r) = 0 = r^2 + f(r) + f(0) = r^2$$

D'où l'unique racine de f est 0.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$, alors, avec $x = a, y = b :$

$$f(f(a) + b) + bf(a) = ab + f(a) + f(f(a))$$

avec $x = y = b$,

$$f(f(a) + b) + bf(a) = b^2 + f(a) + f(f(a))$$

Alors $ab = b^2$, donc soit $a = b \neq 0$, soit $b = 0$.

Or, si $b = 0$, $f(a) = 0$ puis $a = 0$. D'où $a = b$ aussi.

Mais alors, avec $x = 0$, on obtient $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = f(f(y))$, puis par injectivité $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = y$.

Synthèse : $f = \text{Id}$ vérifie bien l'équation, car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a bien

$$f(f(x) + y) + yf(x) = x + y + xy = xy + f(x) + f(f(y)).$$

Exercice 5

Trouver toutes les fonctions f telles que

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y)$$

pour tous réels x, y .

Solution de l'exercice 5

En posant $y = 0$, on trouve que $f(x^2 + f(0)) = 2x - f(0)$. Comme le côté droit de cette égalité peut atteindre n'importe quelle valeur réelle en faisant varier x , il en est de même du côté gauche, ce qui signifie que f est surjective.

Soit z un réel quelconque et y tel que $f(y) = z$, qui existe bien par surjectivité de f . En posant $x = 0$ dans l'équation, on trouve

$$f(z) = f(f(y)) = -f(y) = -z.$$

Cependant, la fonction $f(z) = -z$ n'est pas solution de l'équation. Ainsi, l'équation n'a pas de solutions.

Exercice 6 (Baltic Way 2024, Problem 1)

Soit α un nombre réel non-nul. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 6

On note $P(x, y)$ la propriété $xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$.

Alors $P(1, 0) \implies f(0) = 0$

Soit $x, y \neq 0$:

$$P(x, y) \text{ donne } f(x+y) = (1+\alpha \cdot \frac{y}{x})f(x) + f(y)$$

$$P(y, x) \text{ donne } f(x+y) = (1+\alpha \cdot \frac{x}{y})f(y) + f(x)$$

La soustraction donne : $\frac{y}{x}f(x) = \frac{x}{y}f(y)$, c'est-à-dire $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2} \forall x, y \neq 0$

Donc $f(x) = cx^2 \forall x \neq 0$, et ça reste vrai pour $x = 0$.

En réinjectant dans l'équation initiale, on obtient que n'importe quelle valeur de c convient si $\alpha = 2$ et que $c = 0$ si $\alpha \neq 2$.

Les solutions sont donc : $\forall \alpha : \boxed{f(x) = 0 \quad \forall x}$, qui convient bien et si $\alpha = 2$:

$\boxed{f(x) = cx^2 \quad \forall x}$, qui convient bien, quelle que soit la valeur de c .

Exercice 7

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait :

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1.$$

Solution de l'exercice 7

Analyse : Supposons que f soit une solution de l'équation. On pose $x = 0$ ce qui donne

$$f(-1) + f(x)f(0) = -1$$

Si $f(0) \neq 0$, on peut diviser et donc f est constante. C'est absurde car aucune fonction constante n'est solution. Donc $f(0) = 0$ ce qui donne $f(-1) = -1$

Pour $x \neq 0$ on pose $y = \frac{1}{x}$ ce qui donne

$$f(0) + f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{1}{x} - 1 \iff f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

En particulier avec $x = 1$, on obtient $f(1)^2 = 1$.

L'idée maintenant est de forcer une factorisation, pour cela, on voudrait que $xy - 1 = y \iff y = \frac{1}{x-1}$. Pour $x \neq 1$, on a donc

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right)(1 + f(x)) = \frac{2x}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

Pour utiliser l'égalité précédente, on multiplie par $f(x-1)$ ce qui donne

$$f(x) + 1 = \frac{x+1}{x-1}f(x-1)$$

On pose maintenant $y = 1$ ce qui donne

$$f(x-1) + f(x)f(1) = 2x - 1$$

On réinjecte l'expression de $f(x-1)$ obtenue.

$$(f(x) + 1)\frac{x-1}{1+x} + f(x)f(1) = 2x - 1$$

Ce qui donne donc pour $x \neq 1$.

$$f(x) = \frac{(2x - 1 + 2x^2 - x) - (x - 1)}{x + 1} \cdot \frac{x + 1}{x - 1 + f(1)(x + 1)}$$

$$\iff f(x) = \frac{2x^2}{x - 1 + f(1)(x + 1)}$$

On rappelle que $f(1)^2 = 1$.

Si $f(1) = -1$ on a $f(x) = -x^2$ pour tout $x \neq 1$.

Si $f(1) = +1$ on a $f(x) = x$ pour tout $x \neq 1$.

Synthèse : Si $f : x \mapsto x$ on a

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = xy - 1 + xy = 2xy - 1$$

Si $f : x \mapsto -x^2$, on a

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = -(x^2y^2 - 2xy + 1) - x^2y^2 = -2xy - 1$$

Donc les seules solutions sont, $x \mapsto x$ ainsi que $x \mapsto -x^2$.

Exercice 8 (Baltic Way 2024, Problem 2)

On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $abc = 1$.

Solution de l'exercice 8

En remplaçant (a, b, c) par $(x, y, \frac{1}{xy})$, la propriété devient

$$P(x, y) : yf(x) + f(y) + xyf\left(\frac{1}{xy}\right) = xy + y + 1 \quad \forall x, y > 0$$

En soustrayant $P(y, x)$ à $P(x, y)$, on a $yf(x) + f(y) - xf(y) - f(x) = y - x$

Avec $y = 2$, on obtient $f(x) = x(f(2) - 1) + (2 - f(2))$

En injectant $f(x) = ax + b$ dans $P(x, y)$, on a $a + b = 1$ et donc $f(x) = ax + 1 - a \quad \forall x > 0$,

qui convient effectivement, quel que soit $a \in [0, 1]$ (cette condition permet d'assurer que $f(x) > 0 \quad \forall x > 0$).

Exercice 9

Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

Solution de l'exercice 9

Soit f une solution éventuelle. Avec $x = y = 0$, on trouve que $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$: En posant $y = 0$, on trouve que $0 = f(x) + 0$, de sorte que f est constante égale à 0. Mais la fonction nulle n'est pas solution de l'équation.

Si $f(0) = 1$: En posant $y = -x$, on trouve $f(x)f(-x) = 1 - x^2$. En posant $x = 1$ dans cette équation, on obtient que $f(1)f(-1) = 0$. On distingue alors encore deux cas :

- Si $f(1) = 0$, alors en posant $y = 1$ dans l'équation de départ, on trouve $0 = f(x+1) + x$. On déduit que $f(x) = -x + 1$. Réciproquement, cette fonction est bien solution du problème puisque

$$(-x+1)(-y+1) = (-x-y+1) + xy.$$

- Si $f(-1) = 0$, alors en posant $y = -1$ dans l'équation de départ, on trouve que $0 = f(x-1) - x$, de sorte que $f(x) = x + 1$ pour tout x . Réciproquement, cette fonction est bien solution puisque

$$(x+1)(y+1) = (x+y+1) + xy.$$

Exercice 10 (P3 EMC 2022)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^3) + f(y)^3 + f(z)^3 = 3xyz$$

pour tous nombres réels x, y et z vérifiant $x + y + z = 0$.

Solution de l'exercice 10

Premièrement, remarquons que pour tout triplet vérifiant $x + y + z = 0$, on a $3xyz = x^3 + y^3 + z^3$, donc l'équation peut se réécrire

$$f(x^3) + f(y)^3 + f(z)^3 = x^3 + y^3 + z^3.$$

Soit $P(x, y, z)$ l'équation fonctionnelle considérée.

$P(0, 0, 0) : 2f(0)^3 + f(0) = 0$, donc $f(0) = 0$.

(C'est l'unique solution réelle de l'équation $2x^3 + x = x(2x^2 + 1) = 0$.)

$P(0, x, -x) : f(x)^3 = -f(-x)^3$, donc $f(x) = -f(-x)$ c'est-à-dire que f est impaire.

$P(x, 0, -x) : f(x^3) = f(x)^3$

Maintenant, soit, x, y deux réels quelconques, on regarde $P(x, y, -x - y)$. On obtient que $f(x + y)^3 - (x + y)^3 = f(x)^3 - x^3 + f(y)^3 - y^3, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Cela signifie que la fonction $g(x) = f(x)^3 - x^3 = f(x^3) - x^3$ est additive.

On a aussi $g(x^3) = f(x^3)^3 - x^9$, ce qui nous donne deux expressions pour $f(x^3)$.

À partir de là, on obtient

$$(g(x) + x^3)^3 = g(x^3) + x^9 \iff g(x)^3 + 3g(x)^2x^3 + 3g(x)x^6 = g(x^3).$$

Grâce à l'additivité de g on obtient que $g(nx) = ng(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En substituant $x \leftarrow nx$ dans l'expression et en divisant par n^7 , on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{g(x)^3}{n^4} + \frac{3g(x)^2x^3}{n^2} + 3g(x)x^6 = \frac{g(x^3)}{n^4}.$$

Or, en fixant x et en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $3g(x)x^6 = 0$, ce qui est vrai si et seulement si $g(x) = 0, \forall x \neq 0$. On obtient alors $f(x)^3 = x^3$ puis $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, et réciproquement, cette fonction est bien solution.

Exercice 11

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 11

En prenant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0$.

Ensuite avec $x = y = 1$, on a $f(1)(1 + f(1)) = 2f(1)$.

Donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.

Si $f(1) = 0$, alors pour $y = 1$, l'équation devient directement $f(x)x = f(x)$. On a soit $f(x) = 0$, soit $x = 1$, mais justement $f(1) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$, et on vérifie que la fonction nulle est solution.

Si $f(1) = 1$, alors pour $y = 1$, on obtient $f(x) \cdot (x + 1) = x^2 + f(x)$ ce qui donne $xf(x) = x^2$ donc $\forall x \neq 0, f(x) = x$ et on sait que $f(0) = 0$.

Réciproquement $f : x \mapsto x$ est bien solution.

Exercice 12

Trouver toutes les fonctions **continues** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(f(x) + y) = x + f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 12

Analyse : Supposons que $f(0) \neq 0$. En remplaçant x par 0, on trouve $f(y + f(0)) = f(y)$ donc f est $f(0)$ -périodique.

Or une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est bornée.

f est donc bornée sur $[0, f(0)]$ (ou $[f(0), 0]$ selon le signe de $f(0)$).

Comme f est périodique de période $f(0)$, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Ceci est absurde car, en remplaçant y par 0, on a $f(f(x)) = x + f(0)$ et le membre de droite n'est pas borné.

Donc $f(0) = 0$. On en déduit que $f(f(x)) = x$. D'où f est bijective.

En substituant x par $f(z)$, on a donc $f(z + y) = f(f(f(z)) + y) = f(z) + f(y)$.

Par conséquent, f est solution de l'équation de Cauchy, et puisque f est continue, $f(x) = a \cdot x$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ par théorie.

Comme $f(f(x)) = x$, il faut que $a \in \{\pm 1\}$.

Synthèse : Réciproquement, $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont bien solutions.

Exercice 13 (BMO 2024 P4)

Soit $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et tous les polynômes $P(x)$ avec des coefficients réels positifs tels que $P(0) = 0$ et qui vérifient l'inégalité $f(f(x) + P(y)) = f(x - y) + 2y$ pour tous nombres réels $x > y > 0$.

Solution de l'exercice 13

On va montrer que la seule solution est $f(x) = P(x) = x$ qui, réciproquement, convient bien.

Premièrement, on s'occupe de P .

Affirmation 1 : $f(x) \geq x$.

Preuve : Si ce n'est pas le cas, alors $x + P(x) > x - f(x) > 0$, donc il existe un $0 < y < x$ tel que $x - f(x) = y + P(y)$ par le théorème des valeurs intermédiaires.

D'où $f(x) + P(y) = x - y \implies f(f(x) + P(y)) = f(x - y) \implies 2y = 0$, absurde.

Affirmation 2 : P est de degré au plus 1.

Preuve : On a que

$$f(x - y) + 2y \geq f(x) + P(y) \geq x + P(y) \implies f(x - y) \geq x - y + P(y) - y$$

Si P est de degré supérieur ou égal à 2, alors $P(y) - y$ devient arbitrairement grand lorsque $y \rightarrow +\infty$. En fixant $x - y$ et en prenant y assez grand, on obtient une contradiction.

Dès lors, comme de plus $P(0) = 0$, on peut écrire $P(y) = ay$ pour un réel positif a , et comme $P(y) - y$ doit être borné par le même argument que l'affirmation précédente, il vient que $a \leq 1$.

Maintenant, écrivons $g(x) = f(x) - x$. L'équation devient

$$g(g(x) + x + ay) + g(x) = g(x - y) + (1 - a)y$$

En particulier, on a

$$g(x) \leq g(x - y) + (1 - a)y \quad (*)$$

Affirmation 3 : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x tel que $g(x) < \varepsilon$. En d'autres termes $g(x)$ admet 0 comme borne inférieure.

Preuve : On considère la borne inférieure de $g(x)$, supposons que c'est un réel $L \neq 0$.

En prenant δ assez petit, il existe z tel que $g(z) < L + \delta$. Alors, prenons $x \leftarrow y + z$ avec y suffisamment petit pour avoir $g(g(x) + x + ay) + g(x) = g(z) + (1 - a)y < L + \delta + (1 - a)y < 2L$.

Cela signifie que soit $g(x)$ soit $g(g(x) + x + ay)$ est inférieur à L , absurde.

Affirmation 4 : $a = 1$

Preuve : En substituant $x \leftarrow x + g(x)$ et $y \leftarrow g(x)$ dans (*) on obtient $g(x + g(x)) \leq (2 - a)g(x)$. De plus, en substituant $x \leftarrow g(x) + x + ay$ et $y \leftarrow ay$, (*) donne que

$$\begin{aligned} g(g(x) + x + ay) &\leq g(x + g(x)) + a(1 - a)y \\ \implies g(x - y) + (1 - a)y &\leq g(x) + g(x + g(x)) + a(1 - a)y \\ \implies g(x) + g(x + g(x)) &\geq (1 - a)^2y + g(x - y) \geq (1 - a)^2y \\ \implies (3 - a)g(x) &\geq (1 - a)^2y \end{aligned}$$

pour tous $y < x$. D'où $g(x) \geq \frac{(1 - a)^2}{3 - a}x$ par passage à la limite lorsque $y \rightarrow x$.

Ceci contredit l'affirmation précédente à moins que $a = 1$.

Conclusion :

Si $a = 1$ alors l'équation originelle en fonction de g implique que $g(x) \leq g(x - y)$, i.e g est décroissante. Ceci, ainsi que le fait que $g(x)$ admette 0 comme borne inférieure, implique que pour tout ε , $g(x) < \varepsilon$ pour tout x suffisamment grand.

D'où, dans l'équation originelle, en fixant $x - y$ à une valeur arbitraire et en prenant x très grand, on a $g(x - y) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui signifie que g est la fonction nulle. Ainsi, $f(x) = x$ ce qui conclut.

6 Géométrie : Similitudes (Maxime)

Ce cours reprend celui du **super poly de Martin**.

Exercices

Exercice 1

Soit ABC un triangle et N le A-pôle Nord. Un cercle passant par A et N coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en X et Y respectivement. Montrer que $XB = YC$.

Exercice 2

(Polish MO 2017 Finals Day 1 P1) Soit ABC un triangle et P et Q des points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BP = CQ$. Les droites (BQ) et (CP) se coupent au point R . Les cercles circonscrits aux triangles BPR et CQR se recoupent au point S . Montrer que le point S appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 3

(Point de Miquel, très important à connaître) Soit $ABCD$ un quadrilatère, E l'intersection de (AB) et (CD) , F l'intersection de (DA) et (BC) . Montrer que les cercles circonscrits aux triangles EAD , EBC , FDC et FAB sont concourants en un même point.

Exercice 4

(Balkan MO 2006) Soit ABC un triangle. Soit d une droite qui intersecte les segments $[AB]$ et $[AC]$ en des points D et F respectivement et qui intersecte la droite (BC) en un point E tel que C soit situé entre les points B et E . Les droites parallèles à la droite d passant par les points A , B et C recoupent chacune le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1 , B_1 , C_1 . Montrer que les droites (A_1E) , (B_1F) et (C_1D) sont concourantes.

Exercice 5

(P4 EGMO 2025) Soit ABC un triangle acutangle quelconque, I le centre de son cercle inscrit. Les droites (BI) et (CI) intersectent le cercle circonscrit à ABC en $P \neq B$ et $Q \neq C$ respectivement. Soient R et S tels que $AQRB$ et $ACSP$ sont des parallélogrammes. Soit T l'intersection des droites (RB) et (SC) . Montrer que R , S , T et I sont cocycliques.

Exercice 6

(Envoi Géométrie 2020/2021 Exercice 15) Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre et D , E , F les pieds des hauteurs issues des sommets A , B et C . On note F' le symétrique du point F par rapport au point B et on note E' le symétrique du point E par rapport au point C . On note X le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle $AF'E'$ avec la droite (AD) . Montrer que $HX = 4HD$.

Exercice 7

(Caucase MO 2020 Senior P7) Soit ABC un triangle quelconque et soit K le milieu de l'arc BC contenant le point A . Soit M le milieu du segment $[AB]$. La médiatrice du segment $[AC]$ coupe la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ au point P . Montrer que les points A , M , K et P sont cocycliques.

Exercice 8

(OFM Senior 2020) Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit D, E, F les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle ABC avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. La droite perpendiculaire au segment $[EF]$ passant par le point D recoupe le segment $[AB]$ en un point G . Le cercle circonscrit au triangle AEF recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point X . Montrer que les points X, G, D et B sont cocycliques.

Exercice 9

(Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle, S un point intérieur au triangle. On considère un cercle Γ passant par A et S , qui recoupe $[AB]$ et $[AC]$ en R et Q respectivement. Les cercles circonscrits à BRS et CQS se recoupent en P . Montrer que P appartient à $[BC]$.

Exercice 10

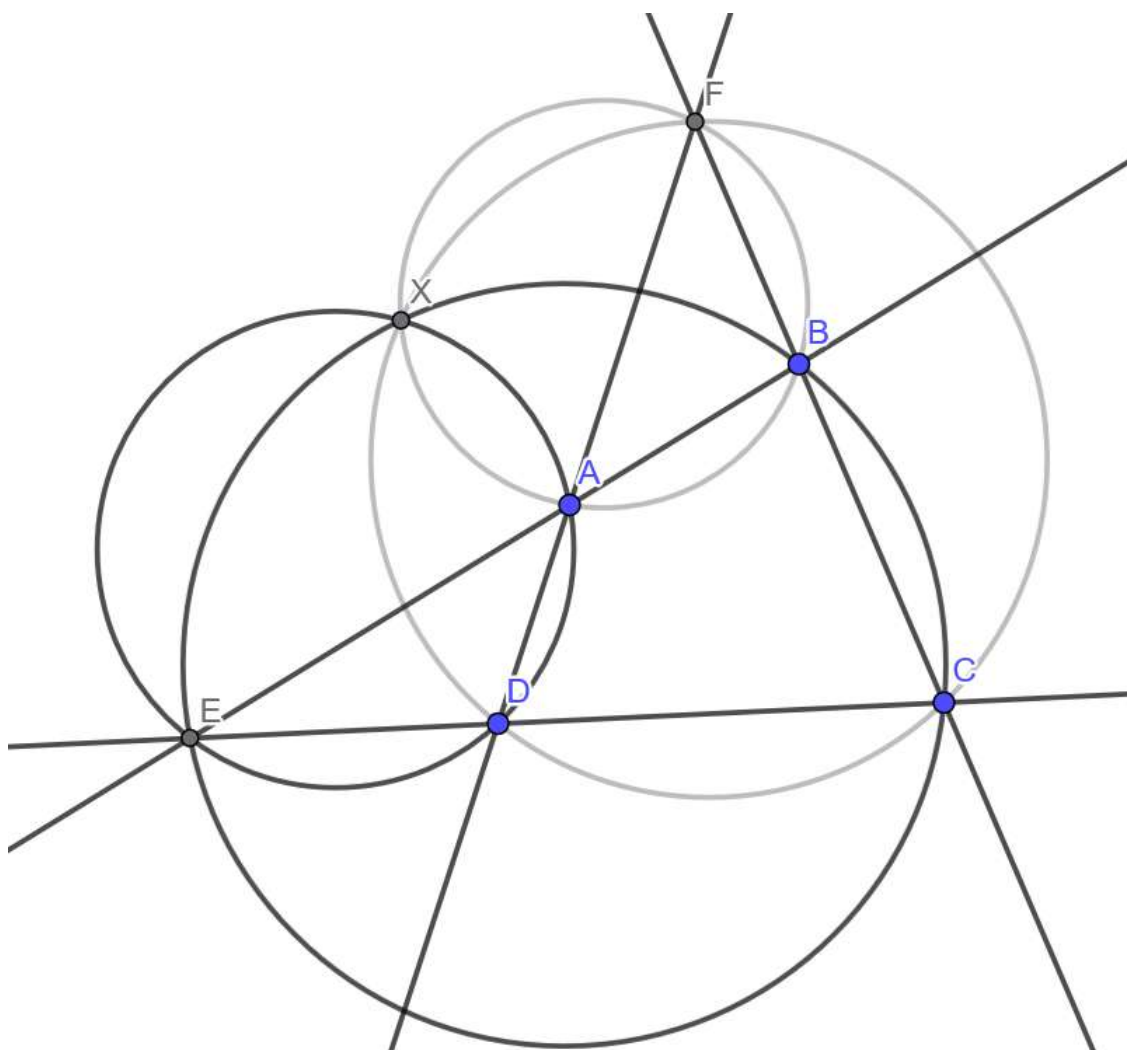
(P6 EGMO 2017) Soit ABC un triangle acutangle quelconque. Les symétriques des points G et O par rapport aux côtés (BC) , (CA) et (CB) sont notés $G_1, O_1, G_2, O_2, G_3, O_3$, respectivement. Montrer que les cercles circonscrits à $G_1G_2C, G_1G_3B, G_2G_3A, O_1O_2C, O_1O_3B, O_2O_3A, ABC$, sont concourants.

Solutions**Solution de l'exercice 1**

Pour la solution de cet exercice, voir [l'exercice 87 ici](#).

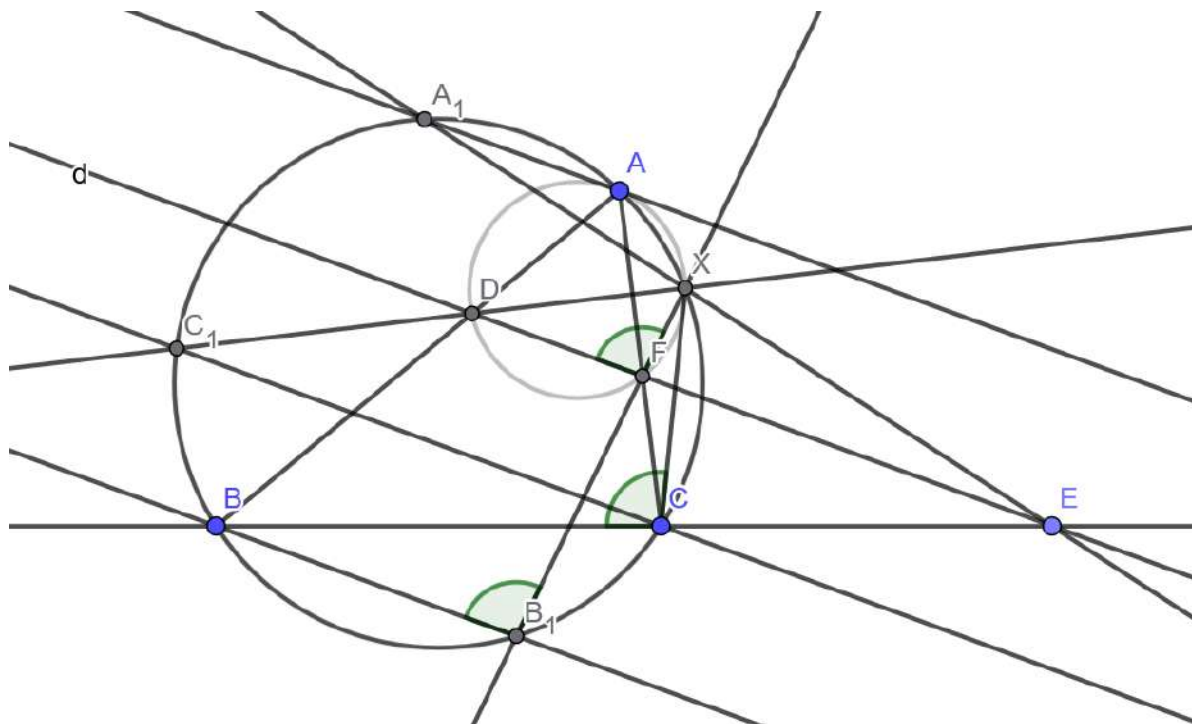
Solution de l'exercice 2

Pour la solution de cet exercice, voir [l'exercice 88 ici](#).

Solution de l'exercice 3

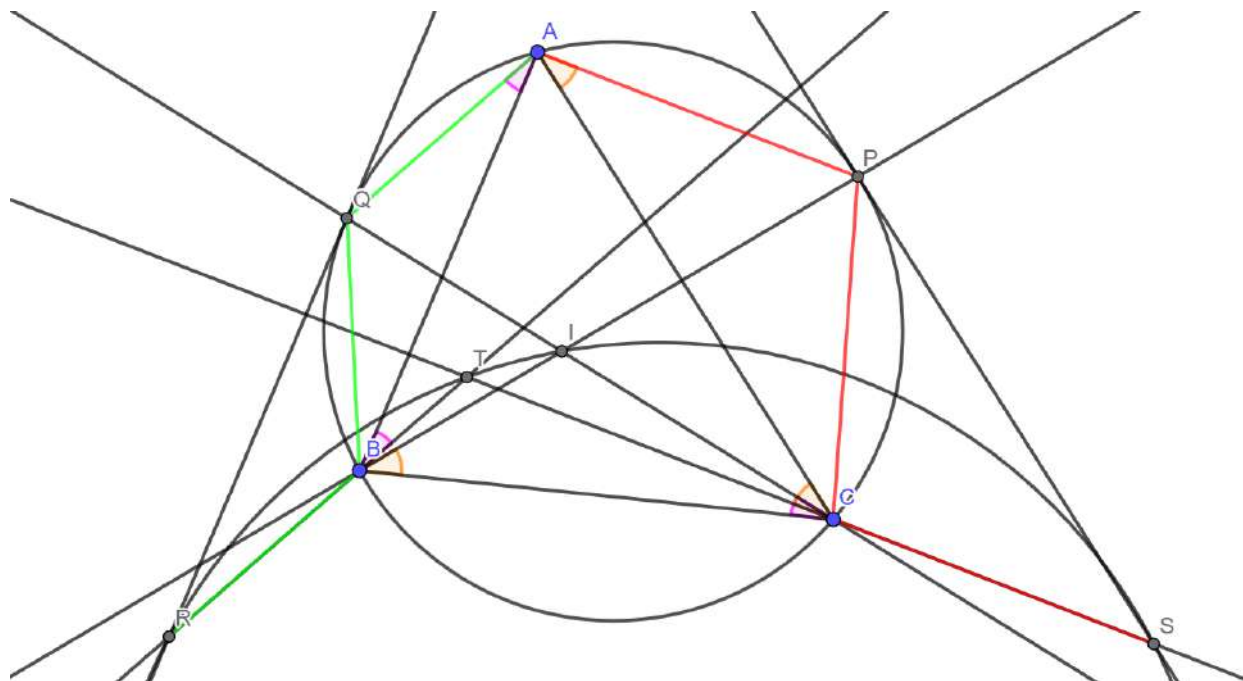
Soit X le centre de la similitude envoyant (A, B) sur (D, C) . Alors X appartient aux cercles circonscrits à EAD et EBC . Mais on a aussi que $XAD \sim XBC$. Donc X est le centre de la similitude envoyant (B, C) sur (A, D) . Donc X appartient aussi aux cercles circonscrits à FAB et FCD . Donc les quatre cercles circonscrits à EAD , EBC , FAB et FCD sont bien concourants, en X .

Solution de l'exercice 4



En faisant notre figure, on remarque que les droites (A_1E) , (B_1F) et (C_1D) concourent sur le cercle circonscrit à ABC en un point X . Regardons des propriétés de X (pour l'instant on fait l'hypothèse que ces trois droites concourent effectivement sur le cercle). On a $\widehat{XFD} = \widehat{XB_1B} = 180 - \widehat{XAD}$ par parallélisme puis cocyclicité, donc X, A, D et F sont cocycliques. De plus, X, A, B et C sont cocycliques, avec (FC) et (DB) qui s'intersectent en A . Donc X est le centre de la similitude envoyant (F, C) sur (D, B) . Voilà une propriété intéressante de X . On va donc redéfinir X comme étant le centre de la similitude envoyant (F, C) sur (D, B) , et essayer de montrer que X appartient à (A_1E) , (DC_1) et (FB_1) . X est le centre de la similitude envoyant (F, C) sur (D, B) , donc X appartient au cercle circonscrit à ABC et $XFD \sim XCB$. Donc $\widehat{XB_1B} = \widehat{XCB} = \widehat{XFD}$. Comme (FD) et (B_1B) sont parallèles, cela implique que X appartient à (FB_1) . De même, X appartient à (DC_1) . On a donc montré que (FB_1) et (DC_1) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC ! De même, on montre que (A_1E) passe par l'intersection de (FB_1) et du cercle circonscrit à ABC autre que B_1 , donc les trois droites (FB_1) , (DC_1) et (EA_1) concourent bien en l'intersection de (FB_1) et le cercle circonscrit à ABC autre que B_1 .

Remarque : Comme X est le centre de la similitude envoyant (F, C) sur (D, B) , c'est aussi le centre de la similitude envoyant (D, F) sur (B, C) et on peut donc montrer comme précédemment qu'il appartient à (A_1E) . Pour une preuve un peu différente, cf l'exercice 92 ici.

Solution de l'exercice 5

On sait que (RB) et (SC) s'intersectent en T , et on veut montrer que R, S, T et I sont cocycliques. Pour cela on va simplement montrer que I est le centre de la similitude envoyant (B, R) sur (C, S) , ce qu'on fait en montrant $IBR \sim ICS$. On note $\alpha = \widehat{BAC}$, et de même $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$. On a $\widehat{IBR} = 180 - \widehat{IBT} = 180 - (\widehat{IBA} - \widehat{ABT}) = 180 - (\frac{\beta}{2} - \widehat{QAB}) = 180 - (\frac{\beta}{2} - \widehat{QCB}) = 180 - \frac{\beta - \gamma}{2}$, et $\widehat{ICS} = 180 - \widehat{ICT} = 180 - (\widehat{ACT} - \widehat{ACI}) = 180 - (\widehat{PAC} - \frac{\gamma}{2}) = 180 - (\widehat{PBC} - \frac{\gamma}{2}) = 180 - \frac{\beta - \gamma}{2}$. On a donc $\widehat{IBR} = \widehat{ICS}$. Il nous reste donc à montrer $\frac{IB}{BR} = \frac{IC}{CS}$. $\frac{IB}{IR} = \frac{IC}{CS} \iff \frac{IB}{AQ} = \frac{IC}{AP} \iff \frac{IB}{BQ} = \frac{IC}{CP}$, la première équivalence venant du fait que $AQRB$ et $APSC$ sont des parallélogrammes, la deuxième du fait que P et Q sont des pôles sud. Or PIC et QIB sont semblables ($\widehat{IQB} = \widehat{IPC}$ et $\widehat{QBI} = \widehat{PCI}$ par cocyclicité), donc cette dernière égalité est vraie.

Solution de l'exercice 6

Pour la solution de cet exercice, voir [l'exercice 90 ici](#).

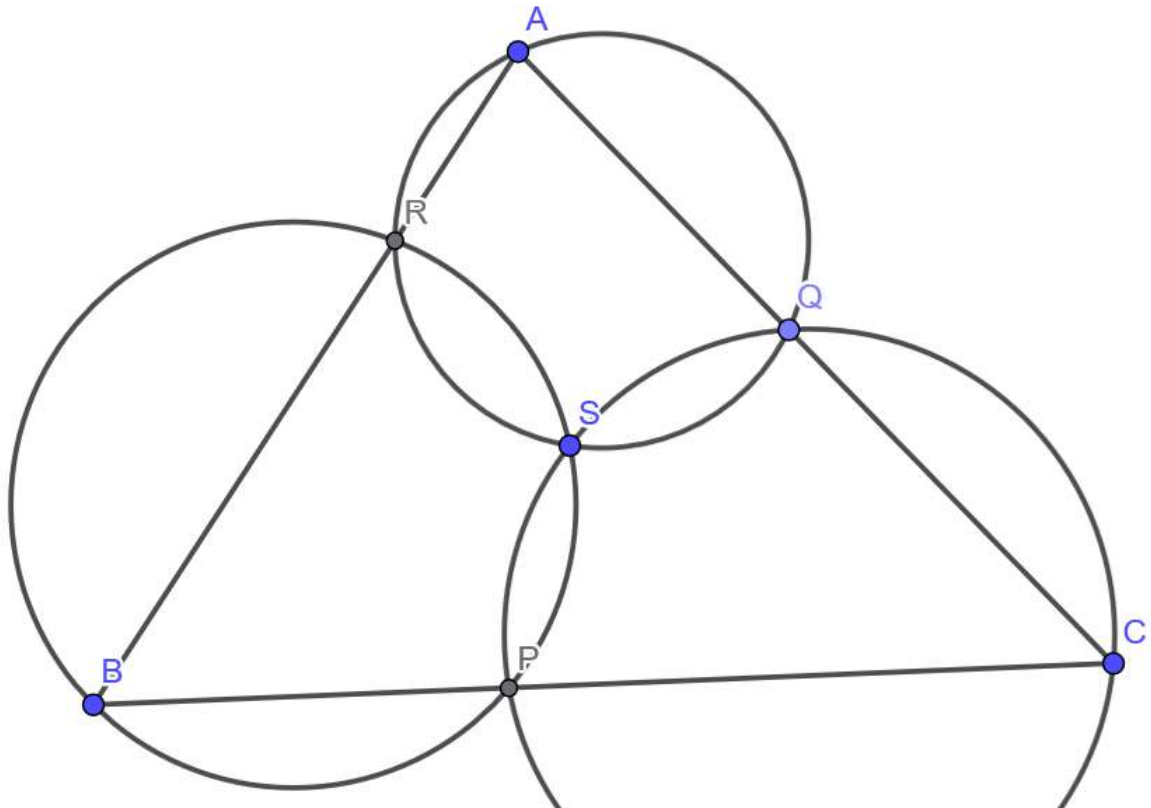
Solution de l'exercice 7

Pour la solution de cet exercice, voir [l'exercice 89 ici](#).

Solution de l'exercice 8

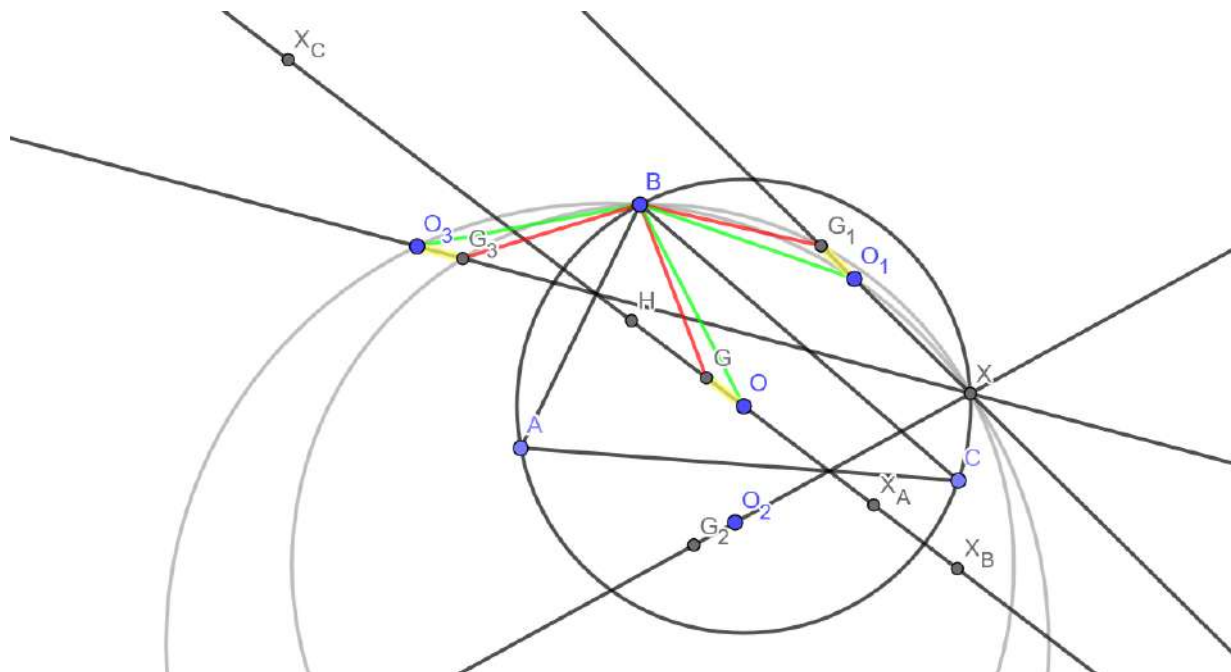
Pour la solution de cet exercice, voir [l'exercice 91 ici](#).

Solution de l'exercice 9



Considérons la similitude s_1 de centre S envoyant le cercle circonscrit à SCQ sur le cercle circonscrit à SQR , s_2 la similitude de centre S envoyant le cercle circonscrit à SQR sur le cercle circonscrit à SBR . Q est la deuxième intersection des cercles circonscrits à SQA et SCQ , et C, Q, A sont alignés, donc s_1 envoie C sur A . De même, s_2 envoie A sur B . Donc la composée de s_1 et s_2 $s_2 \circ s_1$ envoie le cercle circonscrit à CQS sur le cercle circonscrit à BRS , C sur B , et est de centre S . P est l'autre intersection des cercles circonscrits à CQS et BRS , et comme C est envoyé sur B , cela implique C, P et B sont alignés.

Solution de l'exercice 10



Soit X le point de Steiner de la droite (OG) (ce point existe car (OG) passe par H). Ça veut dire que X est un point du cercle circonscrit à ABC tels que ses symétriques par rapport aux trois côtés (AB) , (BC) et (AC) sont alignés avec H , ici sur la droite (OG) . Les droites (O_1G_1) , (O_2G_2) et (O_3G_3) concourent en X . En effet, le symétrique de X par rapport à (BC) passe par (OG) , donc en faisant une symétrie d'axe (BC) , on a que X appartient à (O_1G_1) , de même pour (O_2G_2) et (O_3G_3) . De plus, $BO_3G_3 \sim BOG \sim BO_1G_1$ (par symétrie d'axe (BA) puis (BC)), donc B est le centre de la similitude envoyant (O_3, G_3) sur (O_1, G_1) . Comme X est l'intersection de (O_3G_3) et (O_1G_1) , cela implique que B appartient aux cercles circonscrits à XO_1O_3 et XG_1G_3 , soit que X appartient aux cercles circonscrits à BO_1O_3 et BG_1G_3 . De même, X appartient aux cercles circonscrits à AO_3O_2 , AG_3G_2 , CO_1O_2 et CG_1G_2 .

7 Géométrie : TD de pot pourri (Erik et Martin)

Ce cours reprend le polycopié d'exercices de géométrie disponible sur le site de la POFM. Il a été l'occasion de revoir ce qui a été fait dans les cours précédents.

Nous avons donné des conseils pour tracer une belle figure :

- Tracer d'abord le cercle circonscrit à ABC puis inscrire le triangle dedans permet d'éviter une construction pénible du cercle. Il est souvent judicieux de tracer le cercle même si l'énoncé ne l'utilise pas.
- Pour tracer la bissectrice issue de A , on peut utiliser la propriété du Pôle Sud : on trace la médiatrice de $[BC]$ (pour cela, on trace la perpendiculaire à $[BC]$ passant par le centre du cercle que l'on a tracé avant) et son intersection avec le cercle circonscrit nous donne S le pôle sud. La droite (AS) est alors la bissectrice de $\widehat{BAC}$.
- Pour tracer I le centre du cercle inscrit, on utilise la propriété du cercle antarctique : on a $SC = SI = SB$. On trace donc la bissectrice avec le point précédent, puis l'intersection du cercle de centre S passant par B et de (AS) nous donne I .
- On peut essayer de réfléchir à la meilleure manière de tracer la figure : si on doit tracer un cercle circonscrit, on peut se demander si c'est possible de tracer d'abord le cercle puis ensuite les points.

Quelques exercices reprennaient le lemme suivant :

Lemme 1. Soit ω_1 et ω_2 deux cercles s'intersectant en A et B . Si (TS) est une tangente commune à ω_1 et ω_2 avec T sur ω_1 et S sur ω_2 , alors (AB) coupe $[TS]$ en son milieu.

Démonstration. (AB) est l'axe radical des deux cercles donc le point X d'intersection de (AB) et (TS) vérifie : $XT^2 = XS^2$. $\square$

Exercices

Exercice 1 (Austria regional 2020 advanced)

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La médiatrice de $[BC]$ coupe (AI) en S et (BI) en T . Montrer que C, I, S et T sont cocycliques.

Exercice 2

Soit ABC un triangle, Γ_1 un cercle passant par B et C et dont le centre O se trouve sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Soit Γ_2 un cercle passant par O et A qui coupe Γ_1 en P et Q . Soit X le point d'intersection des droites (PQ) et (AO) . Montrer que X appartient à $[BC]$.

Exercice 3

Soit Ω un cercle, K et L deux points sur Ω et A un point sur (KL) à l'extérieur de Ω . Soit P et Q les points de Ω tels que (QA) et (PA) sont tangentes à Ω et M le milieu de $[PQ]$. Montrer que $\widehat{OLM} = \widehat{OKM}$.

Exercice 4

Soit ABC un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit D le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas le point C . Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (BC) . Soit Z le point d'intersection

autre que B et la droite (AB) avec le cercle circonscrit au triangle BDE . Soit H le point d'intersection autre que A de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ADZ . Montrer que $BE = AH$.

Exercice 5 (JBMO 2005)

Soit ABC un triangle aux angles aigus avec $AC < AB$ et soit k son cercle circonscrit. Soit P la point d'intersection de la tangente au cercle k en A et de la droite (BC) . Soit M le milieu du segment $[PA]$ soit R le second point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle k . La droite (PR) recoupe le cercle k en un point S . Montrer que les droites (CS) et (AP) sont parallèles.

Exercice 6

Soient A, B, C trois points d'un cercle k tels que $AB = BC$. Les tangentes aux points A et B au cercle k se coupent au point D . La droite (DC) rencontre le cercle k au point E . Montrer que la droite (AE) coupe le segment $[BD]$ en son milieu.

Exercice 7 (GQMO P3 Junior)

Soit $[AB]$ un segment et M le milieu de $[AB]$. Soit ω un cercle passant par A et M et T un point de ω tel que (BT) est tangente à ω en T . Soit Y le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ATB et soit X le point de $[AB]$ tel que $TX = TB$. Montrer que les droites (YX) et (AT) sont parallèles.

Exercice 8 (Envoi 23-24 P8)

Soient ABC un triangle de cercle circonscrit Γ , D un point sur (AB) et E un point sur (AC) tel que (DE) et (BC) sont parallèles. Le cercle circonscrit à ABC rencontre le cercle circonscrit à BDE une seconde fois en K et le cercle circonscrit à CDE une seconde fois en L . Soit T le point d'intersection de (BK) et (CL) . Montrer que (TA) est tangente au cercle Γ .

Exercice 9 (Envoi 23-24 P14)

Soient ABC un triangle, D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. La droite (DE) rencontre le cercle circonscrit à ABC en deux points P et Q . Soient A' et B' les symétriques de A et B par rapport à (BC) et (AC) respectivement. Montrer que A', B', P, Q sont cocycliques.

Exercice 10

(PAMO 2021 P2) Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ . Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B . Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T . Soit P' le symétrique du point P par rapport au point K . Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Exercice 11

(France TST novembre 2022) Soit $ABCD$ un parallélogramme et G le centre de gravité du triangle ABD . Soient P et Q les points de la droite (BD) tels que les droites (GP) et (PC) sont perpendiculaires et les droites (GQ) et (QC) sont perpendiculaires.

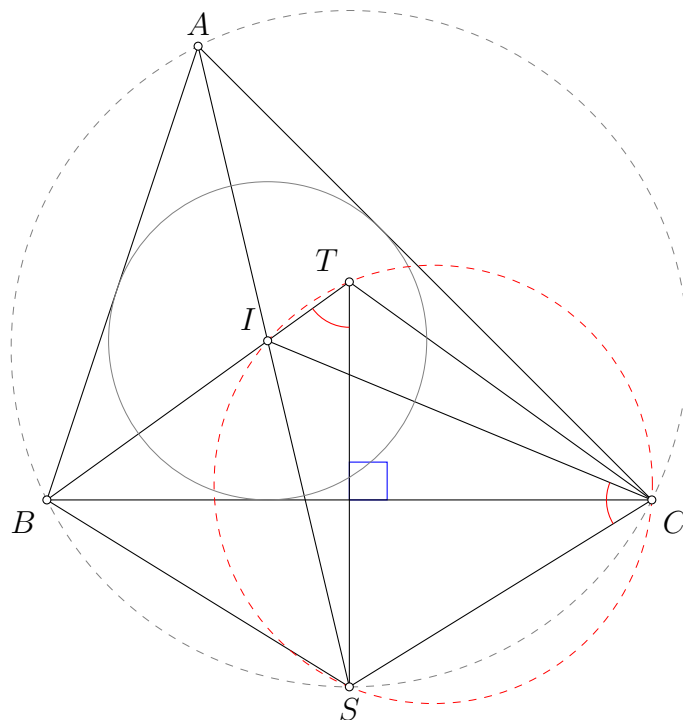
Montrer que la droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

Correction

Exercice 1

Soient ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La médiatrice de $[BC]$ coupe (AI) en S et (BI) en T . Montrer que C, I, S et T sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1



Pour montrer que C, I, S et T sont cocycliques, nous allons montrer que $\widehat{STI} = \widehat{SCI}$.

On rappelle que les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes et que leur point d'intersection I est le centre du cercle inscrit dans le triangle. (AI) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, (BI) celle de $\widehat{ABC}$ et (CI) de $\widehat{BCA}$.

Par conséquent, S est défini comme le point d'intersection de la médiatrice de $[BC]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Le théorème du Pôle Sud assure que S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC .

On a alors :

$$\widehat{STI} = 90^\circ - \widehat{TBC} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

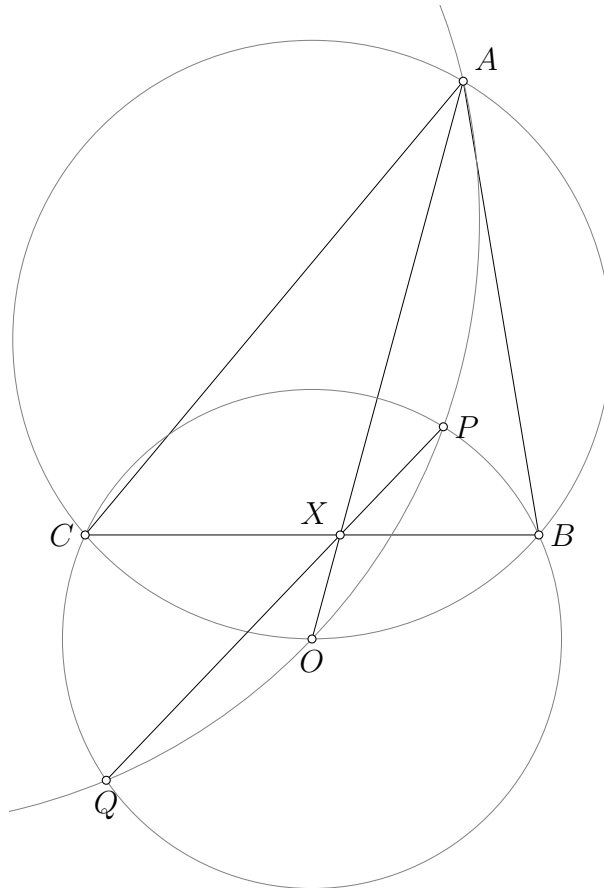
Et :

$$\widehat{SCI} = \widehat{SCB} + \widehat{ICB} = \widehat{SAB} + \widehat{ICB} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2}$$

Alors le fait que $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$ prouve que $\widehat{STI} = \widehat{SCI}$, comme voulu.

Exercice 2

* Soit ABC un triangle, Γ_1 un cercle passant par B et C et dont le centre O se trouve sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Soit Γ_2 un cercle passant par O et A qui coupe Γ_1 en P et Q . Soit X le point d'intersection des droites (PQ) et (AO) . Montrer que X appartient à $[BC]$.

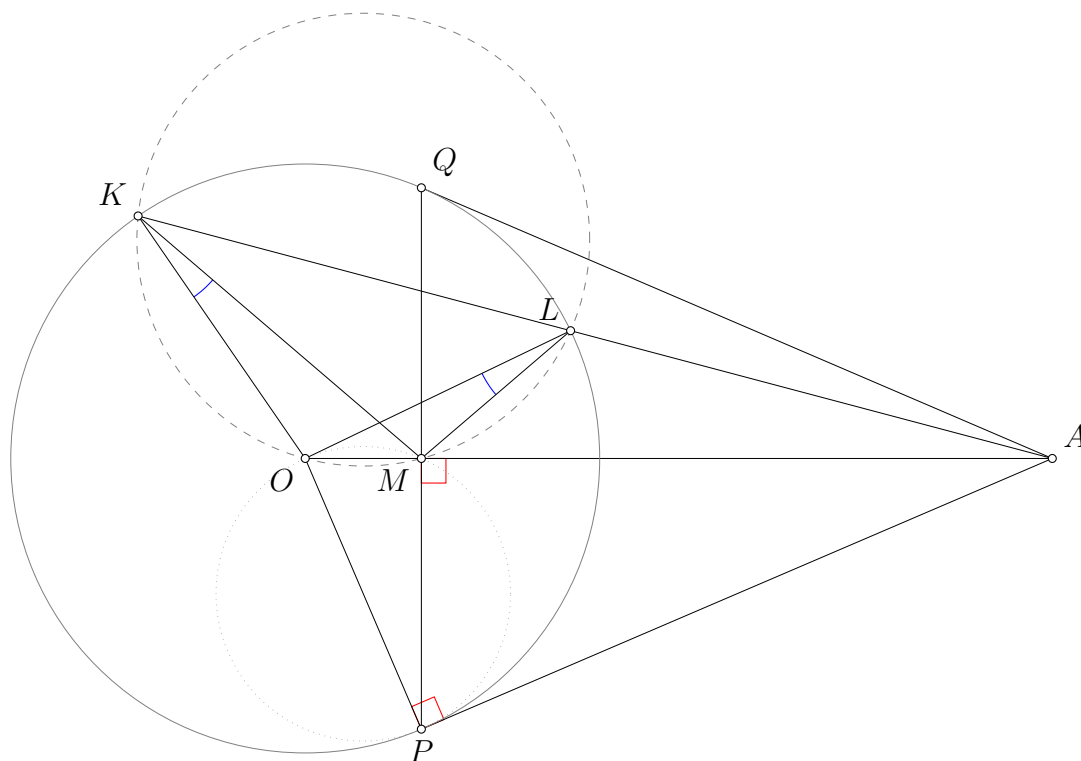
Solution de l'exercice 2

La définition du point O interpelle, il s'agit du pôle sud du point A dans le triangle ABC , il appartient donc à son cercle circonscrit. .

On dispose désormais de trois cercles, dont les axes radicaux sont les droites (PQ) , (BC) et (AO) , elles sont donc concourantes au point X qui appartient donc au segment $[BC]$.

Exercice 3

Soit Ω un cercle, K et L deux points sur Ω et A un point sur (KL) à l'extérieur de Ω . Soit P et Q les points de Ω tels que (QA) et (PA) sont tangentes à Ω et M le milieu de $[PQ]$. Montrer que $\widehat{OLM} = \widehat{OKM}$.

Solution de l'exercice 3

On remarque que la condition d'angle à montrer est équivalente à ce que K, L, M, O soient cocycliques.

On a : $OQ = OP$ car O est le centre d'un cercle passant par P et Q , $QM = MP$ par définition de M et $QA = AP$ par puissance d'un point. Les points A, O, M sont ainsi tous les trois sur la médiatrice de $[PQ]$ donc alignés.

Une fois cela établi, il semble judicieux d'utiliser la puissance d'un point par A . On veut donc montrer que :

$$AL \cdot AK = AO \cdot AM$$

On peut alors se rendre compte qu'avec la puissance d'un point on a :

$$AL \cdot AK = AP^2$$

De plus, les angles $\widehat{APO}$ et $\widehat{AMP}$ sont droits car (AP) est tangente au cercle de centre O et passant par P et car (MA) est la médiatrice de $[QP]$. Ainsi $\widehat{POM} = 90 - \widehat{OPM} = \widehat{APM}$ donc par angle tangentiel, le cercle circonscrit à OMP est tangent à (AP) en P . D'où par puissance d'un point on a :

$$AP^2 = AO \cdot AM$$

En mettant ensemble ces deux égalités, on obtient

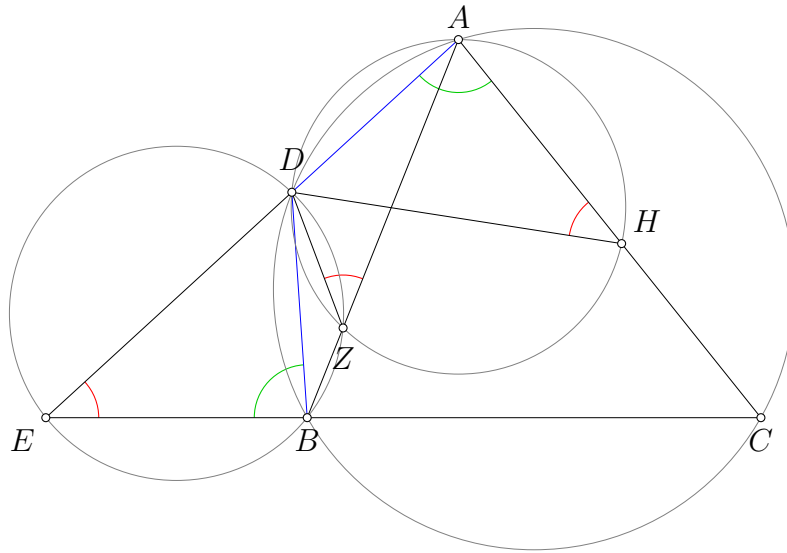
$$AL \cdot AK = AO \cdot AM$$

comme voulu.

Remarque : La dernière relation qu'on a montrée : $AP^2 = AO \cdot AM$ s'appelle la relation d'Euclide dans un triangle rectangle avec le pied de la hauteur. On peut également la montrer avec des triangles semblables.

Exercice 4 (Grèce MO 2019)

Soit ABC un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit et D le milieu de l'arc AB ne contenant pas le point C . Soit E le points d'intersection des droites (AD) et (BC) . Le cercle circonscrit au triangle BDE recoupe la droite (AB) au point Z . Le cercle circonscrit au triangle ADZ recoupe la droite (AC) au point H . Montrer que $BE = AH$.

Solution de l'exercice 4

En utilisant le théorème de l'angle inscrit dans les cercles circonscrits aux triangles DBE et ADH , on a

$$\widehat{BED} = 180^\circ - \widehat{DZB} = \widehat{DZA} = \widehat{DHA}$$

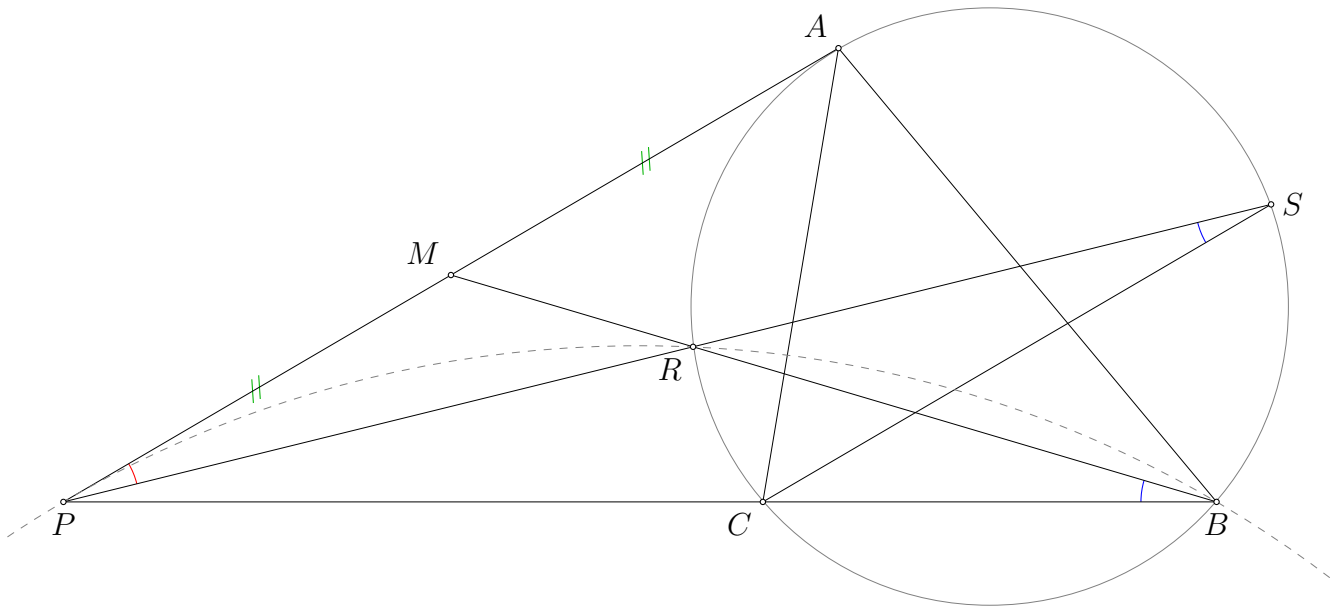
et

$$\widehat{DBE} = 180^\circ - \widehat{DBC} = \widehat{DAH}$$

Ainsi les triangles DAH et DBE sont semblables. Puisque D est le milieu de l'arc AB , on a également $DB = DA$, donc les triangles sont isométriques. On a donc bien $BE = AH$.

Exercice 5 (JBMO 2005)

Soit ABC un triangle aux angles aigus avec $AC < AB$ et soit k son cercle circonscrit. Soit P la point d'intersection de la tangente au cercle k en A et de la droite (BC) . Soit M le milieu du segment $[PA]$ soit R le second point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle k . La droite (PR) recoupe le cercle k en un point S . Montrer que les droites (CS) et (AP) sont parallèles.

Solution de l'exercice 5

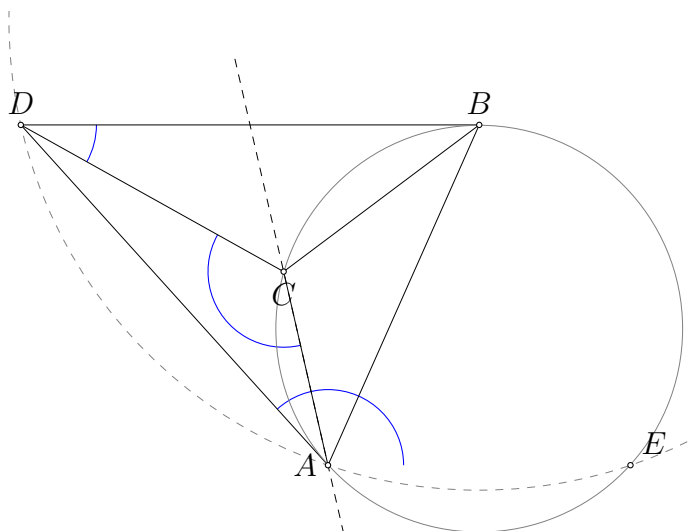
On désire montrer que $\widehat{RSC} = \widehat{RPA}$ pour conclure par angles alternes-internes. Or par angles inscrit, $\widehat{RSC} = \widehat{RSB}$. on veut donc montrer que $\widehat{RPA} = \widehat{RBC} = \widehat{RBP}$, c'est-à-dire que la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle PRB . Mais par puissance d'un point, puisque M est le milieu de $[AP]$ et que (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC :

$$MP^2 = AM^2 = MR \cdot MB$$

ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 6

Soient A, B, C trois points d'un cercle k tels que $AB = BC$. Les tangentes aux points A et B au cercle k se coupent au point D . La droite (DC) rencontre le cercle k au point E . Montrer que la droite (AE) coupe le segment $[BD]$ en son milieu.

Solution de l'exercice 6

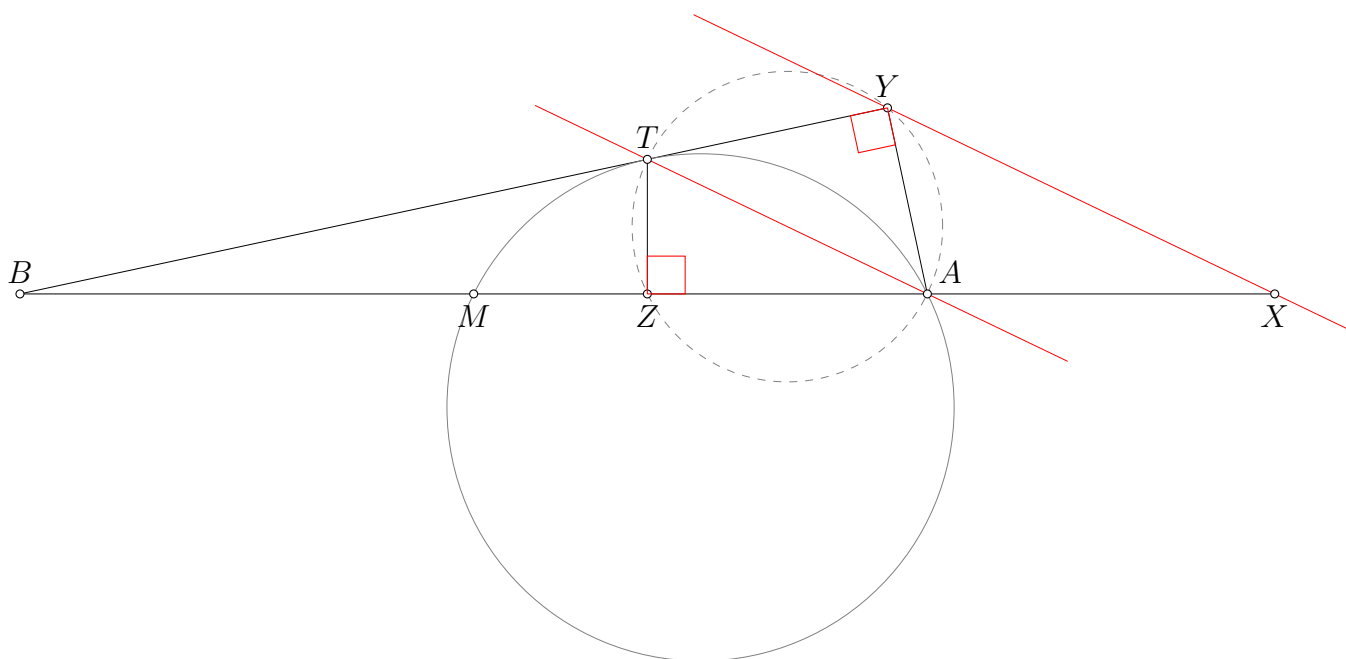
Une fois de plus on essaye de se ramener à la configuration du lemme. Montrons que la droite (DB) est tangente aux cercles circonscrits aux triangles AEB et DEA dont la droite (AE) est l'axe radical. La droite (DB) est déjà tangente au cercle circonscrit au triangle AEB par hypothèse. Montrons l'autre tangence. La droite (DB) est perpendiculaire à la médiatrice du segment $[AC]$ comme le triangle ABC est isocèle en B et la droite (DB) est tangente au cercle k , donc les droites (DB) et (AC) sont parallèles. Alors, par tangence :

$$\widehat{DAE} = \widehat{ECA} = \widehat{EDB}$$

ce qui donne la deuxième tangence et conclut.

Exercice 7 (GQMO P3 Junior)

Soit $[AB]$ un segment et M le milieu de $[AB]$. Soit ω un cercle passant par A et M et T un point de ω tel que (BT) est tangente à ω en T . Soit Y le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ATB et soit X le point de $[AB]$ tel que $TX = TB$. Montrer que les droites (YX) et (AT) sont parallèles.

Solution de l'exercice 7

Lorsqu'on a un projeté, on peut en introduire un autre pour avoir quatre points cocycliques. Ici, on remarque aussi que l'égalité $TB = TX$ n'est pas si facile à utiliser. Introduire Z le projeté de T sur (BX) permet également d'exploiter que $BZ = ZX$.

On a donc aussi T, Y, A, Z cocycliques par angle inscrit.

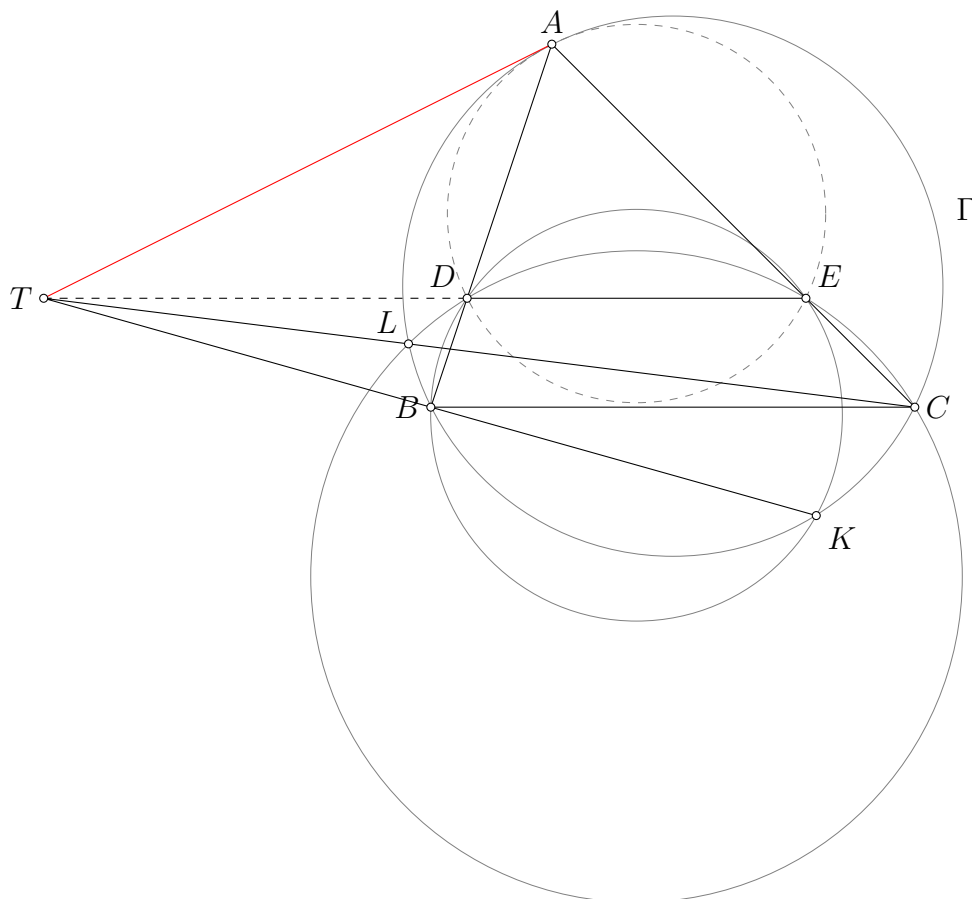
On procède alors par chasse aux rapports : par puissance d'un point par rapport à B , on a :

$$\frac{BT}{BY} = \frac{BT^2}{BT \cdot BY} = \frac{BM \cdot BA}{BZ \cdot BA} = \frac{BA/2}{BX/2} = \frac{BX}{BA}$$

Ce qui conclut par la réciproque du théorème de Thalès.

Exercice 8

Soient ABC un triangle de cercle circonscrit Γ , D un point sur (AB) et E un point sur (AC) tel que (DE) et (BC) sont parallèles. Le cercle circonscrit à ABC rencontre le cercle circonscrit à BDE une seconde fois en K et le cercle circonscrit à CDE une seconde fois en L . Soit T le point d'intersection de (BK) et (CL) . Montrer que (TA) est tangente au cercle Γ .

Solution de l'exercice 8

On reconnaît ici une situation classique :

- $KBDE$ cyclique,
- $KBLC$ cyclique,
- $CLDE$ cyclique.

On sait que dans cette situation, les droites (KB) , (CL) , (ED) sont concourantes (il s'agit ici du fait que les axes radicaux de 3 cercles sont concourants). Or les droites (BK) et (CL) se coupent en T . Il suit que T, D, E sont alignés.

On sait alors, en exprimant la puissance de T par rapport aux trois cercles, que :

$$TD \times TE = TL \times TC = TB \times TK.$$

Le fait de connaître le produit $TD \times TE$ incite à considérer un cercle passant par D, E , et comme on souhaite une propriété sur (TA) , il est naturel d'introduire le cercle circonscrit à

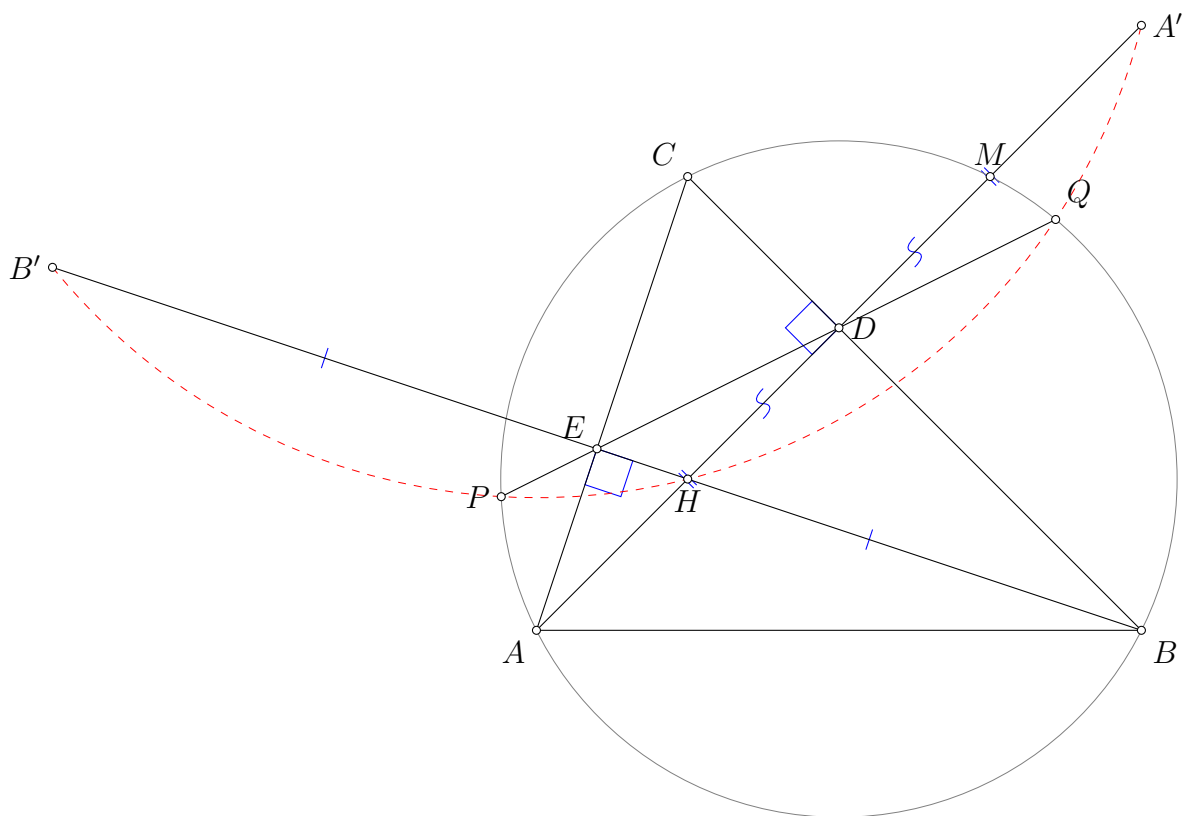
ADE .

Comme $TD \times TE = TL \times TC$, T a la même puissance par rapport aux cercles circonscrits à ABC et ADE . Il est donc sur leur axe radical. Mais comme (DE) est parallèle à (BC) , les deux cercles sont tangents en A d'axe radical la tangente commune à ces deux cercles en A . On peut le voir simplement par angle tangentiel (en utilisant que $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$), autrement on peut le voir en considérant l'homothétie de centre A envoyant D sur B : elle envoie E sur C donc elle envoie le cercle (ADE) sur (ABC) , et donc ces cercles sont bien tangents.

On en déduit que T est sur la tangente à Γ passant par A , autrement dit que (TA) est tangente à Γ , comme voulu.

Exercice 9

Soient ABC un triangle, D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. La droite (DE) rencontre le cercle circonscrit à ABC en deux points P et Q . Soient A' et B' les symétriques de A et B par rapport à (BC) et (AC) respectivement. Montrer que A', B', P, Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 9

Sur la figure, il semble que H l'orthocentre se situe sur le cercle en question. On va donc adopter la stratégie suivante : on va montrer que A' et B' sont sur le cercle circonscrit de PQH . De cette manière on aura bien A', B', P, Q cocycliques.

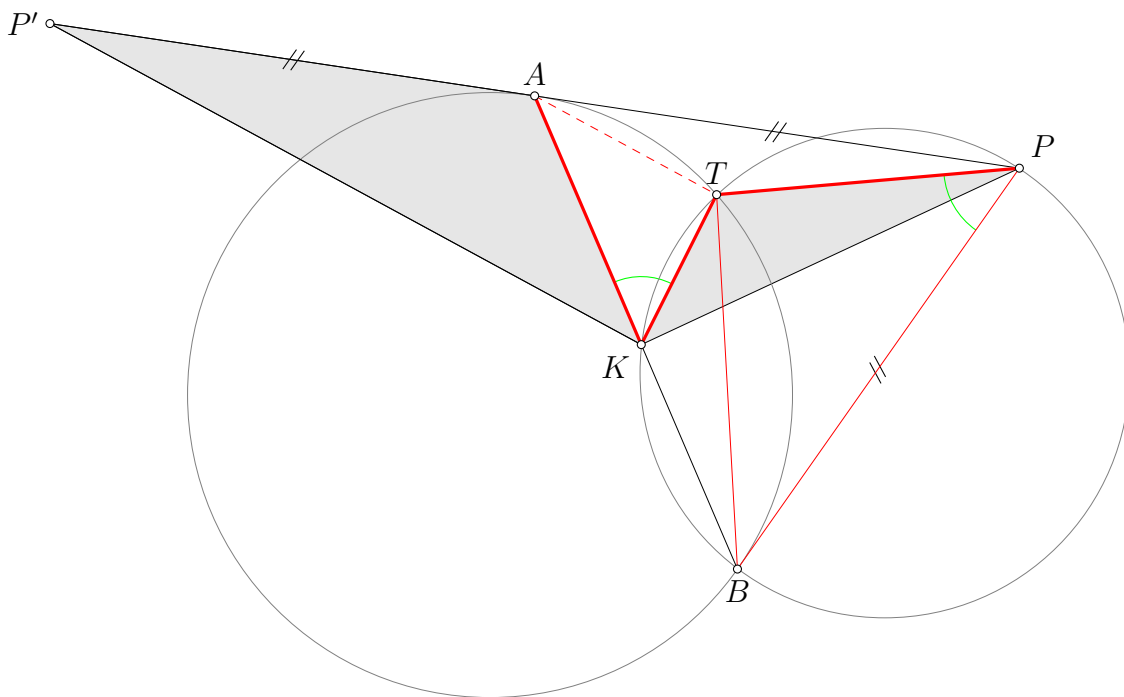
Soit M le symétrique de H par rapport à (BC) : alors on sait que M est sur le cercle circonscrit à ABC . Alors on a :

$$\begin{aligned} DA' \times DH &= DA \times DM \text{ par symétrie} \\ &= DP \times DQ \text{ par puissance de } D \text{ dans le cercle } (ABC). \end{aligned}$$

Alors par réciproque de la puissance d'un point, P, Q, H, A' sont cocycliques. De façon totalement analogue, P, Q, H, B' sont également cocycliques. Ainsi A', B', P, Q sont cocycliques, sur le cercle (PQH) .

Exercice 10 (PAMO 2021 P2)

Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ . Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B . Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T . Soit P' le symétrique du point P par rapport au point K . Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Solution de l'exercice 10

Commençons par remarquer que si l'énoncé est vrai, alors $\widehat{BAT} = \widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$. Ainsi, il est équivalent de montrer que les droites $(P'K)$ et (AT) sont parallèles. Mais si c'est le cas, alors $\widehat{KP'T} = \widehat{TAP} = \widehat{ABT} = \widehat{KPT}$. Comme on aurait $\widehat{PKT} = \widehat{PBT} = \widehat{KP'A}$, les triangles PKT et $P'KA$ seraient semblables. Réciproquement, il suffit de montrer que les triangles PKT et $P'KA$ sont semblables pour avoir le résultat voulu.

Pour montrer que $\triangle P'KA \simeq \triangle PKT$, on peut essayer de montrer que leurs angles sont deux à deux égaux. Mais on a vu que montrer $\widehat{PKT} = \widehat{P'KA}$ et $\widehat{TPK} = \widehat{KP'A}$ était équivalent à l'énoncé. Il est donc plus raisonnable d'essayer de montrer une égalité d'angle et une égalité de rapports. Or on a par angle inscrit :

$$\widehat{KTP} = 180^\circ - \widehat{KBP} = 180^\circ - \widehat{ABP} = 180^\circ - \widehat{BAP} = \widehat{PAK'}$$

Donc il suffit de montrer que $\frac{KT}{KA} = \frac{TP}{AP'}$. Comme $AP' = AP = BP$, il suffit de montrer que $\frac{KT}{KA} = \frac{TP}{BP}$. Il suffit donc de montrer que les triangles AKT et BPT sont semblables. On veut obtenir une égalité de rapport d'une similitude, donc on va montrer cette similitude par chasse aux angles.

D'une part, par angle inscrit, $\widehat{AKT} = 180^\circ - \widehat{BKT} = \widehat{TPB}$ et d'autre part par angle tangentiel, $\widehat{TAK} = \widehat{TAB} = \widehat{TBP}$.

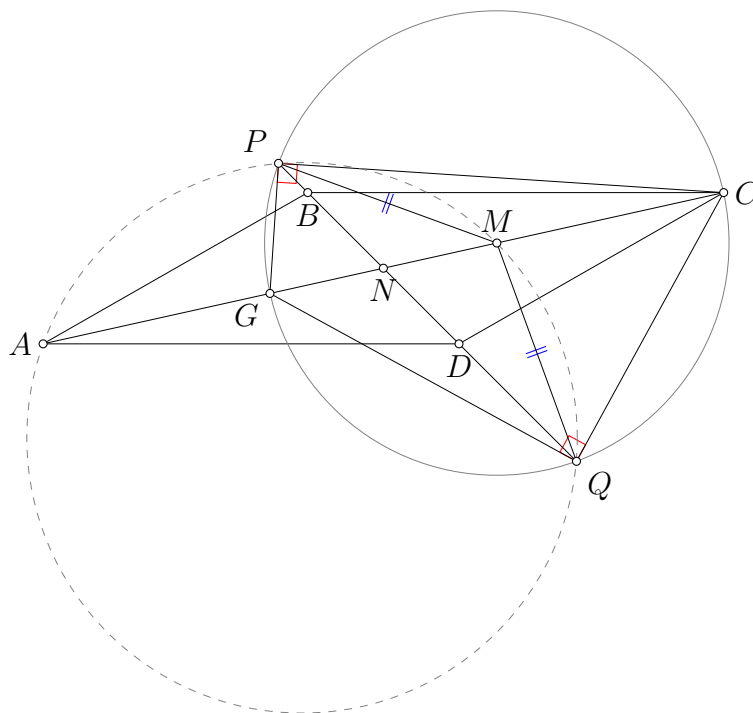
Donc les triangles AKT et BPT sont semblables comme voulu.

Exercice 11 (France TST novembre 2022)

Soit $ABCD$ un parallélogramme et G le centre de gravité du triangle ABD . Soient P et Q les points de la droite (BD) tels que les droites (GP) et (PC) sont perpendiculaires et les droites (GQ) et (QC) sont perpendiculaires.

Montrer que la droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

Solution de l'exercice 11



Puisque $\widehat{GPC} = \widehat{GQC} = 90^\circ$, les points G, P, Q et C sont sur un même cercle de centre M le milieu de $[CG]$. On a donc $MP = MQ$. On va montrer que M est le pôle Sud du sommet A dans le triangle APQ , ce qui implique bien que (AG) est la bissectrice de $\widehat{PAQ}$ puisque A, G, M et C sont alignés.

Puisque M est sur la médiatrice du segment $[PQ]$, il suffit de montrer que les points P, M, Q et A sont cocycliques. Pour cela, on note N le milieu commun des segments $[BD]$ et $[AC]$.

Le centre de gravité M' du triangle BDC vérifie $M'C = 2M'N = 2NG = AG$ et $M'N = NG$, de sorte que $M'G = M'C$ donc $M' = M$. On a alors par puissance du point N par rapport au cercle passant par G, Q, C et P :

$$NM \cdot NA = NG \cdot NC = NP \cdot NQ$$

On peut donc conclure par la réciproque de la puissance d'un point que les points A, P, M et Q sont cocycliques, comme voulu.

8 Algèbre : Equations fonctionnelles 2 (Noam et Paul LL)

Le but de ce cours a été de revoir toutes les techniques classiques dans des problèmes d'équations fonctionnelles, y compris l'injectivité et la surjectivité, ainsi que de découvrir les problèmes dits de "mutligraphes". La méthode de résolution de ces problèmes est détaillée dans la correction de l'exercice 3 : il est donc fortement encouragé (et souhaitable) de la lire même s'il vous semble que vous avez trouvé cet exercice.

Exercices

Exercice 1

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(x + y) = xf(x) + y$$

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(f(x) + f(f(y))) = 2x + f(f(y)) - f(f(x))$$

Exercice 3

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(x)^2 + yf(xy) = x^2 + xyf(y)$$

Exercice 4 (Iran 1999)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

Exercice 5

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous entiers x, y ,

$$f(3x - y)f(y) = 3f(x)$$

Exercice 6

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f((x - y)^2) = x^2 - 2yf(x) + f(y)^2$$

Exercice 7

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Exercice 8 (BdMO (Bangladesh))

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(xf(y) - y) + f(xy - x) + f(x + y) = 2xy$$

Exercice 9 (P6 INMO (Inde) 2011)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(x + y)f(x - y) = (f(x) + f(y))^2 - 4x^2f(y)$$

Exercice 10 (A1 RMM 2019)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(x^2 + xy + f(y^2)) = xf(y) + y^2 + f(x^2)$$

Exercice 11

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

Exercice 12 (P5 USAJMO 2024)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y ,

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y)$$

Solutions**Solution de l'exercice 1**

$x = 0$ donne $f(y) = y$ pour tout réel y : l'identité est donc la seule solution possible.

Or, on aurait alors $x + y = x^2 + y \iff x = x^2$ pour tous réels x, y , ce qui est évidemment absurde : il n'y a donc pas de solution.

Solution de l'exercice 2

En posant $x = y$, on trouve $f(f(x) + f(f(x))) = 2x$, donc f est bijective. Ainsi, en prenant y tel que $f(f(y)) = 0$, on en déduit $f(f(x)) = x$ pour tout réel x .

Ainsi, en remplaçant x par 0, et y par $y - f(0)$, on trouve $f(y) = y - f(0)$. Donc $2f(0) = 0$.

Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = y$. La seule solution possible est l'identité.

Réciproquement, on vérifie que l'identité est bien solution.

Solution de l'exercice 3

On pose $y = 0$. On a alors $f(x)^2 = x^2$ donc $f(x) = \pm x$ pour tout x . Attention ! On ne peut pas conclure qu'on a $f(x) = x$ pour tout x ou $f(x) = -x$ pour tout x : on pourrait avoir certains réels tels que $f(x) = x$, et d'autres tels que $f(x) = -x$, ce serait ce qu'on appelle un multigraphe. Dans la plupart des problèmes d'olympiades, de telles fonctions ne sont pas solution, et il s'agit de montrer qu'elles ne le sont pas.

On pose donc $y = 1$ pour obtenir $f(x)^2 + f(x) = x^2 + xf(1)$ donc $f(x) = xf(1)$. Maintenant, comme $f(1) = \pm 1$ on sait que c'est le même signe pour tout x : ou bien $f(1) = 1$ et f est l'identité, ou bien $f(1) = -1$ et $f : x \mapsto -x$.

On vérifie que ces deux fonctions sont solution.

Solution de l'exercice 4

On remplace y par $-f(x)$, ce qui donne $f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4f(x)^2$. De plus, en remplaçant y par x^2 , on en déduit $f(f(x) + x^2) = f(0) + 4x^2f(x)$.

Donc, pour tout réel x , $f(x)^2 = x^2f(x)$, c'est-à-dire, pour tout réel x , $f(x) = 0$ ou $f(x) = x^2$: on a à nouveau affaire à un multigraphe !

Si par l'absurde, il existe $x, y \neq 0$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = y^2 \neq 0$: donc $f(y) = y^2 = f(x^2 - y) \neq 0$. Donc $y^2 = (x^2 - y)^2 \iff x^2(x^2 - 2y) = 0 \iff x^2 = 2y$.

Arrivé ici, on retrouve une idée qui revient souvent en multigraphes : on a fixé x et y indépendamment, mais ils sont quand même liés, de manière assez rigide. On aimerait donc montrer que c'est absurde. La manière la plus générale de le faire est de remarquer qu'on peut faire varier x en fixant y , ou l'inverse. Or il y a, ou bien une infinité de x tels que $f(x) = 0$, mais il y a au plus deux x tels que $x^2 = 2y$ une fois y fixé. Ou bien une infinité de y tels que $f(y) = y^2$, mais il y a au plus un y tel que $2y = x^2$ une fois x fixé. Dans les deux cas, c'est absurde.

Il y a donc deux solutions possibles $f : x \mapsto 0$, et $f : x \mapsto x^2$, on vérifie réciproquement que ces deux solutions fonctionnent.

Solution de l'exercice 5

On pose $x = y : f(2x)f(x) = 3f(x)$. Donc pour tout x , ou bien $f(x) = 0$ ou bien $f(2x) = 3$. Si il existe un entier a tel que $f(a) = 0$, on pose $y = a$ et $3f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$ donc f est la fonction nulle.

Sinon $f(2x) = 3$ pour tout x . On veut traiter les impairs : pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose $x = 2k+1$ et $y = 6k+2$ Donc $f(1)f(6k+2) = 3f(2k+1)$ or $f(6k+2) = 3$ donc $f(1) = f(2k+1)$ pour tout k .

Avec $x = 2, y = 5$ on a $f(1)f(5) = f(1)^2 = 3f(2) = 9$.

Donc $f(1) = 3$, ce qui donne la fonction constante égale à 3, ou bien $f(1) = -3$, donc $f : x \mapsto 3 \times (-1)^x$. On vérifie que c'est bien solution : si x, y sont de même parité, $3x - y$ est pair donc $f(3x - y) = 3$ et $f(x) = f(y)$ donc on a bien l'égalité.

Sinon $f(3x - y) = -3$ et $f(y) = -f(x)$ donc on a bien l'égalité.

Solution n°2 de l'exercice 5

On reprend l'autre solution, jusqu'à trouver que pour tout réel x , $f(2x) = 3$. Alors, on pose $y = -x$, donc comme $4x = 2(2x)$, $f(-x) = f(x)$.

$x = 0$ donne $f(-y)f(y) = f(y)^2 = 3f(0) = 9$, donc pour tout y impair, on a ou bien $f(y) = +3$, ou bien $f(y) = -3$. On cherche à éliminer le multigraphe : Si x, y sont deux nombres impairs, $3x - y$ est pair. Donc $f(3x - y) = 3$, et on trouve $f(x) = f(y)$.

Les solutions possibles sont donc $f : x \mapsto 3$ et $f : x \mapsto 3(-1)^x$, qu'on a vérifiées dans l'autre solution.

Solution de l'exercice 6

Avec $x = y = 0$, on a : $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$. On pose $y = x : f(0) = x^2 - 2xf(x) + f(x)^2$, d'où $f(0) = (x - f(x))^2$.

Premier cas : $f(0) = 0$. Alors on a directement $f(x) = x$.

Second cas : $f(0) = 1$, donc $(x - f(x))^2 = 1 \iff f(x) - x = \pm 1 \iff f(x) = x \pm 1$.

Avec $y = 0$ on a $f(x^2) = x^2 + 1$ et en combinant avec $x = 0$ on obtient $y^2 + 1 = f(y^2) = f(y)^2 - 2y$, donc $f(y)^2 = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2$. On a donc forcément $f(y) = y + 1$ pour tout y , sauf si $y = 0$ auquel cas on sait déjà $f(0) = 1$. La seule solution possible dans ce cas est donc $f : x \mapsto x + 1$.

On vérifie aisément que l'identité est solution. Pour la seconde, c'est moins évident donc il est bon d'écrire le calcul :

$$f((x - y)^2) = x^2 - 2xy + y^2 + 1 = x^2 - 2xy - 2y + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2yf(x) + f(y)^2.$$

Ce sont bien les deux solutions de l'équation fonctionnelle.

Solution de l'exercice 7

On pose $x = 0$. On a alors $f(f(0)^2 + f(y)) = y$. On en déduit que f est injective et surjective.

En posant x l'antécédent de 0 (qui existe par surjectivité), on a $f(f(y)) = y$. Donc, en remplaçant x par $f(z)$, $f(z^2 + f(y)) = zf(z) + y = f(f(z)^2 + f(y))$ donc par injectivité, $x^2 = f(x)^2$ donc $f(x) = \pm x$ pour tout x réel. Si on a $x, y \neq 0$ tels que $f(x) = +x$ et $f(y) = -y$, $f(x^2 - y) = x^2 + y$ donc $y = 0$ ou $x^2 = 0$, c'est impossible.

Les seules solutions possibles donc sont l'identité et $f : x \mapsto -x$, et on vérifie aisément que ce sont des solutions.

Solution de l'exercice 8

Avec $x = 0$ on a $f(-y) + f(y) = 0$ donc f est impaire. En particulier $f(0) = 0$.

Avec $x = -1$, on trouve $f(-f(y) - y) + f(-y + 1) + f(y - 1) = -f(f(y) + y) = -2y$, donc on a que f est surjective.

On peut donc trouver un réel z tel que $f(z) = -1$. On a alors, avec $y = z$,

$$f(-x - z) + f(xz - x) + f(x + z) = f(x(z - 1)) = 2xz,$$

donc si $z \neq 1$, $f(x) = \frac{2z}{z-1}x$.

Si $z = 1$ on aurait $f(0) = 2x$ pour tout x , ce qui est impossible.

Ainsi la fonction f est de la forme $x \mapsto cx$ ou $c \in \mathbb{R}$. On trouve c dans la synthèse :

$$2xy = c^2xy - cy + cxy - cx + c(x + y) = (c^2 + c)xy,$$

et f est donc solution ssi $c^2 + c = 2$ c'est-à-dire $c = 1$ ou $c = -2$. Les deux solutions sont donc $f(x) = x$ et $f(x) = -2x$.

Solution de l'exercice 9

$x = y = 0$ donne $f(0)^2 = 4f(0)^2$, d'où $f(0) = 0$.

$x = y$ donne $0 = 4f(x)^2 - 4x^2f(x)$, d'où pour tout réel x , ou bien $f(x) = 0$, ou bien $f(x) = x^2$.

Supposons qu'il existe x, y non-nuls tels que $f(x) = x^2$ et $f(y) = 0$. Alors $f(x+y)f(x-y) = x^4 \neq 0$, donc

$$x^4 = (x^2 - y^2)^2 \implies -2x^2y^2 + y^4 = 0 \implies y^2 = 2x^2.$$

On peut alors conclure comme pour l'exercice 4 que c'est absurde, parce qu'il y a ou bien une infinité de tels x , ou bien une infinité de tels y .

Donc les deux solutions possibles sont $f : x \mapsto 0$ et $f : x \mapsto x^2$. Ces deux fonctions sont réciproquement solution de l'équation.

Solution de l'exercice 10

$y = 0$ donne $f(x^2 + f(0)) = xf(0) + f(x^2)$, et en remplaçant x par $-x$, on a

$$f(x^2 + f(0)) = -xf(0) + f(x^2),$$

d'où $xf(0) = -xf(0)$, et en prenant x non-nul, $f(0) = 0$.

Donc d'une part $x = 0$ donne $f(f(y^2)) = y^2$, et d'autre part $x = -y$ donne $f(f(y^2)) = -yf(y) + y^2 + f(y^2)$, donc $yf(y) = f(y^2)$. D'où, en remplaçant y par $-y$ dans cette dernière, $-yf(-y) = f(y^2) = yf(y)$, donc f est impaire parce qu'on a aussi $f(0) = 0$. Comme $f(f(z)) = z$ pour tout $z \geq 0$, on a donc $f(f(z)) = z$ pour tout $z \in \mathbb{R}$.

L'équation de départ devient

$$f(x^2 + xy + yf(y)) = xf(y) + y^2 + xf(x).$$

$x = -f(y)$ donne

$$f(f(y)^2) = y^2 - f(y)(f(y) + f(-f(y))) = y^2 - f(y)(f(y) - y).$$

Or, on a aussi $f(f(y)^2) = f(y)f(f(y)) = yf(y)$, d'où $f(y)^2 = y^2 \iff f(y) = \pm y$.

Enfin, si pour x, y non-nuls, $f(x) = +x$ et $f(y) = -y$, comme $xf(x) = f(x^2)$, $f(x^2)$ est du signe de $f(x)$. Donc $f(x^2 + xy - y^2) = -xy + y^2 + x^2$, ce qui donne ou bien $y^2 = xy$, ce qui donne $x = y$, absurde car $f(x)$ et $f(y) = f(x)$ seraient alors distincts (car $x, y \neq 0$), ou bien $x^2 = 0$, aussi absurde.

Réciproquement, $f : x \mapsto x$ et $f : x \mapsto -x$ sont bien solution.

Solution de l'exercice 11

Soient y, z tels que $f(y) = f(z)$. Alors, $y + f(0) = f(f(y)) = f(f(z)) = z + f(0)$, ce qui donne $y = z$, ce qui signifie que f est injective. De plus, en remplaçant x par 0 et y par $y - f(0)$, on a $f(f(y - f(0))) = y$, donc y est surjective.

On pose $x = y$ tels que $f(x) = 0$, alors $x = 0$, d'où $f(0) = 0$. Donc $x = 0$ donne $f(f(y)) = y$. En remplaçant y par $f(y)$, on retrouve l'équation de Cauchy. Donc f est de la forme $f : x \mapsto ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.

On vérifie ces solutions : $\forall x, y \in \mathbb{R}, ax + a^2x = ax + y$. Donc les solutions sont $f : x \mapsto x$ et $f : x \mapsto -x$.

Solution de l'exercice 12

$x = y = 0$ donne $f(f(0)) = 0$

$y = 0$ donne $f(x^2) = f(f(x)) + f(0)$, donc $f \circ f$ est paire. Donc, on a

$$\begin{aligned} 2yf(x) &= f(x^2) - f(0) + f(y) - f(x^2 - y) \\ &= f((-x)^2) - f(0) + f(y) - f((-x)^2 - y) \\ &= 2yf(-x). \end{aligned}$$

donc quitte à prendre y non-nul, on a $f(x) = f(-x)$ pour tout réel x : f est paire.

Comme $f(-y) = f(y)$, en prenant $x = 0$, on a $f(-y) + 2yf(0) = f(f(0)) + f(y) \implies 2yf(0) = 0$

pour tout y , d'où $f(0) = 0$.

Soient a, b deux réels tels que $f(a) = f(b)$: alors, pour tout réel y , $f(a^2 - y) = f(f(a)) + f(y) - 2yf(a) = f(f(b)) + f(y) - 2yf(b) = f(b^2 - y)$.

Ou bien on suppose qu'il existe de tels a, b avec $a^2 \neq b^2$ (spdg $a^2 < b^2$), alors f est $T = b^2 - a^2$ -périodique.

On reprend alors l'équation initiale :

$$\begin{aligned} 2yf(x) &= f(x^2) + f(y) - f(x^2 - y) \\ &= f(x^2) + f((y + T)) - f((-x)^2 - (y + T)) \\ &= 2(y + T)f(x) \end{aligned}$$

D'où $2Tf(x) = 0$, c'est-à-dire $f = 0$ car $T > 0$.

Ou bien $f(a) = f(b) \implies a^2 = b^2$. Donc comme $f(f(x)) = f(x^2)$ pour tout x , on en déduit que $f(x) = \pm x^2$ en tout réel x .

$y = \frac{1}{2}x^2$ donne $x^2f(x) = f(f(x)) = f(x^2)$, d'où $f(x^2)$ est du même signe que $f(x)$, ainsi, s'il existe x, y non-nuls tels que $f(x) = +x^2$ et $f(y) = -y^2$. Alors

$$f(x^2 - y) = -2yx^2 + x^4 - y^2$$

Ou bien $2y^2 = 0$, absurde, ou bien $2(x^4 - 2yx^2) = 0 \implies x^2 = 2y$, ce qui est absurde car il y a une infinité de tels x , ou une infinité de tels y .

4 Entraînement de fin de parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1

Trouver tous les polynômes P et Q unitaires à coefficients réels tels que :

$$P(Q(X))^2 = P(X)Q(X) + 1$$

Rappel : on dit qu'un polynôme est unitaire lorsque son coefficient dominant (le facteur devant le terme de plus haut degré) vaut 1.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit Q un point de la demi-droite $[CD)$ tel que C , D et Q soient alignés dans cet ordre. On note E le point d'intersection de (QB) avec (AD) . On note F le point de $[AB]$ tel que $ED = FB$. Enfin, on note P le point d'intersection de (QB) et (FD) . Montrer que $\widehat{BCP} = \widehat{PCD}$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle acutangle avec $\widehat{ABC}$ plus grand que $\widehat{BCA}$. Soit M le milieu de $[BC]$. On nomme D (respectivement E) le pied de la hauteur issue de B (respectivement C). Soit K (resp. L) le milieu de $[DM]$ (resp. $[EM]$) et T l'intersection de (KL) et de la parallèle à (BC) passant par A . Montrer que $TA = TM$.

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous les $x, y \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x + f(y)) + f(y + f(x)) = 2f(xf(y))$$

Solution de l'exercice 1

On passe cette équation au degré et on obtient :

$$2 \deg P \times \deg Q = \deg P + \deg Q$$

Si P et Q sont non-constants, on suppose sans perte de généralité que $\deg P \geq \deg Q \geq 1$, ce qui donne

$$2 \deg P \deg Q \geq 2 \deg P \geq \deg P + \deg Q$$

avec égalité si et seulement si $\deg Q = 1$ pour la première inégalité et $\deg P = \deg Q$ pour la deuxième. Ainsi, $\deg P = \deg Q = 1$.

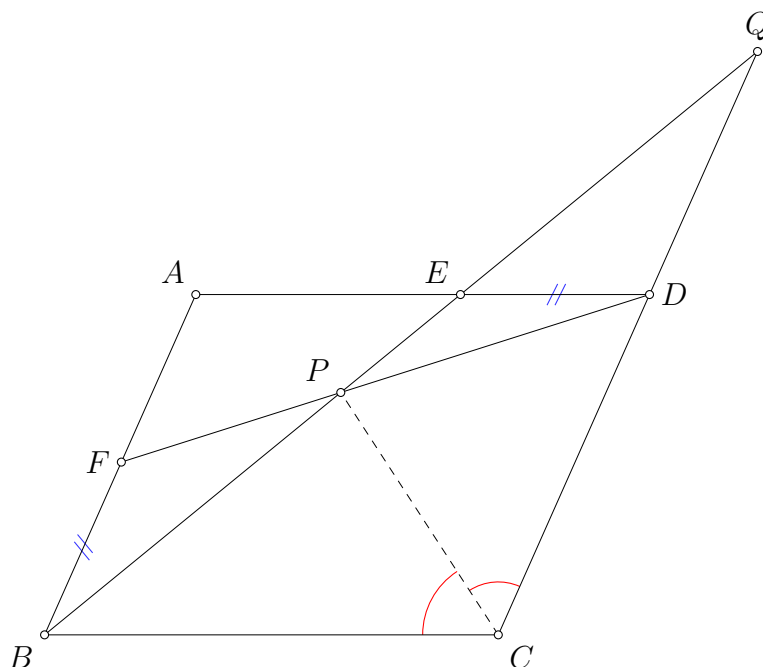
Comme ils sont unitaires, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P = X + a$ et $Q = X + b$. En réinjectant dans l'équation initiale, on trouve

$$(X + a + b)^2 = (X + a)(X + b) + 1$$

En développant et en regardant le terme de degré 1, on a $2(a + b) = a + b$, soit $a + b = 0$ et en regardant le coefficient constant, on trouve $ab + 1 = (a + b)^2 = 0$. Ce système d'équations admet comme solutions $a = 1$ et $b = -1$ ou $a = -1$ et $b = 1$.

Réciproquement, on vérifie aisément que prendre $(X + 1, X - 1)$ ou $(X - 1, X + 1)$ pour (P, Q) conviennent.

Enfin, le seul polynôme constant unitaire est 1, et si $Q = 1$, alors $P = 1$ car le membre de gauche est être constant, donc le membre de droite doit l'être aussi, et si $P = 1$ par le même argument on doit avoir $Q = 1$. Réciproquement, si $P = Q = 1$, on n'a pas égalité : il n'y a pas d'autre solution.

Solution de l'exercice 2

Comme (ED) est parallèle à (BC) et (DQ) est parallèle à (FB) , d'après Thalès, on a

$$\frac{ED}{BC} = \frac{QD}{QC}$$

soit

$$\frac{ED}{QD} = \frac{BC}{QC}$$

et

$$\frac{BP}{PQ} = \frac{BF}{DQ}$$

Or comme $BF = ED$, on a

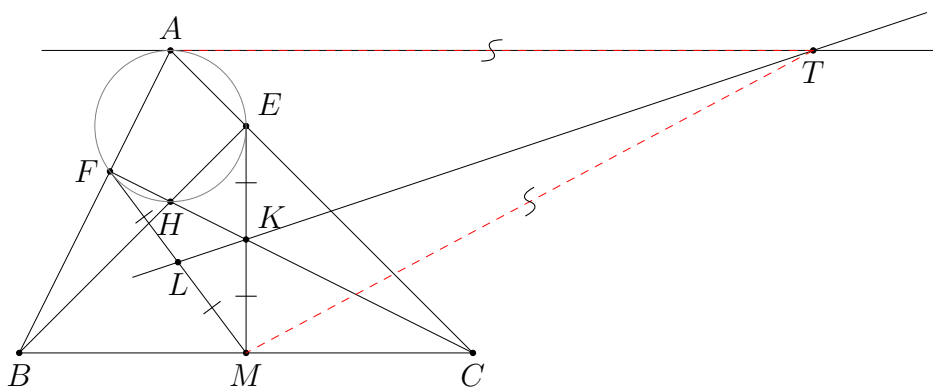
$$\frac{BP}{PQ} = \frac{ED}{DQ}$$

Ainsi on obtient l'égalité suivante

$$\frac{BP}{PQ} = \frac{BC}{QC}$$

qui d'après le théorème de la bissectrice prouve que (PC) est bien la bissectrice de l'angle $\widehat{DCB}$, donc $\widehat{BCP} = \widehat{PCD}$.

Solution de l'exercice 3



On note H l'orthocentre de ABC . Remarquons que (MF) et (ME) sont tangentes au cercle $(AEFH)$ de diamètre $[AH]$ (on peut le voir avec une chasse aux angles par exemple : $\widehat{HAF} = \widehat{FCM} = \widehat{MFH}$ car M est le centre de $(BFEC)$). Ainsi les points K et L , qui sont les milieux des segments $[ME]$ et $[MF]$ respectivement, ont la même puissance par rapport au cercle de diamètre $[AH]$ et au cercle-point M : on en déduit que l'axe radical de ces cercles est (KL) et donc que T a également la même puissance par rapport aux deux cercles. Clairement (TA) est perpendiculaire à (AH) et donc (TA) est tangente au cercle de diamètre $[AH]$: on en déduit $TA^2 = TM^2$, c'est-à-dire $TA = TM$ ce qui est l'égalité voulue.

Solution de l'exercice 4

On remarque que le membre de gauche est symétrique, donc on peut échanger x et y pour obtenir $f(xf(y)) = f(yf(x))$. En posant $y = 0$ dans cette équation, on a $f(xf(0)) = f(0)$. Si $f(0) \neq 0$, alors f est constante égale à $f(0)$. On suppose donc f non constante et on a $f(0) = 0$.

On pose $y = 0$ dans l'équation initiale, ce qui donne $f(f(x)) = -f(x)$. En évaluant $f(f(f(x)))$ de deux manières différentes, on trouve alors l'égalité $f(-f(x)) = -f(f(x)) = f(x)$ d'après ce qui précède.

On pose désormais $x = y$, ce qui donne $f(x + f(x)) = f(xf(x))$. Puis on pose $y = -f(x)$, soit $f(y) = f(-f(x)) = f(x)$, et on obtient $f(x + f(x)) = 2f(xf(x))$. Ces deux équations combinées impliquent $f(x + f(x)) = f(xf(x)) = 0$.

En prenant $x = 1$, on trouve alors $0 = f(1f(1)) = -f(1)$. Mais d'après la toute première remarque, on peut écrire $f(f(y)) = f(1f(y)) = f(yf(1)) = 0$, soit finalement $f(y) = -f(f(y)) = 0$, donc f est la fonction nulle. Réciproquement, on vérifie que toutes les fonctions constantes sont bien des solutions, donc ce sont les seules.

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1	Première partie : Combinatoire et Arithmétique	454
1	Géométrie : Similitudes (Serge)	454
2	Combinatoire : Jeux (Emilhan)	470
3	Combinatoire : TD de petites Shortlists (Hadriel)	480
4	Géométrie : TD de petites Shortlists (Akin)	484
5	Géométrie : Milieux (Auguste et Melvil)	498
6	Combinatoire : Grilles (Paul A)	521
7	Combinatoire : TD de pot pourri (Henry)	536
8	Géométrie : Théorème de Céva et Ménélaüs (Raphaël)	540
2	Entraînement de mi-parcours	553
3	Deuxième partie : Algèbre et Arithmétique	559
1	Arithmétique : suites d'entiers (Erik et Eva)	559
2	Algèbre : Introduction aux nombres réels (Martin)	566
3	Algèbre : TD de petites SL d'algèbre (Aurélien et Oscar)	591
4	Arithmétique : Théorème des restes chinois (Paul LL)	597
5	Algèbre : Inégalités fonctionnelles (Anatole et Rémi)	603
6	Arithmétique : TD de petites Shortlists (Gabriel et Maryam)	612
7	Arithmétique : Problèmes autour des diviseurs (Maxime et Théo)	620
8	Algèbre : Inégalités dans les suites (Antoine et Noé)	629
4	Entraînement de fin de parcours	636

1 Première partie : Combinatoire et Arithmétique

1 Géométrie : Similitudes (Serge)

Cours avec premiers exercices d'applications

Les prérequis pour ce cours sont de savoir ce qu'est une homotétie et une rotation, des triangles semblables ainsi qu'une maîtrise des chasses aux angles de bases, notamment dans les cercles.

Définition 1.

Une similitude est la composée d'une rotation et d'une homotétie centrés sur le même point.

Il est à noter que l'ordre de composition de la rotation et de l'homotétie n'a pas d'importance.

Définition 2.

Une similitude de centre O , de rapport r et d'angle α est la composée d'une homotétie de centre O et de rapport r et d'une rotation de centre O et d'angle α .

Proposition 3.

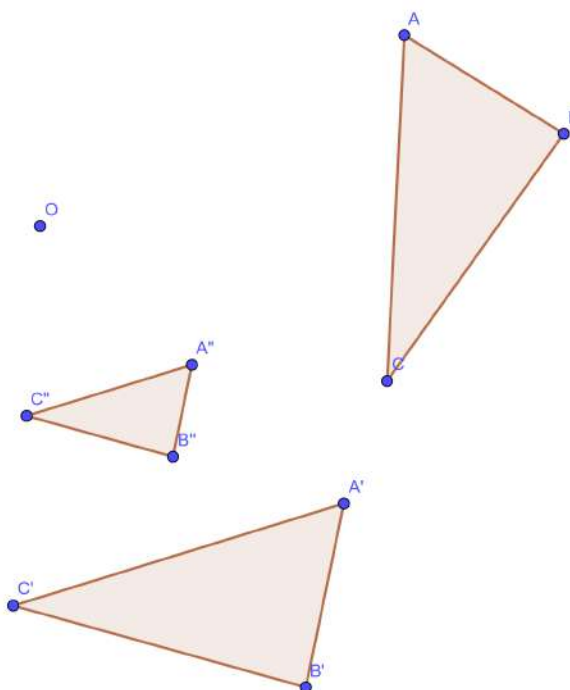
Une similitude conserve envoie un objet sur un objet qui lui est semblable

Démonstration. Cela vient du fait qu'une homotétie envoie un objet sur un objet qui lui est semblable et qu'il en est de même pour une rotation. $\square$

C'est de cette propriété que vient le nom de similitude, puisque la similitude est le meilleur outil pour étudier des objets semblables.

Corollaire 4.

Une similitude conserve les angles et les rapports de longueur. Elle envoie un cercle sur un cercle, une droite sur une droite, un triangle sur un triangle qui lui est semblable, etc.



Dans cet exemple, une similitude de centre O envoie ABC sur $A''B''C''$. On peut découper la similitude en une rotation de centre O envoyant ABC sur $A'B'C'$ et une homothétie de centre O qui envoie $A'B'C'$ sur $A''B''C''$.

Exercice 1 (Condition pour une similitude : nommé "lemme 1" dans la suite des exercices)
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles qui s'intersectent en P et Q . Soit X un point sur ω_1 . Soit Y un point sur ω_2 . Soit s la similitude de centre P qui envoie ω_1 sur ω_2 . Montrer alors que s envoie X sur Y si et seulement si X, Y et Q sont alignés.

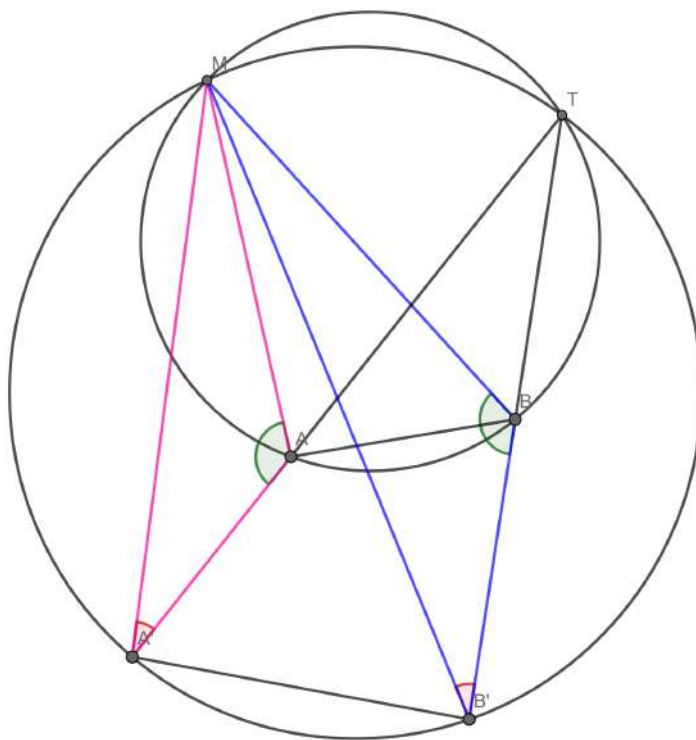
Un cas particulier du lemme 1 est le cas où $X = Q$. On peut alors vérifier que Q est envoyé par s sur l'intersection de la tangente à ω_1 en Q avec ω_2 .

Maintenant une question que l'on peut se poser est de savoir comment, étant donné certains points, trouver le centre d'une similitude envoyant certains de ces points sur d'autres points. En fait, on a le résultat suivant dont la preuve est très importante :

Proposition 5.

Soit A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Alors il existe une unique similitude envoyant A sur A' et B sur B' .

Démonstration.



Commençons par montrer l'existence. Etant donné les 4 points de la propriété ci-dessus, nous allons procéder comme-suit pour trouver le centre de la similitude :

Soit $T = (AA') \cap (BB')$. Soit M la seconde intersection des cercles circonscrits à TAB et à $TA'B'$ que l'on nomme Γ_1 et Γ_2 respectivement. Alors il existe une similitude de centre M envoyant A sur A' et B sur B' .

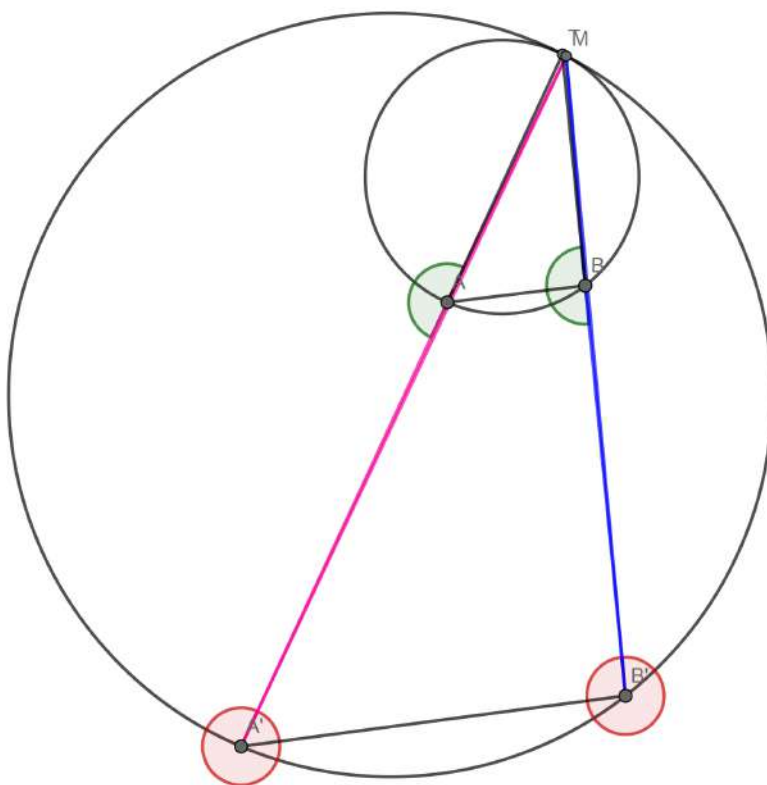
car alors on aurait les égalités d'angles $\widehat{AMA'} = \widehat{BMB'}$ et de rapports $\frac{MA}{MA'} = \frac{MB}{MB'}$. Or cela se montre par une chasse aux angles (en considérant les angles orientés) :

$$\widehat{AA'M} = \widehat{TA'M} = \widehat{TB'M} = \widehat{BB'M}$$

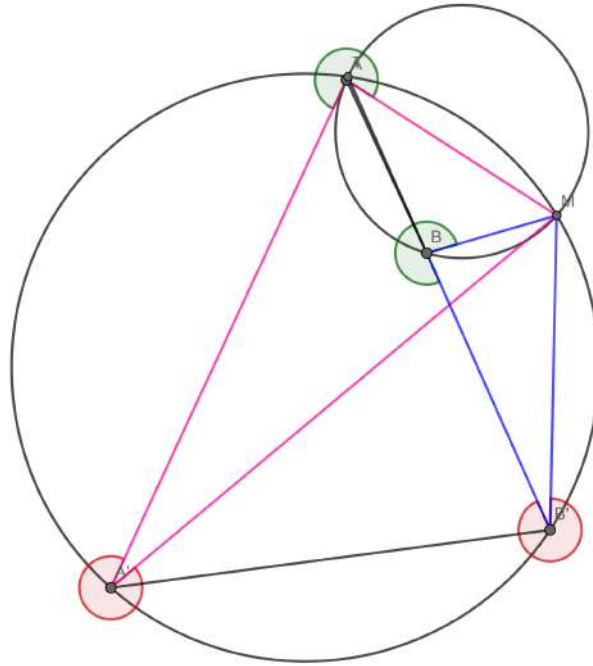
On montre de manière analogue que $\widehat{A'AM} = \widehat{B'BM}$ puis on en déduit que $A'AM \sim B'BM$. L'important dans cette preuve est de retenir la méthode de construction du centre de similitude. Le lecteur motivé pourra montrer l'unicité de la similitude. Cela suit à peu près le chemin de la preuve de l'existence dans l'autre sens. On considère un centre de similitude M envoyant A sur A' et B sur B' puis on montre avec des chasses aux angles que M appartient à Γ_1 et Γ_2 . $\square$

Dans certains cas particuliers cette construction est moins évidente mais il faut voir ces cas comme des "cas limites" de la construction dans la configuration générale.

Ainsi, lorsque (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, les cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents en T . Il faut alors considérer que la deuxième intersection des deux cercles est encore T , c'est-à-dire que $T = M$. Et en effet on vérifie dans ce cas $M = T$ est le centre d'une homothétie envoyant A sur A' et B sur B'



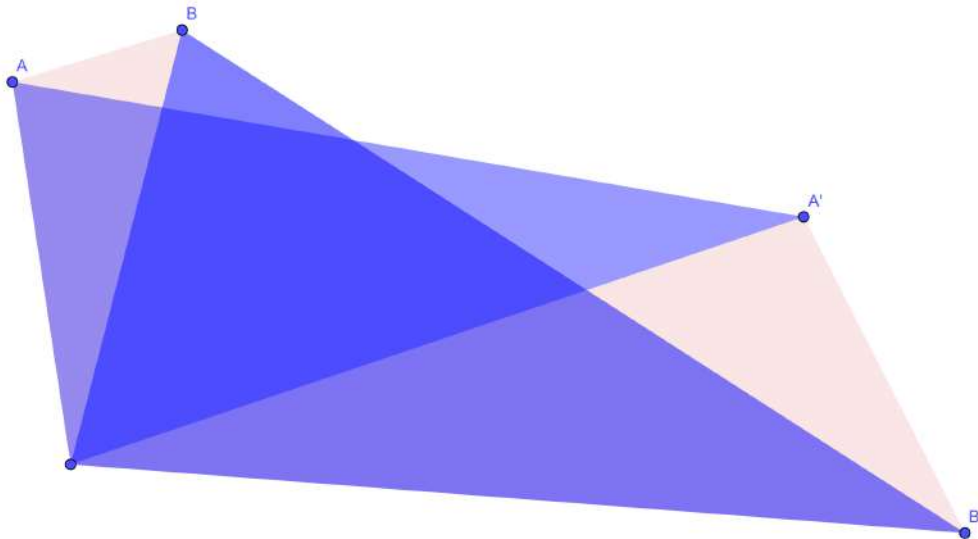
Un autre cas dégénéré est celui où certains des points sont alignés. Il faut alors se demander comment seraient les cercles si les points étaient "presque alignés". Prenons pour exemple le cas où A, B et B' sont alignés. Alors $T = A$ et Γ_1 devient "le cercle circonscrit à AAB ", c'est-à-dire le cercle passant par B et tangent à (AA') en A



Proposition 6.

Si M est le centre de la similitude envoyant A sur A' et B sur B' , alors M est le centre de la similitude envoyant A sur B et A' sur B' .

Démonstration.



Supposons que M est le centre d'une similitude envoyant A sur A' et B sur B' . Alors $\frac{MA'}{MA} = \frac{MB'}{MB}$ et $\widehat{A'MA} = \widehat{B'MB}$. Donc $\frac{MB'}{MA'} = \frac{MB}{MA}$ et angles orientés :

$$\widehat{B'MA'} = \widehat{B'MB} + \widehat{BMA} + \widehat{AMA'} = \widehat{BMA}$$

Donc M est le centre d'une similitude envoyant A sur B et A' sur B' . $\square$

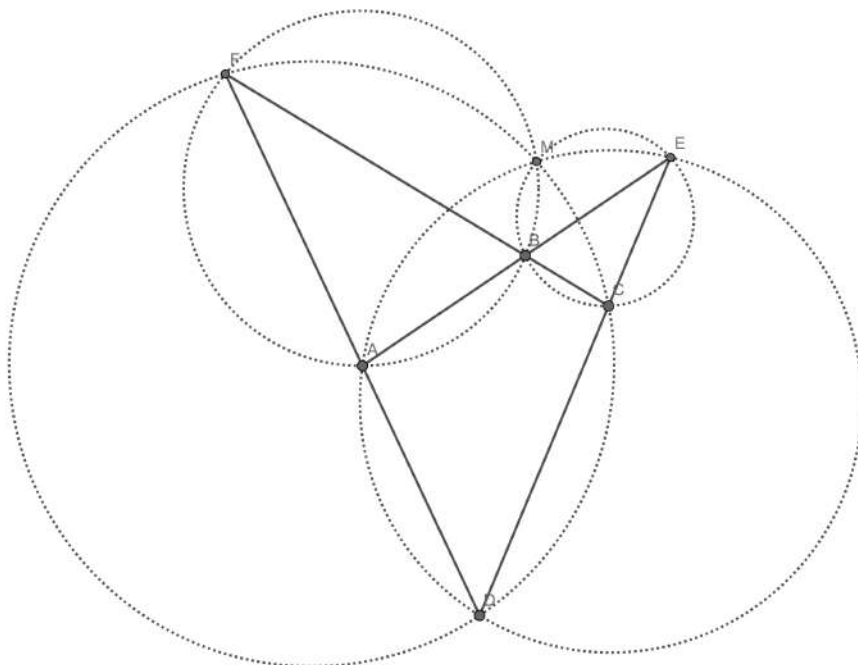
Exercice 2

Soit ABC un triangle et S l'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ avec le cercle circonscrit à ABC . Un cercle passant par A et S intersecte une seconde fois (AB) et (AC) en X et Y respectivement. Montrer $SX = SY$.

Définition 7.

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note $E = (AB) \cap (CD)$ et $F = (BC) \cap (DA)$. Alors les cercles suivants passent tous par un même point, appelé "point de Miquel associé aux droites (AB) , (BC) , (CD) et (DA) ".

Démonstration.



L'idée de la preuve, utile en général pour étudier les similitudes, est de rédéfinir un point comme étant le centre d'une similitude. Ici, on définit M comme étant le centre de la similitude envoyant A sur D et B sur C . D'après la proposition 6, M est également le centre de la similitude envoyant A sur B et D sur C .

Alors en utilisant la construction du centre d'une similitude donnée dans la preuve de la proposition 5, on peut conclure M appartient aux cercles circonscrits à EAD , EBC , FAB , et FCD . $\square$

Exercice 3

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soit E et F les milieux respectifs de $[AD]$ et $[BC]$ respectivement. Soit $S = (AB) \cap (EF)$ et $T = (EF) \cap (CD)$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles SAE , SBF , TDE et TCF ont un point de concourance.

Exercices plus durs pour progresser en similitudes**Exercice 4**

Soit ABC un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit. Soit D le pied de la bissectrice issue de A . Soit O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles circonscrits à ABD et ACD . Montrer que $OO_1 = OO_2$.

Exercice 5

Soit A, B, C et D quatre points cocycliques. Soit M le milieu de $[AC]$. Soit $N \neq C$ l'intersection de (BC) avec le cercle circonscrit à DCM . On note B' le symétrique de B par rapport à N . Montrer que la droite (MN) est tangente au cercle circonscrit à DNB' .

Exercice 6

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible dans un cercle de centre O . On note P l'intersection de ses diagonales. Soit Q l'intersection des cercles circonscrits à APD et BPC . Montrer que $\widehat{OQP} = 90^\circ$.

Exercice 7

Soit $ABCDEF$ un hexagone inscriptible tel que $AB = CD = EF$. Soit $Z = (AC) \cap (BD)$, $X = (CE) \cap (DF)$ et $Y = (EA) \cap (FB)$. Montrer que ACE et XYZ sont semblables.

Exercice 8

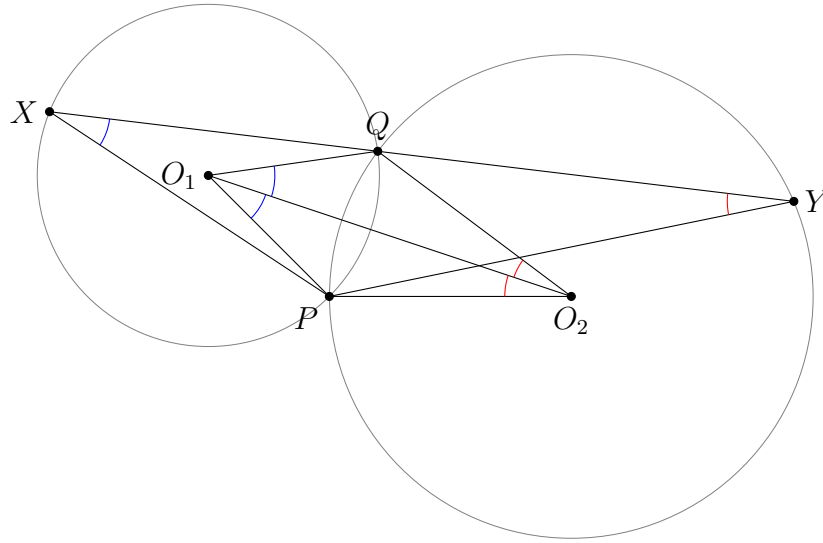
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ et P un point variable sur l'arc AB qui ne contient pas C . Soit I et J les centres des cercles inscrits des triangles ACP et BCP respectivement. Montrer que l'intersection Q du cercle circonscrit à IJP avec Γ reste fixe quand P varie.

Exercice 9 (G4 IMO SL 2015)

Soit ABC un triangle acutangle. Soit M le milieu de $[AC]$. Un cercle ω passant par B et M recoupe les droites (BA) et (BC) en P et Q respectivement. Soit T le point tel que $BPTQ$ soit un parallélogramme (dans cet ordre de points). On suppose que T est sur le cercle circonscrit à ABC . Quelles sont les valeurs possibles de $\frac{BT}{BM}$?

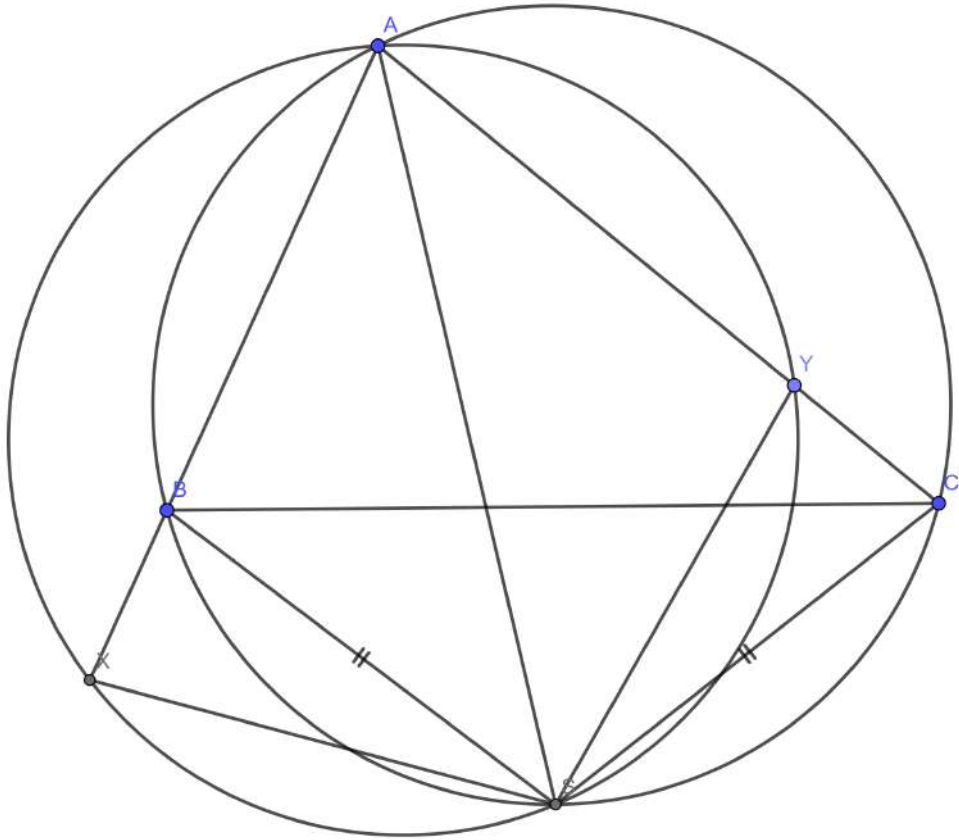
Solutions

Solution de l'exercice 1



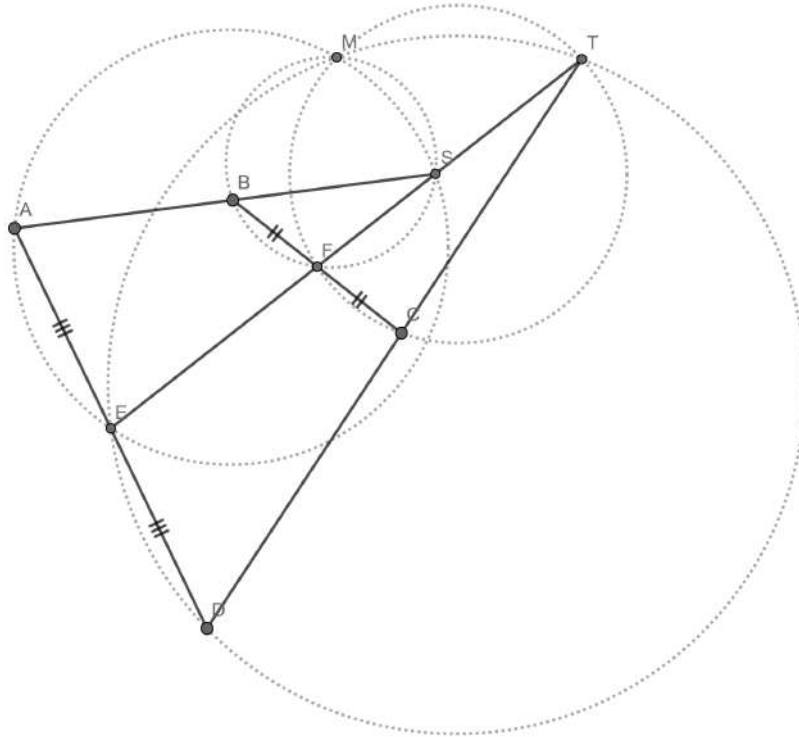
On note O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits à ω_1 et ω_2 respectivement. Il suffit de démontrer que $PO_1O_2 \sim PXY$. Cela s'obtient par une chasse aux angles : $\widehat{PO_1O_2} = \frac{\widehat{PO_1Q}}{2} = \widehat{PXQ} = \widehat{PXY}$. De manière analogue on montre que $\widehat{PO_2O_1} = \widehat{PYX}$, ce qui conclut la preuve.

Solution de l'exercice 2



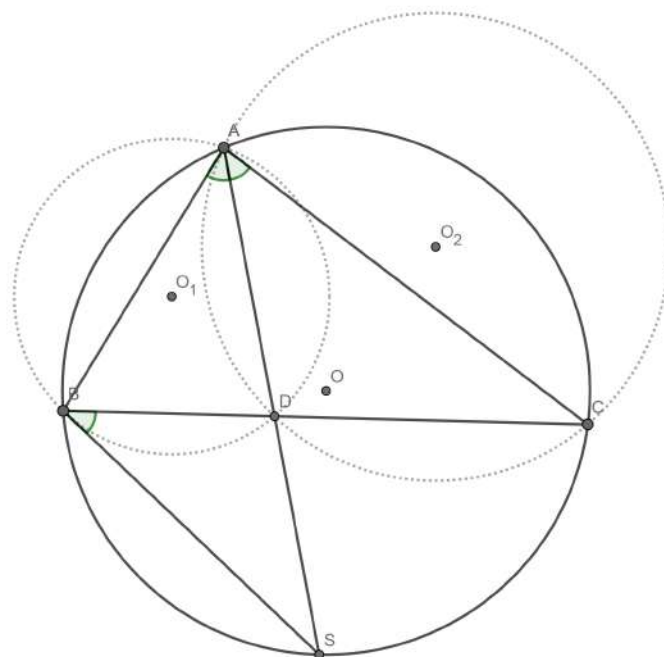
D'après le lemme de l'exercice 1, la similitude de centre S qui envoie le cercle circonscrit à ABC sur le cercle circonscrit à AXY envoie également B sur X et C sur Y . Donc il existe également une similitude s de centre S qui envoie B sur C et X sur Y . Le rapport de la similitude s est $\frac{SY}{SX} = \frac{SC}{SB}$. Or $SC = SB$ car S est le pôle Sud de A dans le triangle ABC . D'où $SX = SY$.

Solution de l'exercice 3



Soit M le centre de la similitude qui envoie A sur B et D sur C . Comme les similitudes conservent les rapports, elle envoie le milieu de AD sur le milieu de BC , c'est-à-dire E sur F . Or d'après le cours (point de Miquel), l'intersection des cercles circonscrits à SBF et à SAE est le centre de la similitude qui envoie A sur B et E sur F , c'est-à-dire M . Donc $MSFB$ et $MSEA$ sont des quadrilatères cycliques. De même on montre que les cercles circonscrits à TCF et TDE passent par M . Ainsi, M est le point de concourance des 4 cercles.

Solution de l'exercice 4



Plusieurs cercles passent par A . On va donc considérer des similitudes de centre A qui envoient des cercles sur d'autres cercles et ainsi utiliser le lemme 1.

Soit S le pôle Sud issu de A dans le triangle ABC , c'est-à-dire l'intersection de (AD) avec le cercle circonscrit à ABC .

D'après le lemme 1, la similitude de centre A qui envoie O_1 sur O envoie également D sur C . De plus, une petite chasse aux angles nous indique que (BS) est tangente en B au cercle circonscrit à ABD . En effet :

$$\widehat{SBD} = \widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \widehat{BAD}$$

Donc cette même similitude envoie B sur S .

Donc il existe une similitude de centre A qui envoie O_1 sur B et O sur S .

On montre de manière analogue qu'il existe une similitude de centre A qui envoie O sur S et O_2 sur C .

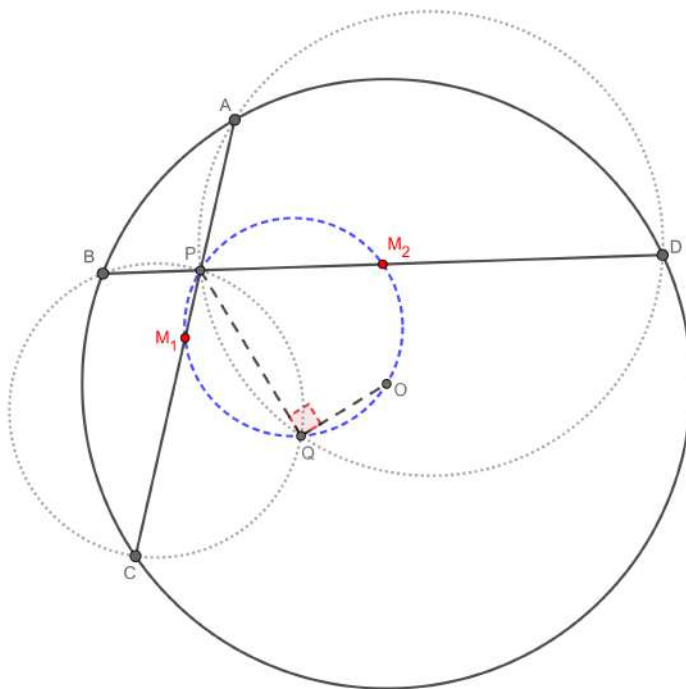
Or étant donné un centre de similitude A et 2 points X et Y , il existe une unique similitude de centre A qui envoie X sur Y . Donc il existe une similitude de centre A qui envoie O_1 sur B , O sur S et O_2 sur C . On en déduit que le quadrilatère O_2OO_1A est semblable au quadrilatère $CSBA$.

Or comme S est un pôle Sud on a $SB = SC$. Donc $OO_1 = OO_2$ ce qui conclut l'exercice.

$$\widehat{MAD} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \widehat{NBD}.$$
$$\widehat{DMA} = 180^\circ - \widehat{CMD} = 180^\circ - \widehat{CND} = \widehat{DNB}.$$
$$\begin{aligned}\widehat{MND} &= \widehat{MCD} \text{ par angle inscrit} \\ &= \widehat{ACD} \\ &= \widehat{BB'D} \text{ car } ADC \sim BDB' \\ &= \widehat{DB'D}.\end{aligned}$$

464

Solution de l'exercice 6

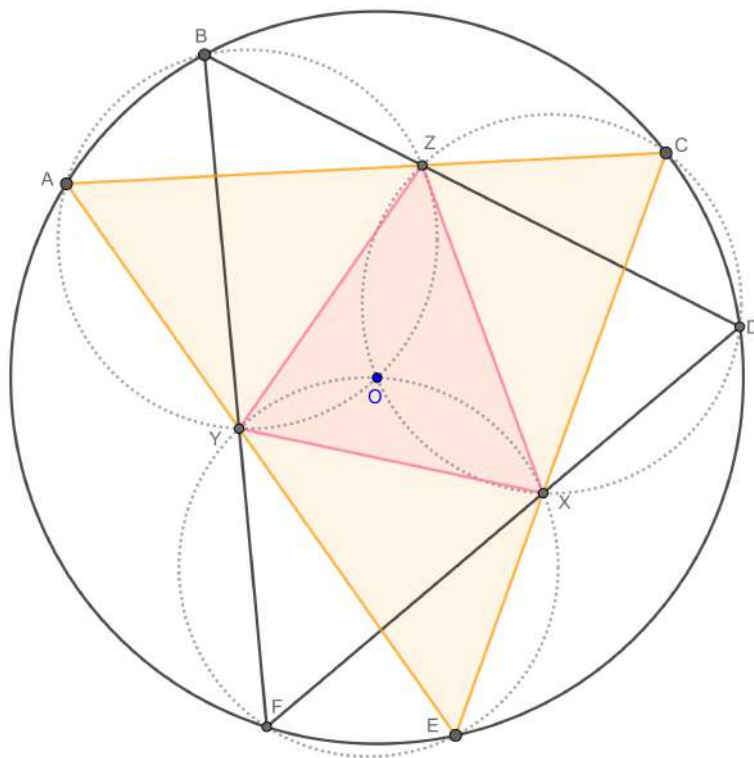


La principale difficulté de cet exercice est d'interpréter la signification de l'angle droit. Or on connaît des points qui forment un angle droit faisant intervenir le centre O du cercle circonscrit à $ABCD$. En effet, O est sur la médiatrice de 2 points quelconques de ce cercle. Ainsi, cela nous pousse à introduire des milieux de segment joignant 2 points du cercle. Or on se rend compte en fait que 2 de ces milieux en particulier sont sur le cercle de diamètre $[OP]$: ce sont les milieux M_1 et M_2 des segments $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. On va donc les introduire sur la figure.

Il suffit alors d'écrire les bonnes similitudes pour avoir les cocyclicités voulues. D'après le lemme 1, la similitude de centre Q qui envoie le cercle circonscrit PBC sur le cercle circonscrit à APD envoie également C sur A et B sur D . Donc il existe une similitude s de centre Q qui envoie C sur B et A sur D . s envoie également le milieu de $[AC]$ sur le milieu de $[BD]$, c'est-à-dire M_1 sur M_2 . Ainsi, comme Q est le centre de la similitude s qui envoie A sur D et M_1 sur M_2 , par construction du centre d'une similitude, Q, M_1, P, M_2 sont cocycliques.

Or on a déjà vu que O, M_1, P, M_2 sont cocycliques. Donc O, Q, M_1, P et M_2 sont cocycliques. Donc $\widehat{OQP} = 90^\circ$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7



Dans cet exercice, la similitude à considérer est une rotation. En effet, d'après les propriétés de l'énoncé, on est naturellement amenés à considérer la rotation de centre O (le centre du cercle circonscrit à ABC qui envoie le triangle ACE sur le triangle BDF .

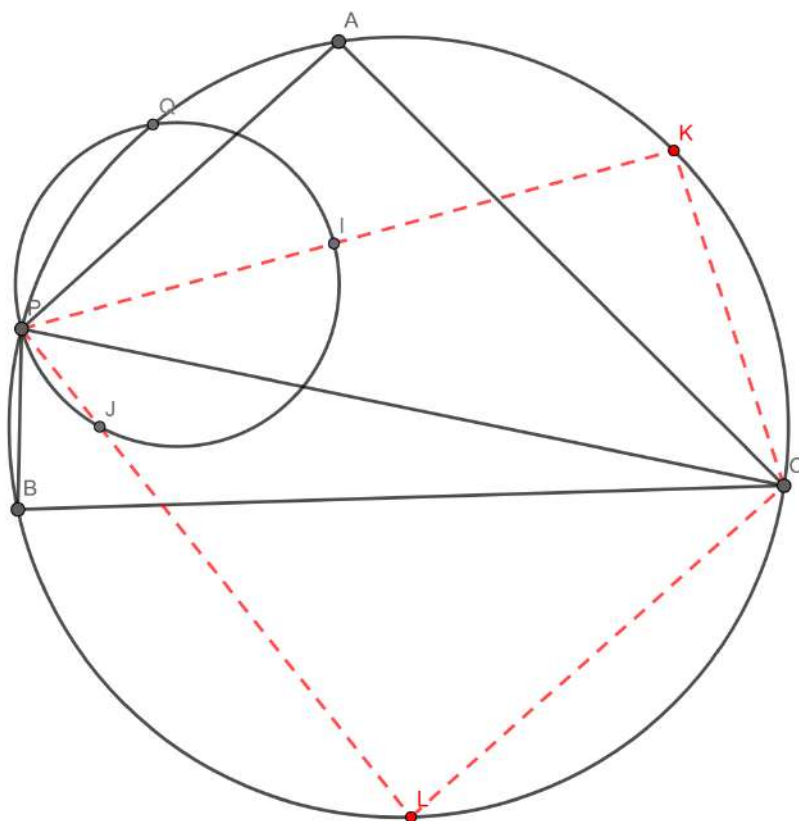
Or, comme $Z = (AC) \cap (BD)$, le centre de la similitude envoyant $[AB]$ sur $[CD]$ s'obtient en intersectant les cercles circonscrits à ABZ et CDZ . Ainsi, les quadrilatères $OABZ$ et $OZCD$ sont cycliques. On montre de même que $OYAB$ est cyclique puis on en déduit que les points O, Y, A, B et Z sont cocycliques. On montre de manière analogue sur $OZCDX$ et $OXEY$ sont cycliques.

On peut alors conclure par chasse aux angles :

$$\widehat{XYZ} = \widehat{XYO} + \widehat{OYZ} = \widehat{XEO} + \widehat{OAZ} = \widehat{CEO} + \widehat{OAC} = \widehat{ECO} + \widehat{OCA} = \widehat{ACE}$$

On obtient de manière analogue les égalités $\widehat{ZXY} = \widehat{EAC}$ et $\widehat{YZX} = \widehat{ECA}$ ce qui montre que $XYZ \sim ACE$.

Solution de l'exercice 8

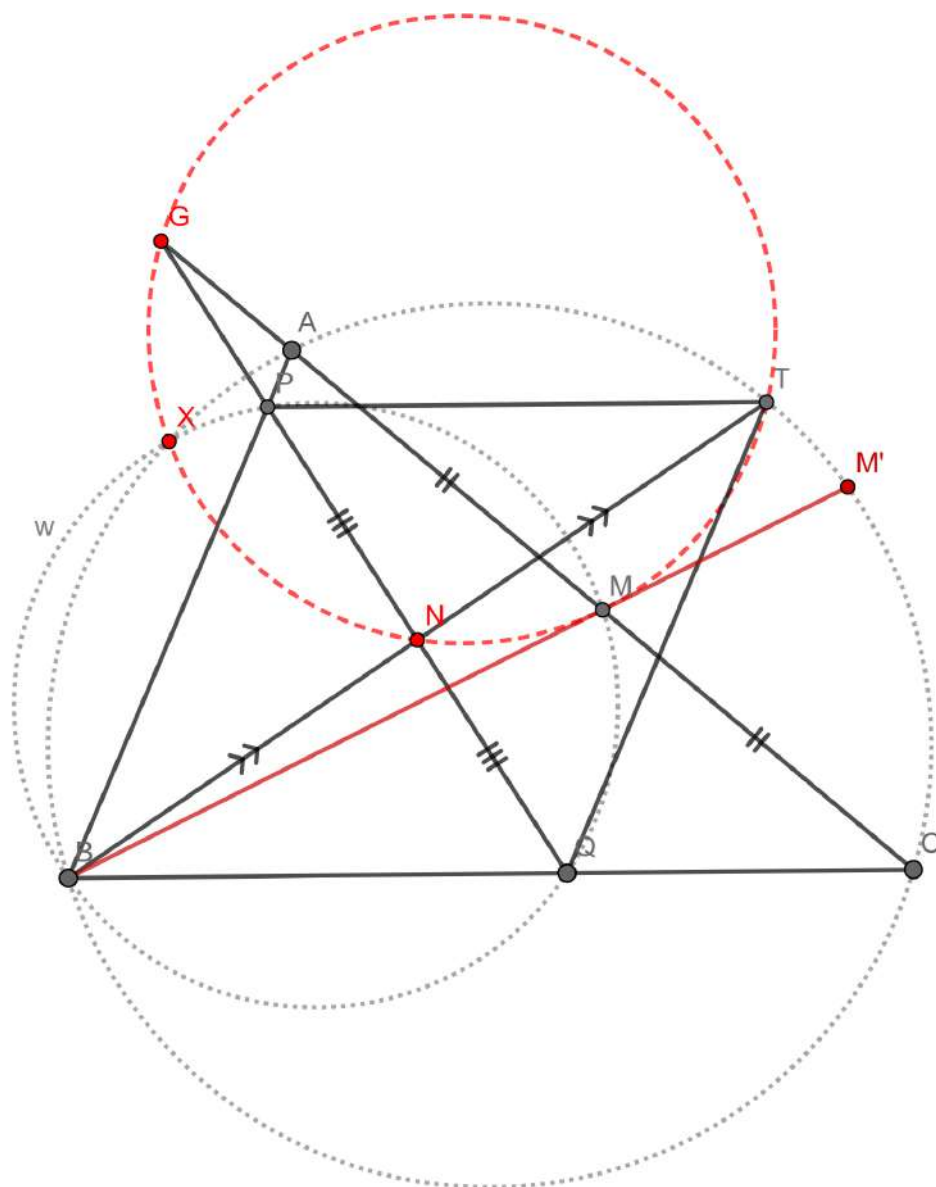


En présence de deux cercles passant par un même point on est amené à regarder les similitudes envoyant un cercle sur l'autre. Ainsi, on définit K et L comme les intersections respectives de (PI) et (PJ) avec Γ . Remarquons alors que K et L sont des pôles Sud pour certains triangles.

Alors d'après le lemme 1, la similitude s de centre Q qui envoie le cercle circonscrit à IJP sur Γ envoie également I sur K et J sur P . Donc Q est le centre d'une similitude s' qui envoie I sur J et K sur L .

Or K et L sont deux points fixes sur Γ . La similitude s' est d'angle $\widehat{KQL}$ constant quand P varie. De plus, en utilisant les égalités de longueur données par le pôle Sud, on a $\frac{QL}{QK} = \frac{JL}{IK} = \frac{JC}{KC}$. Donc le rapport de s' est constant. Le lecteur peut alors se convaincre par un dessin qu'une similitude envoyant un point fixe sur un autre point fixe d'angle et de rapport donné est unique. Donc Q est fixe quand P varie car c'est le centre de la similitude envoyant K sur L d'angle et de rapport constant.

Solution de l'exercice 9



Cet exercice est nettement plus dur que tous ceux qui le précèdent dans ce td. Le premier problème est que la figure ne peut pas être tracée simplement de manière précise. Il faut donc se contenter de figures approximatives pour avancer dans l'exercice ce qui réduit considérablement la possibilité de faire des conjectures. Mais lorsqu'on utilise des similitudes il n'est pas nécessaire de faire de belles figures car il suffit de comprendre quel point est envoyé sur quel point. L'autre difficulté est que dans la solution présentée plusieurs points sont introduits. Mais la bonne nouvelle est que les points introduits sont en fait des points classiques à introduire dans ce genre de situation. Enfin il est toujours pertinent dans les exercices faisant intervenir des rapports de longueur dans l'énoncé de considérer des transformations géométriques car celles-ci feront naturellement intervenir des rapports de longueurs. Fin du bla-bla, place à la solution.

Lorsqu'il y a un parallélogramme, c'est toujours pertinent d'introduire l'intersection de

ses diagonales car elles se coupent en leur milieu. C'est ici d'autant plus pertinent qu'il y a déjà un autre milieu difficile à exploiter. On introduit donc $N = (BT) \cap (PQ)$.

Dans cette solution on notera (XYZ) le cercle circonscrit à (XYZ) . Le deuxième point intéressant à introduire est X le point de Miquel (voir cours) des droites (AP) , (PQ) , (QC) et (CA) . Ainsi, $X = (PBQ) \cap (ABC)$. Puisqu'on introduit le point de Miquel on va également compléter la configuration du point de Miquel en définissant $G = (AC) \cap (PQ)$.

Alors il existe une similitude s de centre X qui envoie (PBQ) sur (ABC) . s envoie P sur A et Q sur C . Donc par conservation des rapports, s envoie le milieu de PQ sur le milieu de AC , c'est-à-dire N sur M . Or $G = (PN) \cap (AM)$. Donc, par construction du centre de la similitude qui envoie P sur N et A sur M , on a que G , N , M et X sont cocycliques.

De plus, remarquons que d'après le lemme 1, s envoie M sur $M' = (BM) \cap (ABC)$. Donc s envoie (MN) sur $(MM') = (BM)$. L'angle entre ces deux droites est donc égal à l'angle de la similitude s . Or s envoie également (PN) sur (AM) . Donc $\widehat{BMN} = \widehat{MGN}$. Donc (BM) est tangente à (MGN) en M .

Alors on remarque que l'on pourrait conclure par axes radicaux si on montre que $T \in (MGN)$. Il suffit de montrer les cocyclicités par chasse aux angles en utilisant les triangles semblables donnés par la similitude s :

$$\widehat{XTN} = \widehat{XTB} = \widehat{XCB} = \widehat{XCQ} = \widehat{XMN}$$

Donc $XGTMN$ est cyclique.

Par puissance d'un point $BM^2 = BT \cdot BN = \frac{BT^2}{2}$.

Donc $\frac{BT}{BM} = \sqrt{2}$.

2 Combinatoire : Jeux (Emilhan)

Conseils généraux

Avant de commencer les exercices, voici un bref rappel des différentes méthodes essentielles :

- La **stratégie miroir** est utile pour des jeux où il faut s'assurer d'avoir un coup légal. Elle consiste à s'assurer (souvent grâce à des paires) de pouvoir jouer quel que soit le coup de l'adversaire. On peut ainsi jouer un coup symétrique à celui de son adversaire, par exemple.
- Les **pavages** ou des invariants/monovariants/**variants** tels que la parité peuvent être utiles pour décrire des stratégies.
- Il est parfois possible d'étudier les **positions finales** et de remonter les coups qui donnent lieu à ces positions.
- Le **vol de stratégie** est un raisonnement par l'absurde qui consiste à montrer que si le deuxième joueur avait une stratégie gagnante, le premier joueur pourrait jouer un certain coup puis utiliser la stratégie du deuxième pour gagner.
- Traiter des **petits cas** permet de se forger une intuition et de conjecturer.
- **Le droit à la débilité est une liberté fondamentale.** Si on essaye de faire gagner Alice, il ne faut pas interdire à Bob d'être débile s'il le veut, tout argument du style "Bob a intérêt à jouer comme ça" sera très probablement faux.

Exercices

Exercice 1

On considère une grille de taille $n \times n$. Aurélien et Benoît colorient à tour de rôle des cases en rouge et jaune respectivement, en commençant par Aurélien. Lorsque toutes les cases sont coloriées, on regarde les $2n - 1$ diagonales allant de droite à gauche. Une diagonale est appelée diagonale de Benoît si elle contient au moins autant de cases jaunes que rouges, et est appelée diagonale d'Aurélien sinon. Aurélien gagne s'il possède plus de diagonales que Benoît, et Benoît gagne sinon. Déterminer qui possède une stratégie gagnante.

Exercice 2

Étant donnés $n \geq 2$ points sur un cercle, Alice et Bob jouent au jeu suivant. Initialement, un pion est placé sur l'un de ces points et aucun segment n'est tracé. Les joueurs jouent chacun à leur tour, en commençant par Alice. Chaque joueur, lorsque c'est à son tour de jouer, déplace le pion du point sur lequel il se trouve, disons P , vers un des $n - 1$ autres points, disons Q , puis trace le segment $[PQ]$. Ce déplacement n'est toutefois autorisé que si le segment $[PQ]$ n'avait pas déjà été tracé auparavant. Le premier joueur qui ne peut plus déplacer le pion perd la partie, et son adversaire gagne.

Déterminer, pour chaque n , lequel des deux joueurs peut s'assurer de gagner quels que soient les choix de son adversaire.

Exercice 3

André et Bernabé jouent au jeu suivant. Initialement, un nombre $n \geq 2$ est écrit au tableau. À tour de rôle et en commençant par André, le joueur dont c'est le tour choisit un nombre x entre 1 et 99 tel que si le nombre au tableau est m , $xm/100$ soit un nombre entier et remplace m par $xm/100$. Le premier joueur ne pouvant plus effectuer de coup perd la partie. Déterminer qui possède une stratégie gagnante.

Exercice 4

Théo et Emilhan jouent au jeu suivant. Emilhan commence par couper un fromage de 300g en 4 tranches. Ensuite, Théo divise ses 280g de beurre entre deux plats. Finalement, Emilhan répartit ses tranches de fromages sur les deux plats. Théo gagne s'il y a strictement plus de beurre que de fromage sur l'un des deux plats. Qui possède une stratégie gagnante ?

Exercice 5

Alice et Bob jouent sur une grille 20×20 . Initialement, toutes les cases sont vides. Alice commence puis les deux joueurs placent alternativement des pierres sur des cases non occupées. Lors de son tour, Alice place une pierre rouge sur une case libre qui n'est pas à distance $\sqrt{5}$ d'une autre case contenant une pierre rouge. À son tour, Bob place une pierre bleue sur une case inoccupée. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur ne peut plus placer de pierre. Déterminer le plus grand K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges quel que soit la façon dont Bob places ses pierres.

Exercice 6

Soit $n \geq 3$ un nombre impair. On considère un n -gone régulier dont l'ensemble des sommets est appelé V . Soit P l'ensemble des polygones réguliers dont les sommets forment un sous-ensemble de V . Alice et Bob colorient alternativement les sommets de V en rouge et bleu respectivement. Un polygone de P est dit *rouge* s'il a plus de sommets coloriés en rouge que de sommets coloriés en bleu. Déterminer le plus grand entier k tel qu'Alice puisse s'assurer d'obtenir au moins k polygones rouges parmi les éléments de P , quels que soient les coups de Bob.

Exercice 7

Soit m, n des naturels, avec $m > 1$. Martin partitionne les naturels $1, 2, \dots, 2m$ en m paires. Baptiste choisit ensuite un entier de chaque paire et les somme. Montrer que Martin peut s'arranger pour que la somme de Baptiste soit différente de n .

Exercice 8

Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Akın et Baptiste jouent au jeu suivant : à tour de rôle, ils choisissent un indice entre 0 et $p - 1$ qui n'a pas encore été choisi et un entier a_i entre 0 et

9. Une fois tous ces choix effectués, ils calculent la somme $M = \sum_{i=0}^{p-1} a_i 10^i$. Le but d'Akın est

de rendre M divisible par p , tandis que Baptiste a pour but de l'en empêcher. Montrer que si Akın commence à jouer, il possède une stratégie gagnante.

Exercice 9

Kyle et Sam jouent à un jeu sur une bande 1×2016 de carrés blancs. Les joueurs, chacun leur tour et en commençant par Kyle, peignent à chaque coup certains carrés blancs en noir. Les coups de Kyle consistent toujours à peindre en noir deux carrés blancs adjacents, alors que ceux de Sam consistent à peindre en noir soit un seul carré blanc, soit un rectangle 1×3 de carrés blancs. Il est interdit aux deux joueurs d'effectuer un coup après lequel il existe un carré blanc n'ayant aucun voisin blanc. Le joueur qui ne peut plus jouer perd la partie. Aussi, si tous les carrés sont peints en noir, alors Kyle gagne la partie. Quel joueur possède une stratégie gagnante ?

Exercice 10

Alice et Bob jouent au jeu suivant. Alice commence par écrire un entier strictement positif au tableau. Ensuite, les joueurs jouent à tour de rôle, en commençant par Bob. À son tour, Bob remplace le nombre n écrit au tableau par un nombre de la forme $n - a^2$, avec $a \in \mathbb{N}^*$. À son tour, Alice remplace le nombre n écrit au tableau par un nombre de la forme n^k , avec $k \in \mathbb{N}^*$. Bob gagne si le numéro écrit au tableau est 0. Qui possède une stratégie gagnante ?

Exercice 11

2025 cartes ayant toutes une face rouge et une face blanche sont disposées en ligne. Initialement, toutes les cartes ont leur face visible rouge. Alice et Bob effectuent un mouvement à tour de rôle. Ce mouvement consiste à choisir un bloc de 50 cartes consécutives dont la carte la plus à gauche est face rouge, et toutes les retourner. Alice commence, et le dernier joueur à pouvoir effectuer un mouvement gagne.

(a) Le jeu se termine-t-il nécessairement ?

(b) Alice possède-t-elle une stratégie gagnante ?

Exercice 12

Savinien et Théo jouent à un jeu coopératif. Ils ont devant eux un collier circulaire contenant $3n$ pierres turquoises (T) et $3n$ saphirs (S), tel qu'il n'y ait jamais trois pierres consécutives de même type. Savinien et Théo doivent enlever, à tour de rôle, 3 pierres consécutives. Cependant, Théo ne peut enlever que des blocs de la forme TST , tandis que Savinien ne peut enlever que des blocs de la forme STS . Ils gagnent s'ils parviennent à retirer toutes les billes en $2n$ tours. Montrer que s'ils peuvent gagner lorsque Théo commence, ils peuvent aussi gagner lorsque Savinien commence.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Montrons que Benoît gagne si et seulement si $n > 1$. Il est clair qu'Aurélien gagne lorsque $n = 1$.

Soit donc $n > 1$. La stratégie de Benoît consiste à jouer dans la même diagonale qu'Aurélien si celle-ci contient un nombre pair de cases, de jouer dans le coin opposé si Aurélien colorie l'un des deux coins, et de faire des coups quelconques (tant que la grille n'est pas remplie) lorsque Aurélien joue dans une autre diagonale. Cette stratégie assure à Benoît de contrôler toutes les diagonales contenant un nombre pair de cases ainsi qu'un des deux coins. Il contrôle donc au moins $n - 1 + 1 = n$ diagonales, ce qui conclut.

N.B. : Pour être tout à fait complet, il faut préciser que les coups quelconques dans la stratégie de Benoît pourraient lui faire remplir des cases qu'il aurait envie de colorier plus tard, mais il lui suffira alors d'effectuer un autre coup quelconque.

Solution de l'exercice 2

Montrons qu'Alice possède toujours une stratégie gagnante. Après avoir effectué son premier coup, qui consiste à tracer le segment $[AB]$, avec A et B deux points sur le cercle, elle possède une stratégie miroir. En effet, si Bob joue BQ , elle peut jouer QA , et si Bob joue ensuite AR , elle joue RB . Plus généralement, elle peut jouer de sorte que le pion se situe toujours sur A ou sur B après son tour, et pour n'importe quel sommet qui n'a pas encore été exploré, il est soit relié à A et B , soit à aucun des deux. Bob est donc le premier qui sera à court de coups légaux.

Solution de l'exercice 3

Montrons que Bernabé gagne si et seulement si n est de la forme $2^{3k} \cdot 5^{3j} \cdot r$, avec $k, j \geq 0$ et $(r, 10) = 1$. Un nombre de cette forme sera appelé *joli*, tandis que les autres nombres seront appelés *moches*.

Commençons par remarquer que puisque $\frac{x}{100} < 1$ et que les nombres écrits au tableau sont entiers, le jeu se termine nécessairement en temps fini. De plus, un joueur se retrouve dans une situation où il ne peut pas effectuer de coup si et seulement si le nombre écrit au tableau est premier avec 100. Ainsi, seuls les facteurs 2 et 5 de n et, au cours du jeu, des différents x choisis, importent. Dans la suite, nous ignorerons donc les facteurs premiers autres que 2 et 5.

Si x est un nombre entre 1 et 99, notons $\Delta(x) = (\alpha(x), \beta(x)) = (\nu_2(x) - \nu_2(100), \nu_5(x) - \nu_5(100))$. En choisissant un diviseur strict de 100 comme nombre x , le couple $\Delta(x)$ prend toutes les valeurs $(-a, -b)$, avec $0 \leq a, b \leq 2$ tels que $a + b > 0$. On en déduit :

Fait : Si le nombre écrit au tableau est moche, le joueur dont c'est le tour peut écrire un nombre joli.

Preuve : Par hypothèse, le nombre écrit au tableau est de la forme $2^{3k+a} \cdot 5^{3j+b}$, avec $0 \leq a, b \leq 2$ et $a + b > 0$. Le joueur dont c'est le tour peut donc écrire $2^{3k} \cdot 5^{3j}$ en choisissant x tel que $\Delta(x) = (-a, -b)$.

On remarque maintenant que pour tout $1 \leq x \leq 99$, $-2 \leq \beta(x) \leq 0$ puisque $99 < 125$. Et dans le cas où $\beta(x) = 0$, on doit avoir $25 \mid x$, donc $-2 \leq \alpha(x) \leq -1$ car $99 < 4 \cdot 25 = 100$. En particulier, il n'y a aucun x entre 1 et 99 tel que $\alpha(x), \beta(x) \equiv 0 \pmod{3}$. On en déduit immédiatement :

Fait : Si le nombre écrit au tableau est joli, le joueur dont c'est le tour ne peut pas écrire un nombre joli.

En résumé, on a montré qu'il est toujours possible d'écrire un nombre joli après un nombre moche, et que les seuls nombres que l'on peut possiblement écrire après un nombre joli sont moches. Ainsi, si n est joli, Bernabé gagne en écrivant systématiquement un nombre joli, car André ne pourra écrire que des nombres moches. De même, si n est moche, André peut écrire un nombre joli puis appliquer la stratégie de Bernabé.

Solution de l'exercice 4

Montrons qu'Emilhan possède une stratégie gagnante. Il découpe son fromage en 4 tranches de masses respectives : 20g, 40g, 80g et 160g. On vérifie que les tranches d'Emilhan sont telles qu'elles permettent d'obtenir n'importe quelle masse ≤ 300 qui soit divisible par 20. Supposons que Théo ait divisé son beurre en des parts de masses respectives x et $280 - x$. Emilhan met des tranches dans le plat de x de sorte à arrondir x au premier multiple y de 20 qui lui soit supérieur. Puisque $300 = 280 + 20$ et que $y < x + 20$, il reste à Emilhan des tranches dont la masse totale est $> 300 - (x + 20) = 280 - x$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 5

Montrons que la réponse attendue est $K = 100$.

Stratégie d'Alice : Commençons par colorier la grille comme un échiquier. On remarque que deux cases à distance $\sqrt{5}$ sont toujours de couleurs différentes. Ainsi, si Alice joue uniquement sur cases blanches, elle peut colorier au moins la moitié de ces cases, soit 100 cases.

Stratégie de Bob : On appellera 4-cycle une suite de 4 cases différentes C_1, C_2, C_3 et C_4 de la grille qui sont telles que pour tout $1 \leq i \leq 4$, les cases C_i et C_{i+1} sont à distance $\sqrt{5}$ (où les indices sont pris modulo 4). La stratégie de Bob consiste à recouvrir la grille par des 4-cycles disjoints, puis à jouer sur la case C_{i+2} lorsque Alice joue sur la case C_i d'un certain 4-cycle. Ce faisant, puisque Alice ne pourra plus jouer sur les cases C_{i+1} et C_{i+3} , elle aura joué sur au plus une case dans chaque 4-cycle, soit au plus 100 cases en tout.

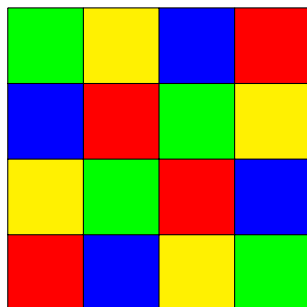


FIGURE 1 – Un pavage pour $n = 4$

Un exemple de partition en 4-cycles est représenté ci-dessus pour une grille de taille 4×4 , et il suffit ensuite de recouvrir la grille initiale par des grilles 4×4 pour conclure.

Solution de l'exercice 6

Notons, pour tout $m \geq 1$, $\tau(m)$ le nombre de diviseurs positifs de m et $\sigma(m)$ la somme de ces diviseurs. Montrons que la réponse attendue est

$$\frac{\sigma(n) + \tau(n) - n - 1}{2}.$$

La stratégie d'Alice consiste à colorier un sommet quelconque A , puis à jouer de manière symétrique par rapport aux coups de Bob. Plus précisément, quel que soit le coup B de Bob, Alice joue l'unique sommet C qui est le symétrique de B par la symétrie axiale dont l'axe est le diamètre passant par P . Puisque n est impair, cette symétrie axiale partitionne les sommets restants en paires de sommets qui sont symétriques deux à deux, et assure donc à Alice de toujours pouvoir jouer comme décrit ci-dessus. Comptons le nombre de polygones rouges qui se forment dans ce cas-là.

Si $H \in P$, il a un nombre impair de sommets (étant inscrit dans un polygone régulier avec un nombre impair de sommets). Il est donc invariant par symétrie axiale dont l'axe est le diamètre passant par l'un de ses sommets. En particulier, si A est un sommet de H , H sera nécessairement rouge car A est colorié en rouge, et car la moitié des sommets restants est coloriée en rouge.

En outre, tout polygone de P ne contenant pas A est envoyé sur un autre polygone H' de P ne contenant pas A . Par symétrie, la moitié des polygones de P ne contenant pas A seront donc rouges.

Remarquons que si d est un diviseur de n , il y a exactement $\frac{n}{d}$ polygones réguliers à d côtés inscrit dans le n -gone régulier de départ (qui sont envoyés les uns sur les autres par des rotations d'angle $2\pi/n$). En outre, parmi ces polygones, exactement l'un d'entre eux contient A . Cela montre qu'Alice peut s'assurer d'obtenir au moins :

$$X = \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 3}} 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{d} - 1 \right) = \tau(n) - 1 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{d|n \\ d < n}} (d - 1) = \frac{\sigma(n) - n + \tau(n) - 1}{2}$$

polygones rouges.

Montrons maintenant que Bob peut s'assurer qu'Alice ne possède pas plus de X polygones rouges. Sa stratégie est en fait de forcer Alice à jouer comme dans la stratégie précédente. Alice joue de nouveau sur un sommet quelconque A , puis Bob joue sur un autre sommet quelconque B . Ensuite, lorsque Alice colorie un sommet C , Bob coloriera, dès qu'il le pourra, le symétrique de C par le diamètre passant par A . Il pourra toujours jouer ainsi jusqu'à ce qu'Alice colorie le symétrique de B . À ce moment-là, si tous les sommets ne sont pas encore coloriés, il recolorie un sommet quelconque et reprend la même stratégie. À la fin de la partie, les sommets coloriés (autres que A) seront donc bien symétriques par rapport à A , et on aura donc le même nombre de polygones rouges que précédemment.

Solution de l'exercice 7

Nous allons construire des partitions que Martin peut choisir et qui sont telles que les valeurs possibles pour la somme de Baptiste forment des ensembles qui ont une intersection vide.

La première idée est que Martin peut essayer de contrôler la taille de la somme. On considère donc la partition :

$$\{1, 2\}; \{3, 4\}; \dots; \{2m-1, 2m\}.$$

Dans ce cas, quels que soient les choix de Baptiste, la somme obtenue sera comprise entre m^2 et $m^2 + m$.

La deuxième idée que Martin peut exploiter est le fait de ne laisser qu'une seule valeur possible modulo m à Baptiste, en considérant :

$$\{1, m+1\}; \{2, m+2\}; \dots; \{m, 2m\}.$$

Le résidu modulo m de la somme de Baptiste sera dans ce cas toujours égal à $\frac{m(m+1)}{2} \pmod{m}$. Il nous reste encore une (ou deux) valeurs en commun selon la parité de m . On considère enfin la partition :

$$\{1, m+2\}; \{2, m+3\}; \dots; \{m-1, 2m\}; \{m, m+1\}.$$

Cette dernière partition force le résidu modulo $m+1$ de la somme à être égal à $\frac{m(m+1)}{2}$ ou $\frac{m(m+1)+2}{2}$.

Afin de conclure, on montre que les trois ensembles de valeurs n'ont aucun élément en commun en faisant une disjonction de cas selon la parité de m .

Premier cas : si m est impair, l'intersection des deux premiers ensembles de valeurs possibles est $\{m^2, m^2 + m\}$. Elles sont respectivement congrues à 1 et 0 modulo $m+1$, ce qui n'est pas le cas des valeurs possibles pour la troisième partition car $m > 2$.

Deuxième cas : si m est pair, l'intersection des deux premiers ensembles de valeurs possibles est $\{m^2 + \frac{m}{2}\}$. Cette valeur est congrue à $1 + \frac{m}{2}$ modulo $m+1$, ce qui n'est pas le cas des valeurs possibles pour la troisième partition.

On a donc bien montré que quelle que soit la valeur de n , Martin peut choisir l'une des trois partitions précédentes de sorte que la somme de Baptiste soit nécessairement distincte de n .

Solution de l'exercice 8

Commençons par remarquer que si $p = 2$ ou $p = 5$, Akin gagne en choisissant $a_0 = 0$. Supposons donc que p soit premier avec 10. Par petit théorème de Fermat, on sait que

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

$$\implies p \mid 10^{p-1} - 1 = (10^{\frac{p-1}{2}} - 1)(10^{\frac{p-1}{2}} + 1).$$

Ainsi, $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$. Au premier tour, Akin choisira une valeur pour a_0 , et il utilisera ensuite une stratégie miroir avec les couples :

$$\left\{1, 1 + \frac{p-1}{2}\right\}; \left\{2, 2 + \frac{p-1}{2}\right\}; \dots; \left\{\frac{p-1}{2}, p-1\right\}.$$

Premier cas : Si $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$, alors Akin peut simplement choisir $a_0 = 0$, puis à chaque fois que Baptiste choisit $a_i = x$, Akin choisit $a_j = x$, où $j = i \pm \frac{p-1}{2}$ est l'indice dans la même paire que i .

Deuxième cas : Si $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, Akin peut choisir $a_0 = 0$, puis à chaque fois que Baptiste choisit $a_i = x$, il choisit $a_j = 9 - x$, où j est l'indice miroir de i . Ce faisant, la somme finale vaudra toujours

$$M = 9 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} 10^i = 9 \cdot \frac{10^{\frac{p+1}{2}} - 10}{10 - 1} = 10^{\frac{p+1}{2}} - 10 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Solution de l'exercice 9

Montrons que Kyle possède une stratégie gagnante. Pour ce faire, nous nous intéressons aux blocs de carrés blancs consécutifs, séparés par le bord de la bande ou par des carrés noirs, que nous appellerons des *blocs*. Nous appellerons *domino* un bloc constitué de deux carrés blancs consécutifs. L'idée de la solution est que Kyle, afin de s'assurer de toujours pouvoir jouer, veut créer un maximum de dominos car Sam ne pourra jamais jouer dans ces blocs là.

Montrons donc que Kyle peut s'assurer de faire en sorte qu'il y ait au moins autant de dominos que de blocs qui sont de longueur impaire à la fin du tour de Sam. Dans un premier temps, tant qu'il peut, Kyle joue un coup de sorte à créer un nouveau domino dans un bloc de taille 4 ou ≥ 6 . Puisque 4 est pair, un tel coup n'augmente pas le nombre de blocs de taille impaire. En outre, lors de son tour, Sam ne peut pas créer plus d'un nouveau bloc de taille impaire (car si les deux nouveaux morceaux d'un bloc sont impairs après le coup de Sam, le bloc total était de longueur impaire).

Lorsque Kyle ne peut plus appliquer sa stratégie, il ne reste plus que des dominos et des blocs de taille 3 ou 5. Il lui reste simplement à remplir ses dominos. Pendant ce temps, Sam a le choix entre remplir un bloc de taille 3 ou créer un (ou deux) dominos en jouant dans un bloc de taille 5. Dans tous les cas, le nombre de dominos est toujours au moins égal au nombre de blocs de longueur impaire à la fin du tour de Sam. Si à un moment, Kyle ne peut plus jouer, c'est que Sam vient de remplir le dernier bloc de taille impaire, et Kyle a donc gagné. Sinon, il continue et Sam sera à court de coups.

Solution de l'exercice 10

Montrons que Bob possède une stratégie gagnante. Remarquons que si $n \geq 1$ est un naturel quelconque, il possède une écriture unique sous la forme $n = m^2 \cdot f$, où $m \geq 1$ et où $f \geq 1$ est squarefree (c'est-à-dire qu'il n'existe aucun nombre premier p tel que p^2 divise f). Si un tel nombre n est écrit au tableau, alors $n^k = (m^k \cdot f^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor})^2 \cdot f^\epsilon$, où $\epsilon \in \{0, 1\}$. Ainsi, Alice ne peut jamais augmenter la partie squarefree du nombre écrit au tableau. En outre, si $n = m^2 \cdot f$ est écrit au tableau, Bob peut lui enlever m^2 et obtenir $m^2 \cdot (f - 1)$.

Ainsi, Bob peut s'assurer que la partie squarefree décroisse strictement entre deux de ses coups, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 11

Il est possible d'associer à toute configuration possible un nombre naturel différent, en voyant les couleurs rouge et blanche respectivement comme des 1 et des 0 d'une écriture en base 2. Puisqu'une opération diminue strictement la valeur du nombre écrit en base 2, le jeu se termine nécessairement en un nombre fini de tours.

De plus, si l'on numérote les cartes de 1 à 2025 de gauche à droite, on remarque qu'à chaque tour, exactement une carte dont le numéro est divisible par 50 est retournée. Or, il y a 40 telles cartes, et si un joueur est à court de coups, chacune d'entre elles a dû être retournée un nombre impair de fois. Il est donc impossible que Bob soit à court de coups puisqu'il y a un nombre impair de tours qui se sont écoulés avant l'un de ses coups. Cela montre donc qu'Alice ne peut pas posséder de stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 12

<https://artofproblemsolving.com/community/c6h1771376p11625809>

<https://web.evanchen.cc/exams/sols-TST-IMO-2019.pdf>

3 Combinatoire : TD de petites Shortlists (Hadriel)

Exercices

Exercice 1

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq a_n \leq n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \binom{k}{a_k} = 2^n$

Montrer que tout entier naturel apparaît au moins une fois dans la suite.

Exercice 2

Soit S un ensemble infini d'entiers strictement positifs, tel qu'il existe $a, b, c, d \in S$ tel que $\text{pgcd}(a, b) \neq \text{pgcd}(c, d)$. Montrer qu'il existe $x, y, z \in S$ distincts tels que $\text{pgcd}(x, y) = \text{pgcd}(y, z) \neq \text{pgcd}(x, z)$

Exercice 3

Soit $n \geq 1$. Gaëtan a une ligne de $n + 1$ carrés, numérotés de 0 à n . Au début, n cailloux sont placés sur le carré 0, et tous les autres carrés sont vides. A chaque tour, Gaëtan peut choisir un carré ayant un ou plusieurs cailloux dessus. Si ce carré a k cailloux, il peut avancer un caillou de ce carré d'au plus k carrés. Son but est d'amener chaque caillou sur le n -ème carré. Montrer qu'il lui faudra au moins $\lceil \frac{n}{1} \rceil + \dots + \lceil \frac{n}{n} \rceil$ tours.

Exercice 4

Un entier $N > 0$ est dit joli si $N = 1$ ou si N s'écrit comme un produit d'un nombre pair de facteurs premiers (pas forcément distincts). Pour toute paire (a, b) d'entiers strictement positifs, on pose $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a. Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs distincts (a, b) tels que $P(1), \dots, P(50)$ sont jolis.

b. Montrer que si $P(n)$ est joli pour tout entier $n > 0$, alors $a = b$.

Exercice 5

Plusieurs entiers strictement positifs sont écrits en ligne. A chaque instant, Alice choisit deux nombres adjacents x, y tels que $x > y$ et x est à gauche de y , et remplace la paire (x, y) par $(y + 1, x)$ ou $(x - 1, x)$. Elle s'arrête si elle ne peut plus effectuer d'opérations. Montrer qu'Alice finira par s'arrêter.

Exercice 6

Soit $n > 0$. On a une balance (à comparaison, à deux plateformes) et n poids de poids respectifs $2^0, \dots, 2^{n-1}$. On place un à un tous les poids sur la balance : Le premier poids est mis sur la plateforme de gauche, puis après on choisit l'un des poids restants et on le met sur la plateforme de gauche ou de droite. Calculer le nombre de suites de placements tel qu'à chaque moment, la plateforme de droite n'est jamais plus lourde que la plateforme de gauche.

Exercice 7

La banque d'Oslo fait deux sortes de pièces différentes : des pièces en aluminium (notés A), et des pièces en cuivre (notés C). Morgane a n pièces en aluminium, et n pièces en cuivre, et arrange ses $2n$ pièces en ligne dans un ordre arbitraire. Etant donné un $k \leq 2n$, elle effectue

plusieurs fois l'opération suivante : elle identifie la plus grande sous suite de pièces consécutives contenant la k -ème pièce depuis la gauche constituée du même métal, elle prend toutes ces pièces, et elle les bouge toute à gauche de la ligne. Par exemple, si $n = 4, k = 4$, si on commence avec la configuration $AACCCACA$, on obtient successivement :

$$AACCCACA \rightarrow CCCAAACA \rightarrow AAACCCCA \rightarrow \dots$$

Trouver toutes les paires (n, k) avec $1 \leq k \leq 2n$ tel que pour toute configuration initiale, il y aura au plus une pièce en aluminium adjacente à une pièce en cuivre.

Exercice 8

Une suite ± 1 est une suite de 2022 nombres $a_1, \dots, a_{2022}$ valant tous 1 ou -1 . Déterminer le plus grand C tel que pour toute suite ± 1 , il existe un entier k et des indices $1 \leq t_1 < \dots < t_k \leq 2022$ tel que $t_{i+1} - t_i \leq 2$ pour tout i et

$$\left| \sum_{i=1}^k a_{t_i} \right| \geq C$$

Exercice 9

Calculer le nombre de permutations $a_1, \dots, a_n$ de $1, \dots, n$ tels que

$$a_1 \leq 2a_2 \leq \dots \leq na_n$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

Voir la solution dans la shortlist de 2019 : C1

Solution de l'exercice 2

C1 2021 On veut créer une situation où on a beaucoup d'égalités tout en se laissant la possibilité d'avoir des pgcd différents. On veut aussi exploiter les conditions de l'énoncé, surtout le fait que S soit infini. L'autre condition de l'énoncé assure qu'il existe un α tel qu'il existe u, v dans S tel que $\text{pgcd}(\alpha, v) \neq \text{pgcd}(\alpha, u)$, et l'infinité de s nous dit qu'il existe d entier tel que $A := \{\beta \in S \mid \text{pgcd}(\alpha, \beta) = d\}$ soit infini.

Soit $\gamma \in S \setminus (A \cup \{\alpha\})$ (qui existe grâce à la première condition sur α). Puisque A est infini, il existe d' tel que l'ensemble $B := \{\beta \in A \mid \text{pgcd}(\gamma, \beta) = d'\}$ soit infini. Prenons $\beta_1, \beta_2 \in B$. On va analyser les relations entre les pgcd qu'on peut faire avec les éléments de $\{\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma\}$.

On a plusieurs cas, selon si $d = d'$ ou non, et selon la valeur de $\text{pgcd}(\beta_1, \beta_2)$.

Cas 1 : $d = d'$.

Si $d = d'$, prendre $(\alpha, \beta_1, \gamma)$ fonctionne car $\text{pgcd}(\alpha, \gamma) \neq d$.

Cas 2 : $d' \neq d$ et $\text{pgcd}(\beta_1, \beta_2) \neq d'$.

Dans ce cas, prendre $(\gamma, \beta_1, \beta_2)$ fonctionne.

Cas 3 : $d' \neq d$ et $\text{pgcd}(\beta_1, \beta_2) = d'$.

Dans ce cas là, puisque $d' \neq d$, on a en particulier $\text{pgcd}(\beta_1, \beta_2) \neq d$, donc $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$ fonctionne.

Nous avons donc traité tous les cas, ce qui nous permet de conclure.

Solution de l'exercice 3

La condition est une somme faisant intervenir n termes fonction de k entre 1 et n . Puisqu'on a n cailloux, on peut se douter que chaque terme va correspondre à un caillou. Cette condition étant asymétrique, et l'énoncé étant pour le moment symétrique, il faut désymétriser le problème. On va donc numéroté nos cailloux de 1 à n . L'énoncé ne faisant aucune distinction entre les cailloux, on peut supposer que Gaëtan quand gaëtan bouge un caillou dans une pile, il bouge toujours le caillou ayant le plus grand numéro dans cette pile. Maintenant qu'on sait ça, on peut en déduire que le caillou k peut bouger au maximum k cases à la fois. Il faudra donc au moins $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ coups pour atteindre l'arrivée, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 4

Voir l'exercice 10 du TD arithmétique et combinatoire donné par Théo au groupe D en 2022

Solution de l'exercice 5

C1 2012 : L'idée est de trouver un monovariant approprié. On va trouver un monovariant qui augmente strictement à chaque opération. Ainsi, puisqu'il y a un nombre fini d'états possibles pour notre système, le monovariant ne pourra prendre qu'un nombre fini de valeurs et donc ne pourra pas croître infiniment. Elle devra donc s'arrêter.

Le monovariant qu'on va considérer est $S = a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$, où n est le nombre d'entiers au tableau et a_k est le k -ème entier écrit sur le tableau. Ce monovariant revient souvent et est important à retenir et à tenter quand on est face à un problème d'invariant ou de monovariant. Ce monovariant ou la somme $na_1 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$ sont utiles car elles attribuent des poids différents aux cases et donc permet de rendre compte du changement des valeurs des cases ainsi qu'un déplacement global de quantité vers la gauche ou vers la droite. Essayer d'autres poids comme 2^n peut aussi être utile desfois.

Revenons au problème. Si Alice remplace (x, y) avec $x > y$ où x était à la k -ème position par $(y + 1, x)$, alors la différence entre S après et avant l'opération est $k(y + 1) + (k + 1)x - kx - (k + 1)y = k + x - y > 0$ car $x > y$. Si Alice remplace (x, y) avec $x > y$ où x était à la k -ème position par $(x - 1, x)$, alors la différence entre S après et avant l'opération est $k(x - 1) + (k + 1)x - kx - (k + 1)y = (k + 1)(x - y) - k > 0$ car $x - y \geq 1$.

Ainsi dans tous les cas S augmente strictement. Alice finira donc par s'arrêter.

Solution de l'exercice 6

C1 2011. On remarque que le poids 1 est totalement inutile, dans le sens où si on l'oublie, les poids $2, 4, \dots, 2^{n-1}$ devront quand même suivre une configuration valide pour l'énoncé. Ainsi étant donné une configuration de $2, 4, \dots, 2^{n-1}$ valide, correspondant à une configuration de $1, 2, \dots, 2^{n-2}$ valide, on a $2n - 1$ endroits possibles où introduire le poids 1, car on peut le mettre à n'importe quel moment, sur n'importe quelle balance, sauf la balance de droite au tout début. Si on note a_n la quantité recherchée, on a la relation de récurrence $a_n = (2n - 1)a_{n-1}$. Puisque $a_1 = 1$, on a par récurrence que

$$a_n = 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)$$

On a donc trouvé la quantité recherchée

Solution de l'exercice 7

Voir la solution dans la shortlist de 2022 : C2

Solution de l'exercice 8

C1 2022 : En bidouillant un peu, on peut se convaincre que la réponse est $C = 506$. On peut

déjà montrer que on peut toujours faire au moins 506 :

On peut supposer que il y a plus de 1 que de -1 . Notre but sera donc de prendre tous les 1, et le moins de -1 possible. Ainsi dès qu'on rencontre un -1 , on le saute. On est obligés de prendre ce sur quoi on atterit en faisant comme ca. On fait potentiellement 506 sauts. Si on en fait effectivement 506, on peut pas tomber sur plus de 505 cases -1 car il y en a pas plus de 1011. Donc dans tous les cas, on prend au plus 505 cases -1 . On peut donc faire au moins $1011 - 505 = 506$.

Montrons maintenant qu'il y a une suite pénible qui fait qu'on peut pas faire mieux que 506. On prend la suite suivante :

$$-1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \dots, 1, -1, -1, 1$$

Cette suite est faite pour maximiser le nombre de retombées embetantes, car peu importe si tu choisis le camp des 1 ou des -1 , si t'en sautes un, tu retombes sur le meme. La suite etant symétrique, supposons qu'on essaye d'optimiser pour les 1. Si on prend deux ilots de deux 1 avec k ilots entres eux, On gagnera au plus $2k + 4 - (k + 1) = k + 3$. Pour maximiser, on doit prendre le plus grand k possible, 503. Ajouter le 1 tout à droite n'aide pas cas il y a un ilot de -1 entre le corps de notre selection et le 1 isolé. On peut donc faire au plus 506.

Solution de l'exercice 9

C1 2020 : La chose a voir ici est que n ne peut pas aller partout. Si n est placé à la position $k < n$, alors k est obligé d'être placé à la position n . Donc les produits ia_i pour i entre k et n sont tous égaux à kn . Ainsi $a_{n-1}(n-1) = kn$. n et $n-1$ sont premiers entres eux donc $n-1 \mid k$ donc $n-1 = k$.

Soit b_n la quantité recherchée pour n donné. Si n est placé en position n , le n n'influe pas sur le reste, et donc il y a b_{n-1} choix possibles pour le reste. Si n est placé en position $n-1$, $n-1$ doit être placé en position n . n et $n-1$ sont donc placés au bout et n'influent pas sur le reste du placement. Il y a donc b_{n-2} choix dans ce cas. Finalement,

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$$

Puisque $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, b_n est le n -eme terme de la suite de fibonacci! On a donc trouvé la réponse au problème.

4 Géométrie : TD de petites Shortlists (Akin)

Le but de ce TD est d'apprendre à mettre en jeu des outils élémentaires pour résoudre des exercices de géométrie de niveau P1-P4 IMO.

Exercices

Exercice 1 (BXMO 2021 P3)

Un quadrilatère $ABXC$ est inscrit dans un cercle de centre O . Soit D un point sur la droite BX tel que $AD = BD$. Soit E un point sur la droite CX tel que $AE = CE$. Prouver que le centre du cercle circonscrit du triangle DEX appartient à la médiatrice de OA .

Exercice 2

Soit ABC un triangle et I le centre du cercle inscrit. On note D et E les pieds des bissectrices issues de B et C . Soit X l'intersection des symétriques de (AB) et (AC) par rapport à (CE) et (BD) . Montrer que les droites (XI) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 3 (IMO 2018 P1)

Soit Γ le cercle circonscrit à un triangle acutangle ABC . Les points D et E sont situés respectivement sur les segments AB et AC de sorte que $AD = AE$. Les médiatrices de BD et CE coupent respectivement les arcs mineurs AB et AC de Γ en F et G . Prouver que les droites DE et FG sont parallèles ou confondues.

Exercice 4 (USA TSTST 2021 P1)

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O . Les points X et Y appartiennent respectivement aux côtés AB et CD . On suppose que les cercles circonscrits à ADX et BCY coupent à nouveau la droite XY en P et Q respectivement. Montrer que $OP = OQ$.

Exercice 5 (IMO SL 2021 G1)

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC = BC$. Un point P est choisi sur la droite AB de sorte que A, B et P soient alignés dans cet ordre. Le cercle circonscrit à ACD recoupe le segment PD en Q . Le cercle circonscrit au triangle APQ coupe le segment PC en R . Prouver que les droites CD, AQ et BR sont concourantes.

Exercice 6 (USA TSTST 2023 P1)

Soit ABC un triangle de centre de gravité G . Les points R et S sont choisis respectivement sur les demi-droites GB et GC de sorte que

$$\angle ABS = \angle ACR = 180^\circ - \angle BGC.$$

Prouver que $\angle RAS + \angle BAC = \angle BGC$.

Exercice 7 (IMO SL 2022 G2)

Dans un triangle acutangle ABC , soit F le pied de la hauteur issue de A , et P un point du segment AF . Les droites passant par P parallèles à AC et AB coupent BC en D et E respectivement. Les points $X \neq A$ et $Y \neq A$ appartiennent respectivement aux cercles ABD et ACE de sorte que $DA = DX$ et $EA = EY$. Prouver que B, C, X et Y sont cocycliques.

Exercice 8 (IMO 2017 P4)

Soient R et S deux points distincts d'un cercle Ω tels que RS ne soit pas un diamètre. Soit ℓ la tangente à Ω en R . Un point T est choisi de sorte que S soit le milieu du segment RT . Un point J est choisi sur l'arc mineur RS de Ω de sorte que le cercle circonscrit Γ au triangle JST coupe ℓ en deux points distincts. Soit A le point d'intersection de Γ et ℓ le plus proche de R . La droite AJ recoupe Ω en K . Prouver que la droite KT est tangente à Γ .

Exercice 9 (IMO SL 2023 G1)

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$. On suppose que le milieu de CD est le centre du cercle circonscrit du triangle ABE . Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ACD . Prouver que la droite AO passe par le milieu du segment BE .

Exercice 10 (IMO 2012 P1)

Soit ABC un triangle et J le centre du cercle A -exinscrit. Ce cercle exinscrit est tangent au côté BC en M , et aux droites AB et AC en K et L respectivement. Les droites LM et BJ se coupent en F , et les droites KM et CJ se coupent en G . Soit S l'intersection des droites AF et BC , et T l'intersection des droites AG et BC . Prouver que M est le milieu de ST .

Exercice 11 (IMO 2009 P2)

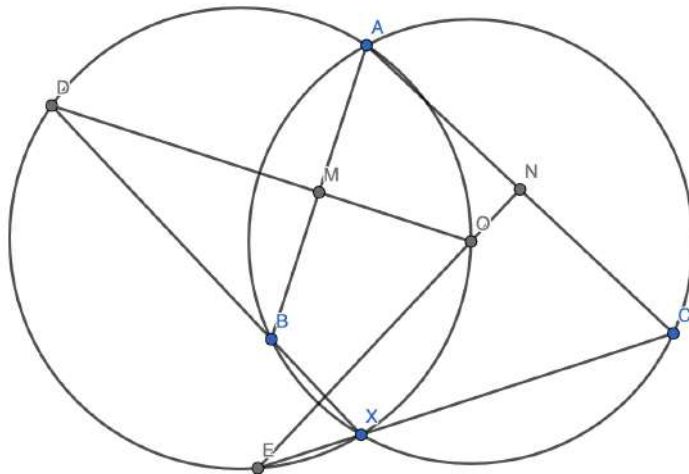
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de centre O . Les points P et Q sont situés sur les segments CA et AB respectivement. Soient K, L, M les milieux respectifs des segments BP, CQ et PQ , et soit Γ le cercle passant par K, L et M . On suppose que la droite PQ est tangente à Γ . Prouver que $OP = OQ$.

Exercice 12 (IMO 2023 SL G3)

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique tel que $\angle BAD < \angle ADC$. Soit M le milieu de l'arc CD ne contenant pas A . On suppose qu'il existe un point P à l'intérieur de $ABCD$ tel que $\angle ADB = \angle CPD$ et $\angle ADP = \angle PCB$. Prouver que les droites AD, PM et BC sont concourantes.

Solutions

Solution de l'exercice 1



Soient M et N les milieux des côtés AB et AC respectivement, de sorte que les droites (DM) et (EN) soient respectivement les médiatrices des segments AB et AC et se coupent en O .

On a

$$\widehat{DOE} = 180 - \widehat{MON} = \widehat{BAC} = 180 - \widehat{BXC} = \widehat{DXE},$$

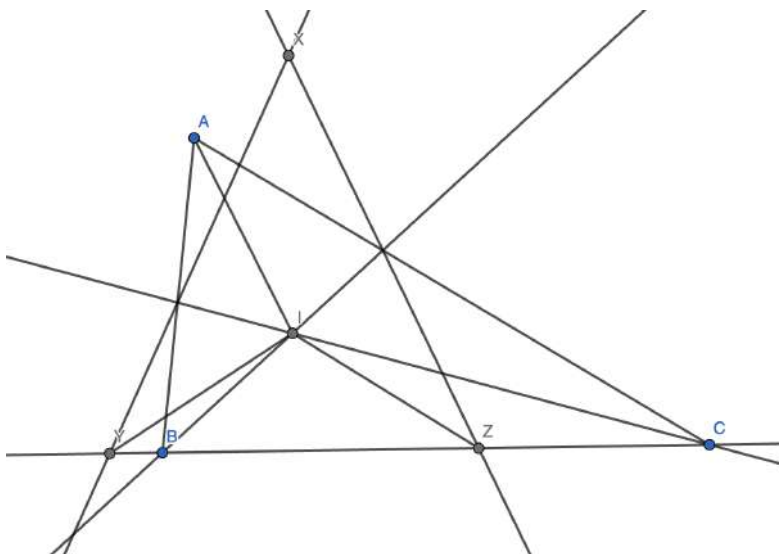
où la deuxième égalité découle du fait que A, M, O et N appartiennent au cercle de diamètre AO . Cela implique que le point O appartient au cercle circonscrit du triangle DEX .

De plus, on a les égalités $\widehat{ABD} = 180 - \widehat{ABX} = \widehat{ACE}$, $DB = DA$ et $EC = EA$, de sorte que les triangles DBA et ECA soient deux triangles isocèles semblables. Nous avons dès lors

$$\widehat{XDA} = \widehat{BDA} = \widehat{CEA} = \widehat{XEA}.$$

Il en découle que le point A se trouve également sur le cercle passant par les points D, E et X . Finalement, les points D, E, X, O et A sont cocycliques, et le centre du cercle circonscrit au triangle DEX se situe donc naturellement sur la médiatrice du segment OA . $\square$

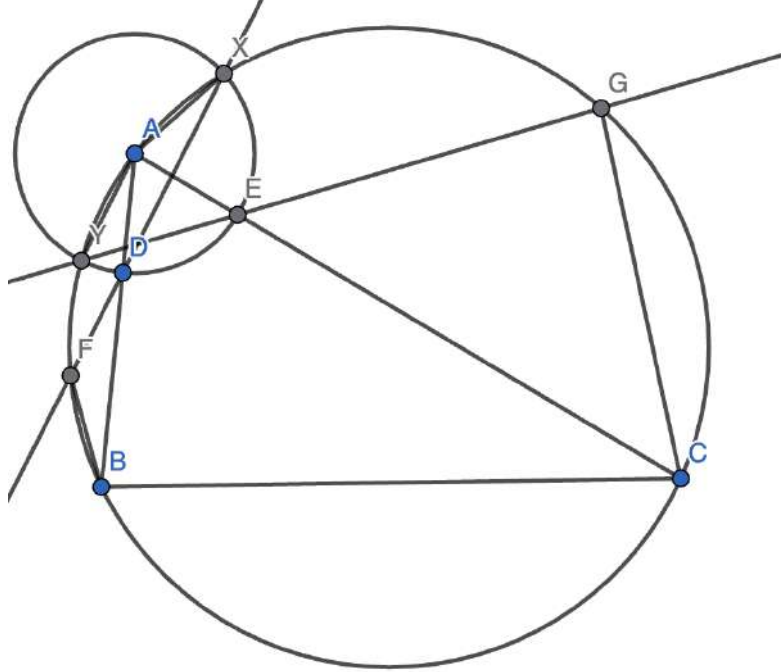
Solution de l'exercice 2



Supposons que les symétriques de (AB) et (AC) par rapport à (CE) et (BD) coupent la droite (BC) aux points Y et Z , respectivement. Par symétrie par rapport à la droite (CE) , on a $\widehat{XYZ} = \widehat{BAC}$ et $IA = IY$. De même, on trouve $\widehat{XZY} = \widehat{BAC}$ et $IA = IZ$, de sorte que $XY = XZ$ et $IY = IZ$. La droite (XI) est donc la médiatrice de YZ et est perpendiculaire à la droite $(YZ) = (BC)$. $\square$

Solution de l'exercice 3

Supposons que les droites (FD) et (GE) recoupent Γ aux points X et Y , respectivement. On a $\widehat{AXD} = \widehat{AXF} = \widehat{ABF} = \widehat{DBF} = \widehat{FDB} = \widehat{ADX}$, donc $AD = AX$. De même, $AY = AE$. Nous avons dès lors $AD = AE = AX = AY$, de sorte que D, E, X et Y soient cocycliques et appartiennent à un cercle de centre A .

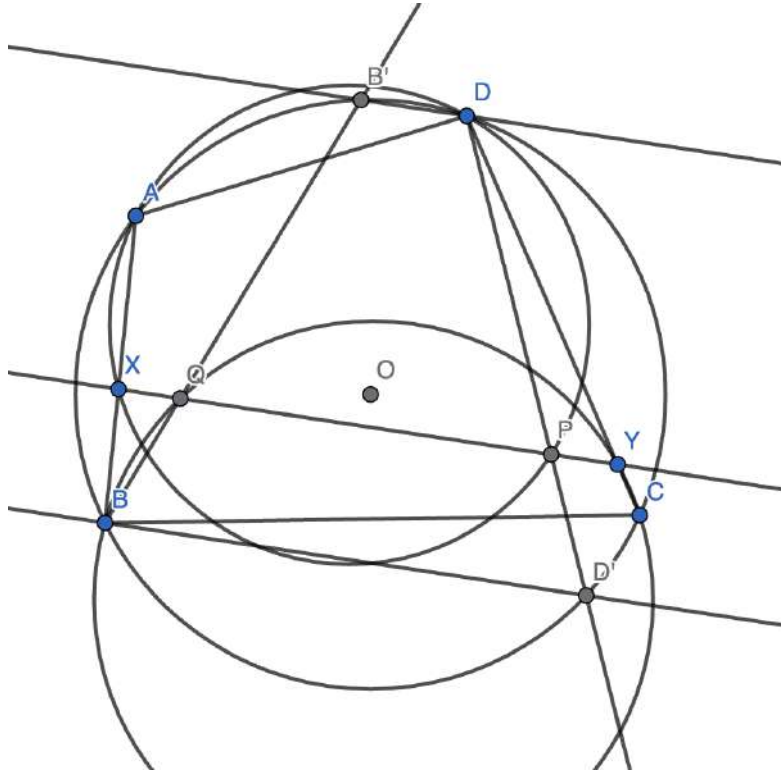


Finalement,

$$\widehat{YGF} = \widehat{YXF} = \widehat{YXD} = \widehat{YED},$$

donc les droites (DE) et (FG) sont bel et bien parallèles. $\square$

Solution de l'exercice 4

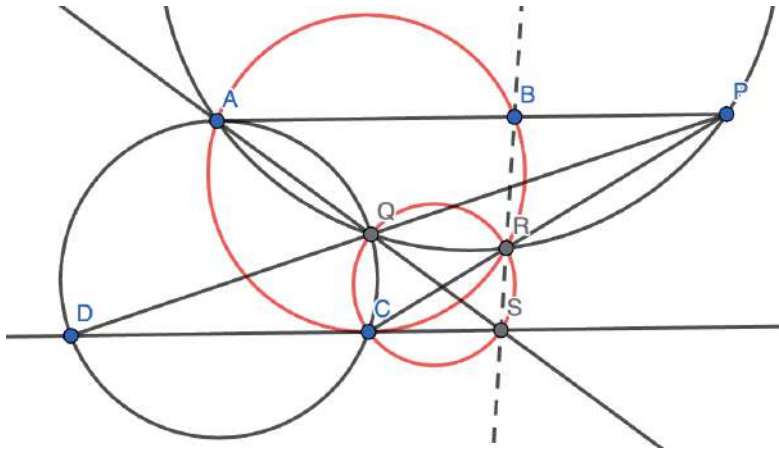


Supposons que les droites (BQ) et (DP) recoupent le cercle circonscrit à $ABCD$ aux points B' et D' , respectivement. On a

$$\widehat{AXP} = 180 - \widehat{ADP} = 180 - \widehat{ADD'} = \widehat{ABD'},$$

donc les droites (BD') et $(XP) = (PQ)$ sont parallèles. De même, les droites (DB') et (PQ) sont parallèles. Ainsi, le trapèze $BD'DB'$ est inscrit dans un cercle et est donc isocèle. Par symétrie, les médiatrices de BD' , DB' et PQ sont confondues et passent donc toutes les trois par le point O . Il en découle que $OP = OQ$. $\square$

Solution de l'exercice 5



On a $\widehat{ARC} = 180 - \widehat{ARP} = 180 - \widehat{AQP} = \widehat{AQD} = \widehat{ACD} = \widehat{CAB} = \widehat{ABC}$. Les points A, B, C et R sont donc cocycliques. Supposons que les droites (AQ) et (CD) se rencontrent au point S . Nous avons les égalités

$$\widehat{CRQ} = 180 - \widehat{QRP} = \widehat{QAP} = \widehat{SAP} = \widehat{CSA} = \widehat{CSQ},$$

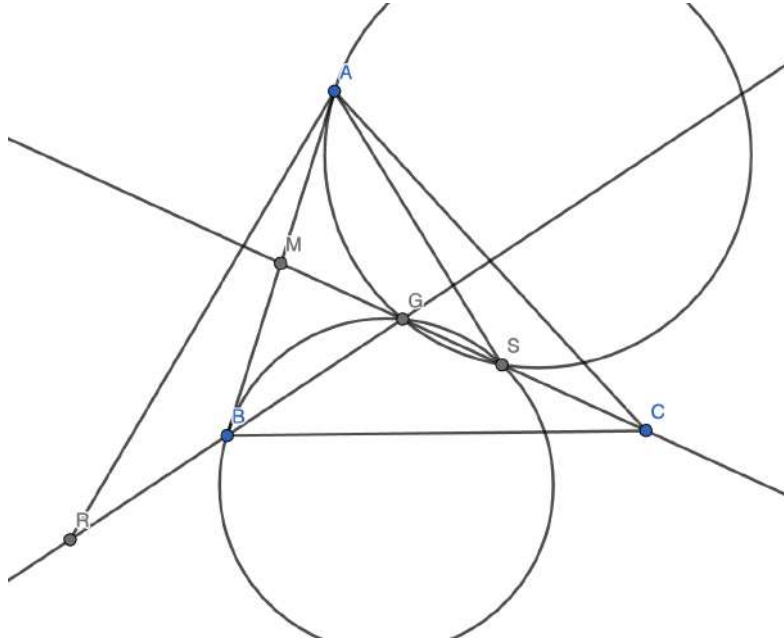
de sorte que les points C, Q, R et S soient cocycliques. Finalement,

$$\widehat{CRS} = \widehat{CQS} = 180 - \widehat{AQC} = \widehat{ADC} = \widehat{CBA} = \widehat{CAB} = 180 - \widehat{CRB}.$$

Il en découle que $S \in (BR)$, et les droites (AQ) , (CD) et (BR) sont bel et bien concourantes.

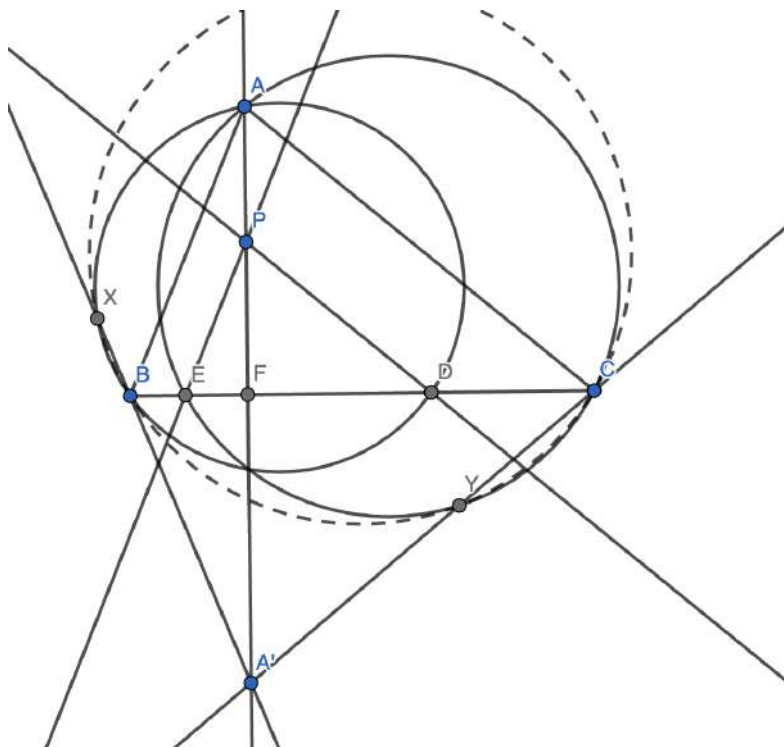
□

Solution de l'exercice 6



L'égalité d'angle $\widehat{ABS} = 180 - \widehat{BGS}$ nous informe que la droite (AB) est tangente au cercle circonscrit du triangle BGS , d'après la réciproque du théorème de l'angle tangentiel. Ainsi, si M désigne le milieu du segment AB , on a par puissance d'un point : $MA^2 = MB^2 = MG \times MS$, de sorte que (AB) soit également tangente au cercle circonscrit du triangle (AGS) . Il vient alors, par angle tangentiel, $\widehat{BAS} = \widehat{MAS} = 180 - \widehat{AGC}$. Par symétrie des rôles, on trouve aussi $\widehat{CAR} = 180 - \widehat{AGB}$, d'où $\widehat{RAS} + \widehat{BAC} = \widehat{BAS} + \widehat{CAR} = 360 - \widehat{AGC} - \widehat{AGB} = \widehat{BGC}$, comme attendu. $\square$

Solution de l'exercice 7

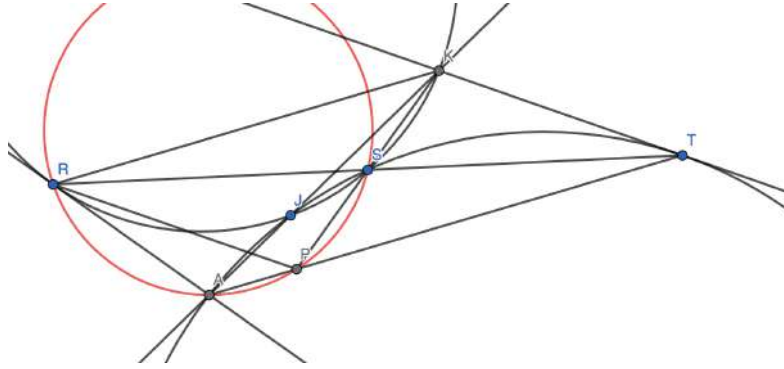


D'après le théorème du pôle sud/nord, les droites (BX) et (BA) sont symétriques par rapport à (BC) , et il en va de même pour les droites (CY) et (CA) . Ainsi, les droites (BX) et (CY) se coupent au symétrique de A par rapport à BC . Notons le A' . On remarque que, d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{FE}{FB} = \frac{FP}{FA} = \frac{FD}{FC},$$

d'où l'on tire l'égalité $FE \times FC = FD \times FB$. Autrement dit, F a la même puissance par rapport aux cercles (BAD) et (CAE) . Puisque A a également cette propriété, nous savons que la droite (AF) est l'axe radical de ces deux cercles. Le point A' se situant sur cet axe, il a la même puissance par rapport aux deux cercles. Il vient alors $A'B \times A'X = A'C \times A'Y$, donc les points B, X, C et Y sont effectivement cocycliques par puissance d'un point. $\square$

Solution de l'exercice 8



Remarquons que $\widehat{RKA} = \widehat{RKJ} = \widehat{RSJ} = 180 - \widehat{JST} = \widehat{JAT} = \widehat{KAT}$, donc les droites (RK) et (AT) sont parallèles. Dès lors, puisque S est le milieu de RT , si P désigne l'intersection des droites (KS) et (AT) , alors $KTPR$ est un parallélogramme. Nous avons d'une part

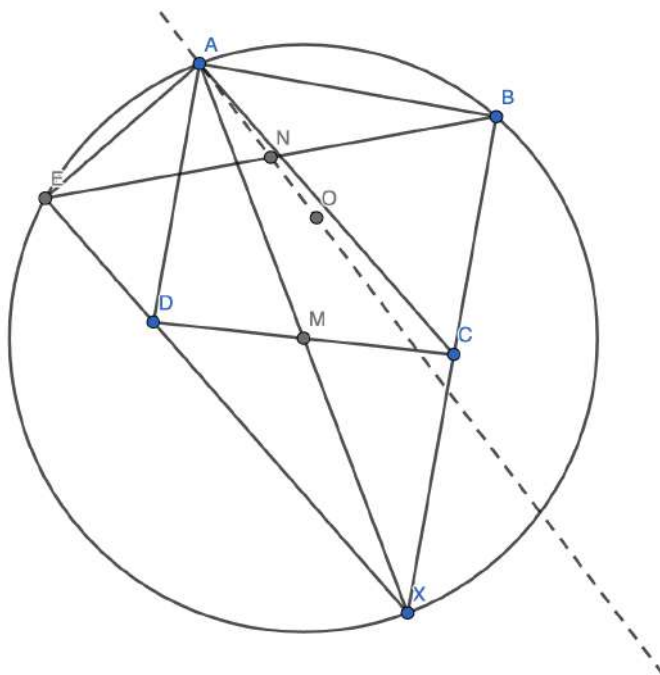
$$\widehat{ARS} = \widehat{RKS} = \widehat{KPT} = 180 - \widehat{SPA},$$

de sorte que les points R, S, P et A soient cocycliques. D'autre part, on a

$$\widehat{SAT} = \widehat{SAP} = \widehat{SRP} = \widehat{TRP} = \widehat{KTS}.$$

Dès lors, d'après la réciproque du théorème de l'angle tangentiel, la droite (KT) est tangente à Γ . $\square$

Solution de l'exercice 9

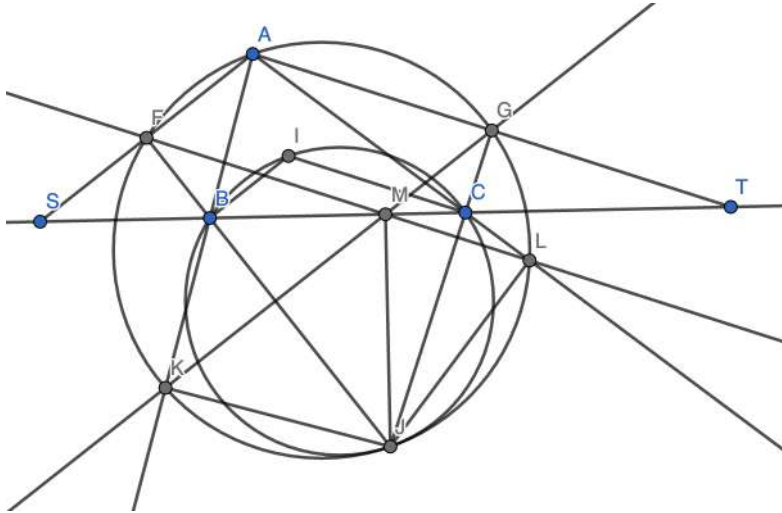


Soit X l'intersection des droites (ED) et (BC) . Les points A, E, X et B sont cocycliques sur un cercle de diamètre AX . Ainsi, le centre du cercle circonscrit du triangle ABE est le milieu du segment AX . Il en découle que les segments AX et CD partagent le même milieu, donc le quadrilatère $ADXC$ est un parallélogramme. On a les égalités $\widehat{AEB} = \widehat{AXB} = \widehat{CXA}$ et $\widehat{ABE} = \widehat{AXE} = \widehat{CAX}$. Les triangles AEB et CXA sont donc semblables. En particulier, si l'on note M le milieu des segments CD et AX et N le milieu du segment BE , les triangles EAN et XCM sont semblables. Il vient ensuite

$$\widehat{DAN} = \widehat{EAN} - \widehat{EAD} = \widehat{XCM} - (90 - \widehat{EDA}) = \widehat{XCD} - (90 - \widehat{CXD}) = 90 - \widehat{XDC} = 90 - \widehat{ACD}$$

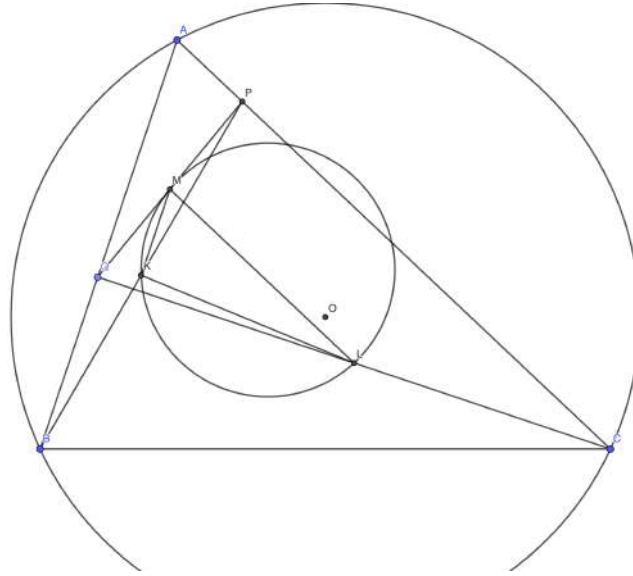
En outre, puisque le triangle AOD est isocèle, on a $\widehat{DAO} = \frac{180 - \widehat{AOD}}{2} = 90 - \widehat{ACD}$, où la dernière égalité découle du théorème de l'angle au centre. Les points A, N et O sont donc alignés, comme attendu. $\square$

Solution de l'exercice 10



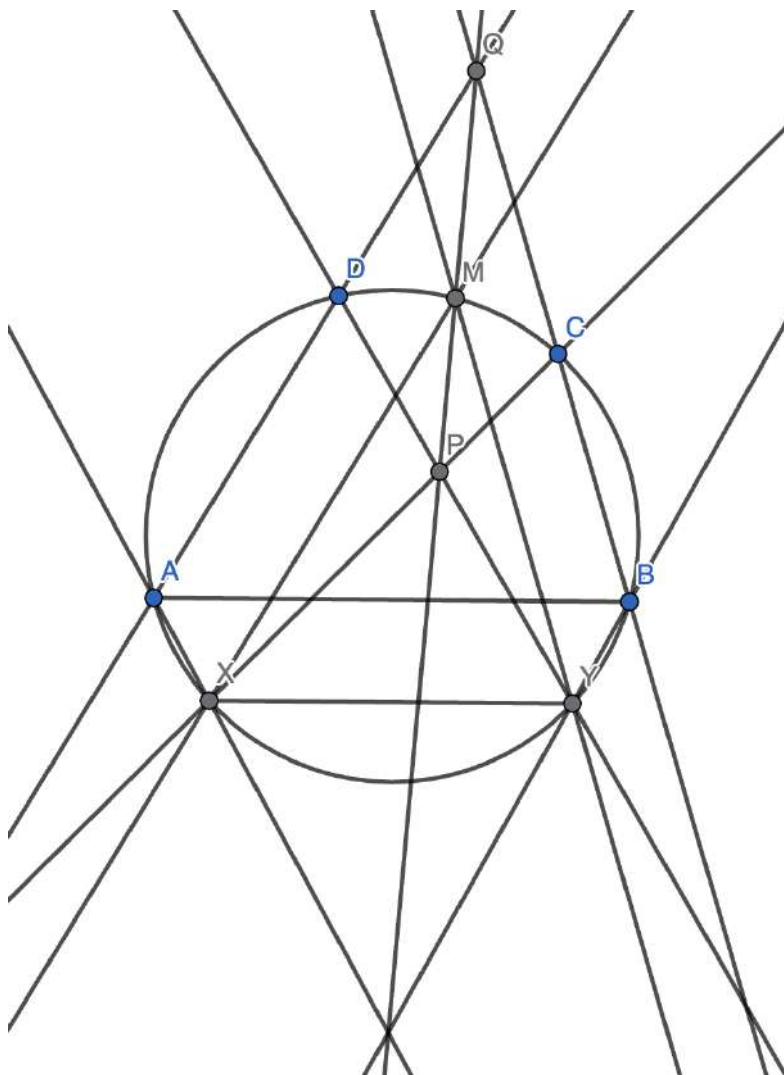
Soit I le centre du cercle inscrit à ABC . De l'égalité de longueur $CL = CM$ on tire $\widehat{ALF} = \widehat{CLM} = \frac{\widehat{ACB}}{2} = \widehat{ICB} = \widehat{IJB} = \widehat{AJF}$, où l'avant dernière égalité découle du fait que les points B, I, C et J sont cocycliques. Dès lors, les points A, F, J et L sont cocycliques. Puisque l'angle $\widehat{ALJ}$ est droit, l'angle $\widehat{AFJ}$ est également droit. Cependant, les droites (BC) et (AB) sont symétriques par rapport à la droite (BJ) , donc cette symétrie échange également les points A et S . Puisqu'elle échange les points M et K , on a $MS = AK$. Par symétrie des rôles, on trouve $MT = AL$, d'où l'on tire effectivement $MS = MT$ puisque $AK = AL$. Cela conclut. $\square$

Solution de l'exercice 11



Premièrement, on remarque que MK et LM sont parallèles à AB et AC respectivement (droite des milieux). Dès lors, la condition de tangence implique, par angles tangentiels, $\angle MLK = \angle QMK = \angle AQP$ et $\angle MKL = \angle PML = \angle APQ$, de sorte que $\triangle APQ \sim \triangle MKL$. En particulier, on a $\frac{AQ}{ML} = \frac{AP}{MK}$, puis $\frac{AQ}{PC} = \frac{AP}{QB}$. Il en découle que $AQ \times QB = AP \times PC$, c'est-à-dire que P et Q ont la même puissance par rapport à (ABC) . Ainsi, $OP = OQ$, comme attendu. $\square$

Solution de l'exercice 12



Supposons que les droites (CP) et (DP) recoupent le cercle $(ABCD)$ aux points X et Y . L'égalité d'angle $\widehat{ADP} = \widehat{PCB}$ nous informe, d'après le théorème de l'angle inscrit, que les droites (XY) et (AB) sont parallèles. Ensuite, toujours par angle inscrit, on a

$$\widehat{ADB} = \widehat{CPD} = \widehat{YCX} + \widehat{CYD}.$$

En soustrayant $\widehat{YCX}$ des deux côtés, et en tenant compte des égalités $BY = AX$ et $CM = MD$, on trouve $BY = AX = CM = MD$.

Ainsi, les triangles YPX et BMA ont leurs côtés parallèles : les droites (AX) , (BY) et (MP) sont donc concourantes (au centre de l'homothétie envoyant YPX sur BMA).

D'autre part, si Q désigne l'intersection des droites (AD) et (BC) , les triangles BQA et YMX ont leurs côtés parallèles : les droites (AX) , (BY) et (QM) sont donc concourantes.

Finalement, les points Q, M, P et $(AX) \cap (BY)$ sont alignés, d'où la conclusion. $\square$

5 Géométrie : Milieux (Auguste et Melvil)

Ce cours reprend celui donné par Martin Rakowsky en 2021.

Partie théorique

Une part non négligeable des problèmes de géométrie fait intervenir d'une façon ou d'une autre les milieux d'un segment. Soit le milieu est déjà défini dans la figure, soit une partie du problème consiste à montrer qu'un point est un milieu. Le problème des milieux de segment est qu'ils fournissent rarement une hypothèse sur les angles, on ne peut donc pas l'utiliser dans une chasse aux angles par exemple. Le but de ce cours est d'étudier différents réflexes qui peuvent être utiles pour "intégrer" un milieu de segment dans une figure ou pour montrer que tel point est milieu d'un segment. Il ne s'agit pas d'établir une méthode infaillible, mais juste de voir quelques idées qui peuvent s'avérer utiles. Il est impensable de vouloir résoudre un problème de géométrie faisant intervenir un milieu si l'on n'a pas bien interprété ce milieu.

Lorsqu'un milieu se trouve déjà placé dans une figure, on a plusieurs façons de l'interpréter :

1. Par une égalité de longueurs, tout simplement : l'égalité de longueur peut permettre de trouver des triangles isométriques ou semblables, ce qui donne directement une bonne égalité d'angle.
2. Introduire d'autres milieux : Introduire d'autres milieux peut permettre d'obtenir des droites parallèles ou des triangles semblables et donc des angles et des égalités de rapports. De manière générale, si on est en présence d'une condition sur des longueurs, il peut être utile d'introduire d'autres points bien choisis satisfaisant les mêmes conditions.
3. Compléter un parallélogramme : Ce qu'il y a de génial avec un parallélogramme, c'est qu'on a plein d'égalités d'angles et de longueur (c'est d'ailleurs aussi ce qu'il y a d'embêtant avec un parallélogramme). Lorsqu'on a un point milieu de segment, introduire un autre segment dont ce point est aussi un milieu donne un beau parallélogramme et transforme donc l'hypothèse "M est le milieu d'un segment" en une égalité d'angle, un parallélisme, etc...

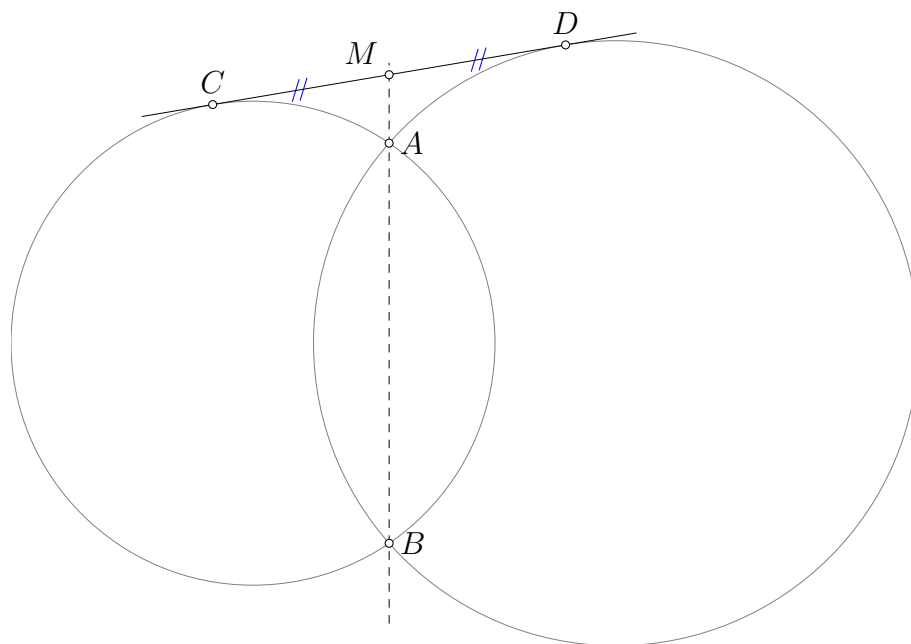
La liste ci-dessus n'est évidemment pas exhaustive. La façon d'utiliser un milieu dépend avant tout de la figure imposée.

Si le but du problème est de montrer que tel point est un milieu, on peut adapter les idées précédentes : tout bêtement essayer de montrer une égalité de longueur, introduire d'autres milieux pourrait aussi aider ou encore montrer que le point en question est intersection des diagonales d'un parallélogramme peut se montrer très efficace. Une autre idée très efficace est de faire intervenir des axes radicaux à l'aide de la propriété suivante :

Lemme 1 (Lemme des axes radicaux).

Soient deux cercles k_1 et k_2 se coupant en deux points A et B . Une tangente extérieure commune aux 2 cercles touche k_1 en C et k_2 en D . Alors (AB) coupe $[CD]$ en son milieu.

Démonstration :



La droite (AB) est l'axe radical des deux cercles donc le point d'intersection M de la droite (AB) avec la droite (CD) vérifie $CM^2 = DM^2$, ce qui signifie bien que le point M est le milieu du segment $[CD]$.

Transformer la figure pour aboutir à cette configuration peut s'avérer très efficace. La meilleure façon de savoir utiliser des milieux reste avant tout de pratiquer.

Exercices :

Echauffement

Exercice 1

Soit ABC un triangle avec $AB = 3BC$. Les points P et Q sont sur le segment $[AB]$ avec $AP = PQ = QB$. Soit M le milieu de $[AC]$. Montrer que $\widehat{PMQ} = 90^\circ$.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit P à l'intérieur du parallélogramme tel que $CP = BC$. On note M et N les milieux respectifs de $[AP]$ et $[CD]$. Montrer que les droites (MN) et (BP) sont perpendiculaires.

Exercice 3

(Autriche MO 2019) Soit $ABCD$ un carré et S un point à l'extérieur de $ABCD$ tel que le triangle BCS est équilatéral. Soit N le milieu du segment $[AS]$ et soit H le milieu du segment $[CD]$. Montrer que $\widehat{NHC} = 60^\circ$.

Exercice 4 (Poly russe 4.1.7)

Soit ABC un triangle et D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement. Montrer que le symétrique de D par rapport à (AB) appartient à (EF) .

Après l'échauffement

Exercice 5 (British MO 2018 round 2)

Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[AC]$. Le cercle tangent au segment $[BC]$ au point B et passant par le point M recoupe la droite (AB) au point P . Montrer que $AB \cdot BP = 2BM^2$.

Exercice 6 (Caucase MO 2018)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $\widehat{BCD} = 90^\circ$. Soit E le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $2EC \leq AD + BD$.

Exercice 7 (BXMO 2020)

Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit ω_A le cercle passant par les points A et B tangent à la droite (BC) au point B . Soit ω_C le cercle passant par les points C et B tangent à la droite (AB) au point B . Les cercles ω_A et ω_C se recoupent au point D . Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit E le point d'intersection de la droite (MD) avec la droite (AC) . Montrer que le point E appartient au cercle ω_A .

Exercice 8 (Math Beyond limits 2018)

Soit ABC un triangle d'orthocentre H . On note D, E, F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C . La parallèle à la droite (AC) passant par le point B coupe la droite (EF) au point X . Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{ACM} = \widehat{XDB}$.

Sprint

Exercice 9 (PAMO 2017 P6)

Soit ABC un triangle d'orthocentre H . Le cercle de diamètre $[AC]$ recoupe le cercle circonscrit au triangle ABH au point K . Montrer que la droite (CK) coupe le segment $[BH]$ en son milieu.

Exercice 10 (JBMO 2013)

Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$ et soit O le centre de son cercle circonscrit k . Soit D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit E le second point d'intersection du cercle k avec la droite (AD) . Soient M, N et P les milieux respectifs des segments $[BE], [OD]$ et $[AC]$. Montrez que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 11 (IMO SL 2015 G1)

Soit ABC un triangle d'orthocentre H et soit G le point tel que le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme. Soit I le point de la droite (GH) tel que la droite (AC) coupe le segment $[HI]$ en son milieu. La droite (AC) recoupe le cercle circonscrit du triangle GCI au point J . Montrer que $IJ = AH$.

Exercice 12 (IMO SL 2007 G2)

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$. Le milieu du segment $[BC]$ est noté M . Soit X un point variable du plus petit arc AM du cercle circonscrit au triangle ABM . Soit T le point du même côté de la droite (BM) que le point X mais dans l'autre demi-plan délimité par la

droite (AM) que le point X et tel que $TX = BX$ et tel que l'angle $\widehat{TMX}$ est droit. Montrer que la valeur de $\widehat{MTB} - \widehat{CTM}$ ne dépend pas du choix de X .

Exercice 13 (IMO 2017 P4)

Soit R et S des points différents sur un cercle Ω tels que RS ne soit pas un diamètre. Soit l la tangente à Ω passant par R . Le point T est tel que S est le milieu du segment RT . J est un point du petit arc RS de Ω tel que le cercle Γ circonscrit au triangle JST , intersecte l en deux points distincts. Soit A , l'intersection entre Γ et l , qui est la plus proche de R . La droite AJ rencontre le cercle Ω une nouvelle fois en K . Montrer que la droite KT est tangente à Γ .

Exercice 14 (IMO 2009 P2)

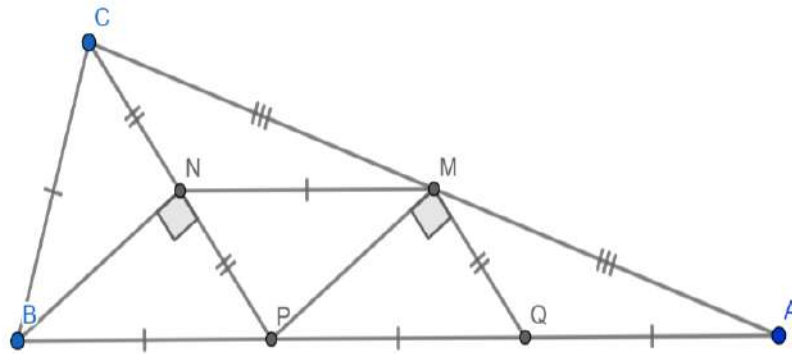
Soit ABC un triangle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Les points P et Q sont situés sur les segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Soient K, L et M les milieux respectifs des segments $[BP]$, $[CQ]$ et $[PQ]$. Soit k le cercle passant par les points K, L et M . On suppose que la droite (PQ) est tangente au cercle k . Montrer que $OP = OQ$.

Solutions

Exercice 1

Soit ABC un triangle avec $AB = 3BC$. Les points P et Q sont sur le segment $[AB]$ avec $AP = PQ = QB$. Soit M le milieu de $[AC]$. Montrer que $\widehat{PMQ} = 90^\circ$.

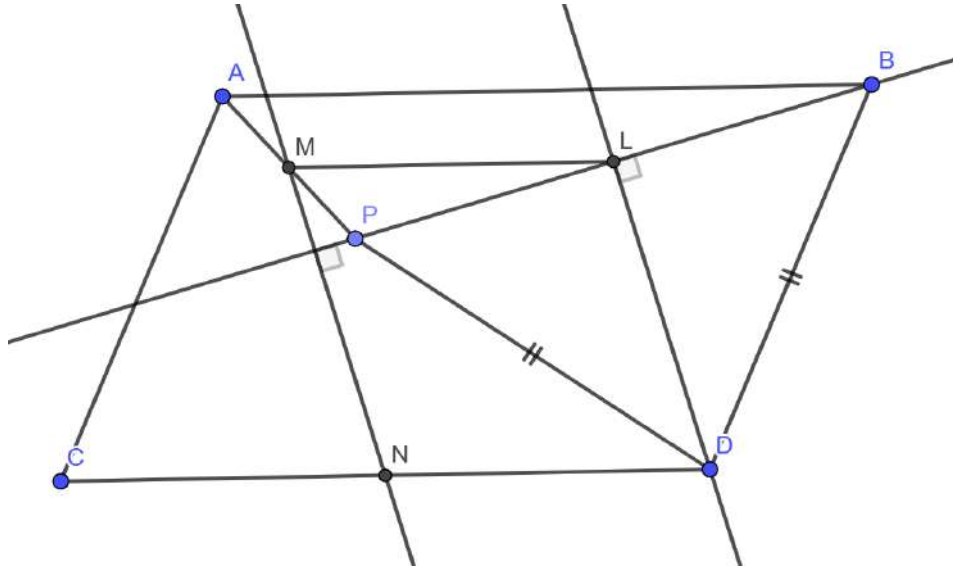
Solution de l'exercice 1



Pour exploiter pleinement nos nombreux milieux, on en introduit un dernier : soit N le milieu de $[CP]$. D'abord d'après le théorème des milieux, on a $(MQ) \parallel (CP)$, et $(NM) \parallel (PA)$ avec $NM = \frac{1}{2}PA = BP$. Les segments $[BP]$ et $[NM]$ sont donc à la fois parallèles et de même longueur, c'est que $NMPB$ est un parallélogramme. Dès lors $(PM) \parallel (BN)$ et comme $(MQ) \parallel (CP)$, il suffit de démontrer que $(BN) \perp (NP)$, ce qui est vrai car CBP est isocèle en B .

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit P à l'intérieur du parallélogramme tel que $CP = BC$. On note M et N les milieux respectifs de $[AP]$ et $[CD]$. Montrer que les droites (MN) et (BP) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 2

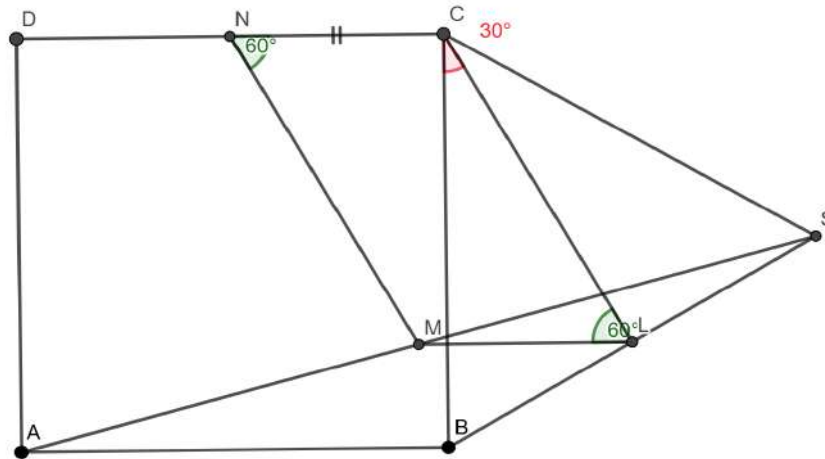
Introduire le milieu L de $[PB]$ présente deux intérêts :

1. le triangle PBD est isocèle en B donc la droite (LD) est perpendiculaire à (PB) . L'énoncé devient alors, "montrer que (MN) est parallèle à (LD) ".
2. On peut désormais faire apparaître une droite des milieux : (ML) est parallèle à (AB) donc aussi à (ND) et $ML = \frac{AB}{2} = ND$.

Conclusion, $MLDN$ est un parallélogramme donc (MN) est parallèle à (ND) .

Exercice 3

(Autriche MO 2019) Soit $ABCD$ un carré et S un point à l'extérieur de $ABCD$ tel que le triangle BCS est équilatéral. Soit N le milieu du segment $[AS]$ et soit H le milieu du segment $[CD]$. Montrer que $\widehat{NHC} = 60^\circ$.

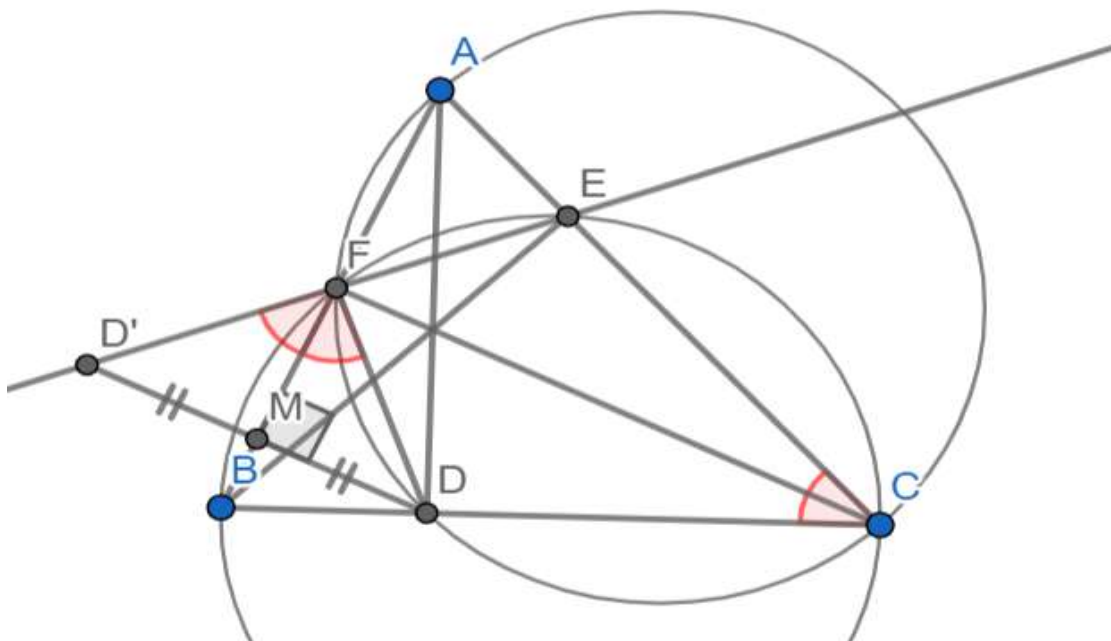
Solution de l'exercice 3

Les deux milieux de notre exercice sont isolés, pour les rendre cohérents, on choisit d'introduire le milieu L de $[BS]$. D'après le théorème de la droite des milieux, (ML) est parallèle à (AB) donc aussi à (NC) et $ML = \frac{AB}{2} = NC$. Ainsi, le quadrilatère $NCLM$ est un parallélogramme donc

$$\widehat{MNC} = \widehat{CML} = 90 - \widehat{BCL} = 90 - 30 = 60$$

Exercice 4 (Poly russe 4.1.7)

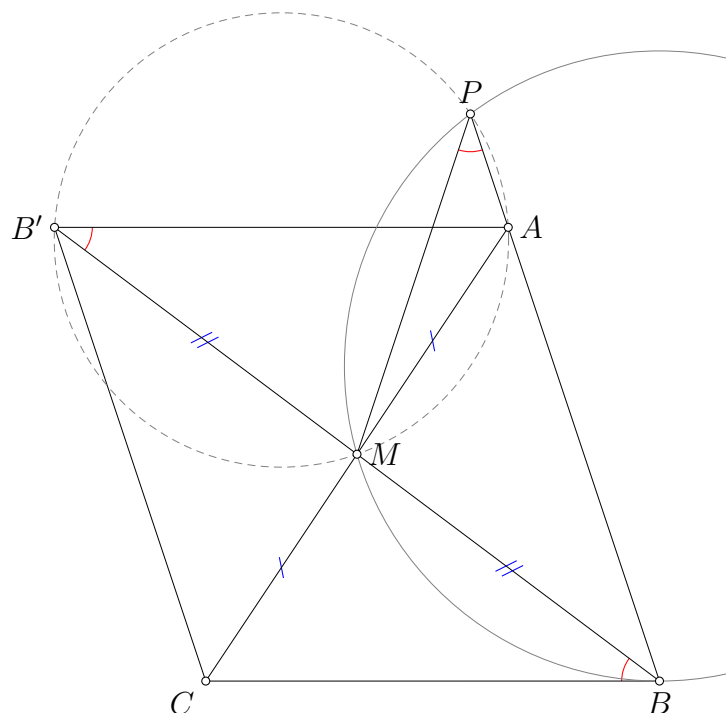
Soit ABC un triangle et D , E et F les pieds des hauteurs issues de A , B et C respectivement. Montrer que le symétrique de D par rapport à (AB) appartient à (EF) .

Solution de l'exercice 4

Soit M et D' les intersections de la perpendiculaire à (AB) passant par D avec (AB) et (EF) . Il s'agit de démontrer que D' est le symétrique de D par rapport à (AB) , donc que M est le milieu de $[D'D]$. Il est clair que les quadrilatères $AFDC$ et $CBFE$ sont cycliques (cercles de diamètre $[AC]$ et $[BC]$). Par angle inscrit, on obtient $\widehat{D'FB} = \widehat{ECB} = \widehat{BFD}$. Dès lors (FM) est à la fois la bissectrice et la hauteur issue de F dans le triangle $D'FD$, donc il s'agit également de la médiane et M est le milieu de $[D'D]$.

Exercice 5

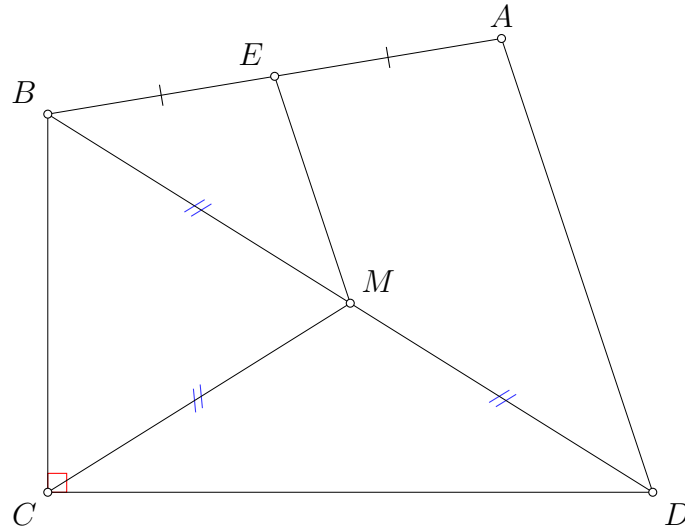
(British MO 2018 round 2) Soit ABC un triangle et soit M le milieu du segment $[AC]$. Le cercle tangent au segment $[BC]$ au point B et passant par le point M recoupe la droite (AB) au point P . Montrer que $AB \cdot BP = 2BM^2$.

Solution de l'exercice 5

L'égalité à démontrer fait penser à la puissance d'un point, à ceci près qu'il y a un facteur 2 gênant. C'est ce qui nous motive à introduire le point B' tel que le quadrilatère $ABCB'$ soit un parallélogramme. L'égalité à montrer devient $AB \cdot BP = BM \cdot BB'$, c'est-à-dire que l'on doit montrer que les points M, A, P et B' sont cocycliques. Or le cercle circonscrit au triangle MPB est tangent au segment $[BC]$ donc $\widehat{MPA} = \widehat{MPB} = \widehat{MBC} = \widehat{MB'A}$ ce qui montre bien que les points B', M, A et P sont cocycliques.

Exercice 6

(Caucase MO 2018) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $\widehat{BCD} = 90^\circ$. Soit E le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $2EC \leq AD + BD$.

Solution de l'exercice 6

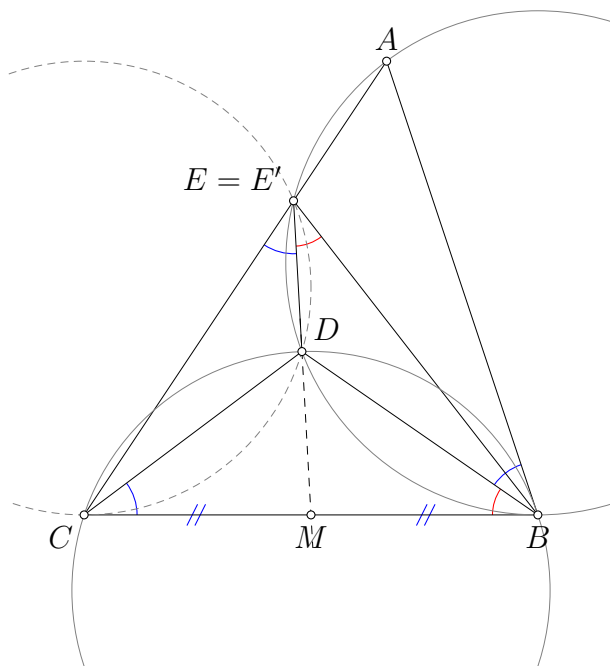
Introduisons M le milieu du segment $[BD]$. La droite (EM) est alors une droite des milieux, de sorte que $EM = \frac{AD}{2}$.

D'autre part, puisque M est le milieu de l'hypothénuse du triangle BCD , on a $MB = MD = MC$. Ainsi, $\frac{BD}{2} = BM = MC$.

L'inégalité à démontrer devient alors $EC \leq EM + MC$ qui correspond à l'inégalité triangulaire dans le triangle EMC , qui est donc vraie.

Exercice 7

(BXMO 2020) Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit ω_A le cercle passant par les points A et B tangent à la droite (BC) au point B . Soit ω_C le cercle passant par les points C et B tangent à la droite (AB) au point B . Les cercles ω_A et ω_C se recoupent au point D . Soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit E le point d'intersection de la droite (MD) avec la droite (AC) . Montrer que le point E appartient au cercle ω_A .

Solution de l'exercice 7

Soit E' le point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle ω_A . On veut désormais montrer que la droite $(E'D)$ coupe le segment $[BC]$ en son milieu. En effet, cela montrerait que $E' = E$ et donc terminerait l'exercice.

On a déjà quelques cercles tangents donc on peut envisager d'utiliser la méthode des axes radicaux et montrer que la droite (BC) est tangente aux cercles circonscrits aux triangles $E'DB$ et $E'DC$ respectivement en les points B et C .

Or le cercle circonscrit au triangle $E'DB$ correspond au cercle ω qui est tangent à la droite (BC) au point B . D'autre part :

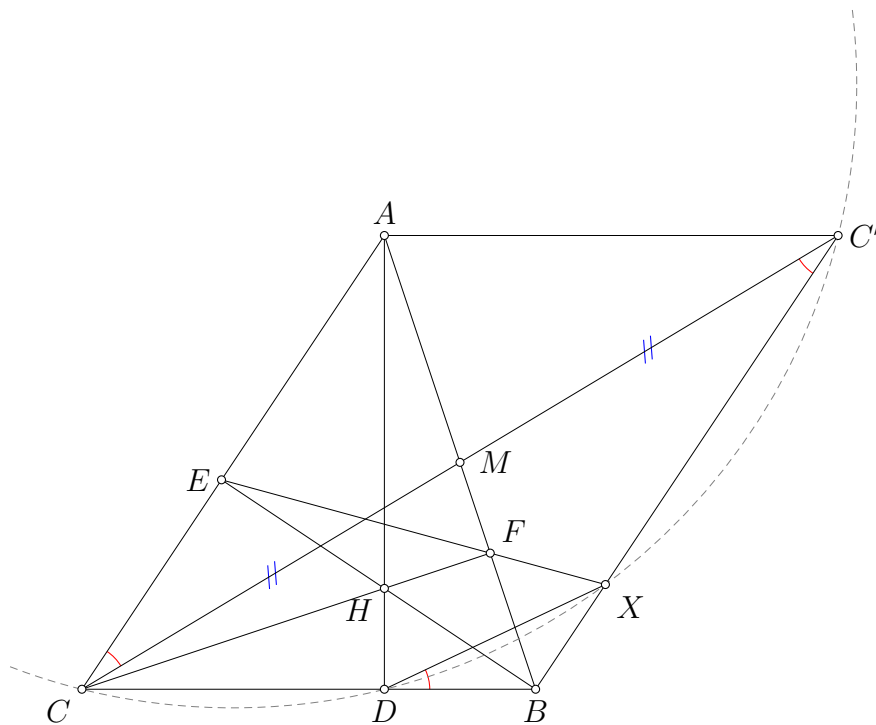
$$\widehat{CE'D} = 180^\circ - \widehat{DE'A} = \widehat{DBA} = \widehat{DCB}$$

puisque la droite (AB) est tangente au cercle ω_C au point B . On a montré que la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit au triangle EDC au point C .

D'après le lemme, la droite (ED) coupe le segment $[BC]$ en son milieu, ce qui donne le résultat voulu.

Exercice 8

(Math Beyond limits 2018) Soit ABC un triangle d'orthocentre H . On note D, E, F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C . La parallèle à la droite (AC) passant par le point B coupe la droite (EF) au point X . Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{ACM} = \widehat{XDB}$.

Solution de l'exercice 8

Ici, l'introduction du milieu de $[AB]$ et de la parallèle à (AC) passant par B motive encore une fois à créer un parallélogramme. Soit donc C' le point tel que $BCAC'$ soit un parallélogramme. On a alors $\widehat{ACM} = \widehat{CC'B}$ donc l'égalité à montrer devient $\widehat{XDB} = \widehat{XC'C}$, c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que les points C, C', D, X sont cocycliques. Les droites (BX) et (AC) sont parallèles donc Thalès donne

$$\frac{BX}{AE} = \frac{BF}{AF}$$

On se rappelle alors que les triangles BDF, BAC, EAF sont semblables (propriétés du triangle orthique), on obtient donc les égalités suivantes :

$$BX \cdot BC' = BX \cdot AC = \frac{AE}{AF} \cdot BF \cdot AC = \frac{AB}{AC} \cdot BF \cdot AC = AB \cdot BF = BD \cdot BC$$

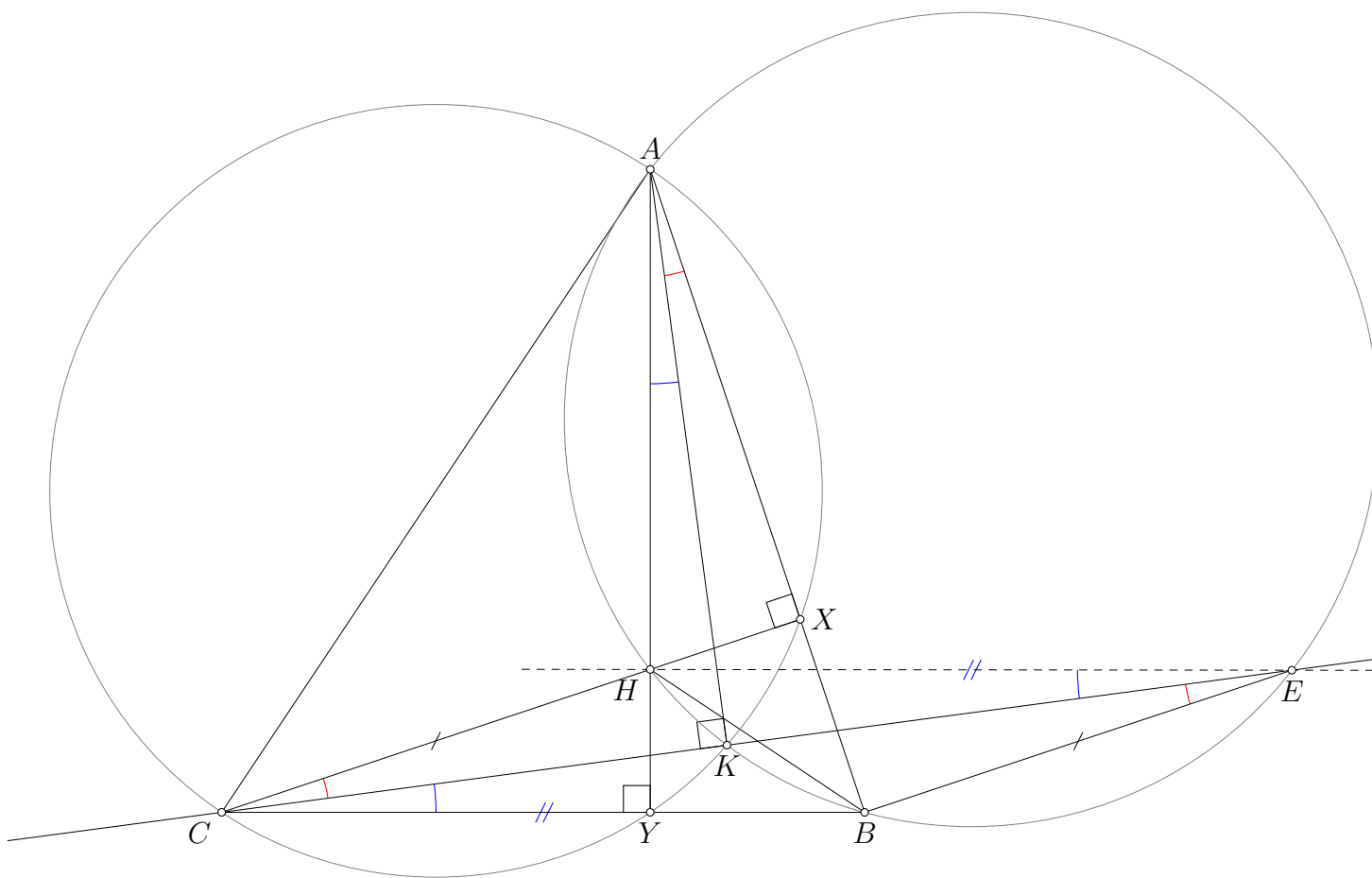
et l'on conclut par la réciproque de la puissance d'un point.

Exercice 9

(PAMO 2017 P6) Soit ABC un triangle d'orthocentre H . Le cercle de diamètre $[AC]$ recoupe le cercle circonscrit au triangle ABH au point K . Montrer que la droite (CK) coupe le segment $[BH]$ en son milieu.

Solution de l'exercice 9

Voici deux solutions utilisant deux méthodes différentes pour montrer que (CK) coupe $[BH]$ en son milieu.



Dans la première solution, on introduit un parallélogramme dont la droite (CK) et le segment $[BH]$ sont les diagonales. Soit E le point d'intersection de la droite (CK) avec le cercle circonscrit au triangle ABH . Il suffit de montrer que le quadrilatère $CHBE$ est un parallélogramme pour montrer que la droite (CK) coupe le segment $[BH]$ en son milieu. Soit X le pied de la hauteur issue du sommet C . En voyageant dans les différents cercles :

$$\widehat{ECH} = \widehat{KCX} = \widehat{XAK} = \widehat{BAK} = \widehat{BEK} = \widehat{BEC}$$

donc les droites (CH) et (BE) sont parallèles. Soit Y le pied de la hauteur issue du sommet A . Par ailleurs

$$\widehat{CEH} = \widehat{KEH} = \widehat{KAH} = \widehat{KAY} = \widehat{KCY} = \widehat{KCB} = \widehat{ECB}$$

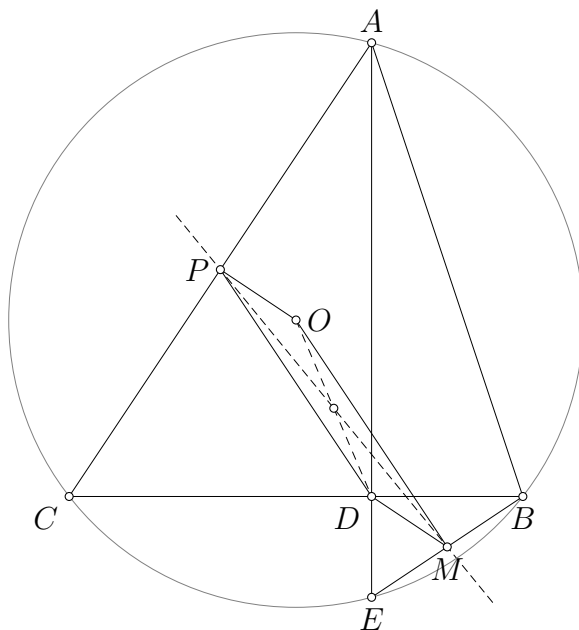
ce qui montre que les droites (EH) et (BC) sont parallèles. On a bien un parallélogramme et les diagonales se coupent en leur milieu.

$$\widehat{BHK} = \widehat{BAK} = \widehat{XAK} = \widehat{XCK} = \widehat{HCK}$$
$$\widehat{KBH} = \widehat{KAH} = \widehat{KAY} = \widehat{KCY} = \widehat{KCB}$$

512

Exercice 10

(JBMO 2013) Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$ et soit O le centre de son cercle circonscrit k . Soit D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit E le second point d'intersection du cercle k avec la droite (AD) . Soient M, N et P les milieux respectifs des segments $[BE]$, $[OD]$ et $[AC]$. Montrez que les points M, N, P sont alignés.

Solution de l'exercice 10

L'idée principale est de démontrer un résultat plus fort, à savoir que M, O, D, P est un parallélogramme, ce qui permet alors de conclure.

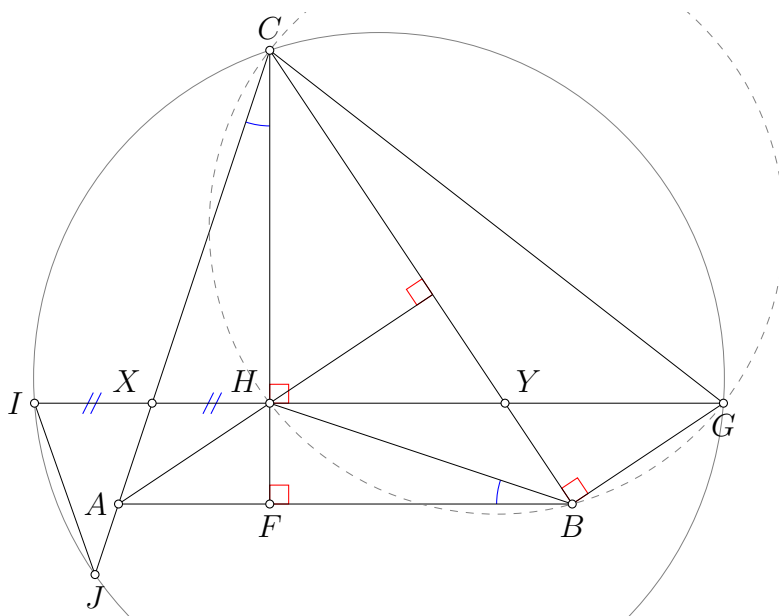
Les triangles OMB et POA sont tous les deux rectangles et $OA = OB$. Il suffit de montrer que $\widehat{MOB} = \widehat{PAO}$ pour avoir que les deux triangles sont isométriques. Or EOB est isocèle donc $\widehat{MOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOE} = \widehat{DAB} = \widehat{PAO}$. Les triangles sont donc isométriques et $AP = OM$ et $OP = MB$. On utilise alors le fait que D est en fait pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC (résultat classique dont la démonstration est un bon exercice de chasse aux angles). Donc EDB et CDA sont rectangles et $DM = MB = OP$ et $DP = PA = OM$. Donc le quadrilatère $DPOM$ a les côtés opposés égaux deux à deux, c'est un parallélogramme. Donc les diagonales se coupent en leur milieu et P, N, M sont alignés.

Exercice 11

(IMO SL 2015 G1) Soit ABC un triangle d'orthocentre H et soit G le point tel que le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme. Soit I le point de la droite (GH) tel que la droite (AC) coupe le segment $[HI]$ en son milieu. La droite (AC) recoupe le cercle circonscrit du triangle GCI au point J . Montrer que $IJ = AH$.

Solution de l'exercice 11

Il existe beaucoup de solutions car il y a plusieurs façons d'interpréter le fait que (AC) coupe $[HI]$ en son milieu. On présente ici deux solutions : l'une consiste à calculer patiemment plusieurs rapports de longueur, l'autre introduit astucieusement un point supplémentaire pour avoir des triangles isométriques.



Dans cette solution, on utilise que la droite (AC) coupe le segment $[HI]$ en son milieu uniquement pour obtenir une égalité de longueurs. En effet, on a des triangles semblables dus aux diverses propriétés de l'orthocentre et, nous allons le voir, grâce à des points cocycliques cachés dans la figure.

Avant d'attaquer, analysons les diverses hypothèses. On dispose d'un parallélogramme donc de droites parallèles. Les droites (BG) et (AH) sont parallèles donc les droites (BG) et (BC) sont perpendiculaires. Les droites (HG) et (AB) sont parallèles donc les droites (HG) et (CH) sont perpendiculaires. Les points G, B, H et C sont donc cocycliques.

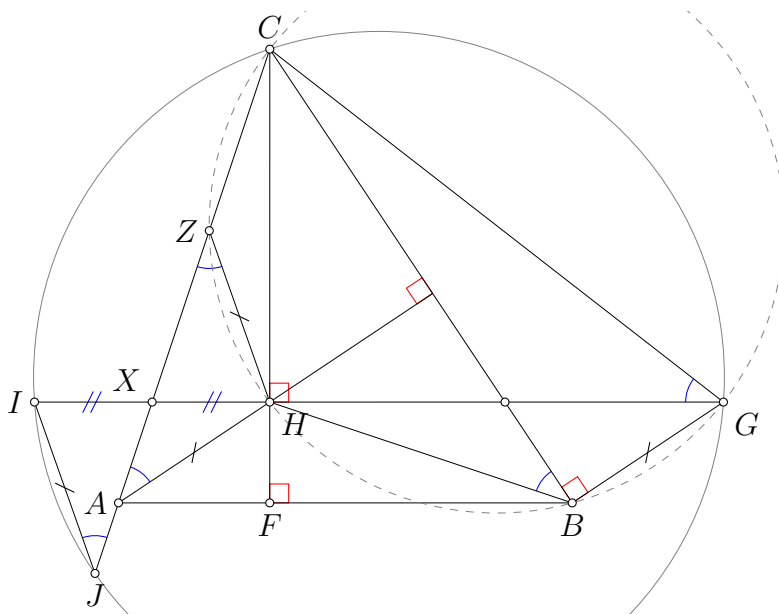
Maintenant, on va chercher à calculer des égalités de rapports et obtenir $\frac{IJ}{x} = \frac{AH}{x}$, avec x une certaine longueur. Pour cela, on a besoin d'identifier différents triangles semblables. Cela tombe bien, on dispose de deux quadrilatères cycliques, qui induisent des triangles semblables. Ainsi, on introduit X le point d'intersection des droites (IG) et (CJ) et Y le point d'intersection des droites (BC) et (GH) . On obtient les paires de triangles semblables suivantes : les triangles IXJ et CXG , les triangles CYH et GYB et les triangles CYG et HYB . Rappelons aussi que par hypothèse, on a également $XH = XI$ et $BG = AH$. Ainsi, on va calculer $\frac{IJ}{CG}$ et espérer tomber après divers calculs sur $\frac{BG}{CG}$. La corde CG est privilégiée ici car c'est la corde commune aux deux cercles présents sur la figure. Enfin, on a les différentes égalités d'angles induites par l'orthocentre, impliquant que les triangles CXH et BHF sont

semblables, où le point F est le pied de la hauteur issue du sommet C . On peut désormais calculer :

$$\frac{IJ}{CG} = \frac{IX}{XC} = \frac{XH}{XC} = \frac{HF}{HB} = \frac{HF}{YB} \cdot \frac{YB}{HB} = \frac{CH}{CY} \cdot \frac{YG}{CG} = \frac{BG}{YG} \cdot \frac{YG}{CG} = \frac{BG}{CG} = \frac{AH}{CG}$$

et on déduit l'égalité $IJ = AH$.

Solution n°2 de l'exercice 11



On a toujours X le milieu de $[IH]$. L'hypothèse que la droite (AC) coupe $[IH]$ en son milieu peut donner envie de trouver un triangle avec dans ses sommets H et X et qui soit isométrique à IJX . Malheureusement, un tel triangle n'est pas présent dans la figure; et introduire un point Z pour compléter ce triangle ne donne pas beaucoup d'informations sur ce point. Cependant, on sait que si l'énoncé est vrai, $ZH = IJ = AH$. On procède alors dans l'autre sens, on introduit Z tel que $ZH = AH$ et on montre l'isométrie. Cette discussion motive la preuve suivante :

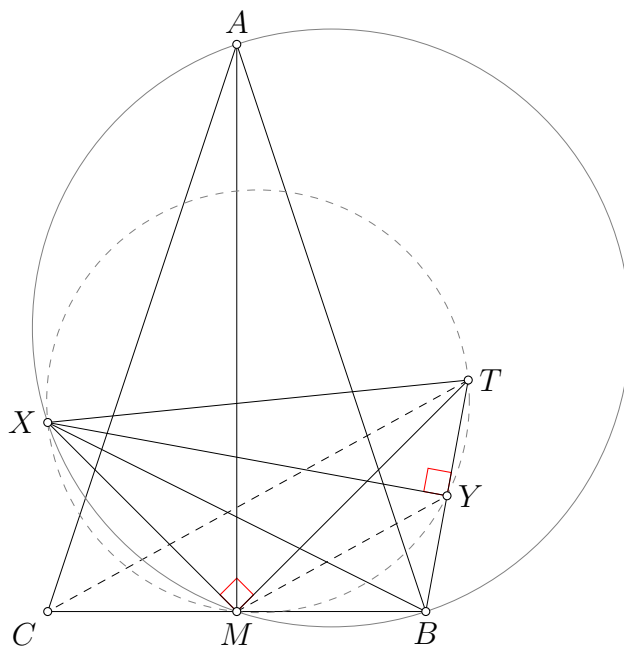
Soit $Z \neq A$ le point du segment $[AC]$ tel que $HZ = AH$. De même que précédemment, on trouve que les points B, G, C, H sont cocycliques. Donc en voyageant dans les différents cercles :

$$\widehat{CJI} = \widehat{CGH} = \widehat{CBH} = \widehat{HAC}$$

C'est là que le point Z intervient : $\widehat{XJI} = \widehat{CJI} = \widehat{HAC} = \widehat{XZH}$. C'est suffisant pour avoir que les triangles IMJ et MHD sont semblables. Le fait que $IM = MH$ impose qu'ils sont isométriques. Donc $IJ = ZH = AH$.

Exercice 12

(IMO SL 2007 G2) Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$. Le milieu du segment $[BC]$ est noté M . Soit X un point variable du plus petit arc AM du cercle circonscrit au triangle ABM . Soit T le point du même côté de la droite (BM) que le point X mais dans l'autre demi-plan délimité par la droite (AM) que le point X et tel que $TX = BX$ et tel que l'angle $\widehat{TMX}$ est droit. Montrer que la valeur de $\widehat{MTB} - \widehat{CTM}$ ne dépend pas du choix de X .

Solution de l'exercice 12

Quelques milieux apparaissent déjà dans la figure, et l'on cherche visiblement essentiellement à travailler avec des angles. Introduire un nouveau milieu bien choisi faciliterait donc bien les choses. Parmi les différents candidats, le plus intéressant semble être le milieu de $[TB]$, nous allons expliquer pourquoi par la suite.

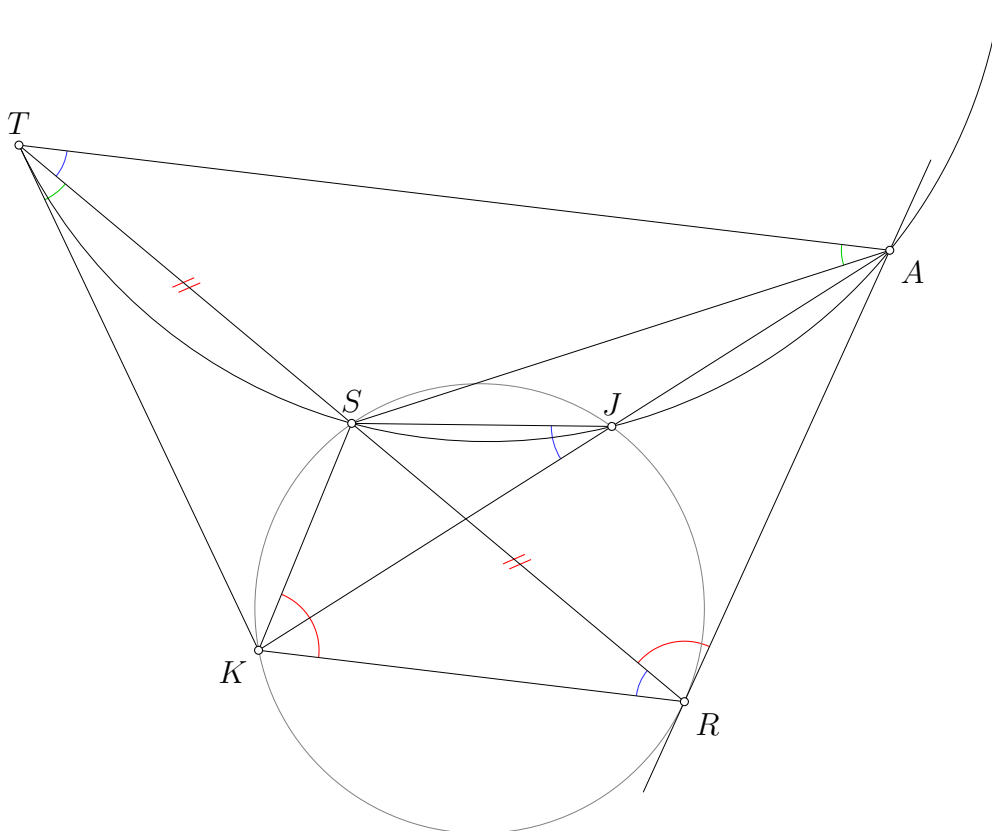
Soit Y le milieu de $[TB]$. On a alors non seulement (YM) et (TC) parallèles mais aussi (YX) et (TB) perpendiculaires, donc T, Y, M, X sont cocycliques. Une fois ce milieu introduit, le reste n'est plus qu'une courte chasse aux angles :

$$\widehat{MTB} - \widehat{CTM} = \widehat{YXM} - \widehat{YMT} = \widehat{YXM} - \widehat{YXT} = \widehat{YXM} - \widehat{YXB} = \widehat{BXM} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BAC}$$

où les deux dernières égalités viennent des différentes cocyclicités et que (YX) est bissectrice de $\widehat{TXB}$. Donc la valeur de $\widehat{MTB} - \widehat{CTM}$ est fixe et ne dépend pas de X .

Exercice 13

(IMO 2017 P4) Soient R et S des points distincts appartenant à un cercle Ω tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre du cercle Ω . Soit ℓ la tangente au cercle Ω au point R . Le point T est tel que le point S est le milieu du segment $[RT]$. Le point J est choisi sur le plus petit arc RS du cercle Ω de sorte que le cercle Γ circonscrit au triangle JST rencontre la droite ℓ en deux points distincts. Soit A le point commun du cercle Γ et de la droite ℓ qui est le plus proche du point R . La droite (AJ) recoupe le cercle Ω au point K . Prouver que la droite (KT) est tangente au cercle Γ .

Solution de l'exercice 13

Il suffit de montrer que $\widehat{KTR} = \widehat{TAS}$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{STA} = 180^\circ - \widehat{SJA} = \widehat{SJK} = \widehat{SRK}$$

D'autre part, d'après le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{SKR} = \widehat{SRA}$. Les triangles ATR et SRK ont donc deux angles en commun, ils sont donc semblables. On déduit que

$$\frac{TR}{KR} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST}$$

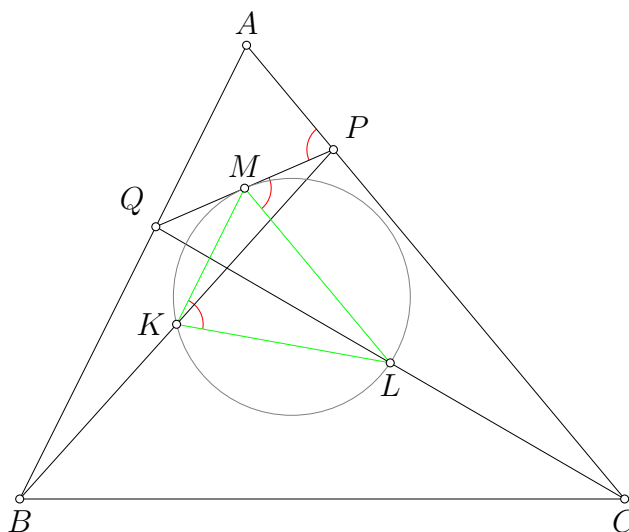
en utilisant que $SR = ST$. Puisque de plus $\widehat{TRK} = \widehat{STA}$, les triangles TAS et RTK sont semblables. En particulier, $\widehat{KTR} = \widehat{TAS}$ comme voulu.

Exercice 14 (IMO 2009 P2)

Soit ABC un triangle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Les points P et Q sont situés sur les segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Soient K, L et M les milieux respectifs des segments $[BP], [CQ]$ et $[PQ]$. Soit k le cercle passant par les points K, L et M . On suppose que la droite (PQ) est tangente au cercle k . Montrer que $OP = OQ$.

Solution de l'exercice 14

La figure semble être ardue à tracer, mais ce n'est pas vraiment le cas : on peut raisonnablement supposer que l'implication est une équivalence. Il suffit alors de choisir P et Q tels que $OP = OQ$.



Ici, il peut être plus naturel de raisonner à partir de la conclusion du problème, idée récurrente en géométrie. En effet, utiliser ce qu'on veut montrer pour essayer de découvrir de nouvelles choses sur la figure peut très souvent amener à remarquer des propriétés qui "doivent" être vraies si le problème est vrai. Il suffit alors de montrer ces propriétés pour conclure.

Ici, l'énoncé nous demande de montrer que $OP = OQ$. Ce n'est pas une égalité très conviviale *a priori*, d'autant plus que le point O n'est pas introduit. Mais en fait, cela revient à montrer que P et Q ont la même puissance par rapport au cercle circonscrit à ABC (puisque la puissance d'un point X par rapport à ce cercle dépend uniquement de la distance XO). Et ça, c'est une propriété plus conviviale ! On veut donc montrer que $PA \cdot PC = QA \cdot QB$.

Or, on a justement $PC = 2ML$ et $QB = 2MK$ (par droites des milieux). On veut donc en fait montrer que

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML}$$

Cette égalité de rapports fait tout de même fortement penser à des triangles semblables... Plus que cela, le fait que AQP et MLK soient semblables semble être la seule façon à peu près raisonnable de démontrer cette égalité. On a déjà utilisé un aspect des triangles semblables : les rapports de longueurs. Pour continuer, on utilise l'autre aspect : les angles égaux. Alors on y va. On veut montrer que $\widehat{MKL} = \widehat{APQ}$.

Le moment est venu d'utiliser la tangence : par angle tangentiel, $\widehat{MKL} = \widehat{PML}$. Par angles

alternes internes dans les droites parallèles (AP) et (ML) , on a aussi $\widehat{PML} = \widehat{APM}$. Ainsi, $\widehat{MKL} = \widehat{APM} = \widehat{APQ}$, comme voulu.

On montre de même que $\widehat{MLK} = \widehat{AQP}$.

Ainsi, nos deux triangles sont bel et bien semblables. Il suffit alors de remonter les arguments pour conclure.

6 Combinatoire : Grilles (Paul A)

Ce TD est un complément à celui proposé par Baptiste SERAILLE lors du stage olympique de Valbonne de 2024 en Groupe D. Un certain nombre d'exercices classiques et intéressants y sont présentés, et j'encourage vivement à s'y référer pour d'autres problèmes de grilles.

Ce TD s'inspire en partie de celui d'Emile AVÉROUS dispensé lors du stage olympique de Valbonne de 2022.

Exercices

Exercice 1

Soient n, a et b des entiers naturels non-nuls. A quelle condition peut-on paver un rectangle $a \times b$ avec des rectangles $1 \times n$ ou $n \times 1$?

Exercice 2 (Olympiade Canadienne 2009, P1)

Considérons une grille $m \times n$ dont les cases sont coloriées soit en blanc, soit en noir. On dit qu'une case noire est à l'*abandon* s'il y a une case à sa gauche dans sa ligne qui est blanche et une case au-dessus d'elle dans sa colonne qui est blanche (Voir la FIGURE ci-dessous)

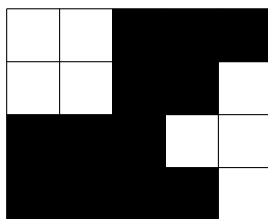


FIGURE 2 – Exemple de grille 4×5 sans case à l'*abandon*

Trouver une forme close pour le nombre de grilles $2 \times n$ sans case à l'*abandon*.

Exercice 3 (Olympiade Canadienne 2019, P3)

On considère une grille de $2n \times 2m$ coloriée comme un échiquier standard. Déterminer le nombre de manières de placer mn pions sur des cases blanches, de sorte que chaque case contienne au plus un pion et qu'il n'y ait jamais deux pions dans deux cases partageant un sommet.

Exercice 4 (BxMO 2024, P2)

Soit n un entier naturel non-nul. Dans une grille à coordonnées entières, un chemin de $(0, 0)$ à $(2n, 2n)$ est constitué de $4n$ pas consécutifs $(0, 1)$ ou $(1, 0)$. Montrer que le nombre de chemins qui sépare le carré de sommets $(0, 0)$, $(0, 2n)$, $(2n, 0)$ et $(2n, 2n)$ en deux régions d'aire **paire** est

$$\frac{\binom{4n}{2n} + \binom{2n}{n}}{2}$$

Exercice 5 (EGMO 2016, P5)

Soient k, n des entiers tels que $2 \leq k \leq n \leq 2k - 1$ et on considère une grille $n \times n$. Tant que possible, on rajoute des rectangles $1 \times k$ ou $k \times 1$ sur la grille afin que chaque rectangle

couvre exactement k cases et que deux rectangles ne se superposent pas. On s'arrête lorsque cette opération n'est plus possible. Trouver, en fonction de n et de k , le nombre minimal de rectangles dans une configuration finale.

Exercice 6 (Pays-Bas TST 2016 Jour 1 P2)

Soit n un entier strictement positif. On pave une grille $2^n \times 2^n$ par au moins deux rectangles constitués de cases de la grille, et d'aire une puissance de 2. Montrer qu'au moins deux de ces rectangles ont les mêmes dimensions (sans autoriser les rotations).

Exercice 7 (EGMO 2015, P2)

Un domino est un rectangle 1×2 ou 2×1 . Déterminer le nombre de manières de poser n^2 dominos sur une grille $2n \times 2n$ afin que tout carré 2×2 de la grille possède au moins deux cases non occupées sur la même ligne ou la même colonne.

Exercice 8 (EGMO 2025, P5)

Soit $n > 1$ un entier. Dans une *configuration initiale*, chacune des n^2 cases d'un tableau $n \times n$ contient une flèche qui pointe soit vers le haut, soit vers le bas, soit vers la gauche, soit vers la droite. Étant donnée une configuration initiale, Turbo l'escargot part d'une des cases et se déplace de case en case. À chaque déplacement, Turbo avance d'une case dans la direction de la flèche de la case où elle se trouve (elle peut éventuellement sortir du tableau). Après chaque déplacement, les flèches de toutes les cases tournent de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. On dit qu'une case est bonne lorsque partant de cette case, Turbo visite exactement une fois chacune des cases du tableau, sans jamais sortir du tableau et revient au final à sa case de départ. Déterminer, en fonction de n , le nombre maximal de bonnes cases parmi toutes les configurations initiales possibles.

Exercice 9 (Etats-Unis 1998)

On considère un damier $m \times n$ dont on colorie les cases en noir et blanc de manière habituelle. Un coup consiste à choisir un rectangle constitué de cases et à inverser les couleurs de toutes les cases de celui-ci.

Combien de coups faut-il au minimum pour rendre le damier monochrome ?

Exercice 10 (APMO 2019, P4)

On considère une grille de 2018×2019 cases carrées unités contenant chacun un entier. Deux cases sont voisines si elles partagent un bord. A chaque tour, on choisit certaines cases, puis, pour chacune des cases choisies, on calcule la moyenne de chacun de ses voisins. Enfin, on remplace la valeur dans chacune de ces cases par la moyenne calculée.

Est-il toujours possible de rendre la valeur de toutes les cases égales après un nombre fini de tours ?

Exercice 11 (EGMO 2025, P6)

Dans chaque case d'un tableau 2025×2025 est écrit un réel positif ou nul de sorte que la somme de tous les nombres de chaque ligne est égale à 1, et de même la somme de tous les nombres de chaque colonne est égale à 1. On définit r_i comme étant le plus grand nombre inscrit dans la ligne i , et on pose

$$R = r_1 + r_2 + \dots + r_{2025}$$

De même, on définit c_i comme étant le plus grand nombre inscrit dans la colonne i , et on pose

$$C = c_1 + c_2 + \dots + c_{2025}$$

Quelle est la plus grande valeur possible pour $\frac{R}{C}$?

Exercice 12 (IMO SL 2016 C8)

Soit n un entier strictement positif. Trouver le plus petit entier k ayant la propriété suivante : il est possible de marquer k cases sur une grille $2n \times 2n$ de façon à ce qu'il existe une unique partition de la grille en dominos (2×1 ou 1×2) tel que chaque domino contienne au plus une case marquée.

Solutions

Solution de l'exercice 1

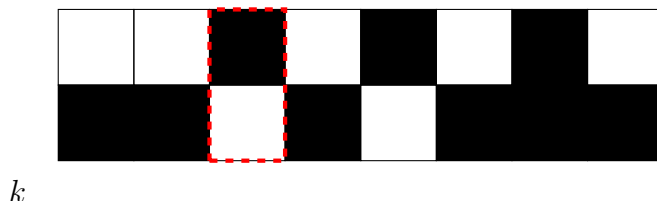
- Si n divise a ou b , alors c'est évident qu'un tel recouvrement est possible. On suppose alors que n ne divise ni a , ni b
- On utilise n couleurs de sorte qu'un rectangle $1 \times n$ recouvre n couleurs différentes à chaque fois. On numérote les couleurs de 1 à n , et on compte le nombre de case coloriées dans le grand rectangle
- On effectue la division euclidienne de a et b par n . On a $a = k \cdot n + r$ et $b = l \cdot n + q$
- On sait qu'il y a autant de cases de chaque couleur sur les rectangles $b \times (n \cdot k)$ et $r \times (l \cdot n)$ donc pour que $a \times b$ soit recouvrables pour des rectangles $1 \times n$, Il faut que ça soit le cas pour le rectangle $r \times q$ or on a le coloriage suivant (avec le rectangle $r \times q$ représenté en blanc).

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

Supposons que le rectangle $r \times q$ fois a autant de cases de chaque couleur : il doit donc en avoir $\frac{rq}{n}$. Mais la couleur 1 est représentée $\min(r, q)$ fois. Donc $\min(r, q) = \frac{rq}{n}$. Si par l'absurde $r, q > 0$, disons $r \leq q$, alors $n = q$, contradiction. Donc soit r soit q est nul, ce qui signifie bien que n divise a ou b .

Solution de l'exercice 2

On procède par comptage direct : On note k le numéro de la première case blanche sur la



ligne du bas. Alors pour toutes les cases de 1 à k sur la ligne du haut, on a 2 possibilités : soit on colorie la case en noir, soit on la laisse blanche. Ensuite, pour les cases $k+1$ à n , on a trois possibilités :

- Soit la case du haut est noire, et celle du bas est aussi noire
- Soit la case du haut est noire, et celle du bas est blanche
- Soit la case du haut est blanche et celle du bas est noire

On ne peut pas avoir les deux cases blanches sinon la case du bas serait à l'abandon. Ainsi, on a juste à sommer toutes les possibilités sur k et à ajouter 2^n dans le cas où toutes les cases du bas sont noires :

$$\begin{aligned}
 2^n + \sum_{k=1}^n 2^k \times 3^{n-k} &= 2^n + 2 \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} 2^k 3^{n-1-k} \right) \\
 &= 2^n + 2 \times \frac{3^n - 2^n}{3 - 2} \\
 &= \boxed{2 \times 3^n - 2^n}
 \end{aligned}$$

Solution n°2 de l'exercice 2

Alternativement, on peut procéder par récurrence : on note a_n le nombre de coloriage possibles pour une grille $2 \times n$. Si on considère une grille $2 \times (n+1)$, il suffit de regarder les deux dernières cases et de faire une disjonction de cas en fonction du coloriage du $2 \times n$ de gauche :

- La seule façon de colorier les deux dernières cases avec du blanc en haut et du noir en bas, c'est que toutes les cases de la rangée du bas soient noires : il y a alors 2^n possibilités pour la rangée du haut.
- Sinon, pour tout coloriage sans case à l'abandon de la grille, on peut colorier les deux dernières cases de la manière suivante :
 - Soit la case du haut est noire, et celle du bas est aussi noire
 - Soit la case du haut est noire, et celle du bas est blanche
 - Soit la case du haut est blanche et celle du bas est noire

Ainsi, on trouve

$$a_{n+1} = 3a_n + 2^n$$

Il reste alors à trouver la forme explicite de cette suite. Pour cela, on a deux possibilités :

— On ajoute 2^{n+1} de chaque côté et on trouve

$$\underbrace{a_{n+1} + 2^{n+1}}_{b_{n+1}} = 3 \underbrace{(a_n + 2^n)}_{b_n}$$

D'où $b_n = 3^n b_0$ et $b_0 = a_0 + 1 = 2$, donc $\boxed{a_n = 2 \times 3^n - 2^n}$ comme voulu.

— Si on ne trouve pas l'intuition de faire cet ajout, on peut essayer de passer par la théorie des suites récurrentes linéaires en éliminant le 2^n : on remarque que $2a_n = 6a_{n-1} + 2^n$, d'où

$$a_{n+1} = 3a_n + 2a_n - 6a_{n-1}$$

Le polynôme caractéristique de la suite est $X^2 - 5X + 6 = (X - 2)(X - 3)$ donc $a_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$. En regardant en 0 et 1 on trouve alors $\alpha = 2$ et $\beta = -1$, ce qui donne bien

$$\boxed{a_n = 2 \times 3^n - 2^n}$$

Solution de l'exercice 3

On divise la grille en carrés de côté 2×2 que l'on appellera *grand carré*. Chaque grand carré contient exactement un pion car chaque grand carré ne peut en contenir au plus qu'un, et il y en a mn à placer.

Sans perte de généralité, on suppose que la case en haut à gauche de la grille est blanche. On note A un grand carré où le pion est dans la case en haut à gauche, et B s'il est en bas à droite.

Si une case est notée A , alors la case au dessus d'elle et à sa gauche doivent également être notées A . Il est clair que dès lors que cette condition est vérifiée, on a une configuration valide de l'énoncé.

Si on regarde la ligne i de grands carrés, on doit avoir une configuration de la forme :

$$\underbrace{AA \dots A}_{r_i} \underbrace{BB \dots B}_{n-r_i}$$

et les conditions précédentes forcent à avoir

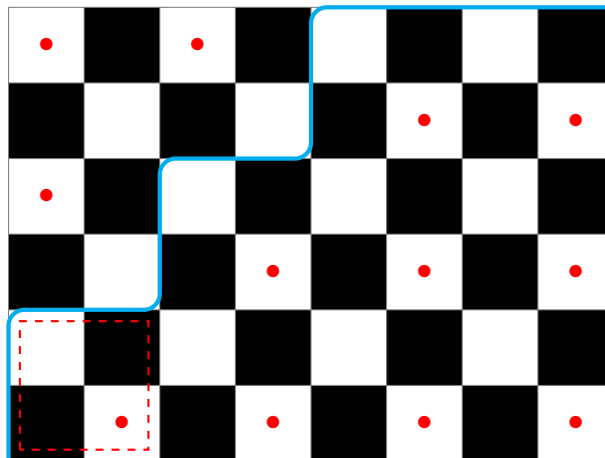
$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_m$$

Donc le problème revient à dénombrer toutes les fonctions décroissantes de $\llbracket 1, m \rrbracket$ dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, ce qui est relativement aisé à faire avec *stars and bars* en regardant les différences successives des valeurs de la fonction (qui doivent partitionner n), ce qui donne le résultat

$$\boxed{\binom{n+m}{n}}$$

Alternativement, a ramené le problème à dénombrer le nombre de chemins du coin en bas à gauche au coin en haut à droite en allant uniquement à droite ou vers le haut et en passant entre les grandes cases uniquement : on mettra ensuite des A au dessus de ce chemin, et des B partout en dessous. Or, il est bien connu (par la même méthode que précédemment) que le nombre de tels chemins est

$$\boxed{\binom{n+m}{n}}$$



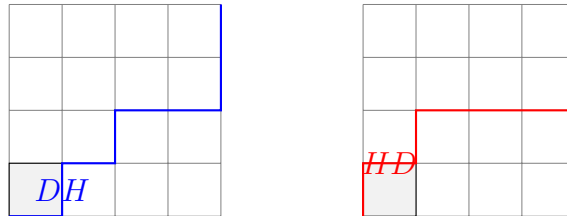
Solution de l'exercice 4

On note A la région au dessus de la ligne et B celle en dessous de la ligne. On note ensuite X l'ensemble des chemins tels que A et B soient d'aire paire, et Y les chemins où ils sont impairs. Clairement, $|X| + |Y|$ est égal au nombre total de chemins parcourant le carré i.e.

$$|X| + |Y| = \binom{4n}{2n}$$

L'astuce ici est qu'au lieu de considérer les déplacements individuellement, on va considérer les déplacements par paires. On note D et H les déplacements vers la droite et le haut respectivement. Un chemin peut se décomposer comme $2n$ double-pas qui peuvent être DD , HH , DH ou HD . Le nombre total de chemins qui n'utilisent ni DH ni HD est $\binom{2n}{n}$.

Chacun de ces chemins appartient clairement à X puisqu'on peut même subdiviser la grille en carrés 2×2 .



Désormais, considérons un chemin contenant au moins un pas DH ou HD . Pour un tel chemin, remplacer le premier HD par un DH ou vice-versa change les aires des régions de 1, et change donc leur parité. Clairement, cette transformation est bijective, donc on peut diviser ces chemins en deux, où l'un appartient à X , et l'autre à Y . Ainsi,

$$|X| - \binom{2n}{n} = |Y|$$

Ce qui donne finalement :

$$|X| = \frac{|X| + |Y|}{2} + \frac{|X| - |Y|}{2} = \frac{\binom{4n}{2n} + \binom{2n}{n}}{2}$$

Comme voulu.

Solution de l'exercice 5

On va montrer que le résultat est :

$$\begin{cases} n \text{ si } k = n \text{ ou } 2k - 1 = n \\ 2(n - k + 1) \text{ sinon} \end{cases}.$$

On appelle *bâton* un rectangle $1 \times k$ ou $k \times 1$. Supposons que l'on ne dispose que des bâtons orientés dans le même sens, par exemple verticalement. Alors on peut toujours en poser au moins n , un sur chaque colonne. De plus, en les disposant en alternant un bâton touchant le côté bas et un bâton touchant le côté haut, la condition $2k - 1 \geq n$ donne une configuration où l'on ne peut plus rajouter de bâtons. Ainsi, on peut toujours trouver une configuration finale avec n bâtons, et si les bâtons sont tous dans le même sens, c'est le nombre minimal.

Supposons maintenant que l'on ait une configuration avec des bâtons verticaux et horizontaux. Si on a un bâton vertical sur une colonne, comme $n \leq 2k - 1$, il est à distance strictement inférieure de k d'un des deux bords, par exemple le gauche. Alors entre le bâton et ce bord, on ne peut pas placer de bâton horizontal, mais on peut placer un bâton vertical sur chaque colonne. Alors toutes les colonnes depuis le bord gauche contiennent un bâton vertical.

En faisant de même avec le bord droit, les colonnes qui ne contiennent pas de bâton vertical sont côte-à-côte. S'il y en avait au moins k , on pourrait alors placer un bâton horizontal dans chaque ligne, entre les colonnes qui contiennent des bâtons verticaux, et la configuration finale contiendrait au moins n bâtons, alors cette configuration n'est pas optimale car on peut déjà trouver une configuration finale avec n bâtons dans le même sens. Ainsi, si la configuration finale possède des bâtons dans les deux sens, elle en possède au moins $n - k + 1$ verticaux. De même, elle en possède au moins $n - k + 1$ horizontaux, et donc $2(n - k + 1)$ bâtons en tout.

Trouvons maintenant une configuration à $2(n - k + 1)$ bâtons, pour $k < n$. Pour ceci, on considère un carré $(k + 1) \times (k + 1)$ en bas à gauche de la grille où l'on place 4 bâtons en carré sur le bord. On place ensuite $n - k - 1$ bâtons verticaux à droite de ce carré, et $n - k - 1$ bâtons horizontaux en haut de ce carré.

Maintenant, si $k = n$, on ne peut pas placer deux bâtons dans des sens opposés, donc la réponse est n . Si $k < n$, c'est le minimum entre n et $2(n - k + 1)$, c'est-à-dire n si $2k - 1 = n$ et $2(n - k + 1)$ sinon.

Solution de l'exercice 6

On remarque déjà que si l'aire d'un rectangle est une puissance de 2, ceci signifie que ses deux côtés sont des puissances de 2.

Si le plus petit côté d'un rectangle est 2^m ($< 2^n$), alors on peut faire une homothétie de la grille par un facteur 2^{-m} . Alors on voit apparaître une nouvelle grille $2^{n-m} \times 2^{n-m}$ pavée par des rectangles dont les aires sont des puissances de 2 où il existe un rectangle dont un des côtés est 1, et il suffit de montrer le résultat de l'énoncé pour cette nouvelle grille. On peut donc supposer l'existence d'un rectangle dont un des côtés est 1, par exemple la longueur (le rectangle est donc vertical 1×2^k).

On colorie alors une colonne sur deux en noir et on considère pour chaque rectangle R le nombre $n(R)$ de cases noires moins le nombre de cases blanches comprises dans R . Si R est de longueur au moins 2, alors sa longueur est paire car c'est une puissance de 2, et il possède le même nombre de cases blanches que noires, on a $n(R) = 0$. La somme des $n(R)$ sur tous les rectangles doit être nulle car la grille totale contient autant de cases noires que blanches. Ainsi, la somme des $n(R)$ sur tous les rectangles R de longueur 1 est nulle. Mais dans ce cas, $n(R)$ vaut $\pm 2^h$ où h est la hauteur de R . Mais si h_0 est la hauteur minimale d'un rectangle de longueur 1, $n(R)$ ne contient que des termes congrus à 0 modulo 2^{h_0+1} , sauf certains termes congrus à 2^{h_0} modulo 2^{h_0+1} correspondant aux rectangles 1×2^{h_0} . Comme la somme est nulle, il y a alors au moins deux rectangles 1×2^{h_0} , ce qui est exactement le résultat voulu.

Solution de l'exercice 7

Considérons une disposition des n^2 dominos. On commence par diviser la grille en n^2 carrés 2×2 . Chacun ne peut contenir qu'au plus deux cases occupées, comme il y a n^2 dominos de deux cases, chacun des carrés a deux cases occupées qui partagent un côté. Supposons par l'absurde qu'il existe au moins un carré où ces deux cases appartiennent à deux dominos différents, et considérons parmi ceux-ci celui d'ordonnée minimale, puis d'abscisse minimale. Ainsi les carrés en bas et à gauche de celui-ci (s'ils existent) contiennent exactement un domino. Mais avec l'hypothèse de l'énoncé, la seule manière d'avoir deux dominos en contact est qu'ils forment quatre cases alignées, alors les deux dominos ayant une case dans le carré considéré doivent dépasser sur le carré à gauche ou celui du bas, absurde.

Ainsi, chaque carré possède exactement un domino, qui peut être positionné à gauche, en haut, à droite ou en bas du carré. On peut donc diviser les carrés en quatre catégories G, H, D, B respectivement, selon le positionnement du domino. L'hypothèse de l'énoncé implique alors que le carré à gauche d'un carré G est un carré G , celui en haut d'un carré H est un carré H , etc.

De cette manière, on en déduit que tous les carrés d'abscisse et d'ordonnée inférieures à celles d'un carré G ou B sont toujours des carrés G ou B , ainsi la ligne brisée partant du coin en haut à gauche et arrivant en bas à droite séparant les carrés G ou B des carrés D ou H n'est constituée que de segments de longueur 2 vers le bas et la droite. De la même manière, celle partant du coin en haut à droite et arrivant au coin en bas à gauche séparant les carrés G ou H des carrés D ou B n'est constituée que de segments de longueur 2 vers le bas et la gauche.

Réciproquement, étant donné deux telles lignes brisées, elles séparent la grille en quatre parties correspondant aux carrés G, H, B, D . Pour chaque ligne brisée, il y a $\binom{2n}{n}$ choix, donc le nombre total de configurations est

$$\binom{2n}{n}^2.$$

Solution de l'exercice 8

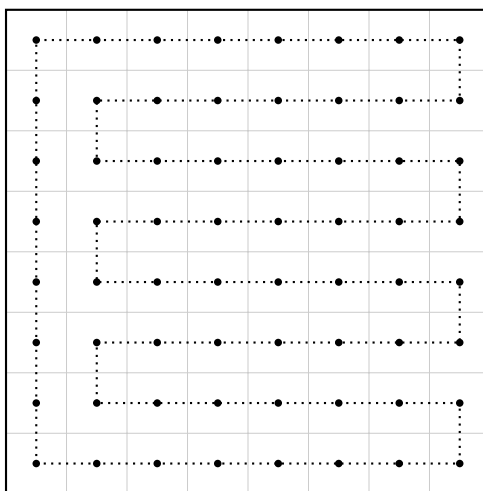
On va montrer que le nombre maximal de bonnes cases pour un certain n est :

$$\begin{cases} \frac{n^2}{4} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On commence par le cas où n est impair. On va montrer qu'il n'y a pas de bonnes cases si n est impair.

Pour que Turbo atteigne son objectif, il faut qu'il retourne à sa case initiale en visitant chaque case exactement une fois. On colorie les cases de la grille comme un échiquier. Sans perte de généralité, on suppose que Turbo commence sur une case noire. A chaque coup, Turbo change de couleur de case, donc en un nombre impair de coups, Turbo sera forcément sur une case blanche, mais il devrait terminer sur sa case initiale en un nombre impair de cas : ce n'est pas possible.

On traite maintenant le cas pair. Commençons par trouver une borne inférieure à la valeur cherchée : on considère le cycle qui est sur la figure ci-dessous. Il retourne à la case initiale en visitant chaque case exactement une fois. Pour montrer que la case $(1, 1)$ est bonne, il faut trouver une configuration qui permet à Turbo de parcourir ce cycle.



Soit c_i la $(i - 1)$ -ième case du cycle : ainsi

$$c_0 = (1, 1), \quad c_1 = (1, 2), \quad \dots, \quad c_{n^2-1} = (2, 1).$$

Pour tout i , on place une flèche dans la case c_i pointant vers la case c_{i+1} (ou vers c_0 si $i = n^2 - 1$), puis on fait pivoter cette flèche i fois de 90° dans le sens horaire. Après i déplacements, la flèche en c_i aura pivoté i fois de 90° dans le sens antihoraire, et pointera donc dans la même direction que sur le chemin défini ci-dessus. Ainsi, Turbo parcourt bien le cycle

$$c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n^2-1}, c_0,$$

et la case $(1, 1)$ est donc *bonne*.

Tous les quatre déplacements, les flèches pointent de nouveau dans la même direction qu'au début. De plus, le plateau revient à sa configuration initiale après avoir parcouru le

cycle complet, puisque n^2 , la longueur du cycle, est divisible par 4. Par conséquent, Turbo peut aussi commencer en toute case c_i telle que $4 \mid i$, et suivre la même trajectoire. Ainsi, les cases

$$c_0, c_4, c_8, \dots, c_{n^2-4}$$

sont bonnes, et il y en a bien $\frac{n^2}{4}$.

Montrons maintenant que peu importe la configuration, il y a au plus $\frac{n^2}{4}$ bonnes cases. Soit a_0 une bonne case. Notons

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n^2-1}, a_{n^2} = a_0$$

la suite des cases que Turbo visite en commençant en a_0 . Supposons maintenant qu'il existe une autre bonne case b_0 , et notons

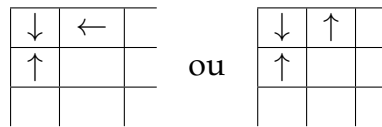
$$b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n^2-1}, b_{n^2} = b_0$$

la suite des cases que Turbo visite en commençant en b_0 .

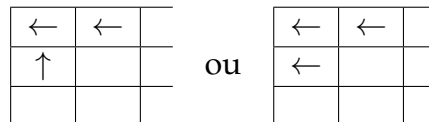
Remarquons que comme $4 \mid n^2$, les flèches se retrouvent dans la configuration initiale à la fin du cycle, donc si Turbo continuait de parcourir la grille, il parcourerait les mêmes cases que lors de son premier passage.

On étudie la case en haut à gauche. Elle a deux voisines, donc chacune des trajectoires doit parcourir ces trois cases consécutivement et dans le même ordre. On note i l'indice tel que $a_{i-1}a_i a_{i+1}$ soit cette séquence dans le coin dans le chemin a , et j l'indice pour le chemin b . On trouve alors $i \equiv j \pmod{4}$ car à l'étape $i-1$ de a et $j-1$ de b , la flèche dans la case a_{i-1} soit être dans la même direction que celle en b_{j-1} . Même chose ensuite pour a_i et b_j et a_{i+1} et b_{j+1} , donc en réalité, on trouve que la trajectoire b est la même que a mais translatée d'un indice multiple de 4.

Si, au contraire, le chemin b parcourait ces trois cases dans l'ordre inverse du chemin a , mais alors en supposant que le chemin a fait $(2,1) \rightarrow (1,1) \rightarrow (1,2)$, pour le chemin a , les flèches en $i-1$ doivent être dans l'une des configurations suivantes :



Et pour le chemin b , on doit être dans l'un des cas suivants :



En regardant la case $(1,1)$, on trouve $i \equiv j+1 \pmod{4}$ mais pour les cases $(2,1)$ et $(1,2)$, cela mène à une contradiction.

Ainsi, on a bien au plus $\frac{n^2}{4}$ bonnes cases.

Solution de l'exercice 9

On va montrer que le nombre de coups minimal est

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

Pour ceci, remarquons tout d'abord que cette valeur est atteignable en inversant les couleurs de toutes les lignes ou colonnes paires (dans n'importe quel ordre car les opérations commutent). Montrons maintenant que l'on ne peut pas faire mieux.

Considérons la colonne $1 \times n$ à gauche du damier. On compte le nombre de couples de cases adjacentes de couleur différente dans cette colonne. Au début, il y en a $n - 1$ et chaque opération diminue cette valeur au plus de 2. Il faut donc au moins $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ opérations pour que la colonne soit toute de la même couleur, c'est-à-dire $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ce raisonnement reste valable pour la colonne de droite, la ligne du haut et la ligne du bas de la grille, en remplaçant n par m pour les lignes. Mais maintenant, si un rectangle touche trois de ces lignes/colonnes, il en contient nécessairement une en entier, et il n'agit donc pas dessus de manière utile. Ainsi, chaque coup agit de manière utile sur au plus deux de ces lignes/colonnes, donc le nombre d'opérations minimale est supérieur à

$$\frac{1}{2} \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2 \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \right) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

d'où le résultat.

Solution de l'exercice 10

La difficulté de ce problème réside dans le fait que la réponse est en fait **non**, et qu'il faut exhiber un contre-exemple. Pour cela, on peut par exemple considérer le remplissage suivant :

3	1	3	3	1	3	...	3	1	3
0	2	0	0	2	0	...	0	2	0
0	2	0	0	2	0	...	0	2	0
3	1	3	3	1	3	...	3	1	3
3	1	3	3	1	3	...	3	1	3
0	2	0	0	2	0	...	0	2	0
0	2	0	0	2	0	...	0	2	0
3	1	3	3	1	3	...	3	1	3
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
3	1	3	3	1	3	...	3	1	3
0	2	0	0	2	0	...	0	2	0

Pour montrer que ça fonctionne bien, on peut regarder la grille modulo 5, en constatant que lors de n'importe quelle opération, on ne divise que par des nombres de la forme $2^a \times 3^b$, qui sont donc premiers avec 5, donc on peut prendre $\frac{a}{b} \equiv ab^{-1} \pmod{5}$.

Il est alors facile de traiter tous les cas et de montrer que chaque case conserve sa valeur modulo 5 lors des opérations.

Solution de l'exercice 11

<https://www.egmo.org/egmos/egmo14/solutions.pdf>

Solution de l'exercice 12

<https://www.imo-official.org/problems/IMO2016SL.pdf#page=45>

7 Combinatoire : TD de pot pourri (Henry)

Exercice 1

Peut-on arranger les nombres $1, 1, 2, 2, \dots, 50, 50$ de sorte que pour tout $1 \leq k \leq 50$, il y a exactement k éléments entre les deux nombres k ?

Solution de l'exercice 1

La réponse est non, et c'est une histoire de parité. En effet, supposons que l'on peut effectivement placer les éléments sur une ligne comme indiqué. Colorions en rouge les éléments d'emplacement pair et en bleu les éléments d'emplacement impair.

Si k est pair, alors les deux éléments de numéro k sont alors de couleur différente. Ainsi, parmi les k impairs, il y a 25 bleus et 25 rouges. Pourtant, si k est impair, alors les deux nombres k sont de même couleur. Il y a donc par exemple un nombre pair de k impairs bleus, ce qui est absurde.

Exercice 2

Démontrer qu'un graphe dont les sommets possèdent tous au moins 3 voisins possède un cycle de longueur paire.

Solution de l'exercice 2

On considère une chaîne de taille maximale. Le dernier sommet de la chaîne doit avoir au moins deux voisins en plus de son prédécesseur de la chaîne. Par maximalité de celle-ci, ces voisins supplémentaires appartiennent à la chaîne. Cela forme trois cycles, de longueurs a , b et $a + b - 2c$, où c est le nombre d'arêtes partagées par les deux premiers cycles. Clairement, ces trois nombres ne peuvent pas tous être impairs, et cela conclut.

Exercice 3

On colorie les points d'un cercle avec un nombre fini de couleurs. Montrer que l'on peut tracer deux droites parallèles coupant le cercle en quatre points distincts de même couleur.

Solution de l'exercice 3

Si l'on trace un $n + 1$ -gone régulier sur le cercle, il contiendra deux sommets A et B de même couleur. On itère ce processus suffisamment de fois pour obtenir deux paires (A, B) et (C, D) comme voulu.

En traçant $n \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ tels polygones, on obtient $n \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ paires monochromes. Comme il y a n valeurs possibles pour la couleur et $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ valeurs possibles pour la distance, le principe des tiroirs nous dit qu'il y a deux paires ayant la même caractéristique (couleur, distance), ce qui est le résultat voulu.

Exercice 4 (Envoi 2021-2022)

$\frac{1}{2}(3^{100} + 1)$ points sont régulièrement espacés sur une droite. Montrer qu'on peut en colorier 2^{100} en bleu de sorte qu'aucun point bleu ne soit à même distance de deux autres points bleus.

Solution de l'exercice 4

Le nombre 100 est bien sûr arbitraire, en fait la propriété est vraie en remplaçant 100 par $n \geq 0$, ce que l'on va montrer par récurrence.

Pour $k, m \geq 1$, notons $P(m, k)$ la propriété : "pour tous $m \geq 1$ points sur la droite, on peut en colorier k en rouge de sorte qu'aucun point rouge ne soit à la même distance de deux

autres points rouges." On va montrer que si $P(m, k)$ est vrai, alors $P(3m-1, 2k)$ est également vrai.

Pour cela, on divise les $3m-1$ points en un premier groupe formé des m plus à gauche, un deuxième formé des $m-1$ centraux et un troisième avec les m de droite. On colorie alors k points parmi les m de gauche et k parmi les m de droite, ce qui est possible par hypothèse de récurrence. Alors, si on choisit un point rouge, il n'est jamais à la même distance de deux points qui appartiennent au même ensemble que lui (par hypothèse), ni à même distance de deux points qui appartiennent à l'autre ensemble (car ils sont tous les deux du même côté), ni à même distance d'un point du même ensemble que lui et d'un de l'autre (car ceux du même ensemble que lui sont à distance au plus $m-1$, et ceux de l'autre ensemble à distance au moins m).

On remarque ensuite que $3 \cdot \frac{1}{2}(3^n + 1) - 1 = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1)$, si bien que si $P(\frac{1}{2}(3^n + 1), 2^n)$ est vrai, alors $P(\frac{1}{2}(3^{n+1} + 1), 2^{n+1})$ est aussi vrai. Enfin, il reste à vérifier $P(\frac{1}{2}(3^0 + 1), 2^0)$ est vérifiée, c'est-à-dire que $P(1, 1)$ est vérifiée, ce qui est bien le cas en coloriant l'unique point en rouge.

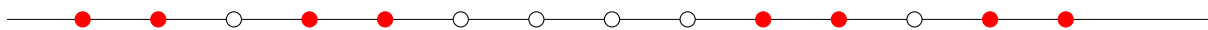


FIGURE 3 – Exemple pour $m = 14$

Exercice 5 (Balkan MO 2021 SL C1)

Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des n -uplets $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec $x_i \in \{0, 1, 2\}$. Un triplet d'éléments x, y, z de $\mathcal{A}_n$ est dit *bon* s'il existe un indice i tel que $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0, 1, 2\}$. Un sous-ensemble A de $\mathcal{A}_n$ est dit *bon* si trois éléments de A deux à deux distincts sont toujours un bon triplet.

Montrer que tout sous-ensemble bon de $\mathcal{A}_n$ possède au plus $2 \left(\frac{3}{2}\right)^n$ éléments.

Solution de l'exercice 5

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et $E_\varepsilon = \{x \in \mathcal{A}_n, x_i \neq \varepsilon_i\}$. Par exemple pour $n = 3$, $E_{(0,1,2)}$ est l'ensemble des triplets dont le premier chiffre est soit 1 soit 2, le deuxième chiffre soit 0 soit 2 et le troisième chiffre soit 0 soit 1. Chaque E_ε contient donc 2^n éléments de $\mathcal{A}_n$ et chaque élément de $\mathcal{A}_n$ est dans au plus 2^n ensembles de la forme E_ε . Puisqu'un sous-ensemble bon contient au plus deux éléments dans un même E_ε , on déduit que si X est bon :

$$2^n |X| = \sum_{\varepsilon} |E_\varepsilon \cap X| \leq \sum_{\varepsilon} 2 = 2 \times 3^n.$$

Ainsi, $|X| \leq 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Exercice 6 (IMO SL 2016 C2)

Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels qu'on peut placer ses diviseurs strictement positifs dans un tableau rectangulaire vérifiant les conditions :

- Chaque case contient un diviseur, et chaque diviseur n'est écrit que dans une case.
- Les sommes de chaque rangée sont égales.
- Les sommes de chaque colonne sont égales.

Solution de l'exercice 6

Supposons que tous les diviseurs positifs de n puissent être placés dans un tableau de dimensions $c \times \ell$ où le nombre de lignes ℓ est inférieur ou égal au nombre de colonnes c . On pose s la somme des nombres de chaque colonne. Comme n appartient à l'une d'elles, alors $s \geq n$. Pour $j \in \{1, \dots, c\}$ on pose d_j le plus grand nombre de la colonne j , et on suppose sans perdre de généralité que $d_1 > d_2 > \dots > d_c$. Alors comme ce sont des diviseurs de n , on a

$$d_c \leq \frac{n}{c}. \quad (\text{VI.1})$$

Par maximalité dans la colonne, on a aussi

$$d_c \geq \frac{s}{\ell} \geq \frac{n}{\ell}. \quad (\text{VI.2})$$

Ainsi en utilisant les équations VI.1 et VI.2, on obtient $\frac{n}{c} \geq \frac{n}{\ell}$ d'où $\ell \geq c$. Mais comme on a supposé $c \geq \ell$, on obtient donc $n = \ell$. Comme on a égalité dans la chaîne d'inégalités plus haut, il s'ensuit que $\frac{s}{\ell} = \frac{n}{\ell}$, d'où $n = s$, impliquant que le nombre de lignes est $\ell = 1$, donc la grille est de taille 1×1 , et ainsi $n = 1$ est la seule solution possible. Bien sûr, celle-ci fonctionne.

Exercice 7 (USA TST 2023 P1, envoi 2023-2024)

On considère un 2022-gone régulier de côté 1. Les points sont numérotés $A_1, \dots, A_{2022}$ dans un certain ordre. Au départ, Elie part du point A_1 , puis saute de point en point vers le point A_2 , puis de A_2 vers A_3 etc... chaque fois en prenant l'arc le plus court. Lorsqu'il atteint A_{2022} , il rejoint finalement A_1 . Déterminer la valeur maximale de la somme des longueurs des arcs qu'a parcouru Elie, parmi toutes les numérotations de points possibles.

Solution de l'exercice 7

Réponse : Si $N = 1011$, La valeur maximale est $2(N^2 - N + 1)$.

Le problème demande de trouver la valeur maximale d'une somme de longueurs, il contient nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que le chemin parcouru par Elie est forcément de longueur inférieure à $2(N^2 - N + 1)$, cette partie s'appelle l'analyse. Dans un second temps, on donne l'exemple d'une numérotation pour laquelle le chemin parcouru est exactement de longueur $2(N^2 - N + 1)$, cette étape s'appelle la construction.

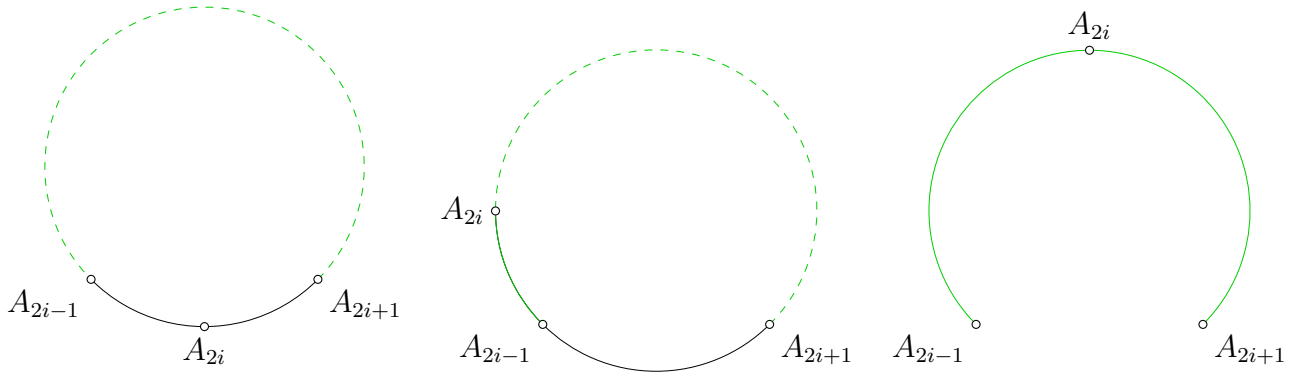
Analyse : Dans la suite, on garde la notation $N = 1011$. On note également PQ la longueur de l'arc le plus court reliant P et Q et $\overline{PQ}$ la longueur de l'arc le plus long. Considérons une numérotation $A_1, \dots, A_{2N}$ dans un ordre quelconque. On pose aussi $A_{2N+1} = A_1$.

Puisque majorer chaque portion $A_i A_{i+1}$ par sa longueur minimale est une estimation trop grossière, on va plutôt minorer la somme $\underline{A_1 A_2} + \dots + \underline{A_{2N} A_1}$ en majorant des paquets de terme. Plus précisément, nous allons regarder le chemin parcouru entre deux sommets impairs consécutifs.

Soit $1 \leq i \leq N$. On désire montrer que $\underline{A_{2i-1} A_{2i}} + \underline{A_{2i} A_{2i+1}} \leq \overline{A_{2i-1} A_{2i+1}}$, autrement dit, que passer par A_{2i} est moins coûteux que prendre le grand arc $A_{2i-1} A_{2i+1}$. La volonté de démontrer une telle inégalité peut venir de tentatives sur des petits cas.

Si A_{2i} est sur le petit arc $A_{2i-1} A_{2i+1}$, alors $\underline{A_{2i-1} A_{2i}} + \underline{A_{2i} A_{2i+1}} = \underline{A_{2i-1} A_{2i+1}} \leq \overline{A_{2i-1} A_{2i+1}}$. Supposons désormais que A_{2i} est sur le grand arc $\overline{A_{2i-1} A_{2i+1}}$. Si le petit arc $A_{2i} A_{2i+1}$ ne

contient pas A_{2i-1} ou si le petit arc $A_{2i-1}A_{2i}$ ne contient pas A_{2i+1} , alors $\overline{A_{2i-1}A_{2i}} + \overline{A_{2i}A_{2i+1}} = \overline{A_{2i-1}A_{2i+1}}$. Si maintenant A_{2i-1} est sur le petit arc $\overline{A_{2i}A_{2i+1}}$, alors A_{2i+1} est sur le grand arc $\overline{A_{2i-1}A_{2i}}$ et $\overline{A_{2i-1}A_{2i}} + \overline{A_{2i}A_{2i+1}} \leq \overline{A_{2i-1}A_{2i}} + \overline{A_{2i}A_{2i+1}} = \overline{A_{2i-1}A_{2i+1}}$. Le cas où A_{2i-1} est sur le petit arc $\overline{A_{2i}A_{2i+1}}$ se traite de façon similaire.



On a donc

$$\begin{aligned} \overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{2N}A_1} &\leq \overline{A_1A_3} + \dots + \overline{A_{2N-1}A_1} \\ &= (2N - \overline{A_1A_3}) + \dots + (2N - \overline{A_{2N-1}A_1}) \\ &= 2N^2 - (\overline{A_1A_3} + \dots + \overline{A_{2N-1}A_1}). \end{aligned}$$

Il suffit donc de minimiser la somme $\overline{A_1A_3} + \dots + \overline{A_{2N-1}A_1}$. Pour cela, notons qu'il existe deux sommets A et B de numéro impair à distance au moins $N-1$ (car il y a N sommets impairs). Comme la somme est cyclique, on peut supposer que $A = A_1$ (quitte à renuméroter les sommets). Mais alors le chemin $A_1 \dots A_{2N-1}A_1$ nécessite de parcourir un arc $\overline{A_1B}$ pour aller de A_1 vers B puis un arc $\overline{BA_1}$ pour aller de B vers A_1 . Un tel chemin est donc de longueur au moins le double du petit arc $\overline{AB}$, soit $2(N-1)$.

Il vient

$$\overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{2N}A_1} \leq \overline{A_1A_3} + \dots + \overline{A_{2N-1}A_1} \geq 2N^2 - 2(N-1) = 2(N^2 - N + 1).$$

Construction : Réciproquement, numérotions les sommets dans l'ordre $A_1A_3 \dots A_{2N-1}A_2 \dots A_{2N}$. Le chemin d'Elie est alors de longueur

$$\overline{A_1A_2} + \dots + \overline{A_{2N}A_1} \leq \overline{A_1A_3} + \dots + \overline{A_{2N-1}A_1} = \underbrace{N + N - 1 + \dots + N + N - 1}_{N-1 \text{ fois}} + N + 1 = 2N^2 - 2N + 2.$$

8 Géométrie : Théorème de Céva et Ménélaüs (Raphaël)

L'essentiel du cours et des exercices proviennent du livre d'Evan Chen « Euclidean Geometry », section 3.

Cours

On commence par rappeler la loi des sinus qui peut s'exprimer et se démontrer de plusieurs manières. Pour un triangle ABC , on note :

- $a = BC, b = AC, c = AB$ les longueurs des segments
- α, β, γ les angles des sommets A, B, C .
- R le rayon du cercle circonscrit
- $\mathcal{A}_{ABC}$ l'aire du triangle.

Lemme 1.

(Loi des sinus) Pour le triangle ABC on a

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R = \frac{abc}{2\mathcal{A}_{ABC}}.$$

Démonstration. Dans le cercle circonscrit de rayon R de centre O , la longueur de la corde BC est donnée par

$$a = BC = 2R \sin \frac{\widehat{COB}}{2} = 2R \sin \alpha$$

où on utilise l'angle au centre. Donc $2R = \frac{a}{\sin \alpha}$ et on fait le même raisonnement pour $\frac{b}{\sin \beta}$ et $\frac{c}{\sin \gamma}$. Pour calculer l'aire du triangle ABC , on note H le pied de la hauteur issue de C et $h = CH$. Dans le triangle rectangle ACH on a $h = AC \sin \alpha = b \sin \alpha$. On a alors

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}hc = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{abc}{2} \times \frac{\sin \alpha}{a} \quad (\text{VI.3})$$

et donc

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{abc}{2\mathcal{A}_{ABC}}$$

Le même raisonnement est valide pour $\frac{b}{\sin \beta}$ et $\frac{c}{\sin \gamma}$. □

Remarque 2.

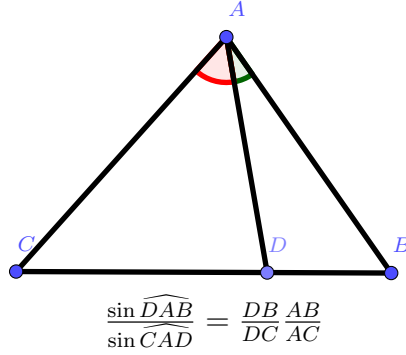
(Lemme magique) Soit un triangle ABC et $D \in [BC]$ alors

$$\frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{DB \cdot AB}{DC \cdot AC}. \quad (\text{VI.4})$$

Démonstration. On note $\delta = \widehat{BDA}$. Avec la loi des sinus

$$\sin \widehat{DAB} = \frac{DB}{AB} \sin \delta, \quad \text{et} \quad \sin \widehat{CAD} = \frac{DC}{AC} \sin(180 - \delta) = \frac{DC}{AC} \sin(\delta).$$

□



Dans le cas particulier de la bissectrice $\widehat{DAB} = \widehat{CAD}$, on a $\frac{DB \cdot AC}{DC \cdot AB} = 1$.

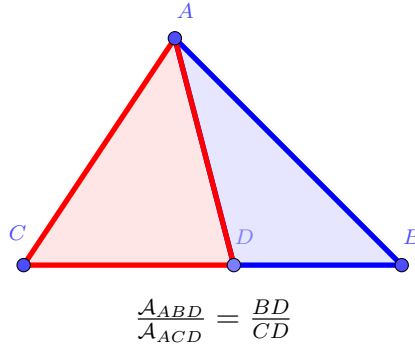
Remarque 3.

(Rapport des aires) On considère le triangle ABC et $D \in [BC]$ alors

$$\frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{ADC}} = \frac{DB}{DC}. \quad (\text{VI.5})$$

Soit $E \in (AD)$ alors

$$\frac{\mathcal{A}_{EBC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{ED}{AD}.$$



Démonstration. Soit H le pied de la hauteur issue de A . C'est également la hauteur des triangles BDA et DAC . On a donc pour les aires

$$\mathcal{A}_{BDA} = \frac{1}{2}BD \cdot HA, \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{DAC} = \frac{1}{2}DC \cdot HA.$$

Pour la deuxième égalité on note H' le pied de la hauteur issue de E . Alors

$$\mathcal{A}_{EBC} = \frac{1}{2}EH' \cdot BC, \quad \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC$$

et donc

$$\frac{\mathcal{A}_{EBC}}{\mathcal{A}_{ABC}} = \frac{EH'}{AH} = \frac{ED}{AD}$$

par Thalès car les droites (EH') et (AH) sont parallèles. □

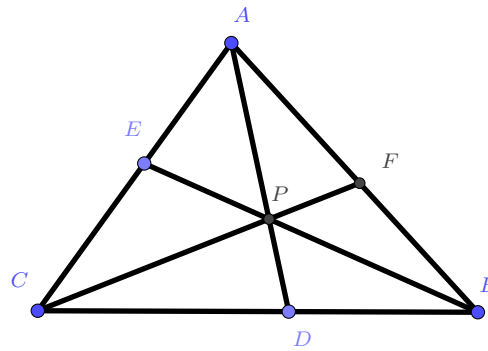
On énonce maintenant la propriété de Ceva

Proposition 4.

(Ceva) Soit ABC un triangle et des points $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Alors (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes ssi

$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1.$$

Ici les longueurs sont orientées : c'est à dire que $\frac{AF}{FB} > 0$ si A, F, B sont alignées dans cet ordre et $\frac{AF}{FB} < 0$ sinon.



$$(\text{Ceva}) \frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1$$

Démonstration. On suppose que ces trois droites sont concourantes en un point P . On utilise (VI.4) dans le triangle PBC

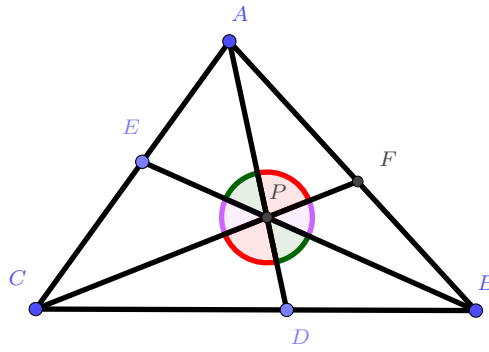
$$\frac{\sin \widehat{DPB}}{\sin \widehat{DPC}} = \frac{DB \cdot PC}{PB \cdot CD}, \quad \text{et donc} \quad \frac{BD}{DC} = \frac{BP \sin \widehat{DPB}}{CP \sin \widehat{DPC}}.$$

De même

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CP \sin \widehat{EPC}}{AP \sin \widehat{EPA}}, \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AP \sin \widehat{FPA}}{BP \sin \widehat{FPB}}$$

On a également les égalités d'angles $\widehat{FPA} = \widehat{DPC}$, $\widehat{EPA} = \widehat{DPB}$, $\widehat{FPB} = \widehat{EPC}$. Finalement

$$\begin{aligned} \frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} &= \frac{BP \sin \widehat{DPB}}{CP \sin \widehat{DPC}} \cdot \frac{CP \sin \widehat{EPC}}{AP \sin \widehat{EPA}} \cdot \frac{AP \sin \widehat{FPA}}{BP \sin \widehat{FPB}} \\ &= \frac{\sin \widehat{DPB} \cdot \sin \widehat{EPC} \cdot \sin \widehat{FPA}}{\sin \widehat{DPC} \cdot \sin \widehat{EPA} \cdot \sin \widehat{FPB}} \\ &= 1 \end{aligned}$$



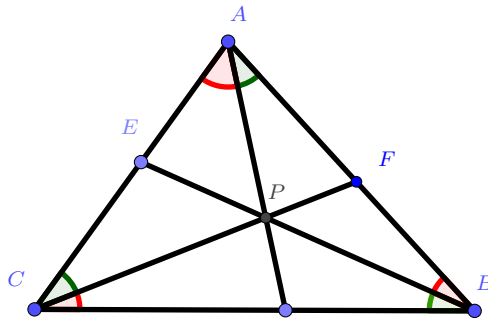
Preuve de Ceva avec la loi des sinus

Réciproquement, on note P le point d'intersection de (BE) et (CF) . Lorsque D se déplace sur (BC) , il y a un unique moment où $P \in (AD)$. De plus $\frac{BD}{DC}$ est strictement monotone. Donc il existe un unique moment où $\frac{BD}{DC} \times \left(\frac{CE}{EA} \frac{AF}{FB}\right) = 1$. Par la première partie c'est le même moment. $\square$

Proposition 5.

(Ceva trigonométrique) Soit ABC un triangle et des points $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Alors (AD) , (BE) , (CF) sont concourantes ssi

$$\frac{\sin(\widehat{FCA})}{\sin(\widehat{BCF})} \frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{DAC})} \frac{\sin(\widehat{CBE})}{\sin(\widehat{EBA})} = 1.$$



(Ceva Trigo) $\frac{\sin \widehat{FCA}}{\sin \widehat{BCF}} \frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{DAC}} \frac{\sin \widehat{CBE}}{\sin \widehat{EBA}} = 1$

Démonstration. On utilise encore (VI.4)

$$\frac{\sin(\widehat{FCA})}{\sin(\widehat{BCF})} = \frac{AF \cdot CB}{CA \cdot FB}, \quad \frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{DAC})} = \frac{BD \cdot AC}{AB \cdot DC}, \quad \frac{\sin(\widehat{CBE})}{\sin(\widehat{EBA})} = \frac{BE \cdot AB}{CB \cdot EA}$$

et donc

$$\frac{\sin(\widehat{FCA})}{\sin(\widehat{BCF})} \frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{DAC})} \frac{\sin(\widehat{CBE})}{\sin(\widehat{EBA})} = \frac{AF \cdot CB}{CA \cdot FB} \frac{BD \cdot AC}{AB \cdot DC} \frac{BE \cdot AB}{CB \cdot EA} = \frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{BE}{EA} = 1.$$

□

Exercice 1

En utilisant Ceva, redémontrer que dans un triangle

1. les médianes sont concourantes,
2. les bissectrices sont concourantes,
3. les hauteurs sont concourantes,
4. les droites passant par points de contacts du cercle inscrit sont concourantes (Point de Gergonne).

Solution de l'exercice 1

1) Si D, E, F sont les milieux des segments on a

$$\frac{AF}{FB} = \frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = 1, \quad \text{et donc} \quad \frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1.$$

2) Si les droites sont les bissectrices, on a $\widehat{FCA} = \widehat{BCF}$, $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$, $\widehat{CBE} = \widehat{EBA}$ et donc

$$\frac{\sin(\widehat{FCA})}{\sin(\widehat{BCF})} \frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{DAC})} \frac{\sin(\widehat{CBE})}{\sin(\widehat{EBA})} = 1$$

3) Avec les hauteurs, les points B, C, E, F sont cocycliques et donc $\widehat{EBA} = \widehat{FCA}$. De même $\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ et $\widehat{BCF} = \widehat{BAD}$ et donc

$$\frac{\sin(\widehat{FCA})}{\sin(\widehat{BCF})} \frac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{DAC})} \frac{\sin(\widehat{CBE})}{\sin(\widehat{EBA})} = 1.$$

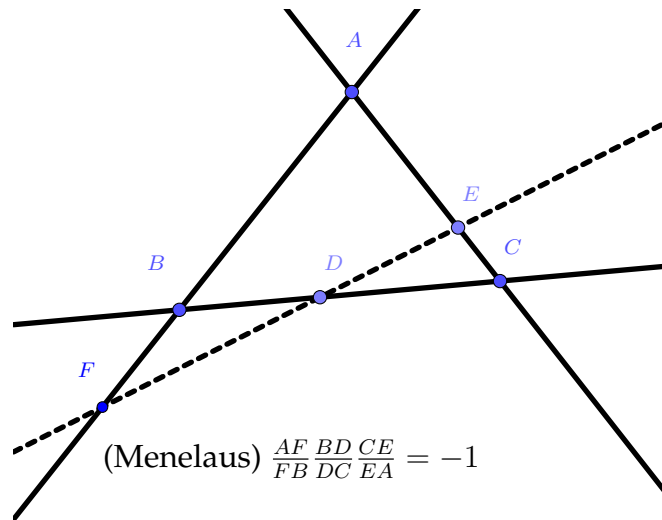
4) Avec les tangentes $AF = AE$, $BF = BD$ et $CD = CE$ et donc

$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1.$$

Proposition 6.

(Menelaus) Soit ABC un triangle et des points $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$. Alors D, E, F sont alignés ssi

$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = -1.$$

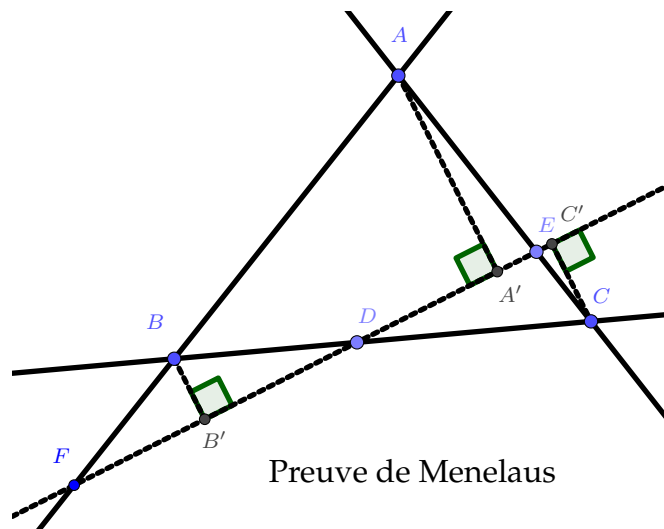


Démonstration. Supposons que les points D, E, F sont alignés sur une droite (d) . On note A', B', C' les projections orthogonales de A, B, C sur (d) . Les droites (AA') , (BB') et (CC') sont alignées. Alors par Thalès

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AF}{BF}, \quad \frac{AA'}{CC'} = \frac{AE}{CE}, \quad \frac{BB'}{CC'} = \frac{BD}{CD}$$

et finalement on a

$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = \left(-\frac{AA'}{BB'}\right) \left(-\frac{BB'}{CC'}\right) \left(-\frac{CC'}{AA'}\right) = -1.$$

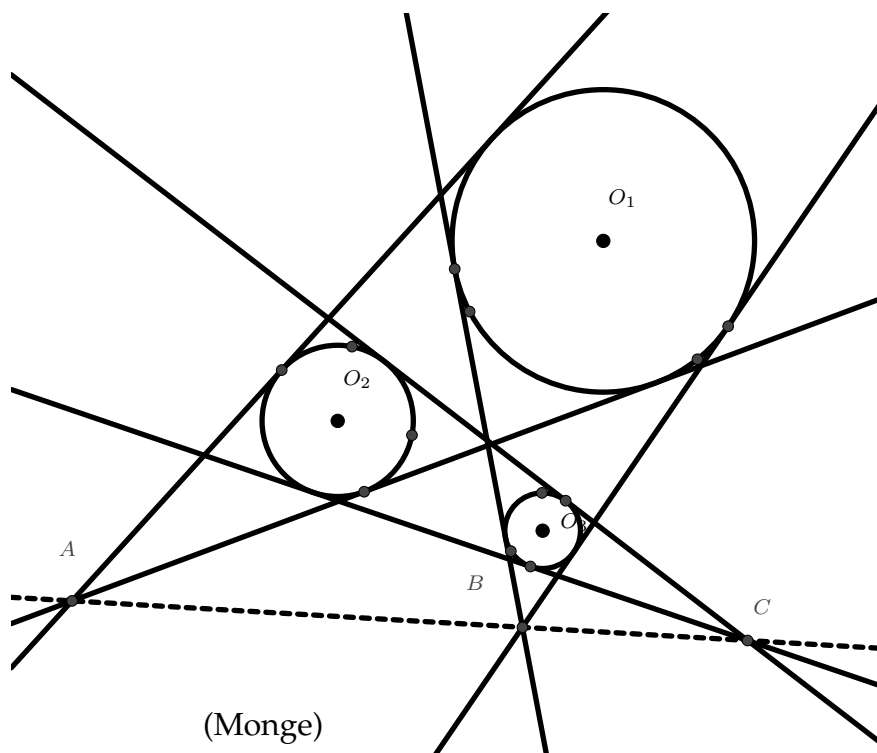


□

Application du cours

Exercice 2

Redémontrer le théorème de Monge en utilisant Menelaus.

**Solution de l'exercice 2**

On note O_1, O_2, O_3 les centres des trois cercles et R_1, R_2, R_3 leurs rayons. Avec A l'intersection des tangentes de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, c'est alors le centre de l'homothétie envoyant $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{C}_2$. C'est la même chose pour B et C et on a donc

$$\frac{AO_1}{AO_2} = \frac{R_1}{R_2}, \quad \frac{BO_1}{BO_3} = \frac{R_1}{R_3}, \quad \frac{CO_2}{CO_3} = \frac{R_2}{R_3}.$$

On utilise Menelaus avec le triangle $O_1O_2O_3$. On a bien

$$\frac{AO_1}{AO_2} \frac{BO_1}{BO_3} \frac{CO_2}{CO_3} = 1.$$

Exercice 3

Rédémontrer Ceva en utilisant Menelaus.

Solution de l'exercice 3

On suppose que les droites sont concourantes. On utilise Menelaus deux fois : Une fois avec le triangle ABD et les points alignés C, P, F .

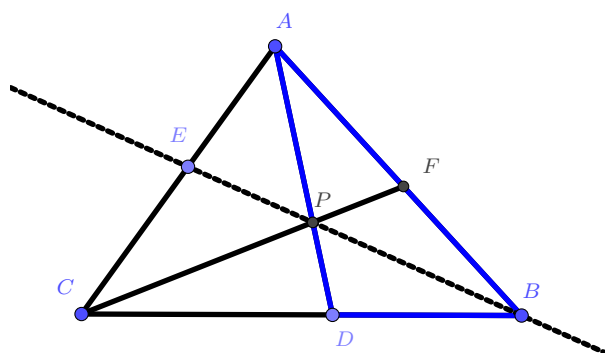
$$x = \frac{CB}{CD} \cdot \frac{PD}{PA} \cdot \frac{AF}{CF} = 1.$$

Et une fois avec le triangle ACD et les points alignés B, P, E .

$$y = \frac{CB}{DB} \cdot \frac{PD}{PA} \cdot \frac{AE}{BE} = 1.$$

Alors

$$\frac{x}{y} = \frac{DB}{CD} \cdot \frac{AF}{CF} \cdot \frac{BE}{AE} = 1$$

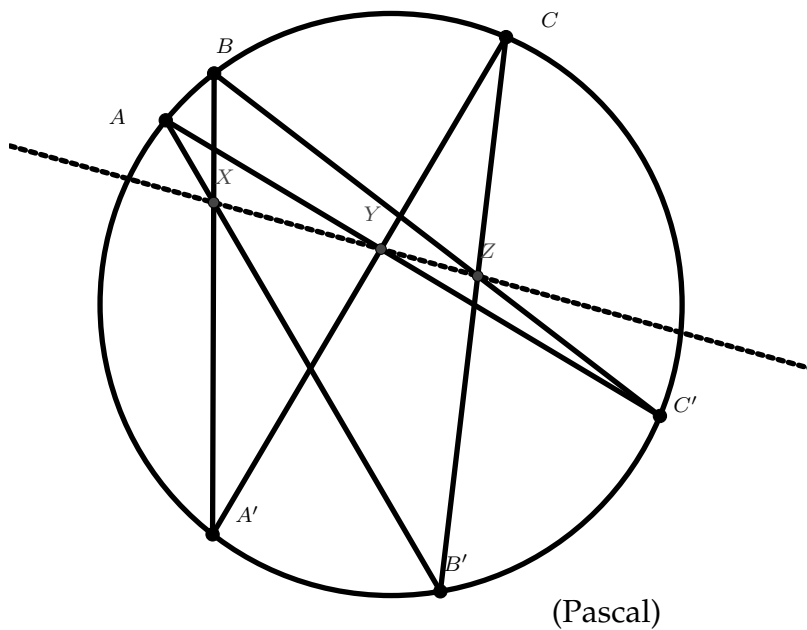


Preuve de Ceva avec Menelaus

Exercice 4

(Théorème de Pascal) « Soit A, B, C, C', B', A' six points cocycliques dans cet ordre. On note X l'intersection de (AB') , $(A'B)$. Y l'intersection de (AC') , $(A'C)$ et Z l'intersection de (BC') , $(B'C)$. Alors X, Y, Z sont alignés. »

1. On note U l'intersection de (AB') , $(A'C)$. V l'intersection de (AB') , (BC') et W l'intersection de (BC') , $(A'C)$. En considérant le triangle UVW , écrire trois relations utilisant Menelaus.
2. Encore en utilisant Menelaus (et la puissance d'un point), terminer la preuve du Théorème de Pascal (ie X, Y, Z sont alignés).



(Pascal)

Solution de l'exercice 4

1) On utilise Menelaus trois fois avec le triangle UVW

$$A', X, B \text{ sont alignés donc } x := \frac{UA'}{A'W} \frac{WB}{BV} \frac{VX}{XU} = -1$$

$$C', Y, A \text{ sont alignés donc } y := \frac{AV}{UA} \frac{C'W}{VC'} \frac{YU}{WY} = -1$$

$$B', Z, C \text{ sont alignés donc } z := \frac{UC}{CW} \frac{WZ}{ZV} \frac{VB'}{B'U} = -1$$

2) Par puissance d'un point on a

$$UA \cdot UB' = UA' \cdot UC$$

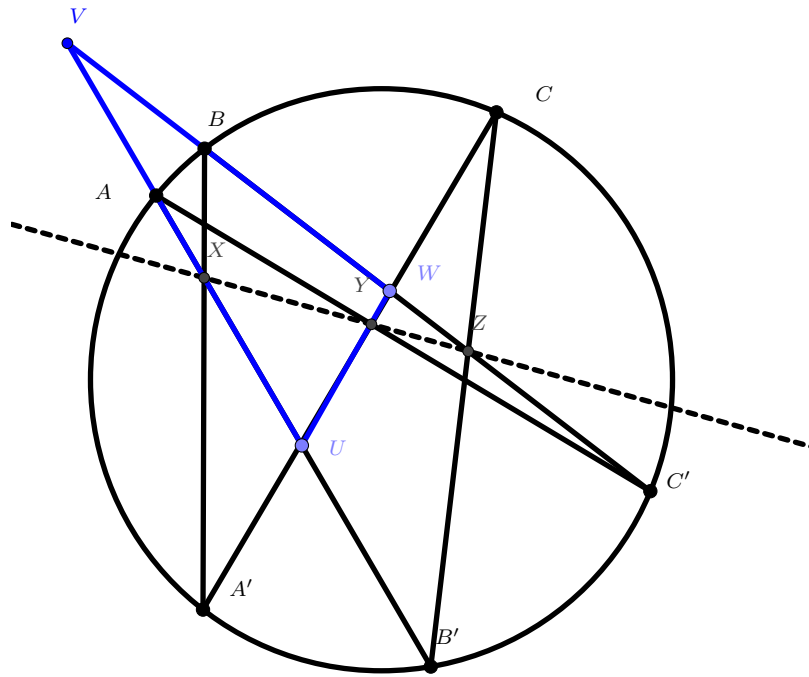
$$VA \cdot VB' = VB' \cdot VC'$$

$$WA' \cdot WC = WB \cdot WC'$$

Finalement

$$-1 = xyz = \frac{UA'}{A'W} \frac{WB}{BV} \frac{VX}{XU} \frac{AV}{UA} \frac{C'W}{VC'} \frac{YU}{WY} \frac{UC}{CW} \frac{WZ}{ZV} \frac{VB'}{B'U} = \frac{VX}{XU} \frac{YU}{WY} \frac{WZ}{ZV}.$$

Par Menelaus, les points X, Y, Z sont alignés.



Preuve de Pascal avec Menelaus

Exercices

Exercice 5

Soit ABC un triangle, $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ tel que (AD) , (BE) , (CF) soient concourantes en P . Montrer que

$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1.$$

Solution de l'exercice 5

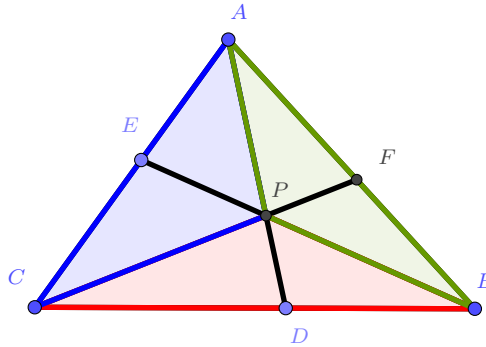
Avec la remarque (VI.5), on a

$$\frac{PD}{AD} = \frac{\mathcal{A}_{BCP}}{\mathcal{A}_{ABC}}, \quad \frac{PE}{BE} = \frac{\mathcal{A}_{ACP}}{\mathcal{A}_{ABC}}, \quad \frac{PF}{CF} = \frac{\mathcal{A}_{ABP}}{\mathcal{A}_{ABC}}$$

et donc

$$\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = \frac{\mathcal{A}_{BCP} + \mathcal{A}_{ACP} + \mathcal{A}_{ABP}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 1.$$

car les triangles BCP , ACP , ABP recouvre exactement le triangle ABC .

**Exercice 6**

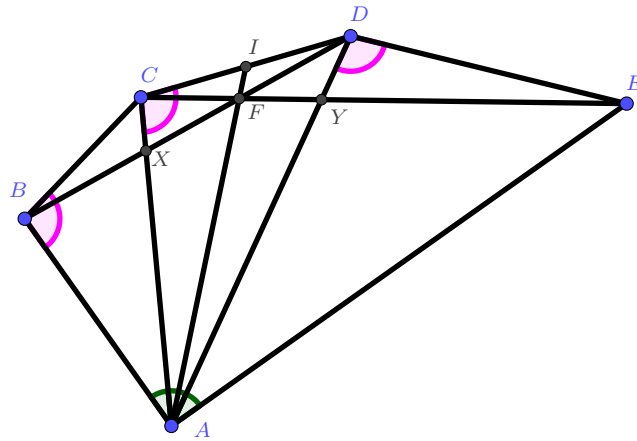
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{CAE}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADE}$. Les diagonales (BD) et (CE) se coupe en P . Montrer que (AP) coupe $[CD]$ en son milieu.

Solution de l'exercice 6

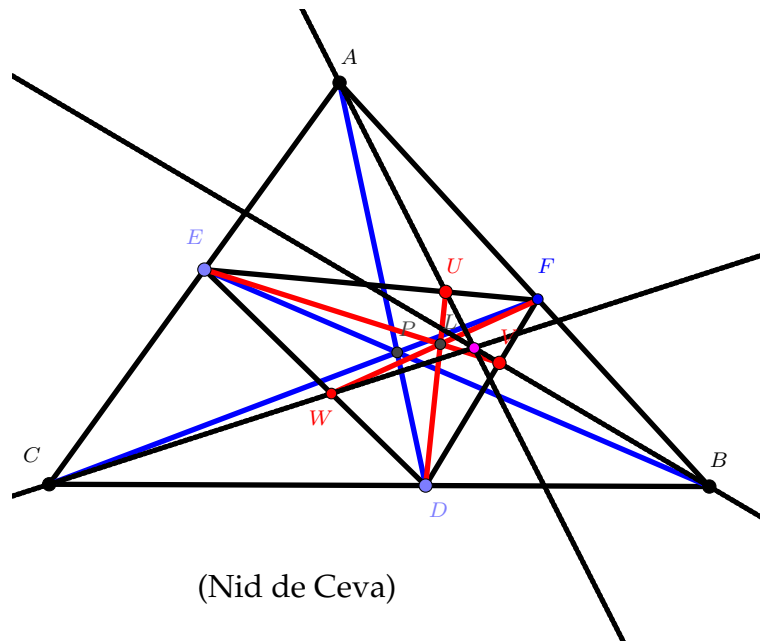
On note X l'intersection de (BD) et (AC) et Y l'intersection de (CE) et (AD) . On a la similitude de centre A qui envoie $B \rightarrow C$, $C \rightarrow D$ et $D \rightarrow E$. Celle ci envoie donc $(AC) \rightarrow (AD)$ et $(BD) \rightarrow (CE)$ et finalement $X \rightarrow Y$. On en déduit que $\frac{AX}{XC} = \frac{AY}{YD}$. On note I l'intersection de (AP) et (CD) . On utilise Ceva dans le triangle ACD où les droites (AI) , (XD) et (YC) sont concourantes. On a alors

$$\frac{CI \cdot DY \cdot AX}{ID \cdot YA \cdot XC} = 1$$

et donc $\frac{CI}{ID} = 1$.

**Exercice 7**

Soit ABC un triangle, et $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$ tel que (AD) , (BE) , (CF) soient concourantes. Soient $U \in (EF)$, $V \in (DF)$, $W \in (DE)$ tel que (UD) , (VE) , (WF) soient concourantes. Montrer que (UA) , (VB) , (WC) sont concourantes.

**Solution de l'exercice 7**

On utilise trois fois (VI.4)

$$\text{Dans le triangle } AEF, \quad u = \frac{\sin \widehat{UAE}}{\sin \widehat{UAF}} = \frac{UE}{AE} \frac{AF}{UF}$$

$$\text{Dans le triangle } BDF, \quad v = \frac{\sin \widehat{VBF}}{\sin \widehat{VBD}} = \frac{VF}{BF} \frac{BD}{VD}$$

$$\text{Dans le triangle } CDE, \quad w = \frac{\sin \widehat{WCD}}{\sin \widehat{WCE}} = \frac{WD}{CD} \frac{CE}{WE}$$

Par Ceva dans le triangle ABC et dans le triangle DEF on a

$$\frac{AF}{FB} \frac{BD}{DC} \frac{CE}{EA} = 1, \quad \frac{EU}{UF} \frac{FV}{VD} \frac{DW}{WE} = 1.$$

Finalement

$$uvw = \frac{UE}{AE} \frac{AF}{UF} \frac{VF}{BF} \frac{BD}{VD} \frac{WD}{CD} \frac{CE}{WE} = 1$$

et par Ceva trigonométrique, les droites (UA) , (VB) , (WC) sont concourantes.

Exercice 8

Soit ABC un triangle aigu. On note A' le centre du carré dont un côté soit sur le segment BC et dont les deux autres sommets appartiennent à AB et AC respectivement. On note B' , C' les points construits de la même manière. Montrer que (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.

Solution de l'exercice 8

On trace les A'' , B'' , C'' tel que BCA'' , ACB'' et ABC'' soient des triangles rectangles en A'' , B'' et C'' à l'extérieur de ABC . Alors par homothétie on a A, A', A'' alignés, B, B', B'' alignés et C, C', C'' alignés. On note α, β, γ les angles du triangle ABC en A, B, C . Avec la loi des sinus

$$\begin{aligned} \sin \widehat{BAA''} &= \frac{BA''}{AA''} \sin \widehat{ABA''} = \frac{BA''}{AA''} \sin(\beta + \frac{\pi}{4}) \\ \sin \widehat{CAA''} &= \frac{CA''}{AA''} \sin \widehat{ACA''} = \frac{CA''}{AA''} \sin(\gamma + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\sin \widehat{BAA''}}{\sin \widehat{CAA''}} = \frac{\sin(\beta + \frac{\pi}{4})}{\sin(\gamma + \frac{\pi}{4})}$$

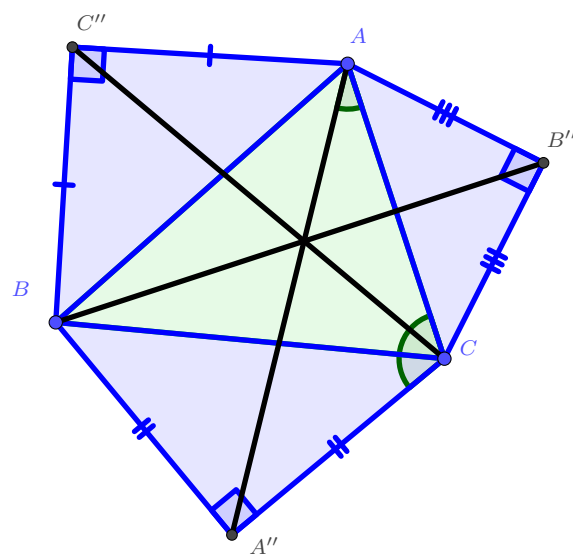
De même

$$\frac{\sin \widehat{ACC''}}{\sin \widehat{BCC''}} = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}{\sin(\beta + \frac{\pi}{4})}, \quad \frac{\sin \widehat{CBB''}}{\sin \widehat{ABB''}} = \frac{\sin(\gamma + \frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}$$

Finalement

$$\frac{\sin \widehat{ACC''}}{\sin \widehat{BCC''}} \frac{\sin \widehat{BAA''}}{\sin \widehat{CAA''}} \frac{\sin \widehat{CBB''}}{\sin \widehat{ABB''}} = \frac{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})}{\sin(\beta + \frac{\pi}{4})} \frac{\sin(\beta + \frac{\pi}{4})}{\sin(\gamma + \frac{\pi}{4})} \frac{\sin(\gamma + \frac{\pi}{4})}{\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})} = 1$$

Par Ceva trigonométrique, on conclut que les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes.



2 Entraînement de mi-parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle en B et soit D un point sur le segment $[BC]$. La droite (AD) coupe la parallèle à (AC) passant par B au point E . Montrer que la tangente au cercle circonscrit au triangle ABD en B coupe le segment $[EC]$ en son milieu.

Exercice 2

Il y a $n \geq 1$ places disposées pour le thé autour d'une table circulaire, et à chaque place se trouve un petit gâteau dans une assiette. Théo arrive le premier, s'assoit à la table et mange son gâteau (mais il n'est pas très bon). Ensuite, le Tyran fou arrive et dit à Théo qu'il sera seul, et qu'il doit sans cesse changer de siège, en mangeant à chaque fois le gâteau qui se trouve devant lui (s'il n'a pas encore été mangé). En réalité, le Tyran fou est très autoritaire et dit à Théo que, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, lorsqu'il se déplace pour la i -ème fois, il doit avancer de a_i places, et il lui remet la liste des instructions $a_1, \dots, a_{n-1}$. Théo n'aime pas les gâteaux, et il est libre de choisir, à chaque étape, de se déplacer dans le sens horaire ou antihoraire. Pour quelles valeurs de n le Tyran fou peut-il obliger Théo à manger tous les gâteaux ?

Exercice 3

On fixe un entier $n \geq 2$. Aurélien et Martin jouent à tour de rôle au jeu suivant. Le nombre 1 est initialement écrit au tableau. Lorsque c'est son tour, un joueur choisit un nombre k entre 1 et n qui n'a pas été choisi avant, regarde le nombre x qui est écrit au tableau, l'efface, et le remplace par le produit $k \cdot x$. Le premier joueur qui écrit un nombre divisible par n au tableau perd la partie. Si Aurélien commence à jouer, déterminer, en fonction de n , qui possède une stratégie gagnante.

Exercice 4

Soit ABC un triangle, ω son cercle circonscrit et D , E et F les points de contact du cercle inscrit à ABC avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. On note ω_A le cercle circonscrit au triangle AEF , ω_B le cercle circonscrit au triangle BFD et ω_C le cercle circonscrit au triangle CDE . On note X le second point d'intersection des cercles ω et ω_A , Y le second point d'intersection des cercles ω et ω_B et Z le second point d'intersection des cercles ω et ω_C .

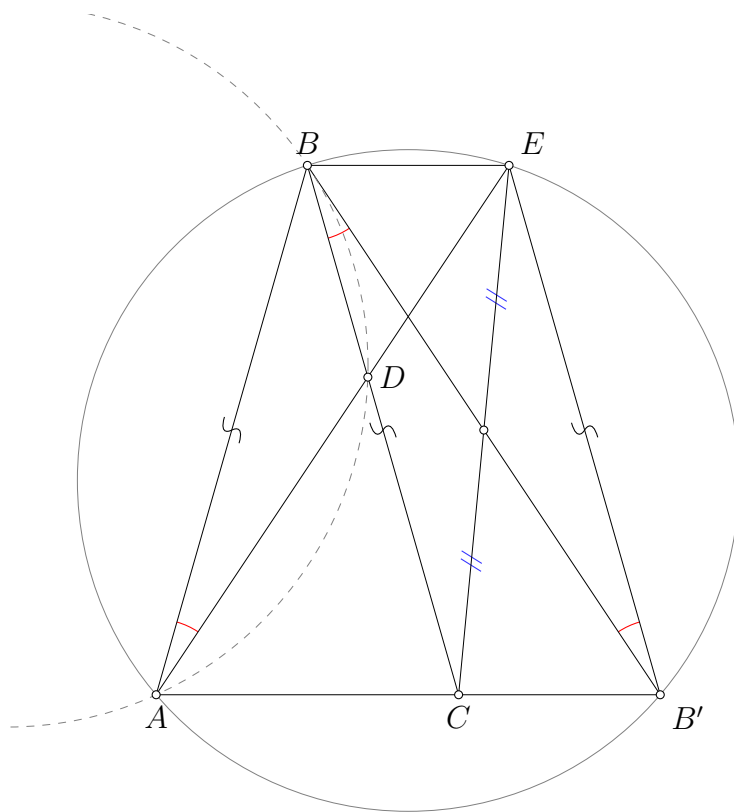
Montrer que les droites (XD) , (YE) et (ZF) sont concourantes.

Solutions

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle en B et soit D un point sur le segment $[BC]$. La droite (AD) coupe la parallèle à (AC) passant par B au point E . Montrer que la tangente au cercle circonscrit au triangle ABD en B coupe le segment $[EC]$ en son milieu.

Solution de l'exercice 1



Soit B' le point tel que le quadrilatère $BEB'C$ est un parallélogramme. Comme (CB') et (BE) sont parallèles, les points A, C et B' sont alignés. On a ensuite $EB' = BC = AB$, de sorte que le quadrilatère $BEB'A$ est un trapèze isocèle, il est donc cyclique. On a alors par chasse aux angles

$$\widehat{CBB'} = \widehat{BB'E} = \widehat{BAE},$$

de sorte que la droite (BB') est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC en B . Or la droite (BB') coupe le segment $[EC]$ en son milieu par propriétés du parallélogramme, donc la tangente en B coupe bien le segment $[EC]$ en son milieu.

Exercice 2

Il y a $n \geq 1$ places disposées pour le thé autour d'une table circulaire, et à chaque place se trouve un petit gâteau dans une assiette. Théo arrive le premier, s'assoit à la table et mange son gâteau (mais il n'est pas très bon). Ensuite, le Tyran fou arrive et dit à Théo qu'il sera seul, et qu'il doit sans cesse changer de siège, en mangeant à chaque fois le gâteau qui se trouve devant lui (s'il n'a pas encore été mangé). En réalité, le Tyran fou est très autoritaire et dit à Théo que, pour $i = 1, 2, \dots, n-1$, lorsqu'il se déplace pour la i -ème fois, il doit avancer de a_i places, et il lui remet la liste des instructions $a_1, \dots, a_{n-1}$. Théo n'aime pas les gâteaux, et il est libre de choisir, à chaque étape, de se déplacer dans le sens horaire ou antihoraire. Pour quelles valeurs de n le Tyran fou peut-il obliger Théo à manger tous les gâteaux ?

Solution de l'exercice 2

La réponse est $n = 2^k$ où $k \in \mathbb{N}$.

La première chose est de tester les configurations pour les petits cas. Ainsi, pour $n = 1$ il est clair que le Tyran gagne. Pour $n = 2$, le Tyran choisit $a_1 = 1$ et s'assure la victoire. L'idée est alors de montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que 2^k fonctionne. On vient donc de montrer que pour $k = 0$ et $k = 1$ on a une solution.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que le Tyran peut obliger Théo à manger tous les gâteaux. Montrons alors que le Tyran peut encore gagner pour $k + 1$.

Soit $a_1, \dots, a_{2^k-1}$ une solution pour le Tyran pour $n = 2^k$. Alors $2a_1, \dots, 2a_{2^k-1}, 1, 2a_1, \dots, 2a_{2^k-1}$ est une solution pour $n = 2^{k+1}$.

Numérotons les gâteaux autour du cercle de 1 à $2n$. On suppose que Théo est initialement sur la place du gâteau numéro 1. Alors par hypothèse de récurrence Théo va d'abord manger obligatoirement tous les gâteaux de numéro impair. Ensuite, il va se décaler d'une case et manger un gâteau sur une case paire. Enfin, encore par hypothèse de récurrence, Théo va manger tous les gâteaux sur les places paires ce qui achève la récurrence.

Maintenant il faut montrer que Théo arrivera à ne pas manger tous les gâteaux lorsque n n'est pas une puissance de 2. Supposons que n n'est pas une puissance de 2. Alors il existe un diviseur premier impair p de n . On va alors regrouper les gâteaux par groupe de $\frac{n}{p}$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on va noter $E_i = \{pk + i, 0 \leq k \leq \frac{n}{p} - 1\}$.

Alors initialement, Théo mange le gâteau numéro 1, c'est-à-dire un gâteau qui appartient à l'ensemble E_1 . L'objectif de Théo va alors d'être de ne jamais manger un gâteau de l'ensemble E_p . Pour ce faire, montrons que quelle que soit la place sur laquelle est assise Théo à un moment n'appartenant pas à l'ensemble E_p et l'instruction que lui donne le Tyran, Théo pourra s'assurer au coup d'après de ne pas manger un gâteau de l'ensemble E_p . Soit $k \in \{1, \dots, p-1\}$ tel que Théo mange un gâteau dont le numéro appartient à l'ensemble E_k . Et le Tyran donne l'instruction de se déplacer de l cases. Or si Théo se déplace de l cases, selon qu'il se déplace dans le sens horaire ou dans le sens anti-horaire, Théo va se retrouver sur un gâteau appartenant soit à l'ensemble E_{k-l} , soit à l'ensemble E_{k+l} (ou les indices sont pris mod p). Or, si $p|k-l$ et $p|k+l$, alors p divise leur différence, c'est-à-dire $2k$ donc $p|k$ ce qui est absurde. Donc, soit $p \nmid k-l$, soit $p \nmid k+l$ et donc Théo pourra s'assurer de ne pas atterrir dans l'ensemble E_p .

Exercice 3

On fixe un entier $n \geq 2$. Aurélien et Martin jouent à tour de rôle au jeu suivant. Le nombre 1 est initialement écrit au tableau. Lorsque c'est son tour, un joueur choisit un nombre k entre 1 et n qui n'a pas été choisi avant, regarde le nombre x qui est écrit au tableau, l'efface, et le remplace par le produit $k \cdot x$. Le premier joueur qui écrit un nombre divisible par n au tableau perd la partie. Si Aurélien commence à jouer, déterminer, en fonction de n , qui possède une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 3

Montrons que Martin gagne si et seulement si n est un nombre impair squarefree.

Tout d'abord, si $n = 2x$ est un nombre pair, Aurélien peut s'assurer de gagner grâce à une stratégie miroir. Il commence par choisir x , puis choisit $n - k$ lorsque Martin choisit $k < n$. Si Martin choisit un nombre pair, il a perdu, et s'il choisit un nombre impair k qui n'a pas été choisi avant, $n - k$ sera un autre nombre impair qui n'a pas encore été choisi. Martin sera donc bien le premier à choisir un nombre pair et à perdre la partie.

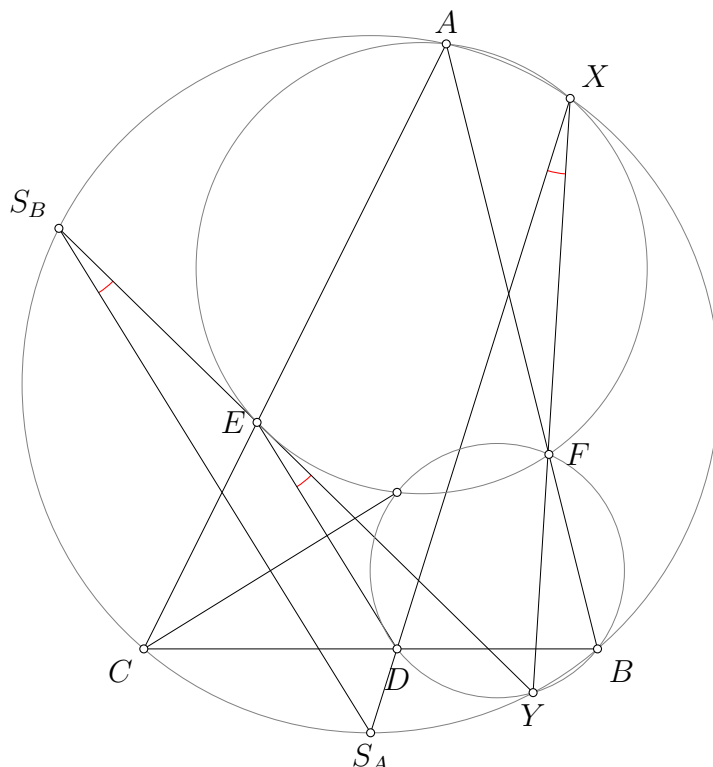
Cependant, si n est impair et squarefree, c'est au tour de Martin de gagner grâce à une stratégie miroir. En effet, lorsque Aurélien choisit le nombre $k < n$, Martin peut choisir le nombre $n - k$, qui est tel que $(n, k) = (n - k, k)$. Ainsi, Martin ne va jamais rajouter de facteur premier dans le nombre écrit au tableau, et ce sera donc forcément Aurélien qui écrira un nombre divisible par n en premier.

Enfin, supposons que n soit un nombre impair de la forme $p^\alpha \cdot r$, avec p un nombre premier, $\alpha \geq 2$ et $(r, p) = 1$. Aurélien peut s'assurer de gagner s'il commence par choisir $p^{\alpha-1} \cdot r$. En effet, le premier joueur qui choisira un multiple de p aura perdu la partie. Or, entre 1 et n , il y en a $p^{\alpha-1} \cdot r$, qui est impair. Il y a donc un nombre pair de nombres qui sont premiers avec p . Martin sera donc le premier à devoir écrire un nombre qui est divisible par p , ce qui conclut.

Exercice 4

Soit ABC un triangle, ω son cercle circonscrit et D, E et F les points de contact du cercle inscrit à ABC avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. On note ω_A le cercle circonscrit au triangle AEF , ω_B le cercle circonscrit au triangle BFD et ω_C le cercle circonscrit au triangle CDE . On note X le second point d'intersection des cercles ω et ω_A , Y le second point d'intersection des cercles ω et ω_B et Z le second point d'intersection des cercles ω et ω_C .

Montrer que les droites (XD) , (YE) et (ZF) sont concourantes.

Solution de l'exercice 4

Tout d'abord, la définition de X implique qu'il est le centre de la similitude qui envoie E sur C et F sur B . On a donc $\triangle XEC \sim \triangle XFB$ et les égalités de rapport qui en découlent donnent

$$\frac{XC}{XB} = \frac{EC}{FB} = \frac{DC}{DB}.$$

D'après le théorème de la bissectrice, cela implique que D est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{CXB}$. Soit S_A le pôle Sud du sommet A dans le triangle ABC . On a donc montré que X, D et S_A sont alignés. De la même manière, en introduisant S_B le milieu de l'arc AC , les points Y, E et S_B sont alignés.

Soit P le point d'intersection des droites (XS_A) et (YS_B) . Il est classique que les droites (DE) et (S_AS_B) sont perpendiculaires à la droite (CI) , elles sont donc parallèles. On a alors

$$\widehat{DEY} = \widehat{DEP} = \widehat{S_AS_BP} = \widehat{S_AS_BY} = \widehat{S_AXY} = \widehat{DXY}.$$

Ainsi, les points E, D, Y et X sont cocycliques, et on note ω_1 le cercle obtenu.

De la même façon, on montre que les points D, F, Z et X ainsi que les points F, E, Y et Z sont cocycliques, et on note ω_2 et ω_3 sont cocycliques. Les axes radicaux de ces trois cercles, à savoir (XD) , (EY) et (FZ) sont alors concourants.

Remarque : Le point P de concours est en fait le centre de l'homothétie qui envoie le cercle inscrit sur le cercle circonscrit du triangle ABC .

3 Deuxième partie : Algèbre et Arithmétique

1 Arithmétique : suites d'entiers (Erik et Eva)

Nous avons commencé le cours par un rappel d'idées/lemmes qui peuvent servir dans des problèmes de suites d'entiers :

- une suite d'entiers convergente est stationnaire
- une suite d'entiers positifs décroissante est stationnaire
- si une suite d'entiers va de a à b avec $a < b$ en augmentant de au plus 1, elle prend toutes les valeurs entières entre a et b
- lorsqu'on a une relation de divisibilité : $a_n \mid b_n$, il peut être judicieux d'introduire la suite du quotient $k_n = \frac{b_n}{a_n}$
- tester les petits cas pour remarquer des propriétés
- regarder les facteurs premiers, parfois le plus petit
- si une suite d'entiers définie par récurrence et bornée, alors est périodique à partir d'un certain rang (dans le sens que l'on a un entier k et une fonction f tels que $a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \dots, a_{n+k-1})$)
- le postulat de Bertrand : pour tout $n > 1$, il existe un nombre premier p vérifiant $n < p < 2n$ (ce résultat n'est pas particulièrement en lien avec les suites d'entiers, mais est utile dans un exercice du TD)

Exercices

Exercice 1 (JBMO Shortlist 2021 N4)

Eva et Erik jouent à un jeu. Erik choisit S un ensemble de nombres premiers puis Eva choisit une suite (x_n) d'entiers strictement positifs. Erik choisit enfin $M \in \mathbb{N}$ et $p \in S$.

Eva gagne si à partir d'un certain rang, $p^M \mid x_n$. Qui a une stratégie gagnante?

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que pour tout $n \geq 0$, a_{n+1} est le plus petit entier strictement positif tel que $a_{n+1} + a_n + \dots + a_0$ est un multiple de $n + 1$. Montrer que la suite est stationnaire.

Exercice 3

Trouver toutes les suites d'entiers strictement positifs (a_n) telle que pour tout entier n ,

$$a_n \mid 2^{a_{n+1}} - 1$$

Exercice 4 (BMO 2021 N2)

Pour tout $n > 1$, soit $p(n)$ le plus grand diviseur premier de n . Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = 2$ et pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = a_n + p(a_n)$. Trouver tous les entiers k tels que k^2 appartient à la suite (a_n) .

Exercice 5 (Saint-Petersburg Math Olympiad 2017 P2)

Soit (a_n) une suite d'entiers naturels telle que $a_1 > 10$ et pour tout entier n ,

$$a_{n+1} = a_n + \text{pgcd}(n+1, a_n)$$

On suppose de plus qu'il existe un entier i_0 tel que $a_{i_0} = 2i_0$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers i tels que $a_i = 2i$

Exercice 6 (OFM 2025 P4)

Trouver toutes les suites (a_n) telles que :

- il existe M tel que pour tout n , $0 < a_n < M$
- pour tout nombre premier p et pour tout n , p divise : $a_n \dots a_{n+p-1} - a_{n+p}$

Exercice 7 (RMM 2015 P1)

Existe-t-il une suite d'entier (a_n) telle que

$$\text{pgcd}(a_n, a_m) = 1 \iff |m - n| = 1$$

Exercice 8 (EGMO 2015 P4)

Existe-t-il une suite $a_1, \dots$ d'entiers strictement positifs telle que pour tout entier strictement positif n ,

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$$

Exercice 9 (P2 test français 2023/2024)

Soit $a_1, \dots$ une suite d'entiers strictement positifs strictement croissante telle que pour tout $k \geq 1$,

$$a_{k+1} \mid 2(a_1 + \dots + a_k)$$

On suppose que l'ensemble des diviseurs premiers d'au moins un terme de la suite est infini. Montrer que pour tout entier strictement positif divise au moins un terme de la suite.

Exercice 10 (N1 2015)

On définit une suite par $u_0 = M + \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n \lfloor u_n \rfloor$. Déterminer tous les entiers $M \geq 1$ pour lesquels la suite prend une valeur entière.

Exercice 11 (N1 BMOSL 2018)

Pour n, m des entiers, on note $d(m, n)$ le nombre de nombres premiers distincts divisant m et n . Existe-t-il une suite $a_1, \dots$, croissante telle que $a_1 > 2025^{2025}$ et pour tous entiers distincts m, n , on a $d(a_m, a_n) = d(m, n)$?

Exercice 12 (N3 2022)

Soit $a > 1$ et $d > 1$ des entiers premiers entre eux, on définit la suite (x_n) ainsi : $x_1 = 1$ et

$$\forall k \geq 1, x_{k+1} = \begin{cases} \frac{x_k}{a} & \text{si } a \mid x_k \\ x_k + d & \text{sinon.} \end{cases}$$

Trouver le plus grand n tel qu'il existe k tel que $a^n \mid x_k$

Exercice 13 (P2 test français 2020)

On dit qu'une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'entiers naturels non nuls est sicilienne si

$$u_{n+1} \in \{u_n/2, u_n/3, 2u_n + 1, 3u_n + 1\}$$

pour tout $n \geq 0$. Démontrer que, pour tout entier $k > 1$, il existe une suite sicilienne $(u_n)_{n \geq 0}$ et un entier $\ell > 0$ tels que $u_0 = k$ et $u_\ell = 1$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Evidemment c'est Eva qui a une stratégie gagnante !

En effet, elle indice les éléments de $S : p_1, p_2, \dots$ et construit la suite suivante :

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ &\vdots \\ x_n &= p_1^n \cdots p_n^n \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque Erik choisit $M \in \mathbb{N}$ et $p_i \in S$, pour $n \geq \max(i, M)$ on a bien $p^M | x_n$. Ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

Comme dit dans les conseils, vu qu'on a une divisibilité, on introduit la suite : $k_n = \frac{a_n}{n}, n \geq 1$. Montrons que la suite (k_n) est décroissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot k_n = a_0 + \dots + a_n$ donc $k_n \cdot (n+1) = a_0 + \dots + a_n + k_n$. Par définition de a_{n+1} on a $a_{n+1} \leq k_n$ et donc $k_{n+1} \leq k_n$.

C'est une suite d'entiers naturels décroissante, elle est donc stationnaire, c'est-à-dire qu'il existe $n_0, k \in \mathbb{N}$ tels que pour $n \geq n_0$, $k_n = k$.

Ainsi pour $n \geq n_0 + 1$, $n \cdot k = a_0 + \dots + a_n$ et $(n-1) \cdot k = a_0 + \dots + a_{n-1}$ donc $a_n = k$. Ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

On va montrer que seule la suite constante égale à 1 marche.

Supposons par l'absurde qu'on ait un terme différent de 1 : a_N . Après ce terme, tous ceux d'après sont aussi différents de 1. On pose pour tout $n \geq N$: p_n le plus petit diviseur premier de a_n .

Une première remarque est que p_n ne peut être pair car il divise un nombre impair. On a donc : $2^{a_{n+1}} \equiv 1 \pmod{p_n}$. On note w l'ordre de 2 modulo p_n . Il divise $p_n - 1$ et est différent de 1 donc a un facteur premier plus petit que p_n . Mais comme il divise a_{n+1} , $p_{n+1} < p_n$.

La suite (p_n) est donc strictement décroissante, or c'est une suite d'entiers naturels, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 4

Première Partie

On indice les nombres premiers $p_1, p_2, \dots$. En écrivant les premiers termes de la suite, on peut deviner comment la suite va se comporter.

La suite est constituée de bloc de termes comme il suit :

$$\underbrace{p_i^2, p_i(p_i+1), p_i(p_i+2), \dots, p_i p_{i+1}}_{(i)} \underbrace{p_{i+1}(p_i+1), p_{i+1}(p_i+2), \dots, p_{i+1}^2}_{(ii)}$$

En effet, procédons par récurrence, à partir de 2 :

Pour $k = 2, a_2 = 4$, ensuite

1. $a_k = p_i(p_i + k)$ et $p_i + k < p_{i+1}$, donc a_k n'a pas de facteur premier plus grand que p_k , donc $a_{k+1} = a_k + p_i = p_i(p_i + k + 1)$

2. $a_k = p_i(p_i + k)$ et $p_i + k = p_{i+1}$, alors $p(a_k) = p_{i+1}$ donc $a_{k+1} = a_k + p_{i+1} = p_{i+1}(p_i + 1)$

3. $a_k = p_{i+1}(p_i + k)$ et $p_i + k < p_{i+1}$, alors $a_{k+1} = a_k + p_{i+1} = p_{i+1}(p_i + k + 1)$

Ainsi on a bien des blocs qui se délimitent par les carrés des nombres premiers.

Deuxième Partie

On remarque donc que les carrés de nombre premier apparaissent dans la suite.

De plus, il n'y a pas d'autres carrés, comme on peut le voir dans le bloc représenté ci-dessus, car dans le bloc (i) , $v_{p_i} = 1$ car par le postulat de Bertrand, $p_i + k$ atteint p_{i+1} avant $2p_i$ et dans le bloc (ii) , $v_{p_{i+1}} = 1$ (excepté des deux carrés).

Ainsi, les carrés des nombres premiers sont les seuls carrés qui apparaissent.

Solution de l'exercice 5

On procède par l'absurde.

Soit k le plus grand entier tel que $a_k = 2k$ et p le plus petit diviseur de $k - 1$.

On remarque que $a_{k+1} = 2k + \text{pgcd}(k + 1, 2k) = 2k + \text{pgcd}(k - 1, 2)$ Et par récurrence, pour $i + 1 < p$,

$$a_{k+i} = 2k + i$$

car

$$\text{pgcd}(k + i, 2k + i - 1) = \text{pgcd}(i + 1, k - 1) = 1$$

.

Donc $a_{k+p-2} = 2k + p - 2$ et donc

$$a_{k+p-1} = 2k + p - 2 + \text{pgcd}(p, k - 1) = 2(k + p - 1)$$

. On a trouvé un $i > k$ tel que $a_i = 2i$, on en a donc une infinité, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6

Soit p un nombre premier plus grand que M^2 . Soit n un entier, modulo p , on a :

$$a_n a_{n+1} \dots a_{n+p-1} \equiv a_{n+p}$$

$$a_{n+1} \dots a_{n+p} \equiv a_{n+p+1}$$

Ce qui donne :

$$a_{n+p}^2 (a_{n+1} \dots a_{n+p-1}) \equiv a_n a_{n+p+1} (a_{n+1} \dots a_{n+p-1})$$

En multipliant le côté gauche au côté droit et vice-versa. On peut diviser par la parentèse car tous les nombres sont premiers avec p .

Ainsi, p divise $a_{n+p}^2 - a_n a_{n+p+1}$ or $|a_{n+p}^2 - a_n a_{n+p+1}| \leq M^2$ donc $a_{n+p}^2 = a_n a_{n+p+1}$.

La suite est définie par récurrence et est bornée, elle est donc périodique à partir d'un certain rang. On remarque alors que si a_{n+p} prend la valeur maximale de la période, $a_{n+p+1} = \frac{a_{n+p}^2}{a_n} \geq a_{n+p}$ donc $a_{n+p+1} = a_{n+p}$. Ainsi, la suite est constante à partir d'un certain rang.

Alors la relation obtenue nous donne que la suite est en fait constante.

Réciproquement, on vérifie que les suites constantes marchent bien par petit Fermat.

Solution de l'exercice 7

On choisit deux suites infinies de nombres premiers tous deux à deux distincts : (p_n) et (q_n) . On pose alors :

$$\forall k \geq 1, x_k = p_k \cdot q_k \cdot \begin{cases} \prod_{i=1}^{k-2} p_i & \text{si } 2 \mid k \\ \prod_{i=1}^{k-2} q_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi si $|m - n| = 1$, on vérifie que a_m et a_n n'ont pas de facteur premier commun et si $m \geq n + 2$, a_m et a_n ont soit p_n soit q_n en commun donc ne sont pas premiers entre eux.

Solution de l'exercice 8

On pose $b_n = a_{n+1} - a_n$, donc $b_n = \sqrt{a_n + a_{n-1}}$, donc :

$$b_{n+1}^2 - b_n = (a_{n+1} + a_n) - (a_n + a_{n-1}) = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) = b_n + b_{n-1}$$

Ainsi, $b_{n+1} > b_n$ et : $b_n + b_{n-1} = (b_{n+1} + b_n)(b_{n+1} - b_n) \geq b_{n+1} + b_n$ soit $b_{n-1} \geq b_{n+1}$, ce qui contredit la croissance de (b_n) .

Solution de l'exercice 9

Pour tout $k \geq 0$, on pose $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ et $b_k = 2s_k/a_{k+1}$. Il s'agit là d'un entier lorsque $k \geq 1$, mais également lorsque $k = 0$, car $b_0 = 2s_0/a_1 = 0$. De la sorte, $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = s_k(1 + 2/b_k)$. L'inégalité $a_{k+2} > a_{k+1}$ se réécrit alors comme

$$\frac{2s_{k+1}}{b_{k+1}} = a_{k+2} > a_{k+1} = \frac{2s_k}{b_k} = \frac{2s_{k+1}}{b_k + 2},$$

de sorte que $b_{k+1} < b_k + 2$, c'est-à-dire $b_{k+1} \leq b_k + 1$.

Soit maintenant p un nombre premier impair, arbitrairement grand, qui divise un entier a_k . Il divise aussi $2s_{k-1}$, et même s_{k-1} ; on note ℓ le plus petit entier naturel non nul tel que p divise s_ℓ . Comme $b_{\ell-1}s_\ell = (b_{\ell-1}+2)s_{\ell-1}$, on en déduit que p divise $b_{\ell-1}+2$ donc que $b_{\ell-1} \geq p-2$. Ainsi, la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ prend des valeurs arbitrairement grandes.

Soit alors n un entier naturel non nul, puis c un entier tel que $2cn \geq b_1 + 3$, et k le plus petit entier tel que $b_k \geq 2cn - 1$. Puisque $b_k \leq b_{k-1} + 1$, on sait que $b_{k-1} = 2cn - 2$. Ainsi, $2n$ divise $2cns_{k-1} = (b_{k-1} + 2)s_{k-1} = b_{k-1}s_k$. Comme PGCD($2n, b_{k-1}$) divise $2cn - b_{k-1} = 2$, on en déduit que n divise donc s_k . Mais alors n divise également $(b_k + 2)s_k = b_k s_{k+1} = (2cn - 1)s_{k+1}$, donc divise aussi s_{k+1} . On en conclut comme souhaité que n divise $s_{k+1} - s_k = a_k$.

Solution n°2 de l'exercice 9

Pour tout $k \geq 0$, on pose $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ et $b_k = 2s_k/a_{k+1}$. Il s'agit là d'un entier lorsque $k \geq 1$, mais également lorsque $k = 0$, car $b_0 = 2s_0/a_1 = 0$. On constate alors que

$$b_{k+1}a_{k+2} = 2s_{k+1} = 2s_k + 2a_{k+1} = (b_k + 2)a_{k+1}.$$

Puisque $a_{k+1} < a_{k+2}$, on en déduit que $b_{k+1} < b_k + 2$, c'est-à-dire $b_{k+1} \leq b_k + 1$. En particulier, $b_k \leq k$ pour tout entier $k \geq 0$.

Soit maintenant p un nombre premier arbitrairement grand, qui divise un entier a_k mais pas a_1 , de sorte que $k \geq 2$. Comme a_k divise $b_{k-1}a_k = (b_{k-2} + 2)a_{k-1}$, et en enchaînant de telles relations de divisibilité, on constate que p et a_k divisent $(b_0 + 2)(b_1 + 2) \dots (b_{k-2} + 2)a_1$. Par conséquent, p divise l'un des facteurs $b_i + 2$, et $b_i \geq p - 2$. Puisque l'on a choisi p arbitrairement grand, la suite $(b_k)_{k \geq 0}$ elle-même prend donc des valeurs arbitrairement grandes. Comme elle augmente d'au plus 1 à chaque fois et commence par valoir $b_0 = 0$, elle prend même toutes les valeurs entières positives.

Enfin, soit n un entier naturel non nul, et soit $\ell \geq n$ le plus petit entier tel que $b_\ell \geq n$. Puisque $n \leq b_\ell \leq b_{\ell-1} + 1 \leq (n-1) + 1 = n$, on sait que $b_\ell = n$ et $b_{\ell-1} = n-1$. Ainsi,

$$na_{\ell+1} = b_\ell a_{\ell+1} = (b_{\ell-1} + 2)a_\ell = (n+1)a_\ell,$$

donc n divise a_ℓ .

Solution de l'exercice 10

Essayons de regarder à quelle condition u_1 est entier, puis si u_1 est non entier, à quelle condition u_2 est entier pour comprendre ce qui se passe. On a $u_1 = (M + \frac{1}{2})M$ qui est un entier si et seulement si M est pair.

Si M est impair, posons $M = 2k+1$, on a $u_1 = M^2 + k + \frac{1}{2}$. On a alors $u_2 = (M^2 + k)(M^2 + k + \frac{1}{2})$ qui est entier si et seulement si $M^2 + k$ est pair. Or $M^2 + k = 4k^2 + 4k + 1$, donc si et seulement si k est impair. Ainsi si M est congru à 3 modulo 4, u_2 est entier, sinon u_2 ne l'est pas.

Il semble qu'à chaque fois le cas problématique soit $M \equiv 1 \pmod{2^k}$. En se rappelant pleins d'exos fonctionnant similairement (P2 Test français novembre 2020, BxMO 2021 etc), on pose pour $M > 1$, $M = 1 + 2^k \alpha$ avec α impair. Notons que si un entier x est de la forme $1 + 2^\ell \beta$ avec β impair et $\ell \geq 1$, on a :

$$(x + \frac{1}{2}) \lfloor (x + \frac{1}{2}) \rfloor = (1 + 2^\ell \beta)^2 + \frac{1}{2}(1 + 2^\ell \beta) = \frac{1}{2} + 1 + 2^{\ell-1}(\beta + 4\beta + 2^{\ell+1}\beta^2)$$

en posant $\beta' = \beta + 4\beta + 2^{\ell+1}\beta^2$ qui est impair, on a $(x + \frac{1}{2}) \lfloor (x + \frac{1}{2}) \rfloor = \frac{1}{2} + 1 + 2^{\ell-1}\beta'$

Ainsi comme $u_0 = \frac{1}{2} + 1 + 2^k \alpha$, l'observation précédente montre par récurrence immédiate que pour tout $k \leq n$, il existe un entier α_k impair que $u_k = \frac{1}{2} + 1 + 2^{n-k} \alpha_k$. Pour $k = n$, on obtient que $u_n = \frac{1}{2} + 1 + \alpha_n$, donc $u_{n+1} = (1 + \alpha_n)(\frac{1}{2} + 1 + \alpha_n)$ est entier car $1 + \alpha_n$ est pair. Ainsi si $M > 1$ la suite prend une valeur entière.

Si $M = 1$, on a $u_0 = \frac{3}{2}$, et en calculant $u_1 = \frac{3}{2}$. Par récurrence immédiate pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \frac{3}{2}$ donc la suite ne prend jamais de valeurs entières.

Ainsi la suite prend une valeur entière si et seulement si $M > 1$.

Solution de l'exercice 11

L'idée est de renuméroter les nombres premiers : on envoie $\prod p_i^{\alpha_i}$ sur $\prod p_{f(i)}^{\alpha_i}$ avec f bijective et qui prend des valeurs assez grandes. Le problème est qu'on ne va pas respecter les conditions de taille a priori. On va donc devoir ruser.

On prend (a_i) et (b_i) deux suites de nombres premiers tous deux à deux distincts et plus grands que $2025^{2025} + 1$. On pose alors : $a_1 = 2025^{2025} + 1$ puis on construit la suite par récurrence. Une fois les n premiers termes construits, si $n+1 = \prod p_i^{\alpha_i}$

$$a_{n+1} = b_{n+1}^N \prod a_i^{\alpha_i}$$

Avec N tel que $a_{n+1} > a_n$. La suite est alors clairement croissante, et les termes que l'on rajoute ne changent pas la deuxième condition donc la suite marche !

Solution de l'exercice 12

Soit l tel que $a^{l-1} < d < a^l$. On va montrer que $n = l$.

Première partie : $n \leq l$. On montre par récurrence que tous les termes de la suite (x_n) sont strictement inférieurs à $ad (< a^{l+1})$ et donc jamais divisibles par a^{l+1} .

On appelle un pic un terme de la suite qui est divisible par a . On suppose que la propriété est vraie jusqu'au k -ème pic : $x_k < ad$. Alors on a $x_{k+1} = x_k/a < ad$.

Ensuite, on ajoute d jusqu'à retomber sur un pic. Sauf que l'on va ajouter au plus $a - 1$ fois d avant de retomber sur un pic, donc le prochain pic sera inférieur à $d + (a - 1)d = ad$, comme voulu.

On a alors le résultat par récurrence.

Deuxième partie : on a k tel que $a^l \mid x_k$. On a montré ci-dessus que la suite est bornée, elle est donc périodique. On va montrer que 1 est dans la période. Soit $x_k = x_m$ la première fois que deux termes sont égaux. Et supposons par l'absurde que $k > 1$.

- Si $x_m > d$, $x_{m-1} < ad < x_m \cdot a$ (par le paragraphe précédent), donc $x_{m-1} = x_m - d$ et de même $x_{k-1} = x_k - d$ donc $x_{k-1} = x_{m-1}$, absurde !
- Si $x_m \leq d$, $x_m < d + x_{m-1}$ donc $x_{m-1} = x_m \cdot a$ et de même $x_{k-1} = x_k \cdot a$ donc $x_{k-1} = x_{m-1}$, absurde !

Ainsi, on peut prendre k grand tel que $x_k = 1$. On a alors :

$$x_k = 1, x_{k-1} = a, \dots, x_{k-m} = a^m, x_{k-m-1} = a^m - d$$

Ainsi, $x_{k-m-1} > 0$ implique que $m > l - 1$ et donc que $m = l$.

Solution de l'exercice 13

Nous allons démontrer, pour tout entier $k \geq 2$, la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante : il existe une suite sicilienne finie $(u_0, \dots, u_\ell)$ telle que $u_0 = k$ et $u_\ell < k$.

La propriété $\mathcal{P}_k$ est immédiate si k est pair, puisqu'il suffit de choisir $u_1 = k/2$. On suppose donc k impair. Soit α et κ les entiers naturels non nuls tels que $k = 2^\alpha \kappa - 1$, l'entier κ étant impair. On construit alors notre suite sicilienne comme suit.

Tout d'abord, pour tout $i \leq \alpha - 1$, on pose $u_{2^i} = 2^{\alpha-i} 3^i \kappa - 1$ et $u_{2^{i+1}} = 2^{\alpha-i} 3^{i+1} \kappa - 2$. On pose ensuite $u_{2^\alpha} = 3^\alpha \kappa - 1$ et $u_{2^{\alpha+1}} = (3^\alpha \kappa - 1)/2$, qui est bien un entier puisque κ est impair. Enfin, pour tout $i \leq \alpha$, on pose $u_{2^{\alpha+2+i}} = 3^{\alpha-i} \kappa$. On vérifie alors aisément que la suite $(u_0, \dots, u_{3^{\alpha+2}})$ est sicilienne. En effet, on a $u_{2^{i+1}} = 3u_{2^i} + 1$ et $u_{2^{i+2}} = u_{2^{i+1}}/2$ pour tout $i \leq \alpha$, puis $u_{2^{\alpha+1}} = u_{2^\alpha}/2$ et $u_{2^{\alpha+2}} = 2u_{2^{\alpha+1}} + 1$, et on a également $u_{2^{\alpha+3+i}} = u_{2^{\alpha+2+i}}/3$ pour tout $i \leq \alpha - 1$. Puisque $u_0 = k$ et $u_{3^{\alpha+2}} = \kappa \leq (k+1)/2 < k$, cela achève de démontrer la propriété $\mathcal{P}_k$.

Forts de cette propriété, on démontre enfin l'assertion de l'énoncé par récurrence sur k .

2 Algèbre : Introduction aux nombres réels (Martin)

Introduction

En algèbre aux Olympiades, on manipule principalement trois ensembles de nombres : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Sur la droite des réels, il est assez aisé de dessiner $\mathbb{Z}$: on fait des croix à intervalles réguliers et on repère tout de suite le caractère discret et comment on va pouvoir en tirer parti (transformation de $x > y$ en $x \geq y + 1$ par exemple).

Il est déjà plus compliqué de dessiner l'ensemble $\mathbb{Q}$ sur cette même droite. Si les rationnels étaient des points, il faudrait que ces points soient partout sur la droite (et qu'entre deux points, il y ait systématiquement un autre point).

L'ensemble $\mathbb{R}$, qui est l'ensemble qui nous intéresse dans ce cours, est également difficile à concevoir. Il y a deux raisons à cela : la première raison est que l'ensemble $\mathbb{R}$ est très gros, si gros qu'il est impossible de ranger ses éléments en file indienne pour leur donner un numéro. La deuxième raison est notre difficulté à concevoir des quantités arbitrairement petites ou arbitrairement grandes. Pour s'en rendre compte, on pourra tenter de se faire une image mentale d'une salle contenant cent millions de personnes, et de se rendre compte que cette image sera sans doute identique à celle que l'on se fait d'une salle contenant un million de personnes. Les deux images seront probablement les mêmes, dû à notre difficulté à imaginer des ensembles très grands. De même, il est rare que l'on puisse distinguer avec le facteur 1000 qui leur est dû un micromètre d'un nanomètre sur une règle graduée.

Cet obstacle conceptuel est généralement dépassé pendant la première année de post-bac via une initiation au langage infinitésimal, par exemple dans un cours de topologie réelle. Malheureusement, quelques exercices d'Olympiades, sans appeler spécifiquement de connaissances nouvelles, exigent une certaine aisance avec les réels pour être résolus. Le but de ce cours est de démarrer cette initiation. Même s'ils ne sont pas nécessaires pour aborder les exercices d'Olympiades, on définit certains concepts parce que ce sont des objets naturels (infimum, supremum, limite, ouvert, fermé) qui permettent d'orienter la recherche dans les exercices, mais aussi parce qu'ils illustrent très bien les intuitions que l'on essaye de faire passer.

Les objectifs sont alors les suivants :

- Avoir une meilleure intuition de l'infiniment petit et de l'infiniment grand et s'en servir.
- Comprendre la différence entre les informations " $u_n < 1$ pour tout n " et " $u_n \leq c < 1$ pour tout n " et s'en servir.

Ce cours reprend largement les idées et exercices de l'excellent TD de Benoît donné au groupe E lors du stage de Valbonne 2024.

Notion de supremum et infimum

Donnons quelques problématiques liées à l'ensemble des réels.

Une énorme différence entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{R}$ survient lorsqu'on veut ordonner les éléments. En effet, un ensemble d'entiers borné, par exemple un ensemble d'entiers compris entre -100 et

100, admet toujours un minimum et un maximum, que l'on peut utiliser dans notre raisonnement. En revanche, l'intervalle $]0, 1]$ est un ensemble borné de réels compris entre 0 et 1 mais qui ne contient pas de plus petit élément (il contient en revanche un plus grand élément).

Ainsi, **lorsqu'on considère un ensemble infini de réels, on fera très attention au fait qu'on ne peut pas toujours fixer un plus petit élément.**

Si l'on reprend l'exemple de l'intervalle $]0, 1]$, le nombre 0 joue quand même un rôle particulier : il est plus petit que tous les éléments, et c'est le plus grand nombre avec cette propriété. Comment formaliser son rôle ?

Deuxième problématique : la formalisation des manipulations de quantités arbitrairement grandes et petites. Considérons la suite $(1/n)$. Celle-ci prend des valeurs de plus en plus petites, sans pour autant que 0 soit un élément de cette suite. Comment formaliser cette intuition que l'on se rapproche de plus en plus de 0.

Dans toute la suite, on utilisera $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ pour désigner des quantités qui sont arbitraires mais qui ont vocation à être petites.

La proposition-définition suivante est un axiome fondateur qui permet de construire toutes les propriétés que l'on verra par la suite.

Proposition 1 (Propriété fondamentale de $\mathbb{R}$). Soit A une partie *non vide* et majorée de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, appelé *supremum* de A , et est noté $\sup A$.

Soit A une partie *non vide* et minorée de $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, appelé *infimum* de A , et est noté $\inf A$.

Autrement dit, on n'a pas le droit de considérer le minimum de l'ensemble A (car celui-ci n'existe peut-être pas, comme c'est le cas pour $]0, 1]$), mais on a le droit de considérer son infimum, le plus grand des éléments inférieurs à tous les éléments de A . Le caractère non vide est important.

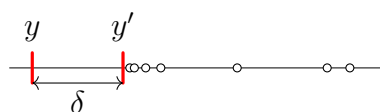
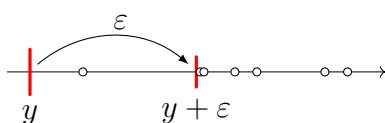
Cette définition se concrétise par la propriété suivante :

Proposition 2 (caractérisation du $\sup$ et de l' $\inf$). Soit A une partie non vide et minorée. $\inf A$ est l'unique réel y vérifiant

- (1) $y \leq x$ pour tout $x \in A$;
- (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, x < y + \varepsilon$.

Démonstration.

$\inf A$ vérifie les propriétés (1) et (2). Soit y l' $\inf$ de A . Comme y est un minorant de A , y vérifie (1). Supposons alors que y ne vérifie pas (2) et qu'il existe ε tel que $y + \varepsilon \leq x$ pour tout x de A . Alors $y + \varepsilon$ est un minorant de A qui est supérieur strictement à y , contredisant sa définition.



Unicité : Soient y et y' deux réels vérifiant les deux conditions. On suppose par symétrie des rôles que $y < y'$. Posons $\delta = y' - y$. Comme y' vérifie la condition (2), $y' \leq x$ pour tout $x \in A$. Mais alors $y + \delta \leq x$ pour tout $x \in A$, donc y ne vérifie pas la condition (2), ce qui est absurde. $\square$

Les deux conditions sont importantes. Par exemple, toujours pour $A =]0, 1]$, -1 vérifie la condition (1) mais pas la condition (2), tandis que $1/2$ vérifie la condition (2) mais pas la condition (1). On laisse le lecteur donner une propriété similaire pour le supremum de A .

Signalons une conséquence qui a l'air anodine mais qui est en réalité très utile : étant donné un réel c , si l'on souhaite montrer que $c \leq 1$, il est suffisant de montrer que $c < 1 + \frac{1}{n}$ pour tout entier n .

Exercice 1

Soit A un ensemble non vide admettant un minimum. Montrer que $\min A = \inf A$.

Solution de l'exercice 1

Montrons que $\min A$ vérifie les deux conditions de la proposition précédente.

D'une part, $\min A \leq x$ pour tout $x \in A$ par définition. D'autre part pour tout $\varepsilon > 0$, $\min A + \varepsilon > \min A$, donc $\min A$ vérifie également la condition (2). Ainsi, $\min A = \inf A$.

Bien sûr, on a aussi que $\max A = \sup A$ si A admet un maximum.

Exercice 2

Déterminer si les ensembles suivants admettent un supremum et un infimum et les calculer le cas échéant.

1. $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
2. $B = \mathbb{Q} \cap]0, 1[$;
3. $C =]0, 1] \cup \{2\}$.

Solution de l'exercice 2

Les trois ensembles sont non vides, majorés et minorés donc ils admettent un sup et un inf.

1. Comme 1 est le max de l'ensemble, d'après l'exercice précédent, $\sup A = \max A = 1$. Montrons que $\inf A = 0$. En effet, 0 est un minorant de B , et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ et cet entier n vérifie $0 + \varepsilon > \frac{1}{n}$. Ainsi, 0 vérifie la condition (2) et $\inf A = 0$.
2. Montrons que $\inf B = 0$. 0 est un minorant de B , et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier n tel que $n > \frac{1}{\varepsilon}$ et cet entier n vérifie $0 + \varepsilon > \frac{1}{n}$. Comme $\frac{1}{n} \in B$, cela montre que $\inf B = 0$. Une preuve similaire, en considérant l'élément $1 - \frac{1}{n}$ avec $n > \frac{1}{\varepsilon}$, qui est bien dans B , permet de montrer que $\sup B = 1$.
3. D'une part, $2 = \max C = \sup C$. D'autre part, pour tout $\varepsilon < 1$, en choisissant $x = \varepsilon/2$ qui est bien un élément de C , on trouve $0 + \varepsilon > \varepsilon/2$, donc 0 vérifie la condition (2) et $\inf C = 0$.

Exercice 3

Soit A et B deux parties non vides et majorées. On définit $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est non vide et majoré et comparer $\sup A + \sup B$ avec $\sup(A + B)$.

Solution de l'exercice 3

Comme A et B sont non vides, ils contiennent au moins un élément a et un élément b respectivement, donc $A + B$ contient l'élément $a + b$, il est donc non vide. De plus, si a' et b' sont des majorants respectifs de A et B , alors $a' + b'$ est un majorant de $A + B$. Ainsi $A + B$ admet bien un $\sup$.

Montrons que $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$. On vérifie que pour tout $a + b \in A + B$, $\sup A + \sup B \geq a + b$, donc $\sup A + \sup B$ vérifie la condition (1).

Fixons désormais $\varepsilon > 0$. D'après la condition (2) appliquée à $\varepsilon/2$, il existe $a \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon/2 < a$. De même, il existe $b \in B$ tel que $\sup B - \varepsilon/2 < b$. Ainsi,

$$\sup A + \sup B - \varepsilon < a + b,$$

donc $\sup A + \sup B$ vérifie la condition (2), ce qui conclut que $\sup A + \sup B = \sup(A + B)$.

Une fois que l'on a montré qu'un ensemble non vide est majoré ou minoré, on peut considérer son infimum et son supremum et appliquer leurs caractérisations.

Exercice 4

(Sous-groupes de $\mathbb{R}$) Soit A un sous-ensemble vérifiant les propriétés suivantes :

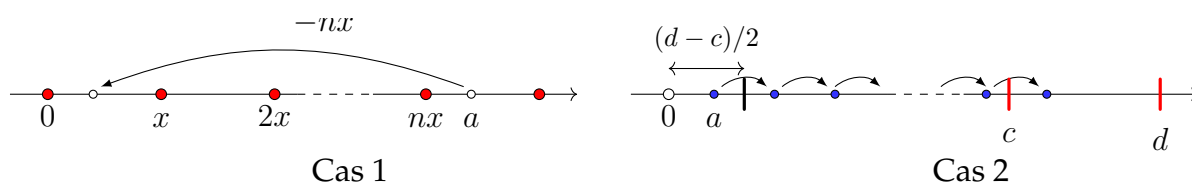
- $0 \in A$;
- Si $x \in A$, alors $-x \in A$;
- Si $x, y \in A$, alors $x + y \in A$.

Montrer que, soit il existe un réel a tel que $A = \{an, n \in \mathbb{Z}\}$, soit pour tous $a < b$, il existe un élément de A appartenant à l'intervalle $]a, b[$.

Solution de l'exercice 4

A est non vide. Si $A = \{0\}$, alors $A = 0\mathbb{Z}$. On suppose donc que A admet un autre élément a' non nul, et quitte à considérer $-a'$ qui est aussi dans A , on peut supposer que $a' > 0$. Considérons $X = \{a, a \in A, a > 0\}$. Alors X est non vide (il contient a') et minoré par 0.

On pose $x = \inf X$ et on distingue deux cas.



Cas 1 : $x > 0$. En appliquant la propriété de l'inf à $\varepsilon = x/2$, on trouve qu'il existe un élément $a \in X$ tel que $x + x/2 > a$. Supposons que $a > x$. En appliquant la propriété de l'inf à nouveau à $\varepsilon = a - x$, on trouve qu'il existe un élément $b \in X$ tel que $x + (a - x) > b$. On déduit que $a - b$ est un élément de A vérifiant $0 < a - b < x$ (car $b \geq x$), ce qui contredit la définition de x . Ainsi, $a = x$ et $\inf X = \min X$.

On obtient par récurrence immédiate que $x\mathbb{Z} \subset A$. Soit $a \in A$. On dispose d'un entier n tel que $nx \leq a < (n+1)x$ (on prend $n = \lfloor a/x \rfloor$). Alors $0 \leq a - nx < x$ et la définition de x force $a = nx$. Ainsi, $A \subset x\mathbb{Z}$, ce qui conclut que $A = x\mathbb{Z}$.

Cas 2 : $x = 0$ Fixons $]c, d[$ un intervalle et supposons que $c > 0$. D'après la propriété de l'inf, il existe un élément $a \in A$ tel que $0 < a < \frac{d-c}{2}$. On pose alors $n = \lceil \frac{c}{a} \rceil$. Cet entier n vérifie que $c \leq na$. D'autre part, $na < c + a < \frac{d+c}{2} < d$, donc na est un élément de A appartenant à $]c, d[$.

Exercice 5

(EMC 2018) Pour quels réels $k > 1$ existe-t-il un ensemble borné S de réels strictement positifs tel que $k(a-b) \in S$ dès que $a, b \in S$ avec $a > b$.

Solution de l'exercice 5

Soit k et S comme dans l'énoncé.

Montrons d'abord que les éléments de S sont plus grands qu'un certain réel $m > 0$. On suppose d'abord par l'absurde que c'est faux. On note $M = \sup(S)$ le plus petit majorant de S . Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in S$ tel que $x > M - \varepsilon$ et par l'hypothèse qu'on a faite il existe $y \in S$ tel que $0 < y < \varepsilon$. Ainsi $k(x-y) \in S$, or $k(x-y) > kM - 2k\varepsilon > M$ pour ε assez petit. Cela contredit la définition de M . On a donc un réel $m > 0$ tel que pour tout $x \in S$, on a $x \geq m$. On peut alors prendre m maximal autrement dit, on prend $m = \inf(S) > 0$.

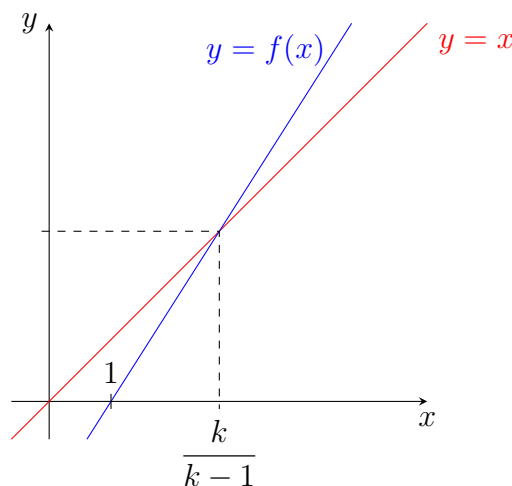
Pour $x > y \in S$, on a alors $k(x-y) \geq m$, donc deux éléments de S sont distants d'au moins $\frac{m}{k}$.

En particulier, comme S est borné, il est fini (il contient au plus $\frac{kM}{m} + 1$ éléments) et $m, M \in S$.

On peut en particulier écrire $S = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ avec $n \geq 3$. Si on multiplie tous les éléments de S par un réel strictement positif, cela ne change pas la propriété de l'énoncé. On peut donc considérer $a_1 = 1$ (cela ne change pas le problème mais permet d'avoir une meilleure vision du problème). On a donc $S = \{1 < a_2 < \dots < a_n\}$.

On introduit f la fonction telle que $f(x) = k(x-1)$, pour $x \neq 1$ tel que $x \in S$, on a alors $f(x) \in S$.

Traçons f pour une meilleure visualisation. On trace également la fonction identité.



On a en particulier $f(x) \geq x \Leftrightarrow x \geq \frac{k}{k-1}$. Ainsi, pour $x = a_n$, on a $f(a_n) \in S$ donc $f(a_n) \leq a_n$ et $a_n \leq \frac{k}{k-1}$. De plus, cela donne pour $x \in S \setminus \{a_n\}$, $f(x) < x$. En utilisant cette dernière propriété, $f(a_2) < a_2$ (S comporte au moins 3 éléments donc $a_2 < a_n \leq \frac{k}{k-1}$) ainsi, $f(a_2) = 1$. En inversant cette relation, $a_2 = 1 + \frac{1}{k}$. On suppose que $a_3 \neq \frac{k}{k-1}$, on a alors $f(a_3) < a_3$, or f est strictement croissante donc il ne reste plus que $f(a_3) = a_2$ pour avoir $f(a_3) \in S$. En inversant cette fonction, $a_3 = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$. Cependant, cela donne maintenant $k(a_3 - a_2) = \frac{1}{k} \in S$. Or $\frac{1}{k} < 1$, c'est absurde. Donc $a_3 = \frac{k}{k-1}$, en particulier avec $a_n \leq \frac{k}{k-1}$, on a $n = 3$.

On peut maintenant utiliser $k(a_3 - a_2) \in S$, comme $a_2 > 1$, on a $k(a_3 - a_2) < k(a_3 - 1) = a_3$. Si $k(a_3 - a_2) = a_2$, cela donne $k(k^2 - (k+1)(k-1)) = (k+1)(k-1)$ d'où $k^2 - k - 1 = 0$, d'où

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Avec $k > 1$, il nous reste $k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Si on a $k(a_3 - a_2) = 1$, cela donne $k = k(k-1)$ d'où $k = 2$. Réciproquement, on a pour $k = 2$ l'ensemble $S = \{1, \frac{3}{2}, 2\}$ qui convient et pour $k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ l'ensemble $S = \left\{1, \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right\}$ qui convient.

Limites de suites

L'enjeu crucial du formalisme que l'on introduit par la suite est de rendre rigoureux la notion de "être proche d'un nombre sans lui être égal". Les diverses définitions vont dépendre d'un paramètre ε qui est voué à prendre des valeurs arbitrairement petites.

Le deuxième enjeu de cette sous-section est de comprendre la différence entre " $u_n < 1$ " et " $u_n \leq c < 1$ ". La première inégalité ne nous permet pas vraiment de conclure quoique ce soit en général, alors que la deuxième donne un contrôle uniforme sur les termes. Par exemple, si (u_n) vérifie $u_n < 1$ pour tout n , alors la seule chose qu'on peut dire sur le produit $u_1 \dots u_n$ est qu'il est majoré par 1. En revanche, si (u_n) vérifie la seconde affirmation, ce produit est majoré par c^n , et prend donc des valeurs arbitrairement petites.

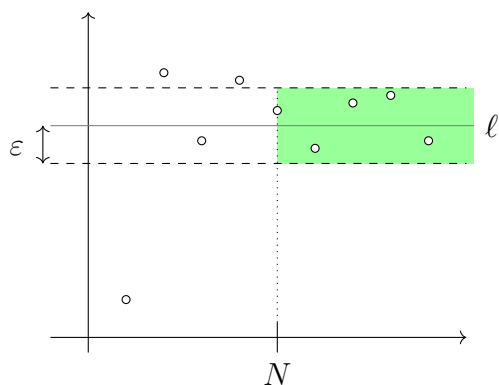
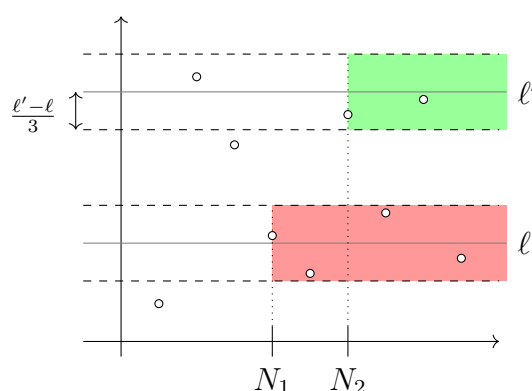
Dans une même veine, si (u_n) est strictement croissante, elle vérifie seulement $u_{n+1} > u_n$, ce qui ne garantit pas qu'elle prenne des valeurs arbitrairement grandes (on pourra penser à $u_n = \frac{n}{n+1}$). En revanche, si (u_n) vérifie qu'il existe $c > 0$ tel que $u_{n+1} - u_n \geq c$, alors $u_n > nc + u_0$ et la suite prend bien des valeurs arbitrairement grandes.

La morale de l'histoire, c'est qu'il faut prendre garde au type de contrôle que l'on a sur l'objet. bien souvent, passer de " $u_n < 1$ " à " $u_n \leq c < 1$ " nécessite un petit argument, souvent lié à l'astuce d'introduire une *constante séparatrice* : étant donné deux réels $a < b$, on exhibe c tel que $a < c < b$. On pourra consulter l'exercice 12 pour saisir pleinement ce principe et cette astuce.

Définition 3. Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) admet pour limite ℓ si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On dit aussi que (u_n) converge vers ℓ , et on notera $u_n \rightarrow \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, ou encore $\lim u_n = \ell$.

Limite de (u_n) Unicité de ℓ

Ainsi, la limite est un nombre tel que, quelle soit la petite distance ε choisie, tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont à distance inférieure de ℓ . Graphiquement, on peut imaginer que, n'importe quel "tube" autour de l'horizontale $y = \ell$, si petit soit-il, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang (qui dépend de la longueur du tube).

On vérifie que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0, comme le veut notre intuition. On laisse les lecteurs formuler une définition des suites qui tendent vers $+\infty$. Mais attention, toute suite n'admet pas forcément de limite. C'est le cas de la suite $u_n = (-1)^n$ (pourquoi?). On prendra donc garde, avant de parler de la limite d'une suite, à vérifier que cette limite existe bien.

Remarque : On pourra vérifier que la définition donnée est équivalente aux deux définitions ci-dessous :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < 10\varepsilon.$$

Passons aux exercices d'assimilation.

Exercice 6

Montrer que si (u_n) admet une limite, cette limite est unique.

Solution de l'exercice 6

Soient $\ell < \ell'$ deux limites éventuelles de (u_n) . Soit $\varepsilon = \frac{\ell' - \ell}{3}$. D'après l'hypothèse, il existe un rang N_1 tel que, si $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$ et il existe un rang N_2 tel que, si $n \geq N_2$, $|u_n - \ell'| < \varepsilon$. On a alors pour $n \geq \max(N_1, N_2)$,

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - u_n| + |\ell' - u_n| < 2\varepsilon < \frac{2}{3}|\ell - \ell'|,$$

ce qui est absurde. Ainsi, la limite de (u_n) est unique.

Exercice 7

Montrer que la somme/le produit de deux suites convergentes est une suite convergente.

Solution de l'exercice 7

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \rightarrow u$ et $v_n \rightarrow v$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses appliquées à $\varepsilon/2$, il existe un rang N_1 tel que, si $n \geq N_1$, $|u_n - u| < \varepsilon/2$ et il existe un rang N_2 tel que, si $n \geq N_2$, $|v_n - v| < \varepsilon$. Ainsi, pour $n \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$|u_n + v_n - (u + v)| \leq |u_n - u| + |v_n - v| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

On conclut que $u_n + v_n \rightarrow u + v$.

Avant de montrer que la limite du produit est le produit des limites, on montre qu'une suite qui converge est bornée. En effet, si $u_n \rightarrow \ell$, en appliquant la définition à $\varepsilon = 1$, on dispose d'un rang N à partir duquel $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Alors, $|u_n|$ est bornée par $\max(|u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1)$.

Montrons à présent la propriété voulue. Soit $\varepsilon > 0$. On commence par supposer que $\ell' \neq 0$. En appliquant la propriété à (u_n) et à $\varepsilon/|\ell'|$, on dispose d'un rang N_1 à partir duquel $|u_n - \ell| < \varepsilon/2|\ell'|$. Comme (u_n) converge, elle est bornée par une constante C d'après la remarque précédente. En appliquant la définition à (v_n) et ε/C , on dispose d'un rang N_2 à partir duquel $|v_n - \ell'| < \varepsilon/2C$. Alors, pour $n \geq \max(N_1, N_2)$,

$$\begin{aligned} |u_n v_n - \ell \ell'| &= |u_n v_n - u_n \ell' + u_n \ell' - \ell \ell'| \\ &\leq |u_n| |v_n - \ell'| + |\ell'| |u_n - \ell| \\ &< C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} + |\ell'| \cdot \frac{\varepsilon}{|\ell'|} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci conclut.

On vous laisse adapter la démonstration dans le cas $\ell' = 0$.

On saisira l'équivalence de la définition d'une suite avec la proposition suivante (qui dit qu'on n'a pas besoin de considérer tous les $\varepsilon > 0$, mais seulement un ensemble de réels strictement positifs dont 0 est l'infimum).

Proposition 4. La suite (u_n) tend vers ℓ si et seulement si

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \frac{1}{m}.$$

Démonstration. Il y a deux sens à montrer.

$\Rightarrow$: Si u_n converge, alors en appliquant la propriété à $\varepsilon = \frac{1}{m}$, on tombe sur la propriété voulue.

$\Leftarrow$: Supposons que (u_n) vérifie la propriété. Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $m > \frac{1}{\varepsilon}$, de sorte que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Soit N le rang fourni par la proposition. On a alors pour $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| < \frac{1}{m} < \varepsilon,$$

donc $u_n \rightarrow \ell$. □

Exercice 8

Soit S_n la somme des inverses des n premières puissances de 2. Montrer que S_n tend vers 2.

Solution de l'exercice 8

On a (par exemple par récurrence, en calculant les première valeur pour conjecturer la formule)

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit N tel que $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ (on peut par exemple prendre $N \geq \ln 1/\varepsilon / \ln 2 + 1$). Alors

$$|S_n - 2| = \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon,$$

ce qui conclut.

Exercice 9

(Caractérisation séquentielle) Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers $\inf A$.

Solution de l'exercice 9

Posons $y = \inf A$. Pour tout n , on dispose d'un élément x_n de A tel que $y + \frac{1}{n} > x_n$. Alors pour tout entier m et tout $n \geq m$,

$$|x_n - y| < \frac{1}{m}.$$

D'après la proposition 4, la suite x_n converge bien vers y .

Exercice 10

Soient (u_n) et (v_n) deux suites positives majorées par 1 et telles que la suite $(u_n + v_n)$ converge vers 2. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

Solution de l'exercice 10

Soit $\varepsilon > 0$. On dispose d'un entier N tel que, si $n \geq N$, $|u_n + v_n - 2| < \varepsilon$. Mais alors, pour tout $n \geq N$, du fait du signe de $u_n - 1$ et de $v_n - 1$,

$$|u_n - 1| = 1 - u_n \leq 1 - u_n + 1 - v_n = 2 - (u_n + v_n) < \varepsilon.$$

On a donc $u_n \rightarrow 1$. De même, on montre que $v_n \rightarrow 1$.

Exercice 11

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. On pose $S_n = u_1 + \dots + u_n$. Montrer que (S_n) n'est pas bornée.

Solution de l'exercice 11

Pour montrer que (S_n) n'est pas bornée, on va montrer que $S_{2^k} \geq \frac{k}{2}$. Pour tout entier k , on a

$$S_{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^j+1} + \dots + \frac{1}{2^{j+1}}}_{A_j} + \dots + \frac{1}{2^k}.$$

Notons $A_j = \frac{1}{2^j+1} + \dots + \frac{1}{2^{j+1}}$ pour tout j , de sorte que $S_{2^k} = A_0 + A_1 + \dots + A_{k-1}$. Pour tout j , on a

$$A_j = \frac{1}{2^j+1} + \dots + \frac{1}{2^{j+1}} \geq \underbrace{\frac{1}{2^{j+1}} + \dots + \frac{1}{2^{j+1}}}_{2^j \text{ termes}} = \frac{1}{2}.$$

On a donc bien l'inégalité voulue $S_{2^k} \geq k/2$. et la suite n'est pas bornée.

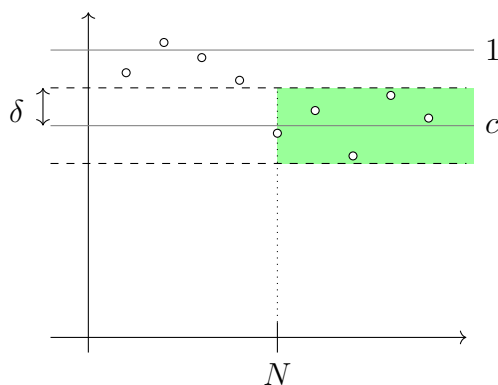
L'exercice suivant est particulièrement illustratif de la différence entre " $v_n < 1$ pour tout n " et " $v_n \leq c < 1$ pour tout n " et surtout de l'intérêt d'une constante séparatrice pour passer d'une affirmation à l'autre. On recommande de le chercher longtemps.

Exercice 12 (Critère de D'Alembert)

1) Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs telle que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ tend vers un réel $c < 1$. On pose S_n la somme des n premiers termes de (u_n) . Montrer que (S_n) est bornée.

2) Soit (u_n) une suite de termes strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ pour tout n . La suite (S_n) est-elle nécessairement bornée ?

Solution de l'exercice 12



1) Dans cet exercice, on souhaite que la suite (u_n) soit "sous-géométrique", c'est-à-dire qu'elle vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha$ avec $\alpha < 1$, pour pouvoir majorer la somme S_n par une somme géométrique.

Malheureusement, on ne peut pas supposer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq c$. Pourtant, l'hypothèse va nous permettre d'exhiber une constante séparatrice C telle que $c < C < 1$ et telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq C$ pour tout n suffisamment grand.

Posons $\delta = \frac{1-c}{2}$. On observe que $c + \delta = \frac{c+1}{2} < 1$. Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow c$, on dispose d'un rang N à partir duquel $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - c \right| < \delta$. On a alors pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq c + \delta.$$

On a alors par récurrence que, pour tout $n \geq N$,

$$u_n \leq u_N (c + \delta)^{n-N}.$$

On déduit que

$$S_n \leq u_0 + \dots + u_{N-1} + u_N (1 + (c + \delta) + \dots + (c + \delta)^{n-N}) \leq u_0 + \dots + u_{N-1} + u_N \frac{1}{1 - (c + \delta)}.$$

Donc (S_n) est bien bornée.

2) D'après l'exercice précédent, la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$ vérifie bien que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ mais (S_n) n'est pas bornée.

Exercice 13 (IMO SL 2002 A2)

Soit $a_1, a_2, \dots$ une suite de réels et c une constante qui vérifient : pour tous $i \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq a_i \leq c$ et pour tous i, j distincts :

$$|a_i - a_j| > \frac{1}{i + j}.$$

Montrer que $c \geq 1$.

Remarque : On ne connaît pas la valeur de la plus petite constante c vérifiant cette propriété.

Solution de l'exercice 13

Pour montrer que $c \geq 1$, on va montrer une estimation du type " $c \geq 1 - \frac{1}{n}$ pour tout entier n ".

On considère les n premiers termes de la suite (a_i) . On les range dans l'ordre croissant de sorte que $0 \leq a_{t_1} < a_{t_2} < \dots < a_{t_n} \leq c$. On a alors en particulier grâce à la propriété de l'énoncé :

$$\frac{1}{t_1 + t_2} + \frac{1}{t_2 + t_3} + \dots + \frac{1}{t_{n-1} + t_n} \leq c$$

On peut alors utiliser l'inégalité des mauvais élèves (ou bien Cauchy-Schwarz) qui donne

$$c \geq \frac{1}{t_1 + t_2} + \frac{1}{t_2 + t_3} + \dots + \frac{1}{t_{n-1} + t_n} \geq \frac{(n-1)^2}{t_1 + 2t_2 + \dots + 2t_{n-1} + t_n} = \frac{(n-1)}{2\frac{n(n+1)}{2} - t_1 - t_n}$$

Car les t_i forment une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même. Ainsi : $c \geq \frac{(n-1)^2}{n(n+1)} = 1 - \frac{3n-1}{n(n+1)}$,
or $\frac{3n-1}{n(n+1)}$ prend des valeurs aussi petites que l'on veut et donc $c \geq 1$.

Problème d'optimisation dans les réels

Dans cette sous-section, on étudie des problèmes de la forme : "Déterminer la plus petite constante C telle que $C > \dots$ " ou "telle que $C \geq \dots$ ". Au vu des sections précédentes, on est désormais conscient que l'existence d'une telle constante n'est pas garantie a priori.

On commence par étudier un exemple d'énoncé particulièrement ambiguë qui sert d'introduction à la problématique, puis on donne quelques conseils pour attaquer ce type de problème.

Exemple 5 (Entraînement Groupe E, 2023).

Déterminer la plus grande constante $C > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout 2023-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_{2023})$ de réels strictement positifs deux à deux distincts, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \dots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} > C.$$

Dans cet énoncé, on suppose implicitement que

- L'ensemble des C vérifiant la propriété est non vide ;
- Le sup de cet ensemble n'est pas dans l'ensemble. Si c'était le cas, alors l'inégalité à montrer serait large. Donc l'ensemble des C ne peut pas être de la forme $]0, a]$ pour $a > 0$.

Ces informations sont données par l'énoncé, mais il est de bon ton d'avoir une idée préalable de pourquoi ces deux affirmations sont vraies. Répondre à ces questions peut d'ailleurs aider à avoir des intuitions sur le problème (ou pas, cela dépend). Pour y répondre, on peut commencer par éprouver l'énoncé pour des valeurs numériques. On vous rassure, la plupart

du temps l'énoncé est tourné de sorte à contourner cette ambiguïté, mais on vous invite à être vigilant et à toujours vous demander ce que l'énoncé vous révèle.

Remarque : Dans les énoncés "trouver la plus grande constante C telle que", bien souvent, l'ensemble $\mathcal{E}$ des C qui vérifie la propriété est un intervalle. Se poser la question de la plus grande constante vérifiant l'énoncé revient à admettre que $\sup \mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que $\mathcal{E}$ est fermé à droite.

Tout comme les problèmes d'optimisation en combinatoire, un tel problème possède deux parties. Pour montrer que la constante C est la plus grande (resp. plus petite) à vérifier la propriété, il y a nécessairement deux parties :

1. Montrer que C vérifie la propriété.
2. Montrer que tout réel r tel que $C < r$, r ne vérifie pas la propriété.

On ne revient pas sur l'étape 1. Pour l'étape 2 en revanche, voici deux approches possibles :

- Montrer que si un réel c vérifie la propriété, il vérifie $c \leq C + \frac{1}{n}$ pour tout entier n (ou plus généralement une inégalité du type $c \leq C + u_n$ avec $u_n \rightarrow 0$).
- Montrer directement que tout réel r tel que $C < r$, r ne vérifie pas la propriété. Pour cela, bien souvent, l'inégalité $C < r$ ne suffit pas à elle seule et il est nécessaire d'introduire une constante séparatrice, ie un réel r' tel que $C < r' < r$.

La deuxième méthode nécessite probablement un exemple, que nous mettons ci-après. On commence par donner la solution avant de la commenter.

Exercice 14 (P4 EGMO 2023)

Turbo l'escargot se déplace sur un cercle de circonférence 1. Pour $c_1, c_2, \dots$ une suite de réels positifs donnée, Turbo glisse successivement d'une distance $c_1, c_2, \dots$, choisissant à chaque fois dans le sens horaire ou anti-horaire.

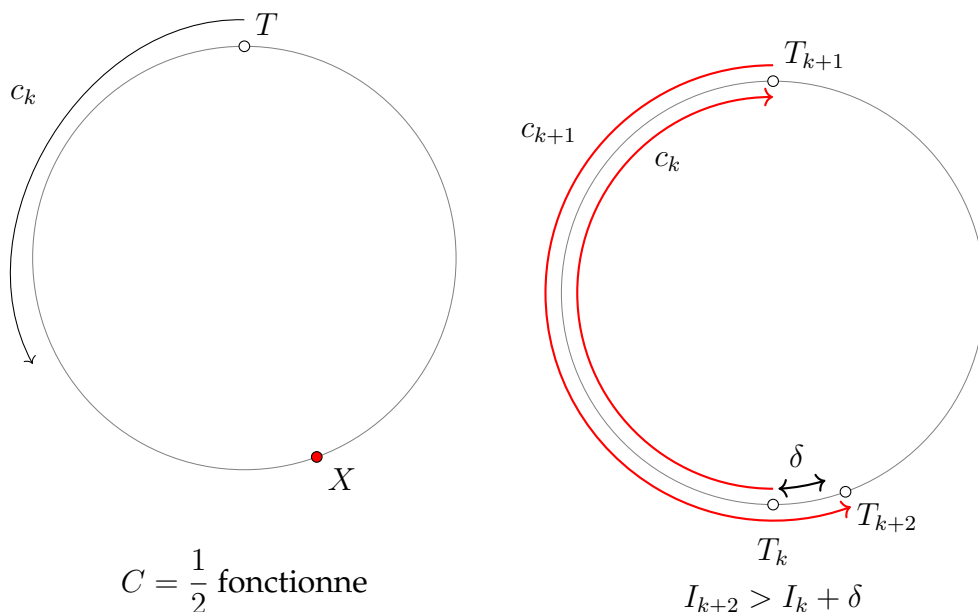
Déterminer la plus grande constante $C > 0$ telle que pour toutes les suites $0 < c_1, c_2, \dots < C$, Turbo peut choisir un point du cercle et une façon de se déplacer tel qu'il ne s'arrête jamais, ni ne traverse ce point.

Solution de l'exercice 14

On montre que la plus grande constante est $C = \frac{1}{2}$.

Étape 1 : $C \geq \frac{1}{2}$.

On considère une suite $0 < c_1, c_2, \dots < \frac{1}{2}$, Turbo choisit n'importe quel point A (où il ne commence pas). Il va ensuite pour chacun de ses mouvements dans la direction opposée à A . Sa distance à A est en chaque point du cercle au moins de $\frac{1}{2}$, il ne passera donc jamais par A .



Étape 2 : $C \leq \frac{1}{2}$.

Soit $C > \frac{1}{2}$ une constante.

On choisit un réel α tel que $\frac{1}{2} < \alpha < C$. On prend alors la suite $c_{2n+1} = \frac{1}{2}$ et $c_{2n} = \alpha$. On va montrer que Turbo finit par parcourir tout le cercle au bout d'un nombre fini de mouvements. On note pour cela I_k la longueur de l'ensemble des points du cercle que Turbo a parcouru après k mouvements. On établit que (I_k) est non bornée et finit par dépasser 1.

On suppose par l'absurde que $I_k < 1$ pour tout k . À chaque instant n et $n+1$, Turbo ne peut pas aller dans la même direction car il parcourt alors tout le cercle car $\frac{1}{2} + \alpha > 1$ et il passerait donc par A . Ainsi, Turbo alterne à chaque coup dans les deux sens. Supposons sans perte de généralité qu'il avance dans le sens trigo quand il avance de α . Il avance alors après deux coups d'une distance nette $\delta = \alpha - \frac{1}{2} > 0$ dans le sens trigo, ce qui se traduit par $I_{2n} - I_{2n-2} = \delta > 0$. Ainsi, $I_{2n} = I_0 + n\delta = n\delta$. En prenant n assez grand, on a $n\delta > 1$ et Turbo a donc parcouru tout le cercle c'est absurde.

On a donc bien $C = \frac{1}{2}$ comme constante maximale

Remarque : Dans la solution précédente, on a employé une constante séparatrice α . Celle-ci permet de garantir qu'à chaque étape $I_{k+2} - I_k > \delta$ pour un δ indépendant de k . Si l'on s'était contenté de prendre $c_{2n} > 1/2$, on aurait seulement obtenu que $I_{k+2} - I_k > 0$, ce qui n'est pas suffisant pour garantir que (I_k) est non bornée et dépasse 1. On voit ici la différence cruciale entre les assertions " $u_n > 0$ " et " $u_n \geq c > 0$ ". Bien souvent, la première assertion est insuffisante pour mener à bout un raisonnement, mais il n'est pas difficile de la transformer en la deuxième assertion une fois la constante séparatrice exhibée.

Du fait de la subtilité de ce genre de raisonnement, de tels exercices sont généralement assez difficiles. On termine par deux exercices suivant ce principe.

Exercice 15 (IMO SL 2016 A2, découpé)

1) Montrer que, pour tout $C < \frac{1}{2}$, il existe cinq réels $a_1, \dots, a_5$ tels que, quels que soient les indices i, j, k et ℓ distincts, on a

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_\ell} \right| > C.$$

1) Montrer que, quels que soient les cinq réels $a_1, \dots, a_4$ et a_5 (pas forcément distincts), on peut toujours choisir quatre indices i, j, k et ℓ distincts tels que

$$\left| \frac{a_i}{a_j} - \frac{a_k}{a_\ell} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

Solution de l'exercice 15

1) Soit $C < \frac{1}{2}$. Ici, plutôt que d'utiliser une constante séparatrice, on va montrer que $C \geq \frac{1}{2} - \frac{2}{N}$. Pour cela, choisissons les réels $(1, 1, 1, 2, N)$. Un calcul rapide montre que, quels que soient les cinq réels choisis, la quantité est supérieure à $\frac{1}{2} - \frac{2}{N}$.

2) Prenons cinq réels quelconques, que l'on ordonne $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$. D'après le principe des tiroirs, parmi les cinq fractions

$$\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_4}{a_5}, \frac{a_1}{a_5}, \frac{a_2}{a_3}, \frac{a_4}{a_5},$$

il y en a trois qui sont dans le même intervalle $]0, 0.5]$ ou $]0.5, 1]$. Parmi ces trois fractions, il y en a deux qui sont consécutives dans l'arrangement ci-dessus, donc il y a deux fractions avec quatre indices distincts à distance inférieure à $\frac{1}{2}$.

Remarque : Bien sûr, ce raisonnement est parachuté. L'idée principale est d'ordonner les cinq réels, on peut alors se débrouiller en effectuant des disjonctions de cas, qui se ramènent au principe des tiroirs ci-dessus.

Exercice 16 (Entraînement Groupe E)

1)(dur) Pour tout 2023-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_{2023})$ de réels strictement positifs deux à deux distincts, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \dots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} > 1012.$$

2) Montrer que 1012 est optimal.

Solution de l'exercice 16

1) On démontre que $C \geq 1012$. Soit $(a_1, \dots, a_{2023})$ un ensemble de réels strictement positifs et distincts. Pour simplifier la notation, on pose $a_{2024} = a_1$ et $a_{2025} = a_2$.

Pour tout i , on pose $f(i) = a_{i+1}$ si $a_{i+1} > a_{i+2}$ et $f(i) = i + 2$, de sorte que $\frac{a_i}{|a_{i+1} - a_{i+2}|} \geq \frac{a_i}{a_{f(i)}}$.

La suite $(f^{(n)}(1))_n$ étant à valeurs dans $\{1, \dots, 2023\}$, de sorte que l'on dispose de $r < s$ tel que $f^{(r)}(1) = f^{(s)}(1)$. Quitte à translater la suite, on peut supposer que $r = 0$. La suite est donc périodique, on note p sa période. Puisque $|f(i) - i| \leq 2$, on a $2p \geq 2023$ de sorte que $p \geq 1012$.

On peut alors conclure par l'inégalité des moyennes :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \dots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} \geq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_{f(i)(1)}}{a_{f(i+1)(1)}} \geq p \sqrt[p]{\prod \frac{a_{f(i)(1)}}{a_{f(i+1)(1)}}} = p \geq 1012.$$

2) Montrons que $C \leq 1012$. L'idée de la construction est de d'abord faire une construction en oubliant la condition que les a_i sont deux à deux distincts (tout en gardant à l'esprit que le membre de gauche doit être défini. La question 1) inspire la construction suivante

$$a_1 = \varepsilon^2, a_2 = 1, a_3 = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_{2i} = \varepsilon, a_{2i+1} = 1 \quad \forall 2 \leq i \leq 1011.$$

Pour en déduire une construction où les a_i sont deux à deux distincts, il suffit de "perturber" chacun des a_i . Voyons plutôt : on pose

$$a_1 = \varepsilon^2, a_2 = 1, a_3 = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_{2i} = (i-1)\varepsilon, a_{2i+1} = 1 + i\varepsilon \quad \forall 2 \leq i \leq 1011$$

pour laquelle on vérifie que les termes de la suite sont deux à deux distincts. Alors,

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \dots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + \frac{1}{1 + \varepsilon - \varepsilon} + \frac{1 + \varepsilon}{1} + \sum_{i=2}^{1010} \left(\frac{(i-1)\varepsilon}{1 + i\varepsilon - i\varepsilon} + \frac{1 + i\varepsilon}{1 + (i+1)\varepsilon - i\varepsilon} \right) \\ &\quad + \frac{1010\varepsilon}{1 + 1011\varepsilon - \varepsilon^2} + \frac{1 + 1011\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \\ &= \varepsilon + 1 + 1 + \varepsilon + \sum_{i=2}^{1010} \left((i-1)\varepsilon + 1 + \underbrace{\frac{(i-1)\varepsilon}{1 + \varepsilon}}_{< (i-1)\varepsilon} \right) + \underbrace{\frac{1010\varepsilon}{1 + 1011\varepsilon - \varepsilon^2}}_{< 1010\varepsilon} + \underbrace{\frac{1 + 1011\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}}_{< 1 + 1012\varepsilon} \\ &< 1012 + \left(\frac{1011 \times 1012}{2} + 2 \right) \varepsilon \end{aligned}$$

où chacune des inégalités est satisfaite pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Ainsi, pour tout $C' > 1012$, on dispose de $(a_1, \dots, a_{2023})$ tel que l'expression du membre de gauche est inférieur à C' . On a donc bien $C \geq 1012$.

Le grand bain

Maintenant que l'on observé les différentes notions, on est bon pour s'essayer aux exercices. On résume l'ensemble des astuces à avoir en tête :

- Entre deux réels il y a toujours un réel, on peut donc exhiber une constante séparatrice, afin d'essayer de transformer une inégalité $u_n > a$ en une inégalité $u_n \geq b > a$. Cette propriété pourrait être interprétée comme l'élasticité de $\mathbb{R}$. Lorsque l'on cherche à montrer qu'il existe un réel vérifiant une propriété, on pourra chercher un tel réel dans un ensemble exprimé comme intersection d'intervalles vérifiant une contrainte.

- Lorsque $a < b$, la quantité $\delta = b - a$ est une quantité strictement positive. Une façon d'en tirer parti est de chercher à faire apparaître $n\delta$ pour des entiers n arbitrairement grands, afin de contredire une hypothèse.
- Pour montrer que $c \geq 1$, il suffit de montrer que $c \geq 1 - \frac{1}{n}$ pour tout n .
- Pour créer des ensembles de réels x_i distincts, on n'hésitera pas à considérer des ensembles où certains x_i sont égaux, et à remplacer ces réels par $x_i \pm \varepsilon$, avec $\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

Exercice 17

Soient a et b deux réels strictement positifs distincts. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $]A, +\infty[\subset \cup_{n \in \mathbb{N}^*} [na, nb]$.

Exercice 18

(Inspiré de IMO SL 2000 A2) Soit a et b des entiers strictement positifs tels que $b > 2a$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\{\lambda a\}$ et $\{\lambda b\}$ appartiennent à $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

Remarque : L'énoncé original était le suivant : Soit a, b et c des entiers strictement positifs tels que $b > 2a$ et $c > 2b$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\{\lambda a\}$, $\{\lambda b\}$ et $\{\lambda c\}$ appartiennent à $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$. Y arriverez-vous ?

Exercice 19 (JBMO SL 2023 C5)

On considère 2023 réels $a_1 < a_2 < \dots < a_{2023}$ vérifiant que les sommes de deux réels sont deux à deux distinctes. On note M le nombre de paires (a_i, a_j) avec $a_i < a_j$ telles que $a_i + a_j < a_2 + a_{2023}$. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur que peut prendre M .

Exercice 20

On considère une suite finie d'entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ telle que pour tout $1 \leq i, j, i + j \leq n$, on a :

$$a_i + a_j \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j + 1$$

Montrer qu'il existe un réel α tel que $a_i = \lfloor \alpha i \rfloor$ pour tout indice i .

Exercice 21 (A2 SL IMO 2014)

Soit f une fonction de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x^2 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $0 < a < b < 1$ deux réels. On définit alors deux suites (a_n) et (b_n) tels que $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_n = f(a_{n-1})$ et $b_n = f(b_{n-1})$. Montrer qu'il existe un entier positif n tel que

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

Exercice 22 (EGMO 2018 P6, question a)

Montrer que pour tout réel $0 < t < \frac{1}{2}$, il existe un entier $n \geq 1$ avec la propriété suivante :

pour tout ensemble S de n entiers strictement positifs, il existe deux éléments x et y distincts et un entier $m \geq 0$ tels que

$$|x - my| \leq ty.$$

Solutions

Exercice 17

Soient a et b deux réels strictement positifs distincts. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $]A, +\infty[\subset \cup_{n \in \mathbb{N}^*} [na, nb]$.

Solution de l'exercice 17

Posons $I_n = [na, nb]$. Il suffit de montrer que, pour tout n suffisamment grand, $I_n \cap I_{n+1}$ est non vide, ou encore que $nb \geq (n+1)a$, c'est-à-dire $n \geq \frac{a}{b-a}$.

On remonte le raisonnement et ainsi, pour tout $n \geq N = \left\lceil \frac{a}{b-a} \right\rceil$, on a $I_{n+1} \cap I_n$ qui est non vide, si bien que $]Na, +\infty[\subset \cup_{n \in \mathbb{N}^*} [na, nb]$, comme voulu.

Exercice 18

(Inspiré de IMO SL 2000 A2) Soit a et b des entiers strictement positifs tels que $b > 2a$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\{\lambda a\}$ et $\{\lambda b\}$ appartiennent à $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

Remarque : L'énoncé original était le suivant : Soit a, b et c des entiers strictement positifs tels que $b > 2a$ et $c > 2b$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\{\lambda a\}$, $\{\lambda b\}$ et $\{\lambda c\}$ appartiennent à $\left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$. Y arriverez-vous?

Solution de l'exercice 18

On remarque que $\{\lambda a\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ est équivalent à $\lambda \in \left[\frac{3k+1}{3a}, \frac{3k+2}{3a}\right]$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ (et similairement pour b). On note ainsi $\left[\frac{3k+1}{3a}, \frac{3k+2}{3a}\right] = I_k$, $\left[\frac{3\ell+1}{3b}, \frac{3\ell+2}{3b}\right] = J_\ell$. On cherche ainsi une intersection entre un I_k , un J_ℓ .

Comme $b > 2a$, on a

$$\frac{3(\ell+1)+1}{3b} - \frac{3\ell+2}{3b} = \frac{2}{3b} < \frac{1}{3a}.$$

Il vient que tout intervalle I de longueur $\frac{1}{3a}$ intersecte un ensemble J_ℓ . C'est le cas de I_k pour tout k , ce qui conclut.

Exercice 19 (JBMO SL 2023 C5)

On considère 2023 réels $a_1 < a_2 < \dots < a_{2023}$ vérifiant que les sommes de deux réels sont deux à deux distinctes. On note M le nombre de paires (a_i, a_j) avec $a_i < a_j$ telles que $a_i + a_j < a_2 + a_{2022}$. Déterminer la plus petite et la plus grande valeur que peut prendre M .

Solution de l'exercice 19

La morale de cet exercice est que, en dehors des contraintes élémentaires données, on peut construire un ensemble de réels réalisant à peu près n'importe quel cahier des charges.

Commençons par déterminer la valeur maximale de M , c'est-à-dire lorsque le plus d'inégalités possibles sont réalisées. On observe qu'on a toujours les inégalités suivantes :

$$a_2 + a_{2022} < a_i + a_{2022} \quad \forall i \geq 3, i \neq 2022$$

$$a_2 + a_{2022} < a_i + a_{2023} \quad \forall i \geq 2, i \neq 2023.$$

Ainsi, il y a au plus $\binom{2}{2023} - 2020 - 2021$ paires vérifiant l'énoncé, ce qui donne la borne supérieure pour M .

Pour montrer que cette borne est effectivement atteignable, il suffit de produire 2023 réels ordonnés tels que les autres inégalités sont vérifiées. Pour cela, on commence par choisir $a_2 < \dots < a_{2021}$ tels que les sommes sont deux à deux distinctes (c'est possible en les construisant dans l'ordre et en prenant a_{j+1} plus grand que la somme de deux quelconques des $a_2, \dots, a_j$). Puis, on prend $a_{2022} > \max\{a_i + a_j, i, j \leq 2021\}$. On a alors $a_i + a_j < a_2 + a_{2022}$ pour tous les (i, j) tels que $i, j \leq 2022$. Il reste alors à choisir a_1 et a_{2023} pour que $a_1 + a_{2023} < a_2 + a_{2022}$. Pour cela, on prend garde à choisir a_1 tel que les sommes $a_1 + a_i$ sont distinctes des sommes $a_j + a_k$ (possible en prenant $a_1 \neq a_j + a_k - a_i$ pour tout (i, j, k)), puis on choisit a_{2023} tel que $a_{2022} < a_{2023} < a_{2022} + a_2 - a_1$ et tel que $a_{2023} \neq a_j + a_k - a_i$ (ce qui est possible car l'intervalle $]a_{2022}, a_{2022} + a_2 - a_1[$ contient une infinité de réels. Ceci achève la construction.

Déterminons la valeur minimale de M , c'est-à-dire lorsque le moins d'inégalités sont réalisées. On observe qu'on a toujours les inégalités :

$$a_2 + a_{2022} > a_1 + a_i \quad \forall 2 \leq i \leq 2022,$$

$$a_2 + a_{2022} > a_2 + a_i \quad \forall 3 \leq i \leq 2021, i \neq 2.$$

Ainsi, il y a au moins $2020 + 2020$ paires vérifiant l'énoncé, ce qui donne la borne inférieure pour M .

Pour montrer que cette borne est atteignable, on construit 2023 réels tels qu'aucune autre inégalité n'est satisfaite. On commence comme précédemment par choisir $a_3 < \dots < a_{2022}$ tels que $a_{2022} < 2a_3$ et tels que toutes les sommes $a_i + a_j$ sont deux à deux distinctes (pour cela, on choisit a_{j+1} différent des $a_i + a_k - a_\ell$ pour tout (i, k, ℓ) , ce qui est possible car il y a une infinité de réels dans $]a_j, a_{2022}[$). Puis, on choisit $a_2 < 2a_3 - a_{2022}$, de sorte que $a_2 + a_{2022} < a_i + a_j$ pour tout $i, j \geq 3$. Il reste à choisir a_1 et a_{2023} pour que $a_2 + a_{2022} < a_1 + a_{2023}$. Pour cela, on choisit $a_1 \in]0, a_2[$ de sorte à préserver les sommes distinctes et on choisit $a_{2023} > a_{2022} + a_2 - a_1$, toujours en préservant les sommes.

Remarque : Si l'on cherche une construction explicite, on pourra prendre $a_i = 2^i$ pour $i \leq 2022$ et $a_{2023} = 2^{2022} + \sqrt{2}$ pour la borne supérieure et $a_i = -2^{i-2024}$ pour $i \geq 2$ et $a_1 = -2^{2022} - \sqrt{2}$.

Exercice 20

Trouver toutes les suites finies d'entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ telles que pour tout $1 \leq i, j, i+j \leq n$, on a :

$$a_i + a_j \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j + 1$$

Solution de l'exercice 20

On peut commencer par trouver une suite qui fonctionne. On remarque que les suites linéaires de la forme $a_i = \alpha i$ fonctionnent pour α entier. Après quelques essais on peut se rendre compte que les suites $a_i = \lfloor \alpha i \rfloor$ fonctionnent pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons donc nos candidats.

Prouvons tout d'abord que ce sont des solutions, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a_i = \lfloor \alpha i \rfloor$. Pour prouver que c'est une solution, on utilise la propriété :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

ce qui donne l'inégalité de l'énoncé. (Cette propriété se prouve en écrivant x et y sous la forme partie entière plus partie fractionnaire.)

On se donne maintenant une suite a_i qui vérifie l'énoncé, on cherche un réel α tel que pour tout i :

$$a_i \leq \alpha i < a_i + 1$$

Ainsi, il faut qu'il existe un réel qui est plus grand que tous les $\frac{a_i}{i}$ et plus petit que tous les $\frac{a_i + 1}{i}$. Ce sera le cas si pour tous les i et j , on a :

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_j + 1}{j}$$

car en prenant le max des $\frac{a_i}{i}$ et le min des $\frac{a_j + 1}{j}$ on aura un réel α entre les deux qui convient. Prouvons donc ce résultat par récurrence sur $\max(i, j)$.

Pour $i = j = 1$, on a bien $a_1 < a_1 + 1$.

Soit $k < n$, on suppose que pour tous $i, j \leq k$, on a $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j + 1}{j}$. Soit i, j tels que $\max(i, j) = k + 1$.

Si $i = j = k + 1$, l'inégalité est évidente.

Sinon si $i = k + 1$, on a par hypothèse de récurrence

$$\frac{a_{i-j}}{i-j} < \frac{a_j + 1}{j}$$

et par l'énoncé

$$a_i \leq a_j + a_{i-j} + 1$$

d'où

$$a_i < a_j + \frac{a_j + 1}{j} \cdot (i - j) + 1 = \frac{a_j + 1}{j} \cdot i$$

Ce qui donne le résultat pour i, j

Dans le dernier cas, $j = k + 1$, de même par hypothèse de récurrence :

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_{j-i} + 1}{j - i}$$

et par l'énoncé :

$$a_i + a_{j-i} \leq a_j$$

d'où :

$$a_j > a_i + \frac{a_i}{i} \cdot (j - i) - 1$$

Ce qui donne :

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_j + 1}{j}$$

On a ainsi prouvé l'inégalité pour i, j et le résultat pour tous les i et j par récurrence. Cela finit la preuve.

Exercice 21 (A2 SL IMO 2014)

Soit f une fonction de $]0, 1[$ dans $]0, 1[$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ x^2 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $0 < a < b < 1$ deux réels. On définit alors deux suites (a_n) et (b_n) tels que $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_n = f(a_{n-1})$ et $b_n = f(b_{n-1})$. Montrer qu'il existe un entier positif n tel que

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

Solution de l'exercice 21

On note $I_1 = [0, \frac{1}{2}[$ et $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$. On remarque tout d'abord que $f(x) < x$ pour x dans I_2 et $f(x) > x$ pour x dans I_1 . Ainsi, l'énoncé correspond à dire qu'il existe un indice n tel que l'un des a_n et b_n est dans I_1 et l'autre dans I_2 . On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Comme f est croissante dans ces deux domaines, on a tout d'abord $a_n < b_n$ pour tout n .

Dans un problème de suites, on introduit régulièrement des suites auxiliaires. Ici, posons $d_k = b_k - a_k$ et étudions d_k . Si $a_k, b_k \in I_1$, alors $d_{k+1} = d_k$, tandis que si $a_k \in I_2$, en utilisant que $b_k \in I_2$ également,

$$d_{k+1} = b_k^2 - a_k^2 = d_k \underbrace{(a_k + b_k)}_{> 1/2 + 1/2} > d_k.$$

La suite (d_k) est donc strictement croissante. On l'a vu maintes fois maintenant, cette inégalité n'est pas suffisante pour conclure que la suite (d_k) n'est pas bornée et dépasse 1 (ce qui constituerait la contradiction). Il faut donc aller plus loin.

Continuons les observations intéressantes : $f(I_1) \subset I_2$, donc à chaque fois que a_n est dans I_1 , alors a_{n+1} est dans I_2 . On en conclut donc que la suite a_n va une infinité de fois dans I_2 .

La croissance de (d_k) implique que $d_k > d_0$ pour tout d_0 . On a alors, dès que $a_k \in I_2$,

$$d_{k+1} = d_k(2a_k + b_k - a_k) \geq d_k(1 + d_k) \geq d_k(1 + d_0).$$

Ainsi, si on note k_m le temps de m -ème passage de (a_k) dans l'intervalle I_2 , on a par récurrence immédiate sur m ,

$$d_{k_m+1} \geq d_0(1 + d_0)^m.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient que la suite (d_k) est non bornée, ce qui contredit le fait que $a_k, b_k \in [0, 1]$ pour tout k .

Exercice 22 (EGMO 2018 P6, question a)

Montrer que pour tout réel $0 < t < \frac{1}{2}$, il existe un entier $n \geq 1$ avec la propriété suivante : pour tout ensemble S de n entiers strictement positifs, il existe deux éléments x et y distincts et un entier $m \geq 0$ tels que

$$|x - my| \leq ty.$$

Solution de l'exercice 22

Considérons un ensemble ne vérifiant pas la propriété et notons $x_1 > \dots > x_n$ ses éléments. Pour tout indice i , on a donc

$$x_i - 1 \times x_{i+1} < -tx_{i+1},$$

ce qui implique que $\frac{x_i}{x_{i+1}} < 1 - t$. D'autre part,

$$x_1 - 0 \times x_n > tx_n.$$

On déduit que

$$t < \frac{x_1}{x_n} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \dots \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} > (1 - t)^{n-1}.$$

Cette inégalité étant fausse pour n suffisamment grand, on conclut l'existence d'un entier n vérifiant l'exercice.

3 Algèbre : TD de petites SL d'algèbre (Aurélien et Oscar)

Exercices

Exercice 1 (P1 2019)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$:

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

Exercice 2 (A2 2019)

Soit $u_1, \dots, u_{2025}$ des réels tels que $u_1 + \dots + u_{2025} = 0$ et $u_1^2 + \dots + u_{2025}^2 = 1$.

On pose $a = \min(u_1, \dots, u_{2025})$ et $b = \max(u_1, \dots, u_{2025})$.

Montrer que $ab \leq -\frac{1}{2025}$.

Exercice 3 (A1 2017)

Soit $a_1, \dots, a_n$ des entiers strictement positifs non tous égaux à 1. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^\times$ tel que $\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = k$.

Montrer qu'alors le polynôme $P(x) = a_1 \dots a_n (x+1)^k - (x+a_1) \dots (x+a_n)$ n'admet aucune racine réelle strictement positive.

Exercice 4 (A1 2018)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}_+^\times \rightarrow \mathbb{Q}_+^\times$ telles que pour tout $a, b \in \mathbb{Q}_+^\times$:

$$f(a^2 f(b)^2) = f(a)^2 f(b)$$

Exercice 5 (A3 2020)

Trouver la valeur minimale que peut prendre

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^\times$ tels que $(a+c)(b+d) = ac + bd$.

Exercice 6 (A2 2017)

Trouver tous les $q \in \mathbb{R}$, tel que pour tout ensemble S de 10 réels, en posant

$A = \{a-b \mid a, b \in S\}$, puis $B = \{qab \mid a, b \in A\}$ et enfin $C = \{a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \mid a, b, c, d \in A\}$, on a toujours $B \subset C$.

Exercice 7 (A2 2018)

Trouver tous les entiers $n \geq 3$ tels qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_{n+2}$ tels que $a_1 = a_{n+1}$, $a_2 = a_{n+2}$ et $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Analyse : Soit f une solution de notre équation. Pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on a : $f(0) + 2f(b) = f(f(b))$. Ainsi, pour tout $b \in \mathbb{Z}$, on a : $f(2) + 2f(b) = f(f(b+1)) = 2f(b+1) + f(0)$.

Donc, $f(b+1) - f(b) = \frac{f(2)-f(0)}{2}$.

Donc, f est affine.

Synthèse : Supposons que f est affine. Alors, il existe $m, p \in \mathbb{Z}$ tels que $f(x) = mx + p$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Pour que f soit solution, les entiers m et p doivent vérifier l'égalité suivante pour tous a, b :

$$2m(a+b) + 3p = m^2(a+b) + mp + p = f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) = m^2(a+b) + mp + p.$$

En prenant $a = b = 0$, on trouve $3p = mp + p$. On déduit que $2m = m^2$. Ceci implique que $m = 2$ ou que $m = p = 0$. Ainsi, les solutions sont la fonction nulle et les fonctions de la forme $f : x \mapsto 2x + p$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 2

Supposons par l'absurde que $a \geq 0$.

Alors pour tout $1 \leq i \leq 2025$, on a $u_i \geq a \geq 0$.

Donc, comme $u_1 + \dots + u_{2025} = 0$, on a $u_1 = \dots = u_{2025} = 0$: c'est absurde car $u_1^2 + \dots + u_{2025}^2 = 1$.

Donc, $a < 0$. De même, on montre que $b > 0$.

On sépare les u_i entre les négatifs $n_1, \dots, n_k$ et les strictement positifs $p_1, \dots, p_l$. Ainsi, on a $k + l = 2025$. De plus, on a $p_1 + \dots + p_l = -n_1 - \dots - n_k = |n_1| + \dots + |n_k|$. On a donc :

$$n_1^2 + \dots + n_k^2 = |n_1|^2 + \dots + |n_k|^2 \leq |a|(|n_1| + \dots + |n_k|) = |a|(p_1 + \dots + p_l) \leq |a|bl$$

et

$$p_1^2 + \dots + p_l^2 \leq b(p_1 + \dots + p_l) = b(|n_1| + \dots + |n_k|) \leq |a|bk$$

Donc,

$$1 = u_1^2 + \dots + u_{2025}^2 = (n_1^2 + \dots + n_k^2) + (p_1^2 + \dots + p_l^2) \leq |a|bl + |a|bk = |a|b(k+l) = 2025|a|b$$

Donc, $|a|b \geq \frac{1}{2025}$.

Comme $a < 0$, on a ainsi : $ab \leq -\frac{1}{2025}$.

Solution de l'exercice 3

Soit $1 \leq i \leq n$. Montrons que pour tout $x > 0$, $a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}} \leq x + a_i$ avec égalité si et seulement si $a_i = 1$.

Soit $x > 0$. On a d'après l'IAG :

$$x + a_i \geq (x+1) + 1 + \dots + 1 \geq a_i((x+1) \times 1 \times \dots \times 1)^{\frac{1}{a_i}} = a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}}$$

De plus, comme $x+1 > 1$, on a égalité seulement si $a_i = 1$.

En multipliant toutes ces inégalités, et comme elles ne peuvent pas être toutes larges car les a_i ne sont pas tous égaux à 1, on obtient que pour tout $x > 0$: $a_1 \dots a_n(x+1)^k < (x+a_1) \dots (x+a_n)$.

Donc, pour tout $x > 0$, $P(x) < 0$. Donc, P n'admet aucune racine réelle strictement positive.

Solution de l'exercice 4

Analyse : Soit f une solution de notre équation.

Pour tout $x, y \in \mathbb{Q}_+^\times$, on a : $f(f(x))^2 f(y) = f(f(x)^2 f(y)^2) = f(f(y)^2 f(x)^2) = f(f(y))^2 f(x)$.

Donc, $\frac{f(f(x))^2}{f(x)} = \frac{f(f(y))^2}{f(y)}$. Donc, il existe $C \in \mathbb{Q}_+^\times$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}_+^\times$, $\frac{f(f(x))^2}{f(x)} = C$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{Q}_+^\times$, on a :

$$\left(\frac{f(f(x))}{C} \right)^2 = \frac{f(x)}{C}$$

Ainsi, en notant f^n la n -ième itérée de f , on a :

$$\frac{f(x)}{C} = \left(\frac{f^2(x)}{C} \right)^2 = \left(\frac{f^3(x)}{C} \right)^4 = \dots = \left(\frac{f^{n+1}(x)}{C} \right)^{2^n}$$

Donc, comme $\frac{f(x)}{C} \in \mathbb{Q}_+^\times$ et que le seul élément de $\mathbb{Q}_+^\times$ qui soit égal à des puissances arbitrairement grande de rationnels est 1, on a $\frac{f(x)}{C} = 1$. Donc, $f(x) = C$ pour tout $x \in \mathbb{Q}_+^\times$. Ainsi, $C = \frac{f(f(1))}{f(1)} = 1$. Donc, $f : x \mapsto 1$.

Synthèse : On vérifie réciproquement que la fonction constante égale à 1 est bien solution.

Solution de l'exercice 5

Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^\times$ tels que $(a + c)(b + d) = ac + bd$. On a en appliquant plusieurs fois l'IAG :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) \quad (\text{VI.6})$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{ac}{bd}} + 2\sqrt{\frac{bd}{ac}} \quad (\text{VI.7})$$

$$= 2 \times \frac{ac + bd}{\sqrt{abcd}} \quad (\text{VI.8})$$

$$= 2 \times \frac{(a + c)(b + d)}{\sqrt{abcd}} \quad (\text{VI.9})$$

$$\geq 2 \times \frac{2\sqrt{ac} \times 2\sqrt{bd}}{\sqrt{abcd}} \quad (\text{VI.10})$$

$$= 8 \quad (\text{VI.11})$$

A présent, on cherche à trouver un cas d'égalité. Pour avoir égalité, en considérant toutes nos IAG, il faut et il suffit d'avoir :

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- $\frac{b}{c} = \frac{d}{a}$
- $a = c$
- $b = d$

Ce qui équivaut simplement à $a = c$ et $b = d$.

Notre condition initiale devient alors : $4ab = a^2 + b^2$. En fixant $b = 1$, on doit alors avoir $a^2 - 4a + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 12$ et donc $a = \frac{4 - \sqrt{\Delta}}{2} = 2 - \sqrt{3} > 0$ est solution.

Ainsi, pour $a = c = 2 - \sqrt{3}$ et $b = d = 1$, on a bien $(a + c)(b + d) = ac + bd$ et $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 8$. Finalement, la valeur minimale que peut prendre cette somme est 8.

Solution de l'exercice 6

Analyse : Soit $q \in \mathbb{R}$ qui convient.

Pour $S = \{0, 1, \dots, 9\}$, on a $A = \{-9, -8, \dots, 9\}$. Ainsi, tout élément de C est entier. De plus, $q = q \times 1 \times 1 \in B$. Donc, $q \in C$ et donc q est entier.

De plus, pour tout $a, b, c, d \in A$, on a :

$$|a^2 + b^2 - c^2 - d^2| = \max(a^2 + b^2, c^2 + d^2) - \min(a^2 + b^2, c^2 + d^2) \leq \max(a^2 + b^2, c^2 + d^2) \leq 2 \times 9^2 = 162$$

Or, $81q = q \times 9 \times 9 \in B \subset C$. Donc, $|81q| \leq 162$ et ainsi $|q| = 2$.

Donc $q \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Synthèse : On traite séparément les éventuelles valeurs de q .

- Pour $q = 0$. Soit S un semble de 10 réels. Alors $B = \{0 \times a \times b \mid a, b \in A\} = \{0\}$ et on a bien pour $x \in A$, $0 = x^2 + x^2 - x^2 - x^2 \in C$. Donc, $B \subset C$.
Donc, $q = 0$ convient.

- Pour $q = 2$. Soit S un semble de 10 réels. Soit $a, b \in A$. On pose alors $a = u - v$ et $b = x - y$ avec $u, v, x, y \in S$. On a donc :

$$2ab = 2(u - v)(x - y) = -2uy - 2vx + 2ux + 2vy = (u - y)^2 + (v - x)^2 - (u - x)^2 - (v - y)^2 \in C$$

Donc, $B \subset C$.

Donc, $q = 2$ convient.

- Pour $q = -2$. Soit S un semble de 10 réels. Soit $a, b \in A$. On pose alors $a = u - v$ et $b = x - y$ avec $u, v, x, y \in S$. On a donc :

$$-2ab = -2(u - v)(x - y) = -2ux - 2vy + 2uy + 2vx = (u - x)^2 + (v - y)^2 - (u - y)^2 - (v - x)^2 \in C$$

Donc, $B \subset C$.

Donc, $q = -2$ convient.

- Pour $q = \pm 1$. On pose $S = \{0, 1, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32\}$.
Ainsi, tout nombre pair de A est nécessairement divisible par 4. Donc, pour tout $a \in A$, on a $a^2 \equiv 0 \pmod{8}$ ou $a^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Donc, les éléments de C sont nécessairement égaux à $-2, -1, 0, 1$ ou $2 \pmod{8}$.

Or, $4 = 4 - 0 \in A$ et $1 = 1 - 0 \in A$. Donc, $4q = q \times 4 \times 1 \in B \subset C$: c'est absurde car $4q$ est congru à -4 ou $4 \pmod{8}$. Donc, $q = \pm 1$ ne convient pas.

Finalement, les seuls q qui conviennent sont $-2, 0$ et 2 .

Solution de l'exercice 7

Analyse : Soit $n \geq 3$ et $a_1, \dots, a_{n+2}$ qui vérifient les conditions demandées.

On prolonge $a_1, \dots, a_{n+2}$ en une suite $a_1, a_2, \dots$ n -périodique qui vérifie donc pour tout $i \geq 1$, $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$.

Pour tout $i \geq 1$, on a : $(a_{i+2} - 1)a_{i+2} = a_i a_{i+1} a_{i+2} = a_i(a_{i+3} - 1)$ et donc $a_{i+2}^2 - a_i a_{i+3} = a_{i+2} - a_i$. Ainsi, pour tout $k \geq 1$, en sommant notre égalité pour $i = k, k+1, \dots, k+n-1$, on a en utilisant la n -périodicité :

$$0 = \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+2} - \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i \quad (\text{VI.12})$$

$$= \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+2} - a_i \quad (\text{VI.13})$$

$$= \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+2}^2 - a_i a_{i+3} \quad (\text{VI.14})$$

$$= \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+2}^2 - \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i a_{i+3} \quad (\text{VI.15})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+3}^2 - \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i a_{i+3} \quad (\text{VI.16})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=k}^{k+n-1} (a_i - a_{i+3})^2 \quad (\text{VI.17})$$

Donc, comme un carré est toujours positif, on a pour tout $k \leq i \leq k+n-1$, $(a_i - a_{i+3})^2 = 0$ et donc $a_{i+3} = a_i$. En particulier, $a_{k+3} = a_k$.

Donc, la suite est 3-périodique. Ainsi, comme elle est aussi n -périodique, elle est p -périodique avec $p = \text{PGCD}(n, 3)$.

Comme l'équation $x^2 + 1 = x$ n'admet aucune solution réelle, notre suite n'est pas 1-périodique. Donc, $p = 3$ et ainsi $3 \mid n$.

Synthèse : si n est divisible par 3, alors on pose $a_i = 2$ si $3 \mid i$ et $a_i = -1$ sinon. On a bien $a_{n+1} = a_1$ et $a_{n+2} = a_2$. De plus, comme $(-1) \times 2 + 1 = -1$ et $(-1) \times (-1) + 1 = 2$, on a bien pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i a_{i+1} + 1 = 2$.

Finalement, il existe de tels réels si et seulement si n est divisible par 3.

4 Arithmétique : Théorème des restes chinois (Paul LL)

Cours

Théorème 1 (Théorème des restes chinois). Soient $N_1, N_2, \dots, N_k$ des entiers strictement positifs deux à deux premiers entre eux, et $a_1, a_2, \dots, a_k$ des entiers quelconques. Alors il existe un entier a tel que le système de congruences :

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{N_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{N_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{N_k} \end{cases}$$

soit équivalent à la simple congruence $x \equiv a \pmod{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k}$. En particulier, le système précédent possède au moins une solution.

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité : soient a, a' qui respectent la condition de congruence. Alors, pour tout $1 \leq i \leq k$, $N_i \mid a - a'$. Donc, par une conséquence du lemme de Gauss, comme les N_i sont deux à deux premiers entre eux, on a $N_1 \times \dots \times N_k \mid a - a'$, ce qui conclut l'unicité.

Construisons maintenant un tel entier :

Comme les $N_1 \dots N_k$ sont deux à deux premiers entre eux, $\prod_{j \neq i} N_j$ est premier avec N_i , donc il possède un inverse $m_i \pmod{N_i}$. Posons

$$a = \sum_{i=1}^k a_i m_i \prod_{j \neq i} N_j$$

On a alors, pour tout i , $a \equiv a_i m_i \prod_{j \neq i} N_j \equiv a_i \pmod{N_i}$, ce qui conclut l'existence. $\square$

Ce théorème peut être utilisé de plusieurs manières utiles en maths olympiques. Les remarques suivantes sont inspirées du **poly d'Evan Chen** au sujet de ce théorème.

Remarque 2.

Le théorème sous sa forme *construction* : étant donné une liste de contraintes modulo $N_1, \dots, N_k$ sur x , sous réserve que les N_i soient premiers entre eux, on peut trouver un a qui fonctionne.

Cette forme est particulièrement utile.

Remarque 3.

Le théorème sous sa forme *destruction* : si on a $x \equiv a \pmod{M}$, avec $M = N_1 \times \dots \times N_k$ (et les N_i premiers entre eux), on peut se ramener à étudier le système modulo les N_i de manière équivalente.

Il est souvent utile d'utiliser cette forme avec la décomposition en facteurs premiers de M .

Remarque 4.

Une dernière manière utile mais moins courante d'utiliser le théorème des restes chinois peut être sous sa forme *lifting* : si $x \equiv a \pmod{N_i}$ pour chaque N_i (qui sont deux à deux premiers entre eux), alors $x \equiv a \pmod{N_1 \times \dots \times N_k}$: c'est particulièrement utile pour obtenir des problèmes de taille, comme $N_1 \times \dots \times N_k$ est rapidement très grand comme nombre.

Exercices**Exercice 1**

Trouver les deux derniers chiffres de 49^{21} .

Exercice 2

Dénombrer le nombre de x dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ tels que $x^2 \equiv x \pmod{n}$

Exercice 3

Soient a, b deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 1$ tels que :

$$a^n + b^n \equiv 1 \pmod{ab}$$

Exercice 4

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $n \mid 4a^2 + 9b^2 - 1$

Exercice 5

On dit qu'un point (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ est invisible de l'origine s'il existe un point (c, d) de $\mathbb{Z}^2$ tel que le point (c, d) appartient au segment formé par l'origine et (a, b) .

Montrer qu'il existe un carré composé de n^2 points de $\mathbb{Z}^2$ tous invisibles de l'origine.

Exercice 6

Montrer que pour tout $n > 0$, il existe un ensemble A contenant n entiers strictement positifs, tel que pour tout sous-ensemble strict B de A , la somme des éléments de B est une puissance parfaite d'un entier.

Exercice 7

Montrer qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \geq 1$, on a

$$n \mid f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

Exercice 8 (IMO N6 2005)

Soient $a, b \geq 1$ deux entiers tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a^n + n \mid b^n + n$$

Montrer que $a = b$

Exercice 9

Soient $a > b > c \geq 3$ des entiers. On suppose que

$$\begin{cases} a \mid bc + b + c \\ b \mid ca + c + a \\ c \mid ab + a + c \end{cases}$$

Montrer que a, b, c ne sont pas tous les trois des nombres premiers.

Exercice 10 (Lemme de Schür)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ non-constant, un polynôme unitaire.

- Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui divisent $P(n)$ pour au moins un $n \in \mathbb{Z}$.
- Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il existe une infinité d'entiers $n > 0$ tels que $P(n)$ a au moins r facteurs premiers distincts.

Exercice 11 (P2 RMM 2021)

Anatole et Paul jouent à un jeu : Paul choisit un entier strictement positif N tel que $N \leq 5000$, et il choisit vingt entiers distincts strictement positifs $a_1, \dots, a_{20}$ tels que pour tout k , $a_k \equiv N \pmod{k}$. A chaque tour, Anatole choisit un ensemble $E \subset \llbracket 1; 20 \rrbracket$ d'indices, et Paul lui donne l'ensemble $\{a_k, k \in E\}$, sans lui dire quel nombre correspond à quel indice.

En combien de tours Anatole peut-il s'assurer de deviner le nombre N de Paul, quels que soient les $\{a_k\}$?

Solutions**Solution de l'exercice 1**

A première vue, il suffit de trouver $49^{21} \pmod{100}$, ce qui semble être simplement un problème d'ordre. Mais comme $100 = 2^2 \times 5^2$ n'est pas une puissance de nombre premiers, cela rend le problème est un peu plus compliqué. On se ramène donc à étudier $49^{21} \pmod{4}$ et

$\pmod{25}$: $\begin{cases} 49^{21} \equiv 1^{21} \pmod{4} \\ 49^{21} \equiv (-1)^{21} \equiv -1 \pmod{25} \end{cases}$ On regarde les nombres inférieurs à 100, congrus à $-1 \pmod{25}$, et impairs : il y a 49 et 99, seul 49 convient : on en déduit que $49^{21} \equiv 49 \pmod{100}$.

Solution de l'exercice 2

La première étape est de factoriser : on trouve $x(x-1) \equiv 0 \pmod{n}$.

Avec le théorème des restes chinois, on cherche alors à réduire le problème à celui sur des puissances de nombres premiers : on écrit $n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$, avec $p_1, \dots, p_k$ des nombres premiers distincts, et $\alpha_i > 0$.

Alors, $x^2 \equiv x \pmod{n} \iff x(x-1) \equiv 0 \pmod{n} \iff x(x-1) \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ pour tout $1 \leq i \leq k$ (l'équivalence découle du théorème des restes chinois). Comme x et $x-1$ sont premiers entre eux, on a donc : ou bien $x \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, ou bien $x \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ pour chaque i . Comme il y a k facteurs premiers distincts, et 2 choix possibles pour chaque facteur premier, cela donne 2^k restes possibles $\pmod{p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}}$, c'est-à-dire $\pmod{n}$.

Solution de l'exercice 3

Comme a et b sont premiers entre eux, il suffit donc de trouver n tels que $a^n + b^n$ soit congru à 1 $\pmod{a}$ et $\pmod{b}$, ce qui nous donnerait le résultat voulu $\pmod{ab}$ par le théorème des restes chinois (TRC), c'est-à-dire $a^n \equiv 1 \pmod{b}$ et $b^n \equiv 1 \pmod{a}$.

Alors, en prenant $n = \varphi(a)\varphi(b) (= \varphi(ab))$ (car ils sont premiers entre eux), on a bien $a^n \equiv (a^{\varphi(b)})^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{b}$ et de même $b^n \equiv 1 \pmod{a}$, donc $a^n + b^n \equiv 1 \pmod{ab}$.

Solution de l'exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on va essayer de réduire le problème à tous les diviseurs premiers de n . Pour cela, on écrit $n = \prod p_i^{\alpha_i}$. On cherche donc a, b des entiers tels que, pour tout i , $p_i^{\alpha_i} \mid 4a^2 + 9b^2 - 1$. Pour cela, si $p_i \neq 2$, $p_i \wedge 2 = 1$, et on veut donc $a \equiv 2^{-1} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, et $b \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$. Si $p_i = 2$, on veut $a \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$, et $b \equiv 3^{-1} \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ (car $3 \wedge 2 = 1$).

Or, on peut trouver des entiers a, b qui remplissent ces conditions par le théorème des restes

chinois, car tous les p_i sont deux à deux distincts, donc les $p_i^{\alpha_i}$ sont deux à deux premiers entre eux.

Solution de l'exercice 5

On remarque que (x, y) invisible revient à demander que $(x \wedge y) > 1$. On cherche donc à trouver x, y et des facteurs premiers $p_{i,j}$ qui divisent chacun $x + i$ et $y + j$ pour $0 \leq i, j < n$. Pour cela, on fixe arbitrairement $(p_{i,j})_{0 \leq i, j < n}$, n^2 nombres premiers distincts (donc premiers entre eux deux à deux). On fixe également $x = 0$. Alors, par le TRC, on peut trouver un entier y tel que, pour tous $0 \leq i, j < n$, on ait $y \equiv i - j \pmod{p_{i,j}}$, donc $p_{i,j} \mid x + i$ et $p_{i,j} \mid y + j$ pour tous i, j .

Ainsi, les points $(x + i, y + j)_{0 \leq i, j < n}$ sont tous invisibles depuis l'origine.

Solution de l'exercice 6

Posons A_1 un ensemble quelconque de n entiers strictement positifs. Le but va être de trouver un facteur N par lequel on va multiplier chaque nombre de A_1 pour obtenir un ensemble A qui respecte les conditions de l'énoncé. Pour cela, on note $B_1, \dots, B_{2^n-1}$ les sous-ensembles de A_1 , s_i la somme des éléments de B_i , et $P = \{p_1, \dots, p_k\}$ l'ensemble des nombres premiers divisant au moins un des s_i . Ainsi, chaque s_i s'écrit $s_i = \prod_{j=1}^k p_j^{\alpha_{i,j}}$.

L'idée va être d'assigner un nombre premier distinct q_i à chaque B_i , et choisir N , de manière à ce que Ns_i soit une puissance q_i^e . Pour cela, on pose $N = \prod p_j^{\beta_j}$, et on choisit $2^n - 1$ nombres premiers distincts $q_1, \dots, q_{2^n-1}$. Alors, la condition de l'énoncé se réécrit : pour tout $1 \leq i \leq 2^n - 1$, pour tout $1 \leq j \leq k$, $\beta_j + \alpha_{i,j} \equiv 0 \pmod{p_i}$. Par le TRC, on peut construire de tels β_j . Alors, en posant $A = \{Na, a \in A_1\}$, les sommes des sous-ensembles de A sont les Ns_i qui sont chacune des puissance q_i^e .

Solution de l'exercice 7

Il est assez aisé de définir f de manière à ce qu'elle soit injective, mais il semble beaucoup plus délicat de la rendre surjective. Pour pallier à ce problème, on va essayer de définir les images de f deux par deux.

Pour cela, on effectue une récurrence avec comme hypothèse $P(n)$: " $f(1), \dots, f(2n)$ sont construits, et l'image de $\{1, \dots, 2n\}$ contient les n premiers entiers et aucun doublon".

Initialisation : On pose $f(1) = 1$ et $f(2) = 3$, et on a bien $P(1)$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $P(n)$, et on cherche à construire $f(2n+1)$ et $f(2n+2)$. Soit m le plus petit entier pas encore atteint par f . On pose $S = \sum_{k=1}^{2n} f(k)$ et on cherche un entier N tel que $2n+1 \mid N+S$ et $2n+2 \mid m+N+S$. Or, comme $(2n+1) \wedge (2n+2) = 1$ le TRC nous donne un nombre N aussi grand que souhaité qui vérifie ces deux conditions. Donc on peut en choisir un strictement plus grand que m et toutes les valeurs déjà prises par f .

En posant $f(2n+1) = N$ et $f(2n+2) = m$, on vérifie la condition de l'énoncé, ainsi que $P(n+1)$: f demeure injective, et on a augmenté le plus petit entier non pris comme valeur par f d'au moins 1.

Alors, la fonction f ainsi définie est bijective, et respecte bien la condition $n \mid f(1) + \dots + f(n)$ pour tout entier n .

Solution de l'exercice 8

D'une part, on obtient des informations $(\text{mod } a^n + n)$, et d'autre part, on obtient $a^n \equiv b^n$ plutôt que $a \equiv b$. Ces deux informations étant compliquées à gérer, on va chercher à fixer un diviseur p de $a^n + n$, et se débrouiller pour que $a^n, b^n \equiv a, b$. Pour cela, soit p un nombre premier strictement supérieur à a et b (donc p est premier avec a et b).

On veut que $p \mid a^n + n$, donc on trouve, par le TRC, n tel que $n \equiv 1 \pmod{p-1}$ et $n \equiv -a$

$(\text{mod } p)$ (car $p \wedge (p-1) = 1$). Alors, par le petit théorème de Fermat, $a^n \equiv a \pmod{p}$ et $b^n \equiv b \pmod{p}$, donc $a^n + a \equiv 0 \pmod{p}$. Donc on a également $p \mid b^n + n$.

Ainsi, $a^n + n \equiv a + n \equiv b^n + n \equiv b + n \pmod{p}$, donc $a \equiv b \pmod{p}$, d'où par un argument de taille, on trouve $a = b$.

Ici, le théorème des restes chinois sert à construire l'entier n dont on a besoin.

Solution de l'exercice 9

Supposons par l'absurd que a, b, c sont tous les trois premiers. Comme ils sont distincts, il sont en particulier premiers entre eux.

On cherche une factorisation, pour cela on rajoute 1 à chacune des expressions, et on trouve :

$$\begin{cases} (b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{a} \\ (c+1)(a+1) \equiv 1 \pmod{b} \\ (a+1)(b+1) \equiv 1 \pmod{c} \end{cases}$$

Donc, comme $n+1 \equiv 1 \pmod{n}$ pour tout entier n , on a :

$$\begin{cases} (a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{a} \\ (a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{b} \\ (a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{c} \end{cases}$$

Ainsi, comme a, b, c sont premiers entre eux, par le TRC, on obtient $(a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{abc}$, d'où $abc \mid ab+ac+bc+a+b+c$.

Or, on peut montrer que $0 < ab+ac+bc+a+b+c < abc$: la première inégalité est évidente, et la seconde est équivalente à $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} < 1$.

Or, $c \geq 3, b \geq 5$ et $a \geq 7$ (car ce sont des nombres premiers), donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} \leq \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{21} + \frac{1}{15} = \frac{86}{105} < 1$.

Donc on a bien $0 < ab+ac+bc+a+b+c < abc$, il est donc absurde que $abc \mid ab+ac+bc+a+b+c$, contradiction !

a, b et c ne peuvent donc pas être tous les trois premiers.

Solution de l'exercice 10

- Supposons par l'absurde que l'ensemble des diviseurs premiers d'au moins un des nombres $P(n)$ est fini. On suppose que le coefficient constant c de P est non-nul. Parmi ces nombres premiers, on note $p_1, \dots, p_l$ ceux qui divisent c , et $q_1, \dots, q_m$ ceux qui ne divisent pas c .

On pose $N = \prod q_i \times c^2 > 1$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et tout $i, q_i \nmid P(N^k)$ (parce que $q_i \mid N$ et $q_i \wedge c = 1$), et $v_{p_i}(P(N^k)) = v_{p_i}(c) : c \mid N^k$ donc $c \mid P(N^k)$, mais pour tout $1 \leq i \leq l$, on a $c^2 \mid N \mid P(N^k) - c$, donc $v_{p_i}(P(N^k) - c) > v_{p_i}(c)$. Ainsi, $P(N^k) = \pm c$ pour tout $k > 0$ (car $P(N^k)$ n'a pas d'autres diviseurs premiers) : par principe des tiroirs infinis, on trouve ou bien une infinité de k tels que $P(N^k) = +c$, ou bien une infinité tels que $P(N^k) = -c$, donc P est un polynôme constant (car il existe une constante C tel que $P - C$ ait une infinité de racines, donc $P = C$ est constant).

- Soit $p_1, \dots, p_r$ r nombres premiers distincts tels que chacun divise au moins un des $P(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$. Donc, pour chaque p_i , il y a au moins un reste $r_i \pmod{p_i}$, tel que $P(r_i) \equiv 0 \pmod{p_i}$. Comme les p_i sont deux à deux distincts, ils sont premiers entre eux, donc par

TRC il existe un unique r entre 1 et $\prod p_i$ tel que $p_1 \times \dots \times p_r \mid P(r)$.

Donc pour tout $n \equiv r \pmod{p_1 \times \dots \times p_r}$, on a $p_1 \times \dots \times p_r \mid P(n)$ (car $P(n) \pmod{p}$ ne dépend que de $n \pmod{p}$ pour tous entiers n et p).

Solution de l'exercice 11

Tout d'abord, montrons qu'Anatole peut s'assurer de deviner le nombre de Paul en deux tours : il lui suffit de demander $\{a_{19}, a_{20}\}$ et $\{a_{17}, a_{20}\}$. Comme les a_i sont tous distincts, le seul nombre en commun entre les deux ensembles est a_{20} , et on en déduit a_{17} et a_{19} . Ainsi, par TRC, comme 17, 19 et 20 sont premiers entre eux deux à deux, on connaît N modulo $17 \times 19 \times 20 = 6460 > 5000$, donc on connaît N car $N \leq 5000$.

Maintenant, on prend un sous-ensemble $E \subset \llbracket 1, 20 \rrbracket = \{s_1, \dots, s_n\}$, et on cherche à montrer que si Anatole le choisit, il existe un ensemble des a_k qui peut correspondre à deux nombres. Pour cela, on répartit les nombres entre 1 et 20 entre *grands nombres* : 11, 13, 16, 17, 19 et les autres sont les *petits nombres*. Le ppcm des *petits nombres* est $2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$. Si $n = 1$, Anatole ne peut clairement pas deviner le nombre. Si $n > 1$, le but va être de construire $\{t_i, 1 \leq i \leq n\}$ qui puisse correspondre à 1 ou à 2521.

Pour cela, on veut $t_1 \equiv \dots \equiv t_n \equiv 1 \pmod{2520}$, et de plus, pour chaque *grand* nombre s_i , on veut $t_i \equiv 1 \pmod{s_i}$ et $t_{i+1} \equiv 2521 \pmod{s_i}$ (les indices sont à prendre $\pmod{n}$). On peut construire de tels t_i par TRC car les s_i sont deux à deux premiers entre eux et premiers avec 2520, sauf si $s_i = 16$, alors $\text{pgcd}(16, 2520) = 8$ et $1, 2521 \equiv 1 \pmod{8}$.

Ces t_i peuvent correspondre à 1 ou à 2521 : pour qu'ils correspondent à 1, il suffit de prendre $a_{s_i} = t_i$. Et sinon on peut "faire tourner" les t_i : pour les *grands* nombre prendre $a_{s_i} = t_{i+1}$, et donner les t_i restants aux *petits* nombres indifféremment. Anatole ne peut donc pas s'assurer de gagner en un tour.

Ainsi, il a besoin d'exactly deux tours pour être sûr de gagner.

5 Algèbre : Inégalités fonctionnelles (Anatole et Rémi)

Ce TD a pour but de faire découvrir certaines des idées supplémentaires spécifiques aux inéquations fonctionnelles. En vrac, voici certains des points passés en revue pendant la séance :

- Séparer les positifs des négatifs (à la fois sur les variables et sur les images) : ils ne se comportent pas de la même manière dans une inégalité, notamment lorsque l'on multiplie. On peut parfois en déduire le signe de f ou des propriétés sur une partie de l'ensemble de définition. (cf ex 1, 3)
- Utiliser les bornes de l'ensemble de définition pour faire des inégalités : si une fonction est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, on peut minorer un terme par 0, ... (cf ex 3, 4, 5, 8 et P4 entraînement)
- Itérer des inégalités pour les auto-améliorer : c'est l'idée principale sur laquelle nous avons décidé d'insister. Lorsque l'on dispose d'une majoration ou d'une minoration de f , on peut la réemployer immédiatement dans le raisonnement qui a servi à l'obtenir pour améliorer la borne, et faire ceci jusqu'à aboutir à une inégalité limite bien plus puissante. (cf ex 4, 5, 8 et P4 entraînement)
- Étudier le comportement d'une inégalité quand l'une des variables (notamment hors des parenthèses) devient très grande/petite : cela permet d'obtenir une bonne intuition de la forme générale des solutions ainsi qu'une stratégie de résolution de l'exercice dans certains cas. (cf ex 3, 6)
- Séparer les variables : il s'agit là d'une idée récurrente des équations fonctionnelles, mais qui prend d'autant plus d'ampleur dans la mesure où l'on peut ajouter et retirer des termes dans une inégalité pour obtenir la forme que l'on souhaite. Si $g(x) \geq g(y)$ pour tous x, y avec g une fonction auxiliaire quelconque, alors g est constante (preuve : échanger x et y). (cf ex 2, 5, 8)

Les exercices 1 à 4 ainsi que la première partie du 5 ont été corrigés pendant le TD.

Exercices**Exercice 1**

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) \geq f(xy)$

Exercice 2 (BxMO 2013)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) + y \geq f(f(f(x)))$$

Exercice 3 (BMO 2021, A2)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout x, y avec $x \neq 0$,

$$f(x^2 + y) \geq \left(\frac{1}{x} + 1\right) f(y)$$

Exercice 4 (Roumanie mock TST 2015)

Trouver toutes les fonctions $f : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ telles que pour tout $x \geq 1$,

1. $f(x) \geq 2(x + 1)$;
2. $xf(x + 1) = f(x)^2 - 1$.

Exercice 5 (IMO 2005, A2)

Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous x, y ,

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

Exercice 6 (IMO 2009, P5)

Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$a, f(b), f(b + f(a) - 1)$$

soient les longueurs des côtés d'un triangle non aplati.

Exercice 7 (IMO 2007, A2)

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est mystique si pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(m + n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

Trouver toutes les valeurs que peut prendre $f(2025)$, avec f une fonction mystique.

Exercice 8 (IMO 2023, A4)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y > 0$,

$$x(f(x) + f(y)) \geq (f(f(x)) + y)f(y)$$

Solutions**Exercice 1** (Mexique zone centre 2019)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) \geq f(xy)$

Solution de l'exercice 1

On commence par prendre $y = 0$ pour annuler le membre de droite. On obtient que pour tout x réel, $f(x) \geq f(0)$.

On veut maintenant annuler le membre de gauche pour obtenir une minoration sur les images : on prend pour cela $y = -x$. On obtient $f(0) \geq f(-x^2)$. Comme $-x^2$ prend toutes les valeurs négatives, on obtient même $f(x) = f(0)$ pour tout $x \geq 0$.

On veut maintenant minorer l'image des nombres positifs. Pour cela, on fixe $a \geq 0$, et on prend $x = y = -\sqrt{a}$. On obtient alors $f(-2\sqrt{a}) \geq f(a)$. Comme $f(-2\sqrt{a}) = f(0)$, on obtient $f(a) = f(0)$. Ainsi, f est une fonction constante.

Réciproquement, toutes les fonctions constantes sont clairement solutions de l'équation.

Exercice 2 (BxMO 2013)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) + y \geq f(f(f(x)))$$

Solution de l'exercice 2

On commence par poser $y = f(f(x)) - x$, qui donne $f(f(x)) \geq x$. L'équation de l'énoncé devient alors $f(x + y) + y \geq f(x)$. En posant $z = x + y$, on obtient $f(z) + z \geq f(x) + x$. Cela étant valable quelque soit x et z , on doit avoir $f(x) + x$ constant, donc $f(x) = C - x$, qui convient réciproquement pour tout $C \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (BMO 2021, A2)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout x, y avec $x \neq 0$,

$$f(x^2 + y) \geq \left(\frac{1}{x} + 1\right) f(y)$$

Solution de l'exercice 3

En tâtonnant un peu avec x très petit, on se rend compte que le $\frac{1}{x}$ pose problème, les valeurs juste après $f(y)$ doivent être beaucoup trop grandes. On devine donc que la seule solution est probablement la fonction nulle (qui convient bien), montrons-le. On suppose par l'absurde qu'il existe y_0 tel que $f(y_0) \neq 0$. La première étape est de poser $x = -1$ ce qui donne $f(y + 1) \geq 0$, donc f est positive.

On commence par montrer que f est strictement croissante. Fixons un $z > 0$, et posons $x = \sqrt{z}$. Comme $\frac{1}{x} > 0$, on a alors :

$$f(y + z) = f(x^2 + y) \geq \left(\frac{1}{x} + 1\right) f(y) > f(y)$$

ce qui conclut.

On sait désormais que $f(y + 1) > f(y + \varepsilon) > f(y)$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Or on a vu qu'on peut rendre $f(y + \varepsilon)$ arbitrairement grand quand ε est très petit. A ce stade, on sait que l'exercice est

terminé, il suffit juste d'écrire les détails rigoureux en choisissant une valeur de ε qui permet d'aboutir à une contradiction, ce qui peut se faire explicitement de la façon suivante :

$$f(y + \varepsilon) \geq \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) f(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) \frac{f(y)}{f(y+1)} f(y+1)$$

Il suffit donc de choisir ε de sorte que $\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + 1 \right) \frac{f(y)}{f(y+1)} > 1$, soit $\varepsilon < \left(\frac{1}{\frac{f(y+1)}{f(y)} - 1} \right)^2$.

Solution n°2 de l'exercice 3

Voici une autre manière de conclure sans la croissance :

On fixe un $\varepsilon > 0$. On a $f(y_0^2 + \varepsilon^2) \geq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) f(y_0)$. On itère cette relation par récurrence, et on a pour $n \in \mathbb{N}$, $f(y_0^2 + n\varepsilon^2) \geq \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^n f(y_0)$. Il ne reste plus qu'à choisir un ε intelligent pour aboutir à une absurdité : on choisit $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui donne $f(y_0^2 + 1) \geq (1 + \sqrt{n})^n f(y_0)$. Le membre de gauche est donc supérieur à une quantité non bornée, d'où la contradiction.

Exercice 4 (Roumanie mock TST 2015)

Trouver toutes les fonctions $f : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ telles que pour tout $x \geq 1$,

1. $f(x) \geq 2(x+1)$;
2. $xf(x+1) = f(x)^2 - 1$.

Solution de l'exercice 4

On commence par essayer de deviner la solution. On finit par se rendre compte que $x \mapsto x+1$ convient. On va essayer de montrer que c'est la seule. L'inégalité $f(x) \geq 2(x+1)$ ressemble à ce qu'il nous faut, on va essayer de l'améliorer en la réinjectant dans l'équation donnée. On a :

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \geq 2x(x+2) + 1 = 2x^2 + 4x + 1 \geq 2x^2 + 4x + 2 = 2(x+1)^2$$

On en déduit que $f(x) \geq \sqrt{2}(x+1)$, ce qui est une nette amélioration ! A noter l'ajout de 1 qui est une concession sans conséquence dans la mesure où le coefficient dominant a diminué mais qui permet d'obtenir une forme bien plus agréable et qu'on peut itérer. En poursuivant de même, on obtient :

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \geq \sqrt{2}x(x+2) + 1 = \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 \geq \sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}(x+1)^2$$

S'ensuit une récurrence immédiate qui permet de montrer que $f(x) \geq 2^{\frac{1}{n}}(x+1)$. En passant à la limite, on trouve que $f(x) \geq x+1$.

On essaye désormais de minorer f . On sait déjà que $f(x) \geq 1$ (ensemble d'arrivée de f). On va appliquer la même stratégie à nouveau :

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \geq x+1$$

D'où $f(x) \geq \sqrt{x}$ (on se débarrasse à nouveau du $+1$ qui ne nous apporte rien par rapport à $\sqrt{x}$). On recommence :

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \geq x\sqrt{x+1} + 1 \geq x\sqrt{x}$$

On obtient ainsi $f(x) \geq x^{\frac{3}{2}}$, et à nouveau par récurrence immédiate $f(x) \geq x^{1-\frac{1}{2^n}}$, d'où $f(x) \geq x$ à la limite.

Il nous reste encore à ajouter 1 à cette borne inférieure : on a une méthode toute trouvée, on ne change pas une équipe qui gagne ! En effet,

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \geq x(x+1) + 1 \geq x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Cela nous donne $f(x) \geq x + \frac{1}{2}$, et on peut à nouveau montrer par récurrence que $f(x) \geq x + 1 - \frac{1}{2^n}$, soit finalement $f(x) \geq x + 1$ par passage à la limite. Finalement, $f(x) = x + 1$ est l'unique solution.

Exercice 5 (IMO 2005, A2)

Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous x, y ,

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

Solution de l'exercice 5

En général, lorsque l'on a affaire à une inégalité sur les positifs (ou plus généralement à un domaine de définition restreint), il est toujours intéressant de faire apparaître des inégalités. On commence ici par remarquer que si $f(x) < 1$, on peut poser $y = \frac{x}{1-f(x)}$, de sorte à obtenir $y = x + yf(x)$. L'égalité de l'énoncé fournit alors $f(x) = 2$, ce qui est absurde. On a donc toujours $f(x) \geq 1$.

On souhaite désormais auto-améliorer cette inégalité sur le modèle de l'exercice précédent. En posant $y = x$, il vient désormais :

$$f(x)^2 = 2f(x + xf(x))$$

En particulier, puisque $f(z) \geq 1 \ \forall z$, on a $f(x)^2 \geq 2$, soit $f(x) \geq \sqrt{2}$. En reprenant le même argument, on a ensuite $f(x)^2 \geq 2\sqrt{2}$, puis $f(x)^2 \geq 2\sqrt{2\sqrt{2}} \dots$. En poursuivant ainsi, on obtient $f(x) \geq 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots} = 2$ par passage à la limite.

On montre désormais que f est croissante. D'après ce qui précède,

$$2f(x) \geq f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

En posant $y = \frac{z}{f(x)}$ pour un $z \geq 0$, on en déduit $f(x) \geq f(x + z)$, ce qui conclut.

Si f est strictement croissante, elle est injective. On utilise alors le fait que x et y jouent des rôles symétriques dans l'énoncé. En échangeant x et y , on obtient :

$$2f(y + xf(y)) = f(y)f(x) = f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$$

D'où par injectivité $y + xf(y) = x + yf(x)$ ou encore en divisant par xy :

$$\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} = \frac{f(y)}{y} - \frac{1}{y}$$

On est ici en présence d'une égalité à variables séparées, donc la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}$ est constante. En notant c cette constante, on obtient $f(x) = cx + 1$, ce qui est clairement absurde pour $x < \frac{1}{c}$ car $f(x) \geq 2$.

Supposons désormais que f ne soit pas injective. On a alors deux réels $a < b$ vérifiant $f(a) = f(b)$. En prenant $x = a$ et y tel que $x + yf(x) = b$, on obtient $f(y) = 2$, donc 2 appartient à l'image de f . Supposons que x_0 vérifie $f(x_0) = 2$, alors en posant $y = x = x_0$, on obtient $f(3x_0) = 2$, donc par récurrence immédiate $f(3^n x_0) = 2$. Soit x un réel quelconque, on dispose d'après ce qui précède de z tel que $z > x$ et $f(z) = 2$. Par croissance de f , on a donc $2 \geq f(x) \geq f(z) = 2$. Finalement la seule solution est la fonction constante égale à 2, qui convient bien.

Exercice 6 (IMO 2009, P5)

Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$a, f(b), f(b + f(a) - 1)$$

soient les côtés d'un triangle non aplati.

Solution de l'exercice 6

L'énoncé semble atypique : dire que trois longueurs sont les côtés d'un triangle semble être une condition peu restrictive et manipulable a priori. On commence par trouver une réécriture plus algébrique de la condition. Si x, y, z sont les côtés d'un triangle, on a par exemple

$$x + y > z$$

ou

$$x > |y - z|$$

La deuxième condition est particulièrement restrictive si x est petit. On cherche donc à prendre $x = 1$. Le seul terme dans l'énoncé dont on maîtrise la valeur est a , on prend donc $x = a, y = f(b), z = f(b + f(a) - 1)$ et on obtient

$$a > |f(b) - f(b + f(a) - 1)|$$

Avec $a = 1$ l'inégalité s'écrit $1 > |f(b) - f(b + K)|$, avec $K = f(1) - 1$. Ainsi, pour tout b ,

$$f(b) = f(b + K)$$

Si $K > 0$, f est alors une fonction périodique. Mais on peut alors écrire une autre inégalité : $a < f(b) + f(b + f(a) - 1)$. On peut ici faire diverger a en fixant b . On prend par exemple $b = 1$, et $a = 1 + n \cdot K$. On obtient

$$1 + n \cdot K < f(1) + f(f(1 + n \cdot K)) = f(1) + f(f(1))$$

ce qui est clairement faux pour n assez grand. Ainsi, $K = 0$ donc $f(1) = 1$.

Prenons maintenant $b = 1$. On a $f(b) > |a - f(b + f(a) - 1)|$, donc $1 > |a - f(f(a))|$. Ainsi, pour tout a , $f(f(a)) = a$. f est donc bijective.

Intéressons-nous maintenant à $f(2)$. Prenons $a = 2$. Soit $L = f(2) - 1$. On obtient comme avant

$$2 > |f(b) - f(b + L)|$$

$L \neq 0$ car $f(2) \neq f(1)$. Ainsi, $f(b) \neq f(b + L)$ donc pour tout b ,

$$f(b) = f(b + L) \pm 1$$

Soit $\varepsilon(b) = f(b + L) - f(b)$. On remarque que si $\varepsilon(b) = -\varepsilon(b + L)$, alors $f(b + 2L) = f(b)$, ce qui est absurde car f est injective. Ainsi, $\varepsilon(b) = \varepsilon(b + L)$. Par récurrence immédiate, pour tout n , $\varepsilon(b + nL) = \varepsilon(b)$ donc

$$f(b + nL) = f(b) + \varepsilon(b) + \varepsilon(b + L) + \dots + \varepsilon(b + (n - 1)L) = f(b) + n \cdot \varepsilon(b)$$

Si $\varepsilon(b) = -1$, on obtient $f(b + nL) < 0$ pour n assez grand, ce qui est encore une fois absurde. Ainsi, $\varepsilon(b) = 1$, et

$$f(b + nL) = f(b) + n$$

pour tous b et n . On obtient alors

$$\begin{aligned} b + L^2 &= f(f(b + L^2)) \\ &= f(f(b) + L) \\ &= f(f(b)) + 1 \\ &= b + 1 \end{aligned}$$

d'où $L = 1$ et $f(2) = 2$. On obtient donc que pour tout b , $f(b + 1) = f(b) + 1$. Ainsi, par récurrence immédiate, $f(n) = n$ pour tout n .

Réciproquement, la fonction identité est clairement solution, et c'est la seule.

Exercice 7 (IMO 2007, A2)

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est mystique si pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(m + n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

Trouver toutes les valeurs que peut prendre $f(2025)$, avec f une fonction mystique.

Solution de l'exercice 7

Les solutions sont tous les entiers entre 1 et 2026 inclus.

Commençons par fournir une construction pour les entiers entre 1 et 2025. Soit $k \in \llbracket 1, 2025 \rrbracket$. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 2025 - k \\ x - (2025 - k) & \text{si } x < 2025 - k \end{cases}$$

Soit $c = 2025 - k$. Soit m, n deux entiers. Si $m \geq c$, on a directement

$$f(m + n) \geq f(n) \geq f(f(n)) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

Sinon, on a

$$f(m + n) = m + n - c = f(m) + n \geq f(m) + f(f(n)) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

Ainsi, cette fonction f vérifie la condition de l'énoncé.

Intéressons-nous maintenant au cas où $f(2025) = 2026$. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } 2025|x \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit m, n deux entiers. Si $2025|n$, on a

$$f(m+n) = f(m) + n = f(m) + f(f(n)) - 1$$

Sinon,

$$f(m+n) \geq m+n \geq f(m) - 1 + n \geq f(m) - 1 + f(f(n))$$

On cherche donc maintenant à montrer que $f(2025) \geq 2026$. Soit f une fonction vérifiant la condition de l'énoncé. Supposons que $f(2025) > 2026$, et soit $d = f(2025) - 2025$.

Tout d'abord, on a $f(m+n) \geq f(m)$, donc f est croissante.

Soit n tel que $f(n) > n$. On a alors, avec $m = f(n) - n$,

$$f(f(n) - n) \geq 1$$

Or, $f(2025) > 1$ donc, par croissance de f , $f(n) - n < 2025$. Ainsi, pour tout n , $f(n) < n + 2025$. On peut montrer par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $f(k \cdot 2025) \geq k \cdot (2025 + d - 1)$. En effet, on a déjà, pour $k = 1$,

$$f(2025) = 2025 + d \geq 2025 + d - 1$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Supposons cette inégalité vraie pour $k - 1$, montrons-la pour k . On a

$$\begin{aligned} f(k \cdot 2025) &= f((k-1) \cdot 2025 + 2025) \\ &\geq f((k-1) \cdot 2025) + f(f(2025)) - 1 \\ &\geq \left[(k-1) \cdot (2025 + d - 1) \right] + f(2025) - 1 \\ &\geq \left[(k-1) \cdot (2025 + d - 1) \right] + 2025 + d - 1 \\ &\geq k(2025 + d - 1) \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. Or, pour k assez grand, on a $f(k \cdot 2025) - k \cdot 2025 = k(d-1) > 2025$, ce qui est absurde et conclut la preuve.

Exercice 8 (IMO 2023, A4)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y > 0$,

$$x(f(x) + f(y)) \geq (f(f(x)) + y)f(y)$$

Solution de l'exercice 8

On utilise la notation $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ fois } f}$.

Tout d'abord, en posant $x = y$, on trouve $x \geq f^2(x)$. On cherche à montrer l'inégalité inverse.

On commence par poser $x = f(y)$, ce qui fait apparaître un $f(y)$ que l'on pourra simplifier de chaque côté. Cela donne : $f^2(y) + f(y) \geq f^3(y) + y$.

Puis on remplace y par $f(y)$, ce qui va permettre de faire apparaître un $f^3(y)$ à gauche pour compenser celui à droite actuellement, et de même un $f(y)$ à droite qui s'annulera avec celui de gauche.

Cela donne : $f^3(y) + f^2(y) \geq f^4(y) + f(y)$.

On somme alors ces deux inégalités, ce qui se simplifie en :

$$2f^2(y) \geq f^4(y) + y$$

On a désormais une inégalité simple avec laquelle on peut travailler. Comme f est positive, on a déjà gratuitement $f^2(y) \geq \frac{y}{2}$. On peut réinjecter cette inégalité dans le membre de droite :

$$2f^2(y) \geq f^4(y) + y \geq \frac{f^2(y)}{2} + y \geq \frac{y}{4} + y = \frac{5}{4}y$$

Ainsi, $f^2(y) \geq \frac{5}{8}y$. Si on note (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$, alors on peut montrer par récurrence immédiate que $f^2(x) \geq u_n \cdot x$ sur le modèle précédent. Cette suite est croissante par IAG, et majorée par 1, donc elle converge vers une limite ℓ . Cette limite vérifie $\ell = \frac{\ell^2+1}{2}$, d'où $\ell = 1$. Ainsi, en passant à la limite, on obtient enfin $f^2(x) \geq x$.

On a donc obtenu que $f(f(x)) = x$, ce que l'on réinjecte dans l'énoncé. En soustrayant $xf(y)$ de chaque côté, il vient $xf(x) \geq yf(y)$. On est en présence d'une inégalité à variables séparées, donc la fonction $x \mapsto xf(x)$ est constante égale à $c > 0$. Ainsi, $f(x) = \frac{c}{x}$. Réciproquement, toutes les fonctions de cette forme conviennent bien.

6 Arithmétique : TD de petites Shortlists (Gabriel et Maryam)

Exercices

Exercice 1 (EGMO 2012 P5)

Soit p, q premiers et n entier tels que

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}.$$

Quelles sont les valeurs possibles de $q - p$?

Exercice 2 (Bulgarie 2021 P4)

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $c, d \in \mathbb{N}$ tels qu'il y une infinité de paires (i, j) , $ai + b \mid cj + d$ avec par ailleurs $i \leq j \leq i + 2021$. Montrez que pour tout i il existe j tel que $ai + b \mid cj + d$.

Exercice 3 (N2 2022)

Trouvez tous les $n > 2$ tels que

$$n! \mid \prod_{\substack{p < q \leq n \\ p, q \text{ premiers}}} (p + q)$$

Exercice 4 (IMC 2022 P6)

Soit $p \geq 3$ un nombre premier. Montrez qu'il existe une permutation de $\{1, \dots, p-1\}$ notée $x_1, \dots, x_{p-1}$ telle que

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{p-2}x_{p-1} \equiv 2 \pmod{p}.$$

Exercice 5 (Canada 2023 P1 modifié)

Soit $N > 1$. J'ai pensé à un nombre n entre 1 et N , vous devez le trouver. Vous avez le droit de me poser des questions de la forme " m divise-t-il n ?" où m est un entier naturel. En combien de questions au minimum êtes-vous sûr de trouver n ?

Exercice 6 (N2 2011)

Soit $d_1 < d_2 < \dots < d_9$ des entiers relatifs et $P(x) = \prod_{j=1}^9 (x + d_j)$. Prouvez qu'il existe un entier N pour lequel pour tout $x \geq N$ le nombre $P(x)$ est divisible par un premier ≥ 20 .

Exercice 7 (N3 2023, exo à la noix)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \geq 2$, soit $E_k(n)$ le r maximal tel que k^r divise $n!$. Montrez qu'il existe une infinité de n tels que $E_{10}(n) > E_9(n)$ et une infinité de m tels que $E_{10}(m) < E_9(m)$.

Exercice 8 (N2 2020)

Soit p premier, on définit le graphe G_p avec les sommets $\{1, 2, \dots, p\}$, où $m \neq n$ sont adjacents si p divise $(m^2 + 1 - n)(n^2 + 1 - m)$. Montrez qu'il existe une infinité de p tels que G_p est non connexe.

Exercice 9 (IMO 2020 N3/P5)

On considère un paquet de n cartes. Un entier naturel non nul est écrit sur chacune des cartes. Pour chaque paire de cartes, la moyenne arithmétique de nombres représentés est la moyenne

géométrique d'un sous-ensemble de cartes du paquet. Pour quel n est-on sûr que toutes cartes ont la même valeur ?

Exercice 10 (N3 2019)

On dit qu'un ensemble d'entiers S est *racineux* si pour tout n et $a_0, a_1, \dots, a_n \in S$, toute les racines entières du polynôme $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ sont dans S . Trouvez tous les ensembles racineux qui contiennent par ailleurs tous les nombres de la forme $2^a - 2^b$ où a et b sont des entiers naturels.

Exercice 11 (Canada 2020 P4)

Soit $S = \{1, 4, 8, 9, 16, 25, 27, \dots\}$ l'ensemble des puissances exactes, c'est à dire les nombres de la forme n^k où $n, k \geq 2$. La suite $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ prend les valeurs des éléments de S dans l'ordre croissant. Montrez qu'il existe une infinité de n tels que $2025 \mid a_{n+1} - a_n$.

Solutions

Solution de l'exercice 1 (EGMO P5 2012)

Pour recontextualiser, il s'agissait du premier exercice du second jour de la compétition. On a $\frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} = \frac{4}{n+2}$. D'où $4q(p+1) = (n+2)(q-p-1)$. Or $q > q-p+1$ donc ils sont premiers entre eux et $\gcd(p+1, q-p-1) = \gcd(q, q-p-1) = 1$. D'où $q-p-1 \mid 4$ donc $q-p = 2, 3$ ou 5 , vérifié pour $(3, 5), (2, 5), (2, 7)$.

Solution de l'exercice 2 (Bulgarie 2021 P4)

Notons $t = j - i$, par principe des tiroirs il existe un t pour lequel pour une infinité de i tels que $ai + b \mid c(i+t) + d$, mais alors $\frac{c(i+t)+d}{ai+b}$ est une suite d'entiers tendant vers $s = a/c$ qui est donc entier. $ai + b \mid sa(i+t) + d$ donc $ai + b \mid s(at-b) + d$, comme le membre de gauche tend vers $+\infty$, on a $sat + d = sb$ d'où pour tout i , $c(i+t) + d = s(ai+b)$.

Solution de l'exercice 3

Premièrement, pour exploiter une relation de divisibilité, autant l'exploiter sur des premiers. Deuxièmement, l'idée de considérer le plus petit nombre premier est classique (pour utiliser l'ordre), mais ici on voit clairement que ça n'apporte pas grand chose : 2 divise sans souci le membre de droite.

Par contre, si on considère le plus grand nombre premier p inférieur à n , on a des informations !

En effet, par Gauss, on dispose de premiers $r < s$ tels que $p \mid r + s$. Or $r + s < 2p$, donc nécessairement $r + s = p$. Mais p est impair, donc $r = 2$ et $s = p - 2$, impair aussi.

Mais de même on dispose de $r' < s'$ premiers tels que $p - 2 \mid r' + s'$. Deux cas :

- Si $s' \leq p - 2$, l'argument précédent donner $r' + s' = p - 2$ et donc $p - 4$ est premier
- Si $s' = p$, alors $p - 2 < p + r' \leq p - 4 + P = 2(p - 2)$ (en effet, le plus grand premier plus petit que $p - 2$ vaut au plus $p - 4$). On a donc nécessairement égalité et $p - 4$ est premier.

Or, si $p - 4, p - 2$ et p sont premiers, alors l'un est divisible par 3 (on regarde mod 3).

Donc c'est 3, 5, 7. On vérifie que $n = 7$ convient et pas $n = 8$, donc l'unique solution est $n = 7$.

Solution de l'exercice 4 (IMC 2022 P6)

Dans certains exercices, la combinatoire est au service de l'arithmétique, ici c'est plutôt l'inverse, puisqu'on va chercher une permutation "arithmétique", pas quelconque du tout. Rappelons quelques aspects "combinatoires" d'opérations usuelles dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ où p est un premier ≥ 3 :

- pour a quelconque, $x \mapsto x + a$ est une bijection.
- pour a premier avec p , $x \mapsto ax$ est une bijection, qui envoie un inversible sur un inversible, c'est celle-ci qu'on utilise pour la démonstration du petit théorème de Fermat.
- $x \mapsto x^2$ est une relation 2 pour 1.
- $x \mapsto x^{\frac{p-1}{2}}$ envoie les $\frac{p-1}{2}$ carrés non-nuls sur 1 et les $\frac{p-1}{2}$ non carrés sur -1 . Ce dernier point peut se voir comme conséquence du précédent ou grâce à une racine primitive.

Nous avons soigneusement évité ci-dessus la bijection utilisée pour cet exercice, pour présenter d'abord la piste qui nous y amène : on espère pouvoir obtenir une somme télescopique c'est à dire de la forme $x_i x_{i+1} = a_i - a_{i+1}$ pour une certaine suite a_i . On combine ça avec

l'identité simple mais pratique $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, et effectivement $x \mapsto \frac{1}{x}$ est bien une permutation (puisque l'inverse est unique) des éléments inversibles qui convient. Pour revenir sur l'aspect combinatoire, petite question bonus : combien existe-t-il de cubes modulo p ?

Solution de l'exercice 5 (Canada 2023 P1, modifié)

L'idée essentielle est de s'intéresser aux questions de la forme $p \mid n$ où p est premier. Soit $\pi(N)$ le nombre de premiers $\leq N$. Par exemple $\pi(6) = \pi(5) = 3$. Montrons que le nombre de questions minimales est $\pi(N)$.

Soit $p_1 < \dots < p_{\pi(N)}$ les premiers inférieurs à N . Si j'ai pensé à un l'un de ces premiers il vous faut au minimum $\pi(N)$ questions pour le trouver.

Montrons qu'il suffit de $\pi(N)$ questions. Si je réponds "oui" à la question $p \mid n$ vous pouvez remplacer n par n/p quitte à poser des questions de la forme $pm \mid n$. Ecrivez les $\pi(N)$ nombres premiers au tableau, et posez pour chaque nombre premier (plusieurs fois si nécessaire), la question $p \mid n$, jusqu'à ce que je réponde "non" pour passer au suivant. Si je répons "non", vous pouvez barrer ce nombre premier, si je répons "oui", vous pouvez barrer le plus grand nombre premier écrit au tableau parce $n/p \leq n/2$ et que par le postulat de Bertrand, ce dernier est compris entre $n/2$ et n . Ainsi à chaque étape on barre au moins un nombre premier, et après $\pi(N)$ étapes, lorsque tous sont barrés on connaît le nombre initial.

Solution de l'exercice 6 (N2 2011)

On suppose par l'absurde qu'il existe des x aussi grands que l'on le veuille tels que $P(x)$ n'a pas de diviseur premier supérieur à 20.

Il faut combiner plusieurs idées intéressantes

- Mais alors, comme les $x + d_i$ sont aussi grands que l'on le veuille, la plus grande puissance qui apparait dans leur décomposition de facteurs premier est aussi grands que l'on veut!
- D'autre part,

$$\text{pgcd}(x + d_i, x + d_j) = \text{pgcd}(x + d_i, d_j - d_i) \leq d_j - d_i \leq d_9 - d_1$$

est borné.

- On remarque qu'il y a 8 nombres premiers inférieurs à 20, et on a $d_1, \dots, d_9$ donc 9 nombres : le principe des tiroirs nous sera utile!

Maintenant, on nomme premier parfait le premier de puissance maximale dans la décomposition en facteurs premiers d'un nombre.

$x + d_1, \dots, x + d_9$ sont 9 pour 8 premiers donc il y en a deux, d'indices i et j qui ont le même premier parfait p . Soit α la plus grande puissance de p divisant $x + d_i$ et $x + d_j$.

$p^\alpha \mid \text{pgcd}(x + d_i, x + d_j)$ et $\text{pgcd}(x + d_i, x + d_j) \leq d_9 - d_1$.

Donc α est borné, ce qui est impossible car par hypothèse, on peut prendre x aussi grand que l'on le veut donc α ne peut être borné.

C'est absurde et ça conclut!

Solution de l'exercice 7 (N3 2023, exo à la noix)

Cet exercice est inadéquat dans le contexte des maths olympiques, dans le sens où l'exercice se termine avec un théorème : Legendre.

La forme $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ est bien connue du commun des olympiens, mais il existe une seconde forme :

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}$$

où $s_p(n)$ désigne la somme des chiffres de n en base p .

De plus, remarquons que $v_{10}(n!) = v_5(n!)$ car il y a clairement plus de facteurs 2 que 5. Et $v_9(n!) = \left\lfloor \frac{v_3(n!)}{2} \right\rfloor$.

Ainsi, en combinant les résultats ci-dessus,

$$v_{10}(n) = \frac{n - s_5(n)}{4}$$

$$v_9(n) = \left\lfloor \frac{\frac{n - s_3(n)}{2}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - s_3(n)}{4} \right\rfloor$$

— Maintenant, prenons n une puissance 5ème. $s_5(n) = 1$ et $s_3(n) > 1$.

Ainsi,

$$v_{10}(n) = \frac{n - 1}{4}$$

et

$$v_9(n) = \left\lfloor \frac{n - s_3(n)}{4} \right\rfloor < \frac{n - 1}{4} = v_{10}(n)$$

. Cela nous fait un cas de résolu !

— prenons $n = 3^{2k}$ une puissance paire de 3. D'une part, $s_5(n) > 1$, et de l'autre, $n - 1 = 3^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ donc $\left\lfloor \frac{n - s_3(n)}{4} \right\rfloor = \frac{n - 1}{4}$

Ainsi,

$$v_9(n) = \frac{n - 1}{4} < \frac{n - s_5(n)}{4} = v_{10}(n)$$

Cela conclut.

Solution de l'exercice 8 (N2 2020)

Ce problème, très intéressant combine théorie des nombres et graphe. De plus, il y a besoin de connaissances non-élémentaires en théorie des nombres : soit les résidus quadratiques, soit les racines primitives. On notera $\mathbb{F}_p$ (comme *field*) l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ pour insister sur le fait que c'est un *corps* (c'est à dire un ensemble où on peut additionner, multiplier, diviser)

Première solution (résidus quadratiques) :

Idée : on veut un graphe non connexe, donc une idée peut être d'avoir une toute petite composante connexe. Avoir un point isolé est impossible : x est relié à $x^2 + 1$, mais $-x$ y est relié aussi. On va donc forcer l'existence d'une composante connexe $(x, -x)$.

Proposition 1.

un polynôme de second degré $ax^2 + bx + c$ modulo p (dans $\mathbb{F}_p$) a au plus deux racines.

Démonstration. comme dans $\mathbb{R}$, on peut factoriser par $x - r$ avec r la racine, ce qui nous donne la seconde racine (potentiellement la même). ça se passe bien car on peut diviser par tout nombre non nul mod p (ie $\mathbb{F}_p$ est un corps). $\square$

Cela donne qu'au plus deux nombres pointent vers un même nombre ! Maintenant, qu'est-ce qu'on veut précisément ? Que x et $-x$ pointent vers x (donc plus personne ne pointe vers x), et que personne ne pointe vers $-x$. Comme ça, $x, -x$ devient effectivement une composante connexe.

Mais personne ne pointe vers $-x$ ssi l'équation $n^2 + 1 = -x$ n'a pas de solution, ie si $-x - 1$ n'est pas résidu quadratique. En résumé, on veut qu'il existe x tel que $x^2 + 1 = x$ et $-x - 1$ n'est pas résidu quadratique.

Considérons le polynôme $Y^2 - Y + 1$. On va réappliquer la méthode de résolution des équations de second degré pour trouver des racines éventuelles. $Y^2 - Y + 1 = (Y - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ (on prend $p \neq 2$ pour pouvoir effectivement diviser par 2

a en est racine ssi $(a - \frac{1}{2})^2 = -\frac{3}{4}$, ie ssi $a = \frac{1+c}{2}$ où c vérifie $c^2 = -3$ (on est modulo p tout au long). Ainsi, l'équation ci-dessus admet des solutions si et seulement si -3 est résidu qua-

dratique, auquel cas on a deux racines !

Pour ça, on peut choisir de faire en sorte que 3 soit résidu quadratique, 1 l'étant systématiquement, soit de faire en sorte que -1 et 3 ne soient pas résidus quadratiques (cf cours de résidus quadratiques, symbole de Legendre par exemple).

Nous choisissons la seconde façon, et verrons pourquoi.

Soient donc a et b les racines. On a gagné si $a - 1$ ou $b - 1$ n'est pas résidu quadratique. Mais supposons qu'ils le soient, alors leur produit l'est également !

Or $(-a - 1)(-b - 1) = ab + (a + b) + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$ par les formules de Viet, et 3 n'est pas résidu quadratique mod p , ce qui concluerait ! Enfin, caractérisons des premiers tels que -1

et 3 soient des non résidus quadratiques.

$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$ donc on veut $\frac{p-1}{2}$ impair ie $p \equiv 3 \pmod{4}$.

Enfin, par la réciprocité quadratiques,

$$\left(\frac{3}{p}\right) \times \left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \times \frac{3-1}{2}} = -1$$

. On veut donc $\left(\frac{p}{3}\right) = 1$ ie $p \equiv 1 \pmod{3}$. Enfin, en combinant les résultats précédents, on en

déduit que pour tout premier $p \equiv 7 \pmod{12}$, il existe une composante connexe de la forme $(x, -x)$. De plus, il y a une infinité de tels nombres premiers par le théorème de progression arithmétique de Dirichlet, ce qui conclut enfin ce magnifique exercice !

Solution alternative (plus courte, utilise les racines primitives et l'aspect graphe)

Proposition 2.

Un graphe à n sommets a au moins $n - 1$ arêtes.

Démonstration. On montre que chaque arête enlève au plus une composante connexe (en reliant deux). Ou alors on fait une récurrence, ça marche aussi. $\square$

On va commencer par orienter le graphe.

Maintenant, on dit qu'il y a une arête de n vers m si $n^2 + 1 \equiv m \pmod{p}$. Chaque sommet a donc exactement une arête sortante.

De plus, on peut avoir des sommets qui pointent vers eux-mêmes. Montrons qu'on peut en avoir deux !

Soit on fait comme ci-dessus et on obtient les $p \equiv 7 \pmod{12}$ soit :

$x^2 - x + 1 \equiv 0 \iff x^3 \equiv -1$ et $x \not\equiv -1$ (identité remarquable). On prend $p \equiv 1 \pmod{6}$.

Soit g une racine primitive,

Alors, on vérifie que $g^{\frac{p-1}{6}}$ et $g^{5 \times \frac{p-1}{6}}$ conviennent. En effet, cela repose sur $\frac{p-1}{2} \equiv 1 \pmod{2}$. On a donc en réalité au plus $p-1$ (nombres de sommets) $-2 = p-3$ arêtes sortantes. Comme le nombre d'arêtes et le nombre d'arêtes sortantes sont égaux (chaque arête est une arête sortante par rapport à un sommet), quand on considère le graphe non orienté associé, il a au plus $p-3 < (p-1) - 1$ arêtes. Par la contraposée de la proposition, il s'ensuit que le graphe associé n'est pas connexe. Cela conclut donc !

Solution de l'exercice 9 (N3 2020/P5)

L'énoncé est faussement énigmatique, et le traitement de petites valeurs nous laisse penser que tous les entiers n vérifient cette propriété.

Notons $a_1 < \dots < a_n$ les entiers qui composent le paquet de cartes. Commençons par remarquer que si un entier a divise tous les entiers, alors le paquet dont les cartes sont $a_1/a, \dots, a_n/a$ vérifie également la propriété. On peut donc supposer sans perte de généralité que les a_i sont premiers entre eux dans leur ensemble, et l'on cherche à montrer qu'ils valent tous 1.

Considérons p un facteur premier de a_1 et considérons l'indice i tel que $p \mid a_k$ pour tout $k \geq i$. Supposons par l'absurde que $i \geq 2$. Notons $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$ les r nombres tels que

$$\frac{a_n + a_{i-1}}{2} = \sqrt[r]{a_{i_1} \dots a_{i_r}}.$$

Notons que si p divise l'un des termes du membre de droite, alors le nombre $a_{i_1} \dots a_{i_r}$ est divisible par p donc par p^r pour être rationnel, donc le nombre $2\sqrt[r]{a_{i_1} \dots a_{i_r}}$ est un entier divisible par p . Ceci implique que $p \mid a_{i-1}$, ce qui est absurde.

Donc p ne divise aucun des termes du membre de droite. Mais alors par définition de i , et puisque $a_{i-1} \neq a_i$ car p divise a_i mais p ne divise pas a_{i-1} , on a

$$\sqrt[r]{a_{i_1} \dots a_{i_r}} \leq \sqrt[r]{a_{i-1} \dots a_{i-1}} = a_{i-1} < \frac{a_n + a_i}{2},$$

ce qui est absurde.

On en conclut qu'aucun p ne peut diviser a_n , donc $a_n = 1$ et tous les entiers valent 1.

Solution de l'exercice 10 (N3 2019)

Quelques essais nous permettent de conjecturer que S contient tous les entiers relatifs, et nous allons montrer par récurrence sur N que N appartient à S pour tout N .

Initialisation : On constate que $2^a - 2^a \in S$ pour tout a , donc $0 \in S$. D'autre part, 1 est bien dans S en tant que racine de $(2^2 - 2^1)X - (2^2 - 2^1)$. On montre de même que $-1 \in S$.

Hérédité : On suppose que $0, 1, \dots, N-1$ sont des éléments de S . On désire montrer que N est également un élément de S .

On cherche alors à travailler avec les polynômes à coefficients dans $\{0, \dots, N-1\}$, qui sont bien des polynômes admissibles pour l'exercice par hypothèse de récurrence. Si l'on trouve un élément a de S tel que $-a = P(N)$ avec P de coefficient constant nul et dont les autres coefficients sont dans $\{0, \dots, N-1\}$, alors N sera racine du polynôme $P + a$ qui est à coefficients dans S .

La preuve contient alors deux idées : la première, c'est de trouver un multiple de N qui est dans S . La deuxième, sublime, permet d'exprimer ce multiple comme $P(N)$.

En effet, si l'on écrit $N = 2^\alpha \beta$ avec β impair et si on note ω l'ordre de 2 modulo β , alors N divise $2^{\alpha+1+\omega} - 2^{\alpha+1}$ (qui est bien dans S car chacune des puissances est une puissance non nul de 2). Posons $a = 2^{\alpha+1} - 2^{\alpha+1+\omega}$. Considérons l'écriture de $-a$ en base N :

$$-a = a_d N^d + \dots + a_1 N + a_0.$$

Notons que $a_0 = 0$ car N divise a , et que chaque terme a_i est dans $\{0, \dots, N-1\}$. Ainsi, le polynôme $P(X) + a = \sum_{i=1}^d a_i X^i$ est à coefficients dans S et a N pour racine, de sorte que N appartient à S .

De même, on prouve que $-N$ est dans S , ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 11 (Canada 2020 P4)

L'idée de l'exo est qu'il y a énormément plus de carrés que de puissances > 2 exactes. Pour $k \in \mathbb{N}$, $2025 \mid (k+1)^2 - k^2 \iff k \equiv -\frac{1}{2} \equiv 1012 \pmod{2025}$, donc le cardinal de $\{n \leq N : n = k^2 \text{ et } 2025 \mid (k+1)^2 - k^2\}$ est de $\left\lfloor \frac{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}{2025} \right\rfloor$.

Par ailleurs les puissances $p > 2$ exactes pouvant entre 1 et N sont au plus au nombre de $\sqrt[p]{N} \leq \sqrt[3]{N}$, avec $p \leq \log_2 N$, d'où il y a plus $N^{1/3} \log_2 N$ telles puissances, qui est très petit devant $CN^{1/2}$ quand N est grand (avec C une constante).

7 Arithmétique : Problèmes autour des diviseurs (Maxime et Théo)

L'objectif de ce TD est de regarder des problèmes autour des diviseurs. Quelques astuces :

- Regarder les petits diviseurs, la parité des diviseurs, montrer que n a beaucoup de diviseurs.
- Si p est un facteur premier de n , écrire $n = p^k m$ avec m premier avec p , et appliquer les hypothèses à p^k ou à m .
- Regarder le plus petit facteur premier p de n .
- Ne pas oublier que si d divise n , $\frac{n}{d}$ aussi. En particulier, si $d_1 < \dots < d_k$ sont les diviseurs positifs de n , $d_i = \frac{n}{d_{k+1-i}}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

Exercice 1

(P2 EMC Junior 2020) Pour quels $k \geq 3$, existe-t-il $d_1 < \dots < d_k$ et n des entiers strictement positifs tels que $d_{j+2} = d_{j+1} + d_j$ pour tout j vérifiant $1 \leq j \leq k-2$, que $d_1, \dots, d_k$ sont des diviseurs de n , et que chaque autre diviseur de n est soit strictement inférieur à d_1 , soit strictement supérieur à d_k .

Exercice 2

(P1 IMO 2023) Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que si on note $d_1 < \dots < d_k$ les diviseurs de n , $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2}$ pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq k-2$.

Exercice 3

(P1 EGMO 2025) Déterminer tous les entiers $N \geq 3$ tels que, si on note $c_1 < \dots < c_m$ les entiers strictement positifs premiers avec N inférieurs strictement à N , alors $\text{PGCD}(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$ pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq m-1$.

Exercice 4

Soit n un entier strictement positif, on répartit les diviseurs de n en paires telles que la somme des nombres de chaque paire est un nombre premier. Montrer que tous ces nombres premiers sont différents et aucun ne divise n .

Exercice 5

(N2 2002) Soit n un entier strictement plus grand que 1. On note $d_1 < \dots < d_k$ les diviseurs de n . Montrer que $d_1 d_2 + \dots + d_{k-1} d_k < n^2$, et déterminer tous les n tels que cette expression divise n^2 .

Exercice 6

(N1 2025) Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que pour tout diviseur positif d de n , $d+1$ est premier ou $d+1$ divise n .

Exercice 7

(P4 IMO 2025) Un diviseur de n est dit strict si ce n'est pas n lui-même. Déterminer toutes les valeurs de a_1 pour lesquelles il existe une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'entiers strictement positifs telle que pour tout $n \geq 1$, a_n admet trois diviseurs stricts distincts, et a_{n+1} est la somme des trois plus grands diviseurs stricts de a_n .

Exercice 8

(P3 EGMO 2024) Soit n un entier strictement positif, on dit que n est spécial si pour tout

diviseur de n , $d(d+1) \mid n(n+1)$. Montrer que si A, B, C, D sont tous spéciaux et deux à deux distincts, $\text{PGCD}(A, B, C, D) = 1$.

Exercice 9

(P1 USAMO 2024) Déterminer tous les entiers $n \geq 2$ tels que si on note $d_1 < \dots < d_k$ les diviseurs de $n!$, $d_2 - d_1 \leq d_3 - d_2 \leq \dots \leq d_k - d_{k-1}$.

Exercice 10

(P4 USAMO 2021) Soit S un ensemble fini d'entiers strictement positifs tel que pour tout élément s dans S , pour tout diviseur d de s , il existe un unique t dans S tel que $\text{PGCD}(s, t) = d$. Déterminer toutes les valeurs possibles de $|S|$.

Exercice 11

(N3 2021) Déterminer tous les entiers n strictement positifs tels que si on note $d_1 < \dots < d_k$ les diviseurs de n , alors pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $d_1 + \dots + d_i$ est un carré parfait.

Solution de l'exercice 1

Soit k solution, et $d_1 \leq \dots \leq d_k$ associés. Regardons la parité des d_i , et essayons de montrer que cela implique que k est petit. Déjà s'il existe $i \leq k-2$ tel que d_i et d_{i+1} ont même parité, alors d_{i+2} est pair et divise n . Ainsi $\frac{d_{i+2}}{2} = \frac{d_i + d_{i+1}}{2}$ divise n , et est strictement entre d_i et d_{i+1} car $d_i < d_{i+1}$. Cela est impossible d'après l'hypothèse de l'énoncé.

Ainsi parmi d_1 et d_2 , comme $k \geq 3$, un des deux est impair et l'autre pair. Si d_1 est impair, d_2 est pair, d_3 est impair, d_4 est impair, et donc d_5 ne peut pas exister : on a $k \leq 4$ dans ce cas. Si d_1 est pair, d_2 est impair, donc d_3 est impair, donc d_4 ne peut pas exister, on doit avoir $k \leq 3$. Ainsi on a forcément $k \leq 4$ dans tous les cas.

Réciproquement, pour $k=3$, $d_1=1$, $d_2=2$, $d_3=3$ convient pour $n=6$, et pour $k=4$, il suffit de rajouter $d_4=5$, qui convient pour $n=30$.

Solution de l'exercice 2

Déjà $n=1$ est solution, et si n est une puissance de p , pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq k-2$, on a $d_i = p^i$, $d_{i+1} = p^{i+1}$ et $d_{i+2} = p^{i+2}$, donc d_i divise bien d_{i+1} et d_{i+2} , donc divise aussi leur somme.

Réciproquement supposons qu'il existe n une solution qui n'est pas une puissance d'un nombre premier (1 inclus). On note p son plus petit facteur premier : on a $d_k = n$ et $d_{k+1} = n/p$. Montrons par récurrence forte sur i que $d_{k-i} = n/p^i$ pour $i \leq k-1$: l'initialisation pour $i=0$, 1 est déjà prouvée.

Pour l'hérédité, soit $i \geq 2$ vérifiant $i \leq k-2$, montrons l'hypothèse de récurrence pour $i+1$. On a par hypothèse que $d_{k-(i+1)}$ divise $d_{k-i} + d_{k-(i-1)} = \frac{n}{p^i} + \frac{n}{p^{i-1}}$.

Posons $d_{k-(i+1)} = \frac{n}{b}$ avec b divisant n , on a que $\frac{n}{b}$ divise $\frac{n(p+1)}{p^i}$, donc en multipliant par $p^i b$ et en divisant par n , p^i divise $(p+1)b$. Or p^i est premier avec $p+1$, donc p^i divise b . Donc on peut écrire $b = p^\alpha N$, avec p premier avec N et $\alpha \geq i \geq 2$. $N \mid b \mid n$ et $N < b$, donc $\frac{n}{N}$ est l'un des d_{k-j} , $j \leq i$. Donc $N = p^j$, or p premier avec N , donc $N = 1$. Donc $b = p^\alpha$.

Si $\alpha \geq i+2$, $p^i < p^{i+1} < b$, donc $\frac{n}{p^{i+1}}$ est compris entre deux diviseurs consécutifs de n , d_{k-i} et $d_{k-(i+1)}$, absurde car c'est un diviseur de n : $p^{i+1} \mid b \mid n$. Donc $i \leq \alpha \leq i+1$. Donc b vaut p^{i+1} (b ne peut pas valoir p^i sinon $d_{k-i} = d_{k-(i+1)}$), ce qui achève la récurrence. Donc $1 = d_1 = \frac{n}{p^{k-1}}$, donc $n = p^{k-1}$ et est bien une puissance de p .

Solution n°2 de l'exercice 2

On montre d'une autre façon que n est une puissance de nombre premier. Soit p le plus petit diviseur premier de n . On a alors $p = d_2$. On a deux options pour d_3 : $d_3 = p^2$ ou $d_3 = q$, où q est le deuxième plus petit facteur premier de n .

Si $d_3 = p^2$, on a par récurrence forte sur i que $p \mid d_j \forall 2 \leq j \leq k$. En effet, on a notre initialisation pour $j=2$ et $j=3$, et si $p \mid d_j, d_{j+1}$, $p \mid d_j \mid d_{j+1} + d_{j+2} \implies p \mid d_{j+2}$. Et alors n est une puissance de p : si n possédait un facteur premier q différent de p , comme p divise tous les diviseurs de n différents de 1, p divise q , absurde.

Donc $d_3 = q$. Donc $d_k = n$, $d_{k-1} = \frac{n}{p}$ et $d_{k-2} = \frac{n}{q}$. $\frac{n}{q} \mid \frac{n}{p} + n$, or $\frac{n}{q} \mid n$, donc $\frac{n}{q} \mid \frac{n}{p}$ ce qui implique encorer une fois $p \mid q$, absurde.

Solution de l'exercice 3

Notons déjà que si N est pair, tout entier premier avec N est impair. Ainsi $c_i + c_{i+1}$ est toujours pair dans ce cas, donc non premier avec N , ce qui conclut que N est bien solution.

Si N est une puissance de 3, les entiers premiers avec N sont exactement ceux premiers avec 3. Ainsi les c_i valent alternativement 1 et 2 modulo 3, donc 3 divise $c_i + c_{i+1}$ pour tout i , qui n'est donc jamais premier avec N . N est donc bien solution.

Maintenant supposons que N est impair et solution, montrons que N est une puissance de 3, ce qui conclura. Déjà $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$, donc $c_1 + c_2 = 3$ n'est pas premier avec N , ainsi 3 divise N . Posons $N = 3^k \times m$ avec $k \geq 1$ et m premier avec 3. Comme m est impair, $m + 1, m + 2, m - 1$ et $m - 2$ sont premiers avec m (la différence avec m vaut 1 ou 2, qui est premier avec m car N impair). De plus, comme m est premier avec 3, m vaut 1 ou 2 modulo 3. Supposons désormais $m \geq 2$.

- Si m vaut 1 modulo 3, $m - 1$ n'est pas premier avec 3, donc pas avec N . $m - 2$ est premier avec 3 et avec m , donc avec N . m n'est pas premier avec N , et $m + 1$ est premier avec 3 est m donc avec N . Ainsi $m - 2$ et $m + 1$ sont deux entiers premiers avec N et strictement inférieur à N (on a bien $m + 1 < 3m \leq N$) et les entiers entre ne le sont pas, donc il existe i tel que $c_i + c_{i+1} = 2m - 1$. $2m - 1$ est premier avec m , et premier avec 3 (car valant 1 mod 3), donc premier avec N ce qui est absurde. Ainsi N n'est pas solution.
- Si m vaut 2 modulo 3, $m + 1$ n'est pas premier avec 3, donc pas avec N . $m + 2$ est premier avec 3 et avec m , donc avec N . m n'est pas premier avec N , et $m - 1$ est premier avec 3 est m donc avec N . Ainsi $m + 2$ et $m - 1$ sont deux entiers premiers avec N et strictement inférieur à N (on a bien $m + 1 < 3m \leq N$) et les entiers entre ne le sont pas, donc il existe i tel que $c_i + c_{i+1} = 2m + 1$. $2m + 1$ est premier avec m , et premier avec 3 (car valant 2 mod 3), donc premier avec N ce qui est absurde. Ainsi N n'est pas solution.

On obtient alors une absurdité : on a donc $m = 1$, ainsi N est une puissance de 3, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4

Cet exercice montre un certain type d'exercice : on cherche à comprendre l'ensemble des n qui conviennent et les paires obtenues, mais on ne peut pas demander explicitement à un élève de classer cela, sans dévoiler tout le problème. Pour éviter cela, on pose deux questions alternatives, qui permettent de vérifier que l'élève a prouvé assez de choses intéressantes pour les obtenir comme résultats.

Montrons déjà que n est square free. Supposons qu'il existe p premier tel que $V_p(n) > 1$. On pose alors $n = p^b m$ avec $b \geq 2$, et m premier avec p . Les diviseurs de n s'écrivent de manière unique de la forme $p^k d$ avec $0 \leq k \leq b$ et d divisant m . Ainsi, une proportion $\frac{b}{b+1}$ des diviseurs est divisible par p .

Or si $\frac{b}{b+1} > \frac{1}{2}$, alors par principe des tiroirs, deux multiples de p sont dans la même paire. Ainsi leur somme ne vaut pas p , est divisible par p , mais est première, ce qui est contradictoire. Ainsi on a $\frac{b}{b+1} \leq \frac{1}{2}$, donc $2b \leq b + 1$, donc $b \leq 1$ ce qui est absurde.

On a donc que pour tout p divisant n , $V_p(n) \leq 1$, donc n est square free. Soit p divisant n , la preuve de ceci nous donne aussi que deux diviseurs associé par paire n'ont aucun facteur premier en commun, donc chaque paire contient au plus un multiple de p . Or comme la moitié des diviseurs de n sont divisibles par p (par le raisonnement précédent pour $b = 1$), on a forcément exactement un entier divisible par p dans chaque paire. Ainsi, on obtient que chaque diviseur d de n est associé à n/d dans sa paire.

Maintenant, répondons aux deux questions de l'énoncé. Si $d + \frac{n}{d} = \frac{n}{d'} + d'$, on a $d - d' = \frac{n(d-d')}{dd'}$, donc $d = d'$, ou $dd' = n$, soit $d' = \frac{n}{d}$. Dans tous les cas, la paire $(d, n/d)$ et la paire

$(d', n/d')$ forment la même paire. Donc chaque paire a une somme différente : tous les nombres premiers sont différents.

S'il existe d tel que $d + \frac{n}{d}$ divise n , c'est un facteur premier de n . Celui-ci divise d ou $\frac{n}{d}$ mais pas les deux car n est square free, donc ne divise pas $d + \frac{n}{d}$, ce qui est absurde. Ainsi les nombres premiers obtenus ne divisent pas n , ce qui conclut.

Solution n°2 de l'exercice 4

On prouve d'une autre façon que les paires sont de la forme $(d, \frac{n}{d})$, et puis on conclut comme précédemment.

Soient a, b deux nombres dans une paire. Ils sont premiers entre eux. En effet, si $p \mid a$, $p \mid b$, $p \mid a + b$ et $a + b \geq p + p > p$, donc $a + b$ est divisible par p mais est strictement supérieur à p , absurde car c'est premier.

$a, b \mid n$ et a, b sont premiers entre eux, donc par Gauss $ab \mid n$. Donc $ab \leq n$. En faisant le produit de ces inégalités sur toutes ces paires, on obtient $\prod_{d \mid n} d \leq n^{\frac{d(n)}{2}}$ où $d(n)$ est le nombre de diviseur de n . Or

$$\prod_{d \mid n} d = \sqrt{\prod_{d \mid n} d \prod_{d \mid n} d} = \sqrt{\prod_{d \mid n} d \prod_{d \mid n} \frac{n}{d}} = \sqrt{\prod_{d \mid n} n} = n^{\frac{d(n)}{2}}$$

Donc on a égalité dans notre inégalité, donc dans chacune de nos inégalités, donc pour toute paire (a, b) , on a $ab = n$, ce qui signifie que la paire est bien de la forme $(d, \frac{n}{d})$.

Solution de l'exercice 5

Essayons de borner le plus naïvement possible les d_i . Comme $d_1 < d_2 < \dots < d_k$, on a $d_i \geq i$ par récurrence immédiate. Or $d_{k+1-i} = \frac{n}{d_i} \leq \frac{n}{i}$. Ainsi on a :

$$d_1 d_2 + \dots + d_{k-1} d_k \leq \frac{n^2}{k \times (k-1)} + \dots + \frac{n^2}{2 \times 1}.$$

Pour montrer l'inégalité de l'énoncé, il suffit de montrer que

$$\frac{1}{1 \times 2} + \dots + \frac{1}{(k-1) \times k} < 1.$$

Or soit $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ en mettant au même dénominateur, donc

$$\frac{1}{1 \times 2} + \dots + \frac{1}{(k-1) \times k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k} < 1.$$

Ainsi on a bien l'inégalité voulue.

Maintenant montrons que la somme de l'énoncé divise n^2 si et seulement si n est premier. Soit n tel que la somme de l'énoncé divise n^2 , notons p le plus petit facteur premier de n . D'après l'inégalité, la somme de l'énoncé ne vaut pas n^2 . Comme p est le plus petit facteur premier de n^2 , on a que $d_1 d_2 + \dots + d_{k-1} d_k \leq \frac{n^2}{p}$, car $\frac{n^2}{p}$ est le plus grand diviseur de n^2 différent de n^2 . Or $d_{k-1} d_k = \frac{n}{p} \times n = \frac{n^2}{p}$, donc forcément $k = 2$, donc n est premier.

Si n est premier, la somme de l'énoncé vaut n qui divise bien n^2 . Ainsi les n demandés sont exactement les nombres premiers.

Solution de l'exercice 6

Posons, comme suggéré dans les astuces, $n = 2^b \times m$ avec m impair. Traitons d'abord le cas $m = 1$: si $b \geq 3$, alors 8 divise n , donc $8 + 1 = 9$ n'étant pas premier, il divise n ce qui est absurde. Réciproquement, on vérifie facilement que 1, 2, 4 conviennent (2, 3, 5 sont premiers).

Désormais supposons $m \geq 3$. Notons que par hypothèse $m + 1$ divise n ou est premier. Or $m + 1$ est pair, et ne vaut pas 2, donc $m + 1$ divise $n = 2^b m$. $m + 1$ est premier avec m , donc $m + 1 \mid 2^b$ par Gauss. Ainsi on a $m + 1 = 2^c$ avec $c \leq b$, et $c \geq 2$.

Supposons $c < b$, on a alors $b \geq 3$. Parmi 2^b et 2^{b-1} , l'un vaut 2 mod 3, donc soit $2^b + 1$, soit $2^{b-1} + 1$ est divisible par 3. De plus, celui-ci valant au moins 5, il n'est pas premier, et est impair. Ainsi, soit $2^b + 1$ soit $2^{b-1} + 1$ divise m , donc divise n . Or $0 < m \leq 2^{b-1} - 1 < 2^{b-1} + 1 < 2^b + 1$ ce qui est absurde. Ainsi $b = c$.

Réciproquement, si $b = c$, on a $n = 2^b(2^b - 1)$ avec $b \geq 2$. Or $2^b + 1$ ne peut diviser n (il est impair, donc diviserait $2^b - 1$). Donc $2^b + 1$ est premier, ainsi b est pair (sinon $2^b + 1$ serait divisible par 3, et ne vaudrait pas 3). Ainsi comme 2^{b-1} divise n , $2^{b-1} + 1$ divise n ou est premier.

- Si celui-ci est premier, alors comme $b - 1$ est impair, 3 divise $2^{b-1} + 1$, donc $2^{b-1} + 1 = 3$, donc $b = 2$.
- Si $2^{b-1} + 1$ divise n , comme celui-ci est impair, il divise $2^b - 1$. Or il divise aussi $2(2^{b-1} + 1) = 2^b + 2$, donc il divise $2^b + 2 - (2^b - 1) = 3$. Donc $2^{b-1} + 1 = 3$, donc $b = 2$.

Ainsi dans ce cas on a $n = 12$. Réciproquement on vérifie à la main que $n = 12$ convient (2, 3, 5, 7, 13 sont premiers et 4 divise 12). Ainsi les solutions sont 1, 2, 4, 12.

Solution de l'exercice 7

En testant les petits cas (les petites valeurs de a_1), on se rend compte que la suite a l'air de souvent décroître, de ne jamais exister pour a_1 impair ou pour a_1 non multiple de 3, et d'être stationnaire à la fin. Essayons de prouver ça.

Déjà si a_1 est impair, a_2 est somme de trois diviseurs de a_1 , donc de trois nombres impairs. Ainsi a_2 est impair aussi : par récurrence immédiate tous les a_n sont impairs. De plus, le plus grand potentiel diviseur strict de a_n est $a_n/3$, donc $a_{n+1} < 3 \times \frac{a_n}{3} = a_n$. La suite est strictement décroissante, ce qui est absurde. Ainsi a_1 est pair, et de même tout terme de la suite est pair.

Maintenant, que peut valoir a_{n+1} en fonction de a_n ? On a que $a_{n+1} = \frac{a_n}{a} + \frac{a_n}{b} + \frac{a_n}{c}$ avec $a < b < c$ les trois plus petits diviseurs de n strictement plus grand que 1. On peut avoir $(a, b, c) = (2, 3, 4), (2, 4, 8), (2, 4, p), (2, p, 2p), (2, p, q)$ où p et q sont premiers et impairs. En effet, si 4 divise n , 4 vaut b ou c , et on se retrouve avec les 3 premiers cas (car le plus petit autre diviseur de n est soit 8, soit son plus petit facteur premier impair). Si n n'est pas divisible par 4, son second plus petit diviseur est son plus petit facteur premier, et le suivant est soit son troisième plus petit facteur premier, soit 2 fois le deuxième.

Or si à un moment on est dans le cas $(2, p, q)$, on a $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{p} + \frac{a_n}{q} = \frac{a_n(pq+2p+2q)}{2pq}$. Or $pq + 2p + 2q$ est impair, a_n n'est pas divisible par 4, sinon celui-ci apparaîtrait à la place de p et q , donc a_{n+1} n'est pas divisible par 2, ce qui est absurde.

Ainsi on est toujours dans les cas $(2, 3, 4), (2, 4, 8), (2, 4, p)$ et $(2, p, 2p)$. Supposons désormais que 3 ne divise pas a_n , on est dans le second ou troisième cas, ou le quatrième avec $p \neq 3$, on a $a_{n+1} = \frac{7a_n}{8} < a_n$ $a_{n+1} = \frac{a_n(2p+p+4)}{4p} = \frac{a_n(3p+4)}{4p} < a_n$ (car $p > 4$) ou $a_{n+1} = \frac{a_n(p+2+1)}{2p} = \frac{a_n(p+3)}{2p} < a_n$ (car $p > 3$). Ainsi $a_{n+1} < a_n$, et comme 3 ne divise ni 7, ni $3p + 4$, ni $p + 3$, alors 3 ne divise pas a_{n+1} . On obtient que s'il existe N tel que 3 ne di-

visé pas a_n , à partir de ce rang, aucun terme n'est divisible par 3, et la suite est strictement décroissante, ce qui est absurde. Ainsi pour tout n , 3 divise a_n .

Ainsi forcément on a toujours $(a, b, c) = (2, 3, 4)$ ou $(2, 3, 5)$, ou $(2, 3, 6)$. Le cas $(2, 3, 5)$ ne peut pas se produire (cf le cas $(2, p, q)$), donc forcément on est dans un des deux autres cas. Dans le cas $(2, 3, 4)$, $a_{n+1} = a_n \times \frac{13}{12}$, sinon $a_{n+1} = a_n$. On ne peut pas être infiniment dans le premier cas car la valuation 2 adique de a_n décroît dans celui-ci, et comme a_{n+1} est défini à partir de a_n , dès qu'on est dans le cas 2, on y reste. Ainsi il existe $N \geq 1$ tel que $a_{n+1} = \frac{13}{12}a_n$ si $n < N$, et sinon $a_{n+1} = a_n$. On pose $k = a_n$, comme on est dans le cas $(2, 3, 6)$, alors 6 divise k mais pas 5, on a $k = 6\ell$ avec ℓ premier avec 2 et 5. On a donc $a_1 = \frac{12^{N-1}}{13^{N-1}}a_N = \frac{12^{N-1}}{13^{N-1}}6\ell$. Comme 13 est premier avec 12 et avec 6, on a que 13^{N-1} divise ℓ , donc a_1 est de la forme $12^b \times 6 \times \ell'$ avec ℓ' premier avec 5 et 2 et $b \geq 0$.

Réciproquement, si a_1 est de cette forme, on montre par récurrence immédiate que $a_{1+n} = 13^n 12^{b-n} 6\ell$ tant que $n \leq b$ (car 4 divise a_n). On a alors $a_{b+1} = 13^b 6\ell$, et comme ℓ est premier avec 10, ni 4 ni 5 ne divise a_{b+1} , donc on est dans le cas $(2, 3, 6)$, donc $a_n = a_{b+1}$ pour tout $n \geq b+1$ par récurrence immédiate. La suite existe bel et bien.

Solution de l'exercice 8

Soit n un entier spécial, supposons $n > 1$ (1 étant évidemment spécial). En considérant p un facteur premier de n , et appliquant l'hypothèse à n/p (ce qui a l'air d'être le genre de d le plus contraignant). On doit avoir que $\frac{n}{p} \left(\frac{n}{p} + 1 \right)$ divise $n(n+1)$, donc en posant $a = \frac{n}{p}$ et simplifiant chaque côté par a , on a que $a+1$ divise $p(ap+1)$. Comme $ap+1$ vaut $1-p$ modulo $a+1$, on a que $a+1$ divise $p(p-1)$.

En prenant p le plus petit facteur premier de n , si a admet au moins 3 facteurs premiers, on a que $0 < p(p-1) < p^2 + 1 \leq a+1$. On a une contradiction. Ainsi a est de la forme p^2 avec p premier ou pq avec $p < q$ avec p, q premiers.

Si $n = p^2$ est solution, les cas $d = 1$ et p^2 sont toujours vérifiés (car $n(n+1)$ divise $n(n+1)$ et 2 aussi), pour $d = p$, on obtient que $p(p+1)$ divise $p^2(p^2+1)$, donc $(p+1)$ divise $p(p^2+1)$. Comme $p+1$ est premier avec p , on a que $p+1$ divise p^2+1 , qui vaut $(-1)^2 + 1 = 2$ modulo $p+1$. Donc $p+1$ divise 2, ce qui est absurde.

Dans le cas $n = pq$ avec $p < q$, l'hypothèse est encore une fois claire pour $d = 1$ et n , et pour $d = p$ ou q , elle devient (cf précédemment avec a), $p+1$ divise $q(q-1)$ et $q+1$ divise $p(p-1)$. Si $p = 2$, on a que $q+1$ divise 2, ce qui est absurde. Ainsi $p \neq 2$, dans ce cas $p+1 < q$, donc $p+1$ est premier avec q , donc $p+1$ divise $q-1$. Comme $q > p$, $q+1$ ne divise pas $p-1$, donc p divise $q+1$. Posons $q = kp - 1$, on a donc $k \geq 2$, et k divise $p-1$. $p+1$ divise donc $q-1 = kp-2$. Or $kp-2$ vaut $-(k+2)$ modulo $p+1$, donc $p+1$ divise $k+2$. Or k divise $p-1$, donc $k+2$ vaut au plus $p+1$. On doit donc avoir égalité, ainsi $k = p-1$, donc $q = p^2 - p - 1$. Ainsi si n est solution, soit $n = p$ est premier, soit $n = pq$ avec p, q premiers, et $q = p^2 - p - 1$ (réciproquement, on peut vérifier que ces n conviennent, mais cela n'est pas important pour la preuve).

Supposons qu'il existe A, B, C, D spéciaux et distincts tels que $\text{PGCD}(A, B, C, D) \neq 1$, on considère alors p un diviseur premier de A, B, C, D . Parmi ces 4 nombres, un au plus vaut p , et un au plus de la forme pq admet p en plus petit facteur premier (car $q = p^2 - p - 1$), donc 2 sont de la forme rp et $r'p$ avec $r^2 - r - 1 = p = r'^2 - r' - 1$. Or ceci implique que

$$0 = r^2 - r - r'^2 + r' = ((r - r')(r + r' - 1)).$$

On ne peut pas avoir $r + r' = 1$, donc $r = r'$, ce qui est absurde. Ainsi si A, B, C, D sont spéciaux et distincts, leur PGCD vaut 1.

Solution de l'exercice 9

Supposons $n \geq 3$. Soit $q \geq 1$ le premier entier ne divisant pas $n!$, on a $q \geq 3$, et $d_i = i$ pour tout $i < q$. De plus, comme $n \geq 3$, $n! - 1$ est strictement plus grand que 1 et ne divise pas $n!$, donc $k \geq q$. Or par hypothèse, $d_{k+1-(q-1)} - d_{k+1-q} \leq d_{k+1-(q-2)} - d_{k+1-(q-1)}$, donc $\frac{n}{d_{q-1}} - \frac{n}{d_q} \leq \frac{n}{d_{q-2}} - \frac{n}{d_{q-1}}$.

On a donc, en simplifiant par n et en mettant au même dénominateur, $\frac{d_q - (q-1)}{d_q(q-1)} \leq \frac{1}{(q-2)(q-1)}$. Ceci implique que $(d_q - (q-1))(q-2) \leq d_q$. En particulier, $d_q(q-3) \leq (q-1)(q-2)$. Or $d_q \geq q+1$, donc $(q+1)(q-3) \leq (q-1)(q-2)$. Or cette inégalité est équivalente à $q^2 - 2q - 3 \leq q^2 - 3q + 2$, donc à $q \leq 5$. Comme q ne divise pas $n!$, ceci implique $n \leq 4$.

Réciproquement $n = 2$ convient car les diviseurs de $2!$ sont 1 et 2. $n = 3$ convient, car les diviseurs de $6!$ sont 1, 2, 3, 6 avec différence 1, 1, 3. $n = 4$ convient car ses diviseurs sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16 qui ont différence 1, 1, 1, 2, 2, 4, 4.

Ainsi les solutions sont $n = 2, 3$ et 4.

Solution de l'exercice 10

Soit S un tel ensemble. Fixons p premier divisant un élément de S , et $s \in S$ de valuation p -adique maximale. On note k sa valuation p -adique, on suppose $k \geq 2$. Comme les diviseurs de s sont les entiers de la forme $p^b d$ avec $0 \leq b \leq k$ et d divisant s/p^k et que ces diviseurs sont 2 à 2 distincts, on obtient qu'il y a une proportion $\frac{1}{k+1}$ des diviseurs de S qui a valuation p -adique valant 0. De plus, comme il existe t tel que $\text{PGCD}(t, s) = p$, on a que $V_p(t) = 1$.

Notons de plus qu'à s' fixé, l'application qui à d divisant s' associe le t de l'énoncé est bien définie, injective par unicité du t , et surjective car pour tout t , $\text{PGCD}(s', t)$ est un diviseur de s' . Ainsi la proportion des diviseurs de s non divisibles par p est la même que la proportion de t tels que p ne divise pas $\text{PGCD}(s, t)$, donc la même que la proportion d'éléments de S non divisibles par p , donc vaut $\frac{1}{k+1}$.

Or en appliquant le même raisonnement à t , qui a valuation p -adique 1, on obtient que cette proportion vaut $\frac{1}{2}$. Ainsi $k = 1$, ce qui est absurde. On a donc obtenu que tout élément de S est square free. Ainsi tout s dans S a un nombre de diviseur valant une puissance de 2, donc, si $s \in S$, comme on a montré qu'il y avait une bijection entre les diviseurs de s et S , on a que $|S|$ est une puissance de 2.

Montrons par récurrence sur k qu'il existe un ensemble S solution de taille 2^k , où chaque élément admet 2^k diviseurs. Pour $k = 0$, $\{1\}$ convient.

Pour l'hérédité, si S de cardinal 2^k convient, notons q et q' deux premiers distincts ne divisant aucun élément de S . On pose $S' = qS \cup q'S$, l'union étant disjointe par unicité de la décomposition en facteur premier. Chaque élément de S' est de la forme qs ou $q's$ avec s dans S , donc admet 2^{k+1} diviseurs. De plus S' est de cardinal 2^{k+1} .

Montrons que pour tout $s' \in S'$, pour tout d divisant s' , il existe $t' \in S'$ tel que $\text{PGCD}(s', t') = d$. Soit $s' \in S'$, on pose $s' = qs$ (le cas $q's$ est similaire) avec s dans S . Si d divise s' , d est de la forme qa où a divise s , ou d divise s . Dans le premier cas, par hypothèse de récurrence il existe t dans S tel que $\text{PGCD}(s, t) = a$, donc $\text{PGCD}(qs, qt) = d$, $t' = qt$ convient. Dans le second cas, il existe t dans S tel que $\text{PGCD}(s, t) = a$, donc $\text{PGCD}(qs, q't) = d$: $t' = q't$ convient. Ainsi l'application qui à t dans S associe $\text{PGCD}(s, t)$ dans les diviseurs de s est surjective, entre deux ensembles de cardinal 2^{k+1} . C'est donc aussi une injection : pour tout $s' \in S'$, pour tout d divisant s' , il existe un unique $t' \in S'$ tel que $\text{PGCD}(s', t') = d$. S' vérifie bien l'énoncé, ce qui conclut.

Par principe de récurrence, toutes les puissances de 2 vérifient l'énoncé.

Solution de l'exercice 11

Déjà notons que $n = 1$ convient, donc on suppose $k \geq 2$. On sait alors que $d_1 + d_2$ est un carré, donc $1 + d_2$ est un carré. Posons $k > 1$ tel que $1 + d_2 = k^2$, on a $d_2 = (k - 1)(k + 1)$. Rappelons que d_2 est le plus petit facteur premier de n , donc cela implique que $k - 1 = 1$, donc $k = 2$. On a donc $d_2 = 4 - 1 = 3$. Si $k = 2$, on obtient donc $n = 3$, qui réciproquement convient.

Supposons désormais $k \geq 3$, et montrons par récurrence forte. que $d_i = 2i - 1$. La preuve est déjà faite pour $i = 1$ et $i = 2$. Soit $i \in \{1, \dots, k - 1\}$ et supposons que pour tout $j \in \{1, \dots, i\}$, $d_j = 2j - 1$. Montrons que $d_{i+1} = 2i + 1$. On a que $d_1 + \dots + d_{i+1} = 1 + \dots + 2i - 1 + d_{i+1} = i^2 + d_{i+1}$ est un carré. Soit $k > i$ l'entier positif tel que $i^2 + d_{i+1} = k^2$, on a donc $d_{i+1} = (k - i)(k + i)$. En particulier, $k + i$ divise d_{i+1} , vaut au moins $i + 1 + i = 2i + 1$. Ainsi $k + i$ est un diviseur de d_{i+1} donc de n , strictement plus grand que $d_1, \dots, d_i$, et inférieur ou égal à d_{i+1} , donc $d_{i+1} = k + i$. On a donc que $k - i = 1$, donc $k = i + 1$, donc $d_{i+1} = 2i + 1$ ce qui conclut la récurrence.

Si $k \geq 3$, on a $n = d_k = 2k - 1$ qui est divisible par $2k - 3 = d_{k-1}$, donc $2k - 3$ divise $2k - 1 - (2k - 3) = 2$, donc $2k - 3$ divise 1 et vaut ± 1 , donc $k = 2$ ou 1 ce qui est absurde. Ainsi les seules solutions sont $n = 1$ et 3.

8 Algèbre : Inégalités dans les suites (Antoine et Noé)

Exercices

Exercice 1

Soit $n > 0$ un entier, et $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite de réels tels que $a_0 = a_n = 0$, et pour tout $k \in [1, n-1]$,

$$a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geq 0.$$

Montrer que tous les termes de la suite sont négatifs.

Exercice 2

Soit $(a_i)_{i \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout $k \geq 1$:

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

Montrer que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 3

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n i a_i \leq \frac{n-1}{2}$$

Exercice 4

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que

$$(a_{n+1})^2 + a_n a_{n+2} \leq a_n + a_{n+2}$$

pour tout $n > 0$. Montrer que $a_{2022} \leq 1$.

Exercice 5

Montrer qu'il n'existe pas de suites $(a_n)_{n \geq 1}$ d'entiers strictement positifs tels que $a_{n-1} \leq (a_{n+1} - a_n)^2 \leq a_n$ pour tout $n > 1$.

Exercice 6

La suite (a_n) vérifie $a_1 = 1012$ et $a_{i+1} \geq a_i + 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i^2 + a_{i+1}^2} < \frac{1}{2024}$$

Exercice 7

Soit $a_0, a_1, a_2, \dots$ une suite infinie de nombres réels vérifiant $\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \geq a_n$ pour tout entier $n > 0$. Montrer que

$$\frac{a_0 + a_{n+1}}{2} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

pour tout entier $n > 0$.

Exercice 8

Soit n un entier positif. Soit $a_0, a_1, \dots, a_n$ la suite définie par $a_0 = \frac{1}{2}$ et

$$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$$

pour tout $1 \leq k \leq n$. Montrer que $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$

Exercice 9

Étant donné un entier $n \geq 2$, déterminer le plus grand entier N pour lequel il existe $N + 1$ réels $a_0, \dots, a_N$ tels que

$$\begin{cases} a_0 + a_1 &= -\frac{1}{n} \\ (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) &= a_{k-1} - a_{k+1} \end{cases}$$

Exercice 10

Soit $a_1, \dots$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$a_n + a_{n+2} - 2a_{n+1} \geq 0$$

et pour tout n ,

$$\sum_{i=1}^n a_i < 1.$$

Montrer que

$$a_{k+1} - a_k \leq \frac{2}{n^2}.$$

Exercice 11

Trouver tous les couples $((b_n)_{n \in \mathbb{N}}, (c_n)_{n \in \mathbb{N}})$ de suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq c_n$ et b_{n+1}, c_{n+1} sont les deux solutions de l'équation $x^2 + b_n x + c_n = 0$.

Solutions**Solution de l'exercice 1**

On dit qu'une suite qui vérifie l'inégalité de l'énoncé est *convexe*. Cette condition apparaît de temps en temps, et à chaque fois qu'elle apparaît, le réflexe à avoir est de poser la suite auxiliaire des différences $d_k = a_k - a_{k-1}$, car la condition de l'énoncé est équivalente au fait que la suite (d_k) est croissante. Voyons voir comment cette méthode peut s'utiliser pour cet exercice d'application.

Soit k minimal tel que $a_k > 0$, alors $d_n \geq d_{n-1} \geq \dots \geq d_k > 0$. Mais alors $0 = a_n \geq a_{n-1} \geq \dots \geq a_k > 0$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 2

On note $s_k = a_1 + \dots + a_k$, où $s_0 = 0$. En passant à l'inverse et en simplifiant, l'inégalité devient

$$\frac{k}{a_{k+1}} \leq a_k + \frac{k-1}{a_k}.$$

En sommant tout, on obtient une somme télescopique, et l'on en déduit que

$$s_k \geq \frac{k}{a_{k+1}} \text{ ou encore } a_{k+1} \geq \frac{k}{s_k}.$$

Maintenant le résultat peut se montrer par récurrence :

$n = 2 : a_2 \geq \frac{a_1}{a_1^2} = \frac{1}{a_1}$, donc $s_2 = a_1 + \frac{1}{a_1} \geq 2a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 2$ par l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques.

Pour $n \geq 2$, si l'on suppose $s_n \geq n$ on a

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n + \frac{n}{s_n} \geq n + 1$$

par exemple parce que la fonction $x \mapsto x + \frac{n}{x}$ est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{n}, +\infty[$ (il suffit de dériver) et que $\sqrt{n} < n \leq s_n$, donc $f(s_n) \geq f(n) = n + \frac{n}{n} = n + 1$.

Solution de l'exercice 3

On commence par noter

$$P = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i > 0\}$$

$$N = \{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i \leq 0\}$$

c'est-à-dire que P regroupe tous les indices des termes strictement positifs, et N ceux des termes négatifs.

Ainsi, on a $P \cap N = \emptyset$ (un réel ne peut pas être négatif et strictement positif en même temps), et $P \cup N = \{1, \dots, n\}$.

Donc l'ensemble de tous les indices est l'union disjointe de P et N .

Ainsi en notant $s_P = \sum_{i \in P} a_i$ et $s_N = \sum_{i \in N} a_i$, on a

$$s_N + s_P = \left(\sum_{i \in P} a_i \right) + \left(\sum_{i \in N} a_i \right) = \sum_{i=1}^n a_i = 0$$

$$|s_P| + |s_N| = \left| \sum_{i \in P} a_i \right| + \left| \sum_{i \in N} a_i \right| = s_P - s_N = \sum_{i \in P} (+a_i) + \sum_{i \in N} (-a_i) = \sum_{i=1}^n |a_i| = 1$$

Ainsi, on a $s_P = \frac{s_P + s_N}{2} + \frac{s_P - s_N}{2} = \frac{1}{2}$ et $s_N = \frac{s_P + s_N}{2} - \frac{s_P - s_N}{2} = -\frac{1}{2}$

On considère un indice i , si $i \in P$, $a_i > 0$ et comme $i \leq n$, on a $ia_i \leq na_i$.

Si $i \in N$, $a_i \leq 0$, donc comme $i \geq -1$, on a $iai \leq a_i$.

Alors

$$\sum_{i=1}^n ia_i = \left(\sum_{i \in P} ia_i \right) + \left(\sum_{i \in N} ia_i \right) \leq \left(\sum_{i \in P} na_i \right) + \left(\sum_{i \in N} a_i \right) = ns_P + s_N = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4

Il est utile de réécrire l'inégalité sous cette forme.

$$(1 - a_n)(1 - a_{n+2}) \leq 1 - a_{n+1}^2$$

Supposons par l'absurde $a_{2022} > 1$. On a les lemmes suivantes :

Lemme 1 : on a soit $a_{2020} < 1, a_{2021} > 1, a_{2022} > 1, a_{2023} < 1$,
soit $a_{2021} < 1, a_{2022} > 1, a_{2023} > 1, a_{2024} < 1$.

Preuve : On a $(1 - a_{2021})(1 - a_{2023}) < 0$, donc on a deux cas :

Si $a_{2021} < 1$ et $a_{2023} > 1$, on a $(1 - a_{2022})(1 - a_{2024}) < 0$, donc $a_{2024} < 1$.

Si $a_{2021} > 1$ et $a_{2023} < 1$, on a $(1 - a_{2020})(1 - a_{2022}) < 0$, donc $a_{2020} < 1$. ■

On prouve ensuite le lemme suivant, qui, avec le premier lemme, permettra de conclure.

Lemme 2 : Il n'existe pas d'entier $n > 0$ tel que

$$a_n < 1, a_{n+1} > 1, a_{n+2} > 1, a_{n+3} < 1$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} 1 - a_{n+2} &< (1 - a_n)(1 - a_{n+2}) \leq 1 - a_{n+1}^2 \implies a_{n+1}^2 < a_{n+2} \\ 1 - a_{n+1} &< (1 - a_{n+1})(1 - a_{n+3}) \leq 1 - a_{n+2}^2 \implies a_{n+2}^2 < a_{n+1}, \end{aligned}$$

ainsi on a $a_{n+1}^4 < a_{n+2}^2 < a_{n+1}$, ce qui impose que $a_{n+1} < 1$. Absurde. ■

Solution de l'exercice 5

On essaie de faire marcher la suite, et on se rend compte que les problèmes arrivent très vite en fait. Prenons par exemple $a_1 = 1, a_2 = 100$. Alors $101 \leq a_3 \leq 110$, et $111 \leq a_4 \leq 120$. Et vous me direz alors : mais il n'y a pas encore de problème ! Ben en fait si : comme $10^2 < a_3, a_4 < 11^2$, on doit avoir $a_5 - a_4 = 10$. Mais c'est un problème, puisqu'alors on devrait avoir $a_3 \leq (a_5 - a_4)^2 = 100$, ce qui est faux.

Essentiellement, le problème vient du fait que la suite doit augmenter, mais ne peut pas augmenter rapidement. Elle doit donc passer quelques temps entre deux carrés consécutifs. Seulement, les inégalités nous imposent $\lceil \sqrt{a_{n-1}} \rceil \leq \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$, ce qui ne sera donc pas être vérifié tout le temps. De manière plus rigoureuse :

Soit N tel que $(N-1)^2 < a_2 \leq N^2$, et n le plus petit entier tel que $a_n > N^2$. Cet entier existe puisque a_n est une suite d'entiers vérifiant à la fois $a_{n-1} \leq a_n$ et $(a_{n+1} - a_n)^2 \geq a_{n-1} \geq 1$, elle est donc strictement croissante.

Mais alors, $n \geq 3$, et $a_{n-1} \leq N^2$. Ainsi, $(a_n - a_{n-1})^2 \leq a_{n-1} \leq N^2$, et $a_n \leq N^2 + N$. De même, $(a_{n+1} - a_n)^2 \leq a_n \leq N^2 + N < (N+1)^2$, et $a_{n+1} \leq N^2 + 2N$.

On a donc $N^2 < a_n < a_{n+1} \leq N^2 + 2N < (N+1)^2$, ce qui est maintenant un problème, puisque $\lceil \sqrt{a_n} \rceil \leq \lfloor \sqrt{a_{n+1}} \rfloor$ devient $N+1 \leq N$, qui est faux.

Solution de l'exercice 6

On aimerait bien télescoper des trucs vu qu'on a une somme pas belle. Une méthode qui marche parfois et dont il est utile de se rappeler est de faire apparaître une décomposition en éléments simples. Seulement, pour ça il faut un produit, et l'IAG peut nous aider à cette fin. Ainsi, on a

$$\sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i^2 + a_{i+1}^2} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i a_{i+1}} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i(a_i + 1)} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i + 1} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}.$$

On peut maintenant télescoper, et on a donc

$$\sum_{i=1}^{2024} \frac{1}{a_i^2 + a_{i+1}^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2025}} \right) < \frac{1}{2024}.$$

Solution de l'exercice 7

La condition nous dit qu'on a une suite convexe. En faisant un dessin on se rend bien compte que c'est vrai, et qu'on pourrait peut-être même y arriver avec l'inégalité de Jensen (attention : comment fait-on pour avoir une fonction sur les réels à partir d'une suite?). Restons tout de même sur notre leitmotiv de "si on a une suite convexe on doit poser la suite des différences et ensuite seulement réfléchir". Posons donc $d_k = a_{k+1} - a_k$. Quitte à ajouter une même constante à toute la suite, on suppose par ailleurs que $a_0 = 0$.

D'un côté, $a_0 + a_{n+1} = 2a_0 + d_0 + \dots + d_n = d_0 + \dots + d_n$. De l'autre côté,

$$a_1 + \dots + a_n = (d_0) + (d_0 + d_1) + \dots + (d_0 + d_1 + \dots + d_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)d_i.$$

Il est à présent temps de se servir du fait que (d_i) est croissante. Une manière de conclure à partir de là est de dire que pour $i < \frac{n}{2}$,

$$(n-i)d_i + id_{n-i} \leq \frac{n}{2}(d_i + d_{n-i})$$

par croissance. En sommant ces inégalités pour $1 \leq i < \frac{n}{2}$, on obtient exactement l'inégalité recherchée, à ceci près qu'on doit rajouter un terme $\frac{n}{2}d_{n/2}$ des deux côtés si n est pair.

Solution de l'exercice 8

Encore un exercice où passer à l'inverse et faire une décomposition en éléments simples est une avancée massive ! Ici on a

$$\frac{1}{a_k} = \frac{n}{a_{k-1}(n + a_{k-1})} = \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{n + a_{k-1}}, \text{ et enfin } \frac{1}{n + a_{k-1}} = \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}.$$

On télescope, et on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k-1} + n} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_n} = 2 - \frac{1}{a_n}$$

La suite (a_k) est croissante, donc en particulier $a_k > 0$ et $\frac{1}{n+a_{k-1}} < \frac{1}{n}$. En sommant ces inégalités, on trouve alors

$$2 - \frac{1}{a_n} < 1,$$

et enfin $a_n < 1$. Pour obtenir l'autre inégalité, on a besoin de minorer $\frac{1}{n+a_k}$, donc de majorer a_k . Ça tombe bien, on vient de le faire ! Puisque (a_k) est croissante, le fait que $a_n < 1$ implique également que $a_k < 1$ pour tout k . On réinjecte, et on obtient

$$\frac{1}{a_n} = 2 - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n + a_{k-1}} < 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Ainsi,

$$a_n > \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2} > 1 - \frac{1}{n},$$

et on a fini.

Solution de l'exercice 9

Posons $b_k = a_{k-1} + a_k$. On a alors $b_1 = -\frac{1}{n}$ et $b_k b_{k+1} = b_k - b_{k+1}$, soit $b_{k+1}(b_k + 1) = b_k$.

Ainsi, si $b_k \neq -1$, on a $b_{k+1} = \frac{b_k}{b_k + 1}$, d'où par récurrence immédiate $b_k = -\frac{1}{n+1-k}$ pour $1 \leq k \leq n$. En particulier, $b_n = -1$, et donc si $N > n$ on devrait avoir $b_{n+1}(b_n + 1) = b_n$, soit $0 = -1$ ce qui est absurde. Donc $N \leq n$. Réciproquement, avec $N = n$, si on pose $a_0 = 0$ et $a_k = -\frac{1}{n+1-k} - a_{k-1}$, la suite obtenue est solution par les mêmes calculs que précédemment.

Solution de l'exercice 10

Montrons le côté gauche de l'inégalité. L'hypothèse de convexité de la suite (a_n) donne que la suite des différences $(a_{n+1} - a_n)$ est croissante. Supposons qu'il existe k tel que $a_k < a_{k+1}$, alors en posant $x = a_{k+1} - a_k > 0$, pour tout $i \geq k$ on a $a_{i+1} - a_i \geq a_{k+1} - a_k = x$. Ainsi, pour tout $n > 0$,

$$a_{n+k+1} - a_k = \sum_{i=0}^n (a_{k+i+1} - a_{k+i}) \geq (n+1)x.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+k+1} \geq (n+1)x + a_k$ et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui contredit que les sommes partielles soient bornées.

Pour le côté droit, on a par hypothèse $a_{k+1} > 0$. Alors de même

$$\begin{aligned} a_{k-i} &= \left(\sum_{j=0}^i a_{k-j} - a_{k-j+1} \right) + a_{k+1} \\ &> (i+1)(a_k - a_{k+1}) \end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sum_{i=0}^k a_i > \sum_{i=1}^{k+1} i(a_k - a_{k+1}) \\ &\geq \frac{(k+1)(k+2)}{2}(a_k - a_{k+1}) \end{aligned}$$

D'où

$$a_k - a_{k+1} < \frac{2}{k^2}$$

Solution de l'exercice 11

On suppose que $b_0 \neq 0$ et $c_0 \neq 0$, il y a trois possibilités :

n	0	1
b_n	+	-
c_n	+	-

ou

n	0	1	2
b_n	-	+	-
c_n	+	+	-

ou

n	0
b_n	-
c_n	-

On remarque qu'il existe à chaque fois un entier n tel que $b_n, c_n < 0$. Or

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 - 4c_{n+1} &= \left(\frac{-b_n - \sqrt{b_n^2 - 4c_n}}{2} \right)^2 - 4 \cdot \frac{-b_n + \sqrt{b_n^2 - 4c_n}}{2} \\ &= \left(\frac{b_n^2}{2} + 2b_n - c_n \right) - \left(\frac{-b_n}{2} + 2 \right) \sqrt{b_n^2 - 4c_n} \\ &< \left(\frac{b_n^2}{2} + b_n \right) - \left(\frac{-b_n}{2} + 2 \right) (-b_n) = 3b_n < 0 \end{aligned}$$

Donc l'équation $x^2 + b_{n+1}x + c_{n+1} = 0$ n'a pas de solutions réelles.

Si $b_0 = 0$, alors $c_0 \geq 0$ mais il faut $c_0 \leq 0$ pour que $x^2 + b_0x + c_0 = 0$ ait une racine réelle, donc $c_0 = 0$.

Si $c_0 = 0$, alors $b_1 = 0$, $c_1 = -b_0$. Comme pour le cas précédent, on trouve $c_1 = 0$, d'où $b_0 = 0$.

Ainsi la seule solution consiste à avoir les suites (b_n) et (c_n) nulles.

4 Entraînement de fin de parcours

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 1

Soit $u_1, u_2, \dots$ une suite de réels strictement positifs telle que $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Montrer que $u_n \geq \sqrt{2n-1}$ pour tout $n \geq 1$, et trouver les cas d'égalité.

Exercice 2

Trouver tous les entiers $n \geq 3$ impairs tels que pour tout $a, b \geq 1$, si $a \mid n$, $b \mid n$ et si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b - 1 \mid n$.

Exercice 3

Soit $t \geq 2$. Soit $u_1, u_2, \dots$ une suite d'entiers strictement positifs telle que $u_1 = 1$, $u_2 = 2, \dots, u_t = t$ et que pour tout $n \geq t$, u_{n+1} est le plus petit entier strictement positif différent de $u_1, \dots, u_n$ tel que $\text{PGCD}(u_{n+1}, u_n) \geq t$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = k$.

Exercice 4

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est lumineuse si :

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x)f(y) \leq y^2 f\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{2}\right)$.
- Pour tout $0 \leq x \leq 1$, on a $f(x) \leq 2025$.

Trouver toutes les valeurs que peut prendre $f(2025)$ avec f lumineuse.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{n+1}^2 = \left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2} > u_n^2 + 2$$

Ainsi pour tout $n \geq 2$, on a par télescopage :

$$u_n^2 = u_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) > 1^2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 = 2n - 1$$

et donc $u_n > \sqrt{2n-1}$. De plus, on a $u_1 = 1 = \sqrt{2 \cdot 1 - 1}$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geq \sqrt{2n-1}$ avec égalité pour $n = 1$.

Solution de l'exercice 2

Déjà notons que les puissances de nombres premiers p conviennent : en effet, si $n = p^k$ avec p premier, $k \geq 0$, alors si a et b sont premiers entre eux, a ou b vaut 1, donc $a + b - 1$ vaut a ou b et divise bien n .

Soit n solution.

Supposons que n n'est pas une puissance d'un nombre premier et posons $n = p^k \times m$ avec p le plus petit facteur premier de n et m premier avec p . On a alors que $p + m - 1$ divise $p^k m$. Montrons que $p + m - 1$ est premier avec m : supposons par l'absurde qu'il existe q premier divisant m et $p + m - 1$, alors q divise $p - 1$ et n , ce qui contredit la minimalité de p . Ainsi $p + m - 1$ est premier avec m , c'est donc une puissance de p divisant n .

Si $k = 1$, alors $p + m - 1 = p$, donc $m = 1$ ce qui conclut. Si $k \geq 2$, montrons que $p^2 + m - 1$ est premier avec m . Supposons par l'absurde qu'il existe q premier divisant m et $p^2 + m - 1$. Alors q divise n donc est impair (de même p est impair), $q \geq p$ par minimalité, et q divise $p^2 - 1$. Ceci implique que q divise $p - 1$ ou $p + 1$, donc comme $q \geq p$, q divise $p + 1$. On a $q \geq p$ et q est premier avec p , donc $q > p$, donc $q = p + 1$ est pair ce qui est absurde. Ainsi $p^2 + m - 1$ est premier avec m , et divise n , c'est donc encore une puissance de p .

Ainsi $p^2 + m - 1$ et $p + m - 1$ sont des puissances de p , dont la différence vaut $p(p - 1)$. Les deux puissances sont strictement plus grande que 1, et $p^2 + m - 1$ vaut au moins p^2 , donc est divisible par p^2 . Comme $p(p - 1)$ n'est pas divisible par p^2 , $p + m - 1$ n'est pas divisible par p^2 , donc vaut p , ainsi $m = 1$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

Par définition, les termes de la suite sont deux à deux distincts.

Supposons par l'absurde qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ qui n'est égal à aucun terme de la suite. On considère alors le plus petit entier k qui n'apparaît pas dans la suite.

Alors, $k > t$. De plus, comme les termes de la suite sont deux à deux distincts et sont tous des entiers strictement positifs, il existe $N \geq t + 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n > k^2$.

Ainsi, les entiers $1, 2, \dots, k - 1$ apparaissent avant le rang N dans la suite. Donc, s'il existait $n \geq N$ tel que $k \mid u_n$, on aurait $u_{n+1} = k$ car $1, \dots, k - 1 \in \{u_1, \dots, u_n\}$ et $\text{PGCD}(u_n, k) \geq k \geq t$: c'est impossible car on a supposé que k n'était égal à aucun terme de la suite. Donc, pour tout $n \geq N$, k ne divise pas u_n .

Soit $M = \max\{u_1, \dots, u_N, k\}$. Supposons par l'absurde qu'il existe $p > M^2$ qui divise au moins un terme de la suite.

On note n l'indice du premier terme de la suite divisible par p . Ainsi, $n > N$. On pose $u_n = pm$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Par minimalité de n , p ne divise pas u_{n-1} .

Ainsi, $t \leq \text{PGCD}(pm, u_{n-1}) = \text{PGCD}(m, u_{n-1}) \leq \text{PGCD}(kMm, u_{n-1})$ et

$kMm \leq M * Mm < pm$. Or, $kMm > M$ et donc $kMm \notin \{u_1, \dots, u_N\}$ et comme il est divisible par m , $kMm \notin \{u_N, \dots, u_{n-1}\}$: c'est absurde.

Supposons par l'absurde qu'il existe $n > N$ tel que $u_n > tM^3k$.

On pose $g = \text{PGCD}(u_{n-1}, u_n) \geq t$. Comme tous les facteurs premiers de g sont $\leq M^2$ et $M \geq k \geq t$, il existe un diviseur d de g tel que $t \leq d \leq tM^2$. Ainsi, $\text{PGCD}(dMk, u_{n-1}) \geq \text{PGCD}(d, u_{n-1}) = d \geq t$ et $dMk \leq tM^2 * M * k = tM^3k < u_n$: c'est absurde car comme $dMk > M$ et $k \mid dMk$, $dMk \notin \{u_1 \dots u_{n-1}\}$.

Donc, la suite est bornée : c'est absurde.

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = k$, ce n étant unique car tous les termes de la suite sont distincts.

Solution de l'exercice 4

Soit f une fonction lumineuse.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $f(x)^2 \leq 2x^2 f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \geq \frac{2^{2^n-2n-1}f(x)^{2^n}}{x^{2^{n+1}-2}}$:

- Initialisation : pour $n = 0$, on a bien $f(x) = \frac{2^{2^0-2*0-1}f(x)^{2^0}}{x^{2^{0+1}-2}}$.
- Hérédité : pour $n \geq 0$, supposons la propriété vraie au rang n et montrons-la au rang $n + 1$. On a :

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) &= f\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{2}\right) \\
 &= \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{x}{2^n}\right)} \\
 &\geq \left[\frac{2^{2^n-2n-1}f(x)^{2^n}}{x^{2^{n+1}-2}} \right]^2 \cdot \frac{1}{\frac{x^2}{2^{2n-1}}} \\
 &= \frac{2^{2^{n+1}-4n-2+2n-1}f(x)^{2^{n+1}}}{x^{2^{n+2}-4+2}} \\
 &= \frac{2^{2^{n+1}-2(n+1)-1}f(x)^{2^{n+1}}}{x^{2^{n+2}-2}}
 \end{aligned}$$

Ainsi, comme $2025 \leq 2048 = 2^{11}$, pour tout $n \geq 11$, on a $0 \leq \frac{x}{2^n} \leq 1$ et donc :

$$f(2025) = \left[\frac{f\left(\frac{2025}{2^n}\right) * 2025^{2^{n+1}-2}}{2^{2^n-2n-1}} \right]^{\frac{1}{2^n}} \leq \frac{2025^{\frac{1}{2^n}} * 2025^{2-\frac{1}{2^{n-1}}}}{2^{1-\frac{n}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}}}$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que $f(2025) \leq \frac{2025^2}{2}$.

Soit $0 \leq K \leq \frac{2025^2}{2}$. On pose $C = \frac{K}{2025^2}$ et on a alors $0 \leq C \leq \frac{1}{2}$.

On pose alors $f : x \mapsto Cx^2$. On vérifie que f est alors bien lumineuse :

— Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$y^2 f\left(\frac{x}{2}\right) + x^2 f\left(\frac{y}{2}\right) = y^2 * \frac{C}{4}x^2 + x^2 * \frac{C}{4}y^2 = \frac{C}{2}x^2y^2 \geq C^2x^2y^2 = f(x)f(y)$$

— Pour tout $0 \leq x \leq 1$, on a : $f(x) = Cx^2 \leq \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2} \leq 2025$.

Donc, f est bien lumineuse et on a $f(2025) = C \times 2025^2 = K$.

Finalement, l'ensemble des valeurs possibles pour $f(2025)$ est $\left[0; \frac{2025^2}{2}\right]$.

VII. Groupe E

Contenu de cette partie

1	Première partie	642
1	Combinatoire : problèmes algorithmiques (Gaëtan)	642
2	Algèbre : Polynômes (Henry)	655
3	Géométrie : géo-guessing (Auguste)	661
4	Combinatoire : Problèmes de niveau P1 (Aurélien)	671
5	Combinatoire : Problèmes de niveau P2 (Anatole)	671
6	Arithmétique : Problèmes de suites (Théo)	682
7	Arithmétique : Problèmes de niveau P1	693
8	Algèbre : Problèmes de niveau P1 (Serge)	711
2	Entraînement de mi-parcours	720
3	Deuxième partie	728
1	Géométrie : géométrie dynamique (Aurélien)	728
2	Algèbre : Problèmes de niveau P2 ou "Résoudre des exos c'est surfait" (Antoine)	728
3	Arithmétique : TN combi (Emilhan et Mano)	734
4	Géométrie : Problèmes de niveau P1 (Martin)	742
5	Arithmétique : Problèmes de niveau P2 (Erik et Théo)	758
6	Combinatoire : le lemme de Sperner (Mano)	765
7	Algèbre : Equations fonctionnelles (Paul A)	766
8	Géométrie : Problèmes de niveau P2 (Anatole)	772
4	Entraînement de fin de parcours	782

1 Première partie

1 Combinatoire : problèmes algorithmiques (Gaëtan)

Les exercices ne sont pas nécessairement classés par ordre de difficulté. Par ailleurs, afin de forcer les élèves à ne pas rester cloisonnés dans un seul type d'idées, je me suis réservé le droit de glisser des exercices hors propos dans ce TD (les élèves ont bien sûr été prévenus de cela).

Exercice 1

On place n points rouges et n points bleus dans le plan en position générale. Montrer qu'on peut les joindre avec n segments, chacun joignant un point bleu à un point rouge, tel que deux segments ne s'intersectent jamais.

Exercice 2

Noémie a écrit n nombres réels sur son cahier. Chacun est supérieur ou égal à 1, et la somme de ces n nombres est égale à $2n$. Démontrer que, pour tout réel r tel que $0 \leq r \leq 2n$, Noémie peut choisir un ensemble de nombres, parmi ceux qu'elle a écrits, et dont la somme appartient à l'intervalle $[r, r + 2]$.

Exercice 3

Sur un graphe orienté G , on appelle noyau un ensemble de sommets S tel qu'il n'existe pas d'arêtes entre sommets de S et tel que pour tout $v \in G \setminus S$ il existe une arête orientée de v vers un sommet de S .

- a) Trouver un graphe orienté ne possédant pas de noyau.
 - b) Montrer que tout graphe bi-orienté (si uv est une arête alors vu aussi) possède un noyau.
 - c) Montrer que tout graphe orienté sans cycle orienté possède un noyau.
 - d) Montrer que tout graphe orienté biparti possède un noyau.
- Bonus) Montrer que tout graphe orienté sans cycle orienté de longueur impaire possède un noyau.

Exercice 4

Dans un tableau $2 \times n$ on place des réels positifs tels que la somme des nombres dans chaque colonne fasse 1. Montrer qu'on peut choisir un nombre dans chaque colonne telle que la somme des nombres choisis de chaque ligne soit au plus $\frac{n+1}{4}$.

Exercice 5

Un ensemble de trois entiers positifs $\{x, y, z\}$ est appelé historique si $\{z - y, y - x\} = \{1776, 2001\}$. Montrer que l'ensemble de tous les entiers positifs peut être écrit comme l'union d'ensembles historiques deux à deux disjoints.

Exercice 6

Martin a 3 comptes en banque, chacun contenant un nombre entier d'euros. Il ne peut que faire un transfert d'un compte A à un compte B si ce transfert double le montant du compte B . Montrer que Martin peut dans tous les cas se débrouiller pour vider complètement un des comptes. Peut-il dans tous les cas vider complètement deux des comptes?

Exercice 7

On attribue un entier à chaque sommet d'un pentagone régulier de sorte que la somme des

cinq entiers soit égale à 2011. Un tour dans un jeu de solitaire consiste à choisir deux sommets adjacents, à soustraire un entier m de chacun de ces deux sommets, puis à ajouter $2m$ au sommet opposé, c'est-à-dire le sommet non adjacent à l'un ou l'autre des deux premiers.

(Le montant m et les sommets choisis peuvent varier d'un tour à l'autre.)

Le jeu est gagné en un sommet donné si, après un certain nombre de tours, ce sommet contient le nombre 2011, et les quatre autres sommets contiennent le nombre 0.

Prouver que, quelle que soit la configuration initiale des entiers, il existe un et un seul sommet où le jeu peut être gagné.

Exercice 8

On place un paquet de cartes à chacun des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ et O , où $n \geq 3$. À chaque étape, on peut effectuer l'une des deux opérations suivantes :

1. Si un point A_i possède plus de 2 cartes, on peut retirer 3 cartes de ce paquet et en placer une carte sur chacun des points A_{i-1}, A_{i+1} et O . (Ici, $A_0 = A_n$ et $A_{n+1} = A_1$)
2. Si le point O possède au moins n cartes, on peut retirer n cartes de ce paquet et placer une carte sur chacun des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Montrer que si le nombre total de cartes est supérieur ou égal à $n^2 + 3n + 1$, alors, on peut s'assurer après un nombre fini d'étapes que chaque point contienne au moins $n + 1$ cartes.

Exercice 9

Montrer qu'un graphe sur n sommets dont chaque sommet est de degré au moins $\frac{n}{2}$ est hamiltonien.

Exercice 10

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ une suite finie d'entiers naturels. Ses sous-suites sont les suites de la forme $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ telles que $1 \leq i \leq j \leq n$.

Deux sous-suites sont égales si elles ont la même longueur et sont formées des mêmes termes; autrement dit, les sous-suites $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ et $a_u, a_{u+1}, \dots, a_v$ sont considérées comme égales si et seulement si $j - i = v - u$ et $a_{i+k} = a_{u+k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq j - i$.

Enfin, on dit qu'une sous-suite $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$ est *palindromique* si elle se lit de la même façon dans les deux sens, c'est-à-dire si $a_{i+k} = a_{j-k}$ pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq j - i$.

Quel est le plus grand nombre de sous-suites palindromiques distinctes que peut contenir une telle suite de longueur n ?

Exercice 11

a) 100 personnes originaires de 50 pays, deux par pays, sont assises en cercle. Montrer qu'il est possible de les partitionner en deux groupes sans que deux membres d'un même pays ou trois personnes consécutives ne soient dans le même groupe.

b) 100 personnes originaires de 25 pays, quatre par pays, sont assises en cercle. Montrer qu'il est possible de les partitionner en quatre groupes sans que deux membres d'un même pays ou deux voisins ne soient dans le même groupe.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Source : Putnam 1979

Cet exercice illustre l'utilisation d'un monovariant pour assurer la terminaison d'un algorithme.

Voici une rédaction acceptable pour cet exercice :

- **Instructions** : On commence par relier les points par des segments arbitrairement (qui peuvent se croiser). Tant qu'il y a un croisement, on décroise.
- **Terminaison** : À chaque tour de boucle, la somme des longueurs diminue strictement (on applique l'inégalité triangulaire deux fois). Comme il n'y a qu'un nombre fini d'appariements possibles, l'algorithme termine.
- **Correction** : Lorsque l'algorithme sort de la boucle, la solution n'a plus de croisements.

Solution de l'exercice 2

Source : IMOSL 2019 C2

Cet exercice illustre comment une preuve par l'absurde permet d'assurer le bon fonctionnement d'un algorithme.

On applique un algorithme glouton. On trie nos réels $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et à chaque étape on ajoute à la somme S le plus grand qu'on peut tant que S ne dépasse pas $r + 2$.

Le processus est clairement fini. Supposons qu'à sa fin on ait $S < r$.

Imaginons que a_1 n'ait pas été choisi. Alors $a_1 > 2$, sinon S ne dépasserait pas $r + 2$ en rajoutant a_1 car $S < r$. Or on aurait alors $2n = a_n + \dots + a_1 > n \times 2$, absurde.

Plus généralement, on note k tel que a_k soit le plus petit réel non ajouté. Cela signifie que $a_1, \dots, a_{k-1}$ ont été ajoutés sans que S n'atteigne r , et donc que $a_k > a_1 + \dots + a_{k-1} + 2$ sinon on aurait pu ajouter a_k sans que S ne dépasse $r + 2$. Comme $a_i \geq 1$ pour tout i , on en déduit $a_k > 1 + \dots + 1 + 2 = k + 1$ et donc $2n = a_1 + \dots + a_n \geq (n - k + 1)a_k + k + 1 > (n - k + 2)(k + 1)$. Le reste n'est qu'un peu de calcul : on note $a = n - k + 2 \geq 2$ et $b = k + 1 \geq 2$. On a alors $ab - 2a - 2b + 6 = 2 + (a - 2)(b - 2) > 0$ ie $(n - k + 2)(k + 1) > 2n$ ce qui est contradictoire.

Solution de l'exercice 3

- a) Un cycle orienté de longueur 3 convient.
 b) On part d'un ensemble S constitué d'un sommet quelconque, et tant qu'il reste des sommets non reliés à un élément de S on les rajoute à S . $|S|$ augmente strictement et est borné par $|G|$ donc on finit avec S un noyau.

Bonus (qui implique c et d))

Source : Théorème de Richardson (en théorie des graphes).

On commence par montrer un lemme utile concernant les graphes orientés :

Lemme : tout graphe orienté fortement connexe (ie pour tous x, y il existe un chemin de x à y) sans cycle orienté de longueur impaire est biparti.

Démo : Pour montrer cela, il suffit de montrer qu'il n'existe alors pas de cycle de longueur impaire dans le graphe, par propriété connue des graphes bipartis.

Soit donc G un graphe orienté fortement connexe sans cycle orienté de longueur impaire possédant un cycle de longueur impaire $(v_1, \dots, v_m)$. En prenant les indices modulo m , on a donc pour tout i soit une arête $v_i \rightarrow v_{i+1}$ soit $v_i \leftarrow v_{i+1}$. Dans le premier cas par exemple, il y a aussi un chemin orienté allant de v_{i+1} à v_i par forte connexité, et un tel chemin est forcément de longueur impaire, sinon avec l'autre arête on formerait un cycle orienté de longueur impaire. Ainsi pour tout i , il existe un chemin orienté de longueur impaire allant de v_i à v_{i+1} . L'union de tous ces chemins réalise un cycle orienté de longueur impaire. (Remarque : si on est gêné par le fait que le cycle peut se recouper lui-même, ce n'est pas un problème car une recoupe partitionne notre cycle en deux plus petits cycles, l'un d'entre eux étant forcément de longueur impaire car la somme de leurs longueurs est impaire. Répéter ce processus assez de fois donne un cycle orienté de longueur impaire qui ne se recoupe pas).

Forts de ce lemme, résolvons l'exercice. On aimerait faire une récurrence sur le nombre de sommets de G : examinons donc sous quelle condition cela est possible.

Si on prend un stable S , et T l'ensemble des sommets ayant une arête vers S , on aimerait prendre S' un noyau de $G \setminus (S \cup T)$ (qui ne possède pas non plus de cycle orienté de longueur impaire) et dire que $S \cup S'$ est un noyau de G : tout ce qui est non trivial à vérifier pour ce faire est que $S \cup S'$ est bien un stable, ie qu'il n'y a pas d'arête allant de S vers S' .

Pour cela il est pratique de parler de la notion de composante fortement connexe. La relation entre les sommets "il existe un chemin orienté allant de x à y et un chemin orienté allant de y à x " est une relation d'équivalence, et ainsi G se partitionne en un nombre fini de parties fortement connexes. Soit H le graphe donc chaque sommet est une partie fortement connexe de G et où on relie un sommet vers un autre si il existe dans G une arête allant de la dite partie à la dite autre. H est sans cycle orienté, sinon les parties du cycle correspondraient à la même classe d'équivalence ; ainsi, H possède un élément minimal, un sommet x qui n'est relié vers aucun autre. En effet, si chaque sommet était relié vers un autre, on pourrait partir d'un sommet et se balader sur H en suivant les arêtes, sans jamais être bloqué, et on finirait par recroiser un sommet déjà visité, ce qui formerait un cycle orienté.

Bref, on vient de démontrer qu'il existe une partie fortement connexe M de G qui n'a pas d'arête partant de M et allant vers un sommet n'étant pas dans M . D'après ce qu'on a dit plus tôt, prendre S un noyau de M conviendrait donc : il suffit ainsi de résoudre l'exercice pour G fortement connexe.

Or, d'après le lemme, si G est fortement connexe, il est biparti, et donc n'importe laquelle des deux parties convient pour être un noyau. Cela conclut.

Solution de l'exercice 4

Source : All-Russian MO 2005

On note $a_1 \leq \dots \leq a_n$ les valeurs de la première ligne. L'autre valeur dans la colonne où il y a a_i est donc $1 - a_i$.

On applique l'algorithme suivant : on parcourt $1 \leq i \leq n$ dans l'ordre croissant, et on ajoute a_i aux éléments sélectionnés tant que leur somme ne dépasse pas $\frac{n+1}{4}$. À partir de là, on sélectionne les éléments de la deuxième ligne pour les autres colonnes. On note k le dernier indice sélectionné sur la première ligne. On a évidemment $k < n$.

Il est alors clair par construction que la somme sur la première ligne est $\leq \frac{n+1}{4}$.

Il reste à le montrer pour la deuxième ligne, ie $1 - a_{k+1} + \dots + 1 - a_n \leq \frac{n+1}{4}$, ce qui se réécrit $n - k \leq \frac{n+1}{4} + a_{k+1} + \dots + a_n$. Pour cela on dispose essentiellement de 3 informations :

$$a_1 \leq \dots \leq a_n, \quad a_1 + \dots + a_k \leq \frac{n+1}{4} \quad \text{et} \quad a_1 + \dots + a_{k+1} > \frac{n+1}{4}.$$

On a donc $a_n + \dots + a_{k+1} \geq (n - k)a_{k+1}$, ce qui rend uniquement nécessaire de trouver une minoration de a_{k+1} , pratique car on a peu d'informations sur les a_i pour $i > k + 1$.

En fait, notre information porte sur $a_1 + \dots + a_{k+1}$: on minore donc avec inégalité des moyennes $a_{k+1} \geq \frac{a_1 + \dots + a_{k+1}}{k+1} > \frac{n+1}{4(k+1)}$.

Il suffit donc de démontrer $(n - k)(1 - \frac{n+1}{4(k+1)}) \leq \frac{n+1}{4}$, ou encore, en multipliant par $\frac{4}{(n+1)(n-k)}$, de montrer que $\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \geq \frac{4}{n+1}$, ce qui est vérifié par IAH.

Solution de l'exercice 5

Source : IMOSL 2001 C4

Ici, contrairement à d'habitude, on construit un algorithme qui ne termine pas !

- **Instructions** : Au début du processus, tous les nombres sont blancs. On répète indéfiniment les instructions suivantes : Soit x le plus petit sommet colorié en blanc, et soit $z := x + 1776 + 2001$. Si $x + 1776$ est blanc, on ajoute $\{x, x + 1776, z\}$ à nos ensembles historiques, on colorie x en rouge, $x + 1776$ en vert et z en bleu. Sinon, on ajoute $\{x, x + 2001, z\}$ à nos ensembles historiques, on colorie x en rouge, $x + 2001$ en violet et z en bleu.
- **Correction** : À chaque tour de boucle x est colorié en blanc, et $z := x + 1776 + 2001$ aussi car il est strictement plus grand que tous les nombres coloriés jusqu'à présent. Dans le premier cas, il est donc clair que l'ensemble historique ajouté est disjoint des précédents. Dans le second cas, $y := x + 2001$ ne peut être colorié ni en violet, ni en rouge, ni en vert (car x tous les nombres rouges sont strictement inférieurs à x et x est blanc). Supposons donc que y est colorié en bleu. Dans ce cas $y - 2001 - 1776 = x - 1776$ est colorié en rouge, mais alors, d'après les règles choisies, x devrait être colorié en vert, ce qui est absurde. L'ensemble historique ajouté est donc aussi disjoint des précédents. Enfin, à chaque tour de boucle, on ajoute le plus petit nombre blanc dans l'union, donc tout nombre finit par être ajouté dans l'union. Les ensembles historiques ajoutés par l'algorithme lors de son exécution infinie forment donc une partition des entiers positifs.

Solution de l'exercice 6

Source : IMOSL 1994 C3

On utilise ici le monovariant assez naturel $S = \min(A, B, C)$: si on peut trouver un algorithme qui s'applique tant que $S > 0$ et qui à chaque étape le réduit strictement, l'exercice sera terminé.

Pour cela, supposons par exemple $0 < A \leq B \leq C$ (les autres cas sont parfaitement analogues) et on note A_0, B_0, C_0 leurs valeurs respectives. On ne peut pas réduire à partir de là la somme de A : par contre, on peut tenter de réduire B , par exemple en soustrayant A à B , voire des quantités de la forme $2^n \cdot A$ si on commence par doubler plusieurs fois A .

On pense donc à écrire $B_0 = qA_0 + r$ la division euclidienne de B_0 par A_0 , avec $r < A_0$. Vu qu'on ne peut que soustraire des puissances de 2 à q , il est naturel de l'exprimer en base 2 : $q = \sum_{k=0}^m a_k \cdot 2^k$ avec $a^k = 0$ ou 1 pour tout k .

On applique alors l'algorithme suivant : on parcourt les entiers k de 0 à m dans l'ordre. Si $a_k = 0$, on effectue un transfert $A \rightarrow 2A$ et $C \rightarrow C - A$. Si $a_k = 1$, on effectue un transfert $A \rightarrow 2A$ et $B \rightarrow B - A$.

Il reste à justifier deux choses : d'une toutes les opérations effectuées sont valides, ie on a toujours $B \geq A$ ou $C \geq A$ lorsqu'on effectue le transfert correspondant, d'autre que B est bien égal à r à la fin du processus.

On voit par récurrence que tant que tout se passe bien, à l'étape k on a $A = 2^k \cdot A_0$. Comme $a_m = 1$, on retire au plus $1 \cdot A_0 + 2 \cdot A_0 + \dots + 2^{m-1} \cdot A_0$ à C , or $1 \cdot A_0 + 2 \cdot A_0 + \dots + 2^{m-1} \cdot A_0 < 2^m \cdot A_0 \leq B_0 \leq C_0$ donc on n'aura pas de problème avec les transferts depuis C .

On retire à B au plus (et exactement si tout se passe bien) $\sum_{k=0}^m a_k \cdot 2^k \cdot A_0 = q \cdot A_0 \leq B_0$, donc tout se passe bien et on finit avec $r < A_0$ à la place de B et donc S décroît : cela conclut.

Solution de l'exercice 7

Source : USAMO 2011 P2

Deux approches pour cet exercice : soit on commence par chercher des invariants, on en déduit une condition, puis on essaie de construire ce qui nous arrange à partir de ça, soit on bidouille jusqu'à construire un processus intéressant, puis on cherche un invariant relatif à nos trouvailles. Ces recherches peuvent être menées en parallèle.

Notons $a_1, \dots, a_5$ les valeurs des sommets dans un ordre circulaire. On considère les indices modulo 5 dans la suite du problème. On identifie ici deux invariants linéaires (du type $\sum \lambda_i a_i$) : la somme S des a_i (trivialement) ainsi que la quantité $T = \sum_i i a_i \pmod{5}$. En effet, on a toujours $i + (i + 1) \equiv 2(i + 3) \pmod{5}$.

Il est important de toujours vérifier si un invariant linéaire, potentiellement modulo un entier, peut convenir.

Ce dernier invariant est suffisant pour montrer qu'il existe au plus un sommet duquel le jeu peut être gagné. En effet, si le jeu est gagné sur le sommet i , on doit avoir $T \equiv 2011i \equiv i \pmod{5}$.

Passons à la partie constructive. Il y a diverses manières d'arriver au résultat, il faut vraiment bidouiller et essayer de construire des processus intéressants. Par exemple notons P_i le processus de faire $+2$ au sommet i et -1 aux deux sommets opposés.

Alors l'opération $4P_i, 3P_{i+1}, 2P_{i+2}, P_{i+3}$ va ajouter 5 à i et retirer 5 à $i - 1$. En composant ces opérations, on peut faire n'importe quel transfert multiple de 5 d'un sommet à un autre : il suffit donc de rendre tous les sommets sauf 1 congrus à 0 modulo 5 pour conclure.

En appliquant P_T assez de fois, on rend le sommet $T + 2$ nul. En appliquant P_{T+1} assez de fois, on rend le sommet $T + 4$ nul sans changer la nullité de $T + 2$. En appliquant P_{T+3} assez de fois, on rend le sommet $T + 3$ nul sans changer la nullité des deux précédents.

On se retrouve alors avec seuls les valeurs des sommets T et $T + 1$ non nécessairement nules, on note a et b respectivement ces valeurs. Nos deux invariants linéaires nous permettent alors de conclure que dans ce cas, b est nul modulo 5 : cela permettra de conclure d'après ce qui précède.

Par invariance de S on a $a + b \equiv 1 \pmod{5}$, et par invariance de T on a $Ta + (T + 1)b \equiv T \pmod{5}$, ie $T + b \equiv TS + b \equiv T \pmod{5}$ donc $b \equiv 0 \pmod{5}$ comme voulu.

Solution de l'exercice 8

Source : China MO 2010 P5

Afin de s'assurer que chaque tas ait un nombre de cartes pas trop petit, on veut homogénéiser la distribution de cartes entre les points : en cela l'opération (2) est très pratique car elle rajoute la même quantité de cartes à chaque a_i .

Une première idée naïve serait d'appliquer l'opération (1) sur les A_i jusqu'à ce que chaque A_i ait au plus 2 cartes (un bon monovariant pour cet algorithme est le nombre de cartes en O qui croît strictement à chaque application de (1)) puis appliquer (2) jusqu'à ce qu'il reste $n + 1$ cartes en O . Avant de commencer à appliquer (2), il y a alors a priori au plus $2n$ cartes sur les A_i donc au moins $n^2 + n + 1$ en O : cela assure de rajouter au moins n cartes à chaque A_i ce qui n'est pas suffisant si il y a des sommets à 0 : par exemple si tous les sommets valent 2 sauf un qui vaut 0, on est coincé.

Il faut donc pousser l'idée un peu plus loin ! Voyons dans quels cas l'idée naïve précédente fonctionne, en quantifiant exactement ce qu'on obtient plutôt que de perdre de l'information en écrivant des inégalités. Notons a, b, c respectivement le nombre de cartes 0, 1, 2 à la fin des opérations (1), avec $a + b + c = n$. Le nombre de cartes en O est donc supérieur à $n^2 + 3n + 1 - b - 2c = (n + 1) + n^2 + n + a - c$. On gagne si on rajoute au moins $n + 1$ cartes avec les opérations (2), ie si $n^2 + n + a - c \geq n^2 + n$ ou encore si $a \geq c$.

Il suffit donc d'obtenir une configuration dans laquelle il n'y a que des 0, 1, 2 (sur les A_i), avec plus de 0 que de 2. Il est plus pratique de raisonner sur des configurations avec que des 1, 2, 3 afin de pouvoir appliquer (1), et on obtient une telle configuration à partir de la précédente en appliquant une fois (2). Réciproquement, si on obtient une configuration avec que des 1, 2, 3 et avec plus de 1 que de 3, on conclut comme précédemment en appliquant (2).

Pour cela, on applique un algorithme partant d'une configuration avec que des 1, 2, 3 à une avec que des 1, 2, 3 et plus de 1 que de 3 comme suit :

Si il y a une chaîne de plusieurs 3 consécutifs, du type $(x, 3, 3, \dots, 3, y)$ avec $x, y \neq 3$, on applique (1) sur tous les 3 pour obtenir $(x + 1, 1, 2, 2, \dots, 2, 1, y + 1)$. On s'assure ainsi de ne pas avoir deux 3 adjacents. Si il y a une chaîne du type $(x, 3, 2, 2, 2, \dots, 2, 3, y)$ avec $x, y \neq 3$, on applique (1) sur le premier 3, puis sur le point suivant qui est devenu un 3, et ainsi de suite jusqu'au point avant y : on obtient à la place la chaîne $(x + 1, 1, 1, \dots, 1, y + 1)$.

Le processus finit car le nombre de cartes en O augmente strictement à chaque utilisation de (1) : on obtient donc bien la configuration voulue après un nombre fini de coups, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9

Source : Théorème de Dirac

On dispose les sommets de G arbitrairement en cercle. Si les sommets i et $i+1$ du cycle ne sont pas reliés, alors on cherche un indice j du cycle tel que les paires (i, j) et $(i+1, j+1)$ sont reliés. Ainsi, en inversant l'ordre des sommets $i+1, \dots, j$ le long du cercle, on augmentera strictement le nombre de paires de sommets reliés côte à côte sur le cercle. Un tel indice j existe toujours par l'argument suivant. Soient V_i les sommets reliés à i , V_{i+1} les sommets reliés à $i+1$, et :

$$S_i := \{v+1 \mid v \in V_i\}$$

On cherche un sommet commun entre S_i et V_{i+1} , qui doit exister par le principe des tiroirs, puisque $i+1$ n'est ni dans S_i , ni dans V_{i+1} .

Solution de l'exercice 10

Source : OFM 2020 P2

On va montrer que n est le résultat. Cela convient par exemple en prenant tous les a_i distincts deux-à-deux, et chaque a_i forme alors à lui-même un palindrome distinct de tous les autres.

Il existe une preuve plus algorithmique à cet exercice que celle présentée ci-dessous, mais ce n'est pas la plus simple : ne restez pas focalisé sur une seule idée et n'oubliez pas les techniques habituelles ! En particulier, demandez-vous toujours ce qui vous empêche de faire une récurrence. Ici, on aimerait faire une récurrence en disant qu'on compte $n-1$ palindromes distincts sur les $n-1$ premiers termes de la suite, mais il faudrait s'assurer que a_n n'appartient qu'à au plus un seul palindrome distinct de tous les autres... C'est en fait très facile ! Mais soyons un peu plus concret afin de ne pas perdre en rigueur ni en clarté.

Pour chaque classe de palindromes identiques dans la liste, on leur choisit un représentant dans celle-ci. On appelle ces sous-suites les martindromes.

Si on a deux martindromes distincts qui se finissent en a_n , ils sont nécessairement de longueur distinctes pour ne pas prendre les mêmes éléments. On note k, l les indices de départ du plus grand et du plus petit de ces martindromes respectivement. Mais alors, par symétrie dans le grand martindrome, la sous-suite $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-l}$ est égale à $a_n, a_{n-1}, \dots, a_l$ qui est elle-même égale à $a_l, \dots, a_n$ par symétrie dans le petit martindrome. En particulier, on peut changer le représentant de la classe de palindromes identiques à laquelle appartient le petit martindrome, en le remplaçant par $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+n-l}$ qui ne se termine pas par a_n car $l < k$.

En fait, on peut prendre k correspondant à l'indice de départ du plus grand martindrome qui se termine en a_n , et effectuer l'opération précédente sur tous les autres martindromes se finissant en n à l'aide du martindrome en k .

Bref, après tout ça on obtient une configuration dans laquelle au plus un martindrome se finit par a_n . il y a au plus $n-1$ autres martindromes par hypothèse de récurrence, car si on supprime a_n , tous les martindromes ne se finissant pas par a_n survivent. Cela fait au plus n martindromes ie au plus n palindromes identiques et cela conclut.

Solution de l'exercice 11

Source : All-Russian MO 2005

a) L'idée pour cette question est de renforcer la contrainte pour donner un exercice plus simple à prouver. En fait, on n'aime pas à avoir à considérer des triplets d'éléments, on préfère les ranger par deux afin de se ramener à une structure de graphe, plus gentille. Ce qu'on peut faire ici, en notant par exemple $1, 2, \dots, 100$ les participants dans l'ordre sur le cercle, c'est les partitionner par paires de voisins $(1, 2), (3, 4), \dots, (99, 100)$. En s'assurant que deux membres d'une paire ne sont jamais dans le même groupe, on s'assurera qu'il n'y a pas 3 gens consécutifs dans le même groupe non plus.

Pour ce faire, on construit un graphe dans lequel chaque participant est représenté par un sommet. On relie deux participants d'une arête bleue si ils sont compatriotes et rouges si ils sont dans la même paire.

Construire nos groupes de 50 revient alors à montrer que ce graphe est biparti. Alternativement, qu'il ne possède pas de cycle de longueur impaire. En fait, chaque sommet est relié à exactement une arête rouge et une bleue; or un cycle de longueur impair forcerait qu'un sommet soit relié à deux arêtes rouges ou deux arêtes bleues, c'est absurde. Notre graphe est donc bien biparti, et ça conclut.

b) Cette seconde question est plus technique, mais utilise les mêmes idées que la première. On notera que pendant la compétition les élèves n'avaient pas accès à la première question donnée ici, rendant le problème extrêmement difficile et peu réussi.

En divisant chaque équipe en 2 groupes de 2 élèves et en faisant comme si ces deux groupes venaient d'un pays différent, on se ramène au cadre de la première question dont on peut appliquer le résultat : on applique donc sur ces nouvelles équipes la répartition en deux groupes que nous donne la question a).

Focalisons nous maintenant sur le premier de ces groupes uniquement. On construit comme dans la première question un graphe, dont les sommets sont cette fois les membres du premier groupe, où on relie deux participants d'une arête bleue si ils sont compatriotes et rouges si ils sont voisins sur le cercle.

Il y a exactement 2 participants d'un pays donné dans le premier groupe, vu qu'il y a exactement 1 participant d'un "demi-pays" donné dans chaque groupe : chaque sommet est relié à une arête bleue. De plus, d'après le résultat de la question a), il n'y a pas 3 membres du premier groupe consécutifs sur le cercle : cela signifie que chaque sommet est relié à au plus une arête rouge.

Ces hypothèses sont à nouveau suffisantes pour montrer que notre graphe est biparti, car l'existence d'un cycle de longueur impaire impliquerait deux arêtes rouges ou deux arêtes bleues reliées au même sommet, absurde.

Cela nous permet de diviser le premier groupe en deux sous-groupes de 25 personnes étant tels qu'il n'y a pas deux voisins ni deux membres d'un même pays dans le même groupe. On peut de même diviser le deuxième groupe en deux tels sous-groupes, et nos quatre sous-groupes ainsi formés répondent à l'exercice posé.

2 Algèbre : Polynômes (Henry)

Cette feuille d'exercices propose des exercices sur les polynômes. Les exercices illustrent diverses techniques utiles dans le cadre des olympiades. Chacune des solutions des quatre premiers exercices commence par une *phrase à retenir* qui peut servir d'indice à un élève qui bloquerait sur l'un de ceux-ci.

Exercices

Exercice 1

Trouver tous les polynômes de la forme

$$\pm X^n \pm X^{n-1} \pm \dots \pm X \pm 1$$

n'ayant que des racines réelles.

Exercice 2

Soit $P(x)$ et $Q(x)$ des polynômes tels que

$$P(x^3) + Q(x) = P(x) + x^5 Q(x),$$

avec $\deg P = 4$ et $P(0) = 0$. Démontrer que les racines (complexes) non-nulles de P sont de module 1.

Exercice 3

Déterminer s'il existe deux polynômes non constants P et Q tels que

$$P(X)^{10} + P(X)^9 = Q(X)^{21} + Q(X)^{20}.$$

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions polynômiales P à coefficients réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1.$$

Exercice 5

Un professeur informe ses élèves qu'il a en tête un polynôme unitaire $P(x)$ de degré 2017 à coefficients entiers. Il leur donne ensuite k entiers $n_1, \dots, n_k$ ainsi que le produit des évaluations $P(n_1) \cdots P(n_k)$. Le professeur demande à ses élèves de trouver un polynôme qui pourrait être celui qu'il a en tête. Quelle est la plus petite valeur de k telle que le professeur puisse choisir P et $n_1, \dots, n_k$ pour que les élèves puissent retrouver P à coup sûr?

Exercice 6

L'équation

$$(x-1) \times \dots \times (x-2016) = (x-1) \times \dots \times (x-2016)$$

est écrite au tableau. On désire effacer certains facteurs $(x-i)$ de sorte que l'équation restante n'admette pas de solution réelle. Déterminer le plus petit nombre de tels facteurs à enlever pour réaliser cet objectif.

Exercice 7

Soit n un entier strictement positif pair, et $c_1, \dots, c_{n-1}$ des réels vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n-1} |c_i - 1| < 1.$$

Démontrer que

$$2x^n - c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} - \dots - c_1x + 2$$

n'a pas de racines réelles.

Exercice 8

Démontrer que tout polynôme unitaire de degré d et à coefficients réels peut s'écrire comme la moyenne arithmétique de deux polynômes unitaires de degré d et avec d racines réelles.

Solutions**Solution de l'exercice 1**

Ici les coefficients du polynôme sont petits, ce qui nous incite à utiliser les relations de Viète pour obtenir des contraintes sur les racines. On note la technique utile suivante :

Un nombre complexe est réel si et seulement si son carré est positif.

On note $x_1, \dots, x_n$ les n racines du polynôme. Alors

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 - 2 \left(\sum_{i < j} x_i x_j \right) \leq 3$$

grâce aux relations coefficient-racines. De même le carré du produit des racines vaut

$$x_1^2 \cdots x_n^2 = 1.$$

Par l'IAG, on a donc

$$3 \geq \sum x_i^2 \geq n \cdot (x_1^2 \cdots x_n^2)^{1/n} = n.$$

En testant les petits cas, on trouve au signe près et par degré 1, $x \pm 1$, $x^2 \pm x - 1$ et $x^3 - x \pm (x^2 - 1)$.

Solution de l'exercice 2

On retiendra la phrase suivante :

Si j'ai envie de faire une substitution qui permette de rendre x^n égal à 1, alors c'est toujours possible grâce aux nombres complexes.

En effet, les solutions à $x^n = 1$ sont exactement les racines de l'unité $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Elles permettent aussi d'écrire la factorisation suivante :

$$X^n - 1 = (X - 1)(X - e^{\frac{2i\pi}{n}}) \cdots (X - e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}).$$

On pose donc $\omega = e^{2i\pi/5}$, de sorte que $\omega^5 = 1$. Alors en substituant $x = \omega^k$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$, on trouve

$$\begin{aligned} P(\omega^3) &= P(\omega) \\ P(\omega^6) &= P(\omega) = P(\omega^2) \\ P(\omega^9) &= P(\omega^4) = P(\omega^3) \\ P(\omega^{12}) &= P(\omega^2) = P(\omega^4). \end{aligned}$$

Ainsi $P(\omega) = P(\omega^2) = P(\omega^3) = P(\omega^4)$ et donc

$$\begin{aligned} P(x) - P(\omega) &= C(x - \omega)(x - \omega^2)(x - \omega^3)(x - \omega^4) \\ &= C(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \end{aligned}$$

pour une constante C . Or $P(0) = 0$ donc $P(\omega) = -C$ et ainsi

$$P(x) = C(x + x^2 + x^3 + x^4) = Cx(x + 1)(x^2 + 1),$$

dont toutes les racines non-nulles sont sur le cercle unité.

Solution de l'exercice 3

On retiendra la phrase suivante :

La dérivée d'un polynôme permet de détecter les racines doubles de celui-ci. Ainsi dès que le problème fait intervenir des multiplicités (et c'est souvent le cas s'il y a des puissances), il sera intéressant de regarder la dérivée.

En observant les degrés, on remarque qu'il existe un d tel que $\deg P = 21d$ et $\deg Q = 10d$. On factorise ensuite

$$P(X)^9(P(X) + 1) = Q(X)^{20}(Q(X) + 1),$$

ce qui en dérivant donne

$$P'P^8(10P + 9) = Q'Q^{19}(21Q + 20).$$

Donc $Q^{19} \mid \gcd(P^9(P+1), P'P^8(10P+9))$, or $10P+9 - 10(P+1) = -1$ donc $10P+9$ est premier avec $P+1$. On en déduit que

$$Q^{19} \mid P^8 \gcd(P', P),$$

ce qui en regardant les degrés donne

$$19 \times 10d \leq 8 \deg P + \deg(P) = 9 \times 21d,$$

ce qui est absurde, il n'y a donc pas de solutions.

Solution de l'exercice 4

On retiendra la phrase suivante :

Si une équation polynomiale est vraie pour une infinité de valeurs, alors elle reste vraie partout.

On remarque que

$$P(x)^2 + 1 = P(x^2 + 1) = P((-x)^2 + 1) = P(-x)^2 + 1,$$

d'où $P(x)^2 = P(-x)^2$. Ainsi du point de vue des polynômes associés, soit $P(X)$ et $P(-X)$, soit $P(X)$ et $-P(-X)$ coïncident en une infinité de points, et comme ce sont des polynômes, ils coïncident partout. Donc P est paire ou impaire.

- Si P est impaire : Dans ce cas, il existe Q telle que $P(x) = xQ(x^2)$ pour tout x , ce qui en remplaçant dans l'équation de départ donne pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x^2 + 1)Q((x^2 + 1)^2) = x^2Q(x^2)^2 + 1.$$

En particulier on a pour $x \geq 0$

$$(x + 1)Q((x + 1)^2) = xQ(x)^2 + 1.$$

Ainsi si $x \geq 0$ est un antécédent de 1 par Q , $(x + 1)^2$ est aussi un antécédent de 1 par Q . En posant $x = 0$, on obtient $Q(1) = 1$, ce qui permet de définir une suite d'antécédents de 1 par la récurrence $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$ et $u_0 = 1$. Comme Q est polynomiale, elle est donc constante égale à 1. L'identité est bien solution.

- Si P est paire : Dans ce cas, il existe Q tel que $P(x) = Q(x^2)$ pour tout x , ce qui donne avec l'équation du problème

$$Q((x^2 + 1)^2) = Q(x^2)^2 + 1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, et en posant $y = x^2$,

$$Q((y + 1)^2) = Q(y)^2 + 1$$

pour tout $y \geq 0$. On pose R la fonction définie par $R(x + 1) = Q(x)$, ce qui permet de réécrire l'équation ci-dessus comme

$$R((y + 1)^2 + 1) = R(y + 1)^2 + 1,$$

ainsi avec le changement de variable $z = y + 1$, on a pour tout $z \geq 1$,

$$R(z^2 + 1) = R(z)^2 + 1,$$

ce qui est exactement l'équation de départ. On note que R est polynomiale, ainsi si l'équation est vraie sur un intervalle infini, elle est donc aussi vraie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, toute fonction P solution paire s'écrit sous la forme $R(x^2 + 1)$, où R est aussi solution, de degré la moitié du degré de P .

Comme il n'y a pas de solutions constantes, on conclut donc que les seules solutions sont la fonction identité, et les itérées de $f : x \mapsto x^2 + 1$. Ce n'est pas difficile de vérifier que ces fonctions sont solution, en remarquant que l'équation fonctionnelle s'écrit $f \circ P = P \circ f$.

Solution de l'exercice 5

Si $k \leq 2016$, on note $Q(x) = P(x) + (x - n_1) \cdots (x - n_k)$, alors Q est unitaire, de degré 2017, et

$$P(n_1) \cdots P(n_k) = Q(n_1) \cdots Q(n_k),$$

ce qui rend P et Q indistingables. Donc $k > 2016$. Montrons que $k = 2017$ suffit. On pose $n_i = 4i$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$, et

$$P(x) = 1 + (x - n_1) \cdots (x - n_k),$$

ce qui donne $P(n_1) \cdots P(n_k) = 1$. Supposons alors que les élèves aient trouvé un polynôme unitaire $Q(x)$ de degré 2017 vérifiant $Q(n_1) \cdots Q(n_k) = 1$, alors on a $Q(n_i) = \pm 1$ pour tout i .

Si deux signes différents se produisent, par exemple avec $Q(4a) = 1$ et $Q(4b) = -1$, on a donc la condition de divisibilité $4(a-b)|2$, qui est absurde. Donc tous les $Q(n_i)$ sont égaux et égaux à 1 car 2017 est impair. Donc $P(x) - Q(x)$ admet 2017 racines distinctes en étant de degré au plus 2016, donc $P = Q$, et les élèves ont trouvé le bon polynôme.

Solution de l'exercice 6

La réponse est **2016**. Tout d'abord, si l'on retire strictement moins de 2016 facteurs, alors il reste un facteur $(x - k)$ en commun des deux côtés, et donc k est une solution réelle de l'équation restante. Donc la réponse est au moins 2016.

Montrons maintenant qu'il est possible de retirer exactement 2016 facteurs de sorte que l'équation n'ait plus de solution réelle. Pour cela on retire à gauche les facteurs $(x - k)$ où $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$, et à droite ceux où $k \equiv 0, 1 \pmod{4}$. On remarque par exemple en faisant un dessin que les inégalités

$$\begin{aligned}(x-1)(x-4) &< (x-2)(x-3) \\ (x-5)(x-8) &< (x-6)(x-7) \\ &\vdots \\ (x-2013)(x-2016) &< (x-2014)(x-2015)\end{aligned}$$

sont toutes vérifiées. Il nous reste les cas suivants à traiter en fonction de la valeur de x :

- Si toutes les inégalités sont entre des réels strictement positifs, en les multipliant on obtient une inégalité stricte.
- Si l'un des termes est nul, cela fonctionne aussi.
- Si l'un des termes (de degré 2) de part ou d'autre de l'une des 1008 inégalités est négatif, alors tous les termes appartenant aux autres inégalités sont positifs. Dans l'inégalité avec un côté négatif, soit $4k + 2 < x < 4k + 3$, et les deux termes sont négatifs, soit seul le terme de gauche est négatif. Dans ce dernier cas on peut multiplier les inégalités entre elles.

Il ne nous reste que le cas où $4k + 2 < x < 4k + 3$ pour un certain entier $0 \leq k < 504$. Dans ce cas, on préfère décaler les inégalités en remarquant que

$$\begin{aligned}(x-4i)(x-4i-1) &> (x-4i+1)(x-4i-2) > 0 \\ (x-1)(x-2016) &< (x-2)(x-2015) < 0,\end{aligned}$$

et le produit pour tout i donne que le côté gauche de l'équation est strictement plus grand que le droit en valeur absolue.

Solution de l'exercice 7

Soit $P(x)$ le polynôme de l'énoncé. Celui-ci nous incite à poser

$$Q(x) = x^n - x^{n-1} + \dots - x + 1,$$

et à étudier $P(x) - Q(x)$. Remarquons d'abord que la condition de l'énoncé donne $c_i > 0$, et donc que

$$P(x) = 2x^n + \sum_{i=1}^n c_i (-1)^i x^i + 2$$

est supérieur ou égal à 2 pour $x \leq 0$. En effet, n est pair, et $c_i(-1)^i x^i \geq 0$. Donc les racines réelles de $P(x)$ sont strictement positives. On a ensuite

$$P(x) = P(x) - Q(x) + Q(x) = x^n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - 1)x^i + \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1}.$$

Si $x \leq 1$, alors $|\sum_{i=1}^{n-1} (c_i - 1)x^i| < 1$ donc $P(x) \geq 1 - 1 + \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1} > 0$. Si $x > 1$, on se ramène au cas précédent en remarquant que

$$x^n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - 1)x^i = x^n \left(1 + (1/x)^n + \sum_{i=1}^{n-1} (c_i - 1)(1/x)^{n-i} \right) \geq 0,$$

d'où $P(x) > 0$. Ainsi $P > 0$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8

Soit $P(x)$ un polynôme unitaire à coefficients réels. On fixe une suite décroissante de réels $x_1 > \dots > x_d$. Pour chaque i impair on fixe un réel $y_i < \min\{2P(x_i), 0\} \leq 0$, et pour chaque i pair un réel $y_i > \max\{2P(x_i), 0\} \geq 0$. Soit R un polynôme interpolateur de degré d unitaire, tel que $R(x_i) = y_i$ pour tout i . Soit $Q(x) = 2P(x) - R(x)$. Comme les y_i changent de signe, R admet $d - 1$ racines réelles. La définition de R donne aussi

$$Q(x_{2k+1}) = 2P(x_{2k+1}) - y_{2k+1} > 0 > 2P(x_{2k}) - y_{2k} = Q(x_{2k}),$$

donc Q admet au moins $d - 1$ racines réelles. On conclut en utilisant le fait que toute racine complexe non-réelle vient avec une racine conjuguée, et ainsi il ne peut pas y avoir un nombre impair de racines non-réelles, donc R et Q ont d racines réelles.

3 Géométrie : géo-guessing (Auguste)

Le but de ce TD est d'aborder non pas une technique de preuve spécifique mais plutôt une méthode générale pour aborder nombre d'exercices. En effet à partir d'un certain niveau, il y a toujours des points à introduire "par soi-même" pour avancer, donc voici quelques conseils :

- D'abord penser aux aspects symétriques et algébrique : il arrive régulièrement que des points soient jumeaux, c'est à dire qu'ils ne sont pas distinguables d'un point de vu algébrique (les deux intersections d'une droite avec un cercle par exemple), ou plus simplement la symétrie B et C en géométrie du triangle.
- D'autre part, d'un point de vu moins concret, il faut faire preuve de lucidité : souvent certains points sont plus naturel à introduire que d'autre, et pour commencer à travailler sur un exercice il est souvent utile de se demander si il manque des objets évidents sur la figure initiale. Il est également primordial de déterminer à l'avance dans quelle "direction" chercher, c'est pour ça qu'il est parfois utile de travailler dans l'autre sens (qu'est-ce qui permet de conclure?) et ne pas hésiter le marquer clairement en compétition... Des ordinateurs résolvent des exos durs en testant tout ce qu'il peuvent introduire, mais vous n'avez pas leur force de calcul donc il va falloir un peu de jugeote!
- Enfin, il faut avoir foi. Souvent si un exercice semble infaisable alors que sa difficulté est sensée être atteignable, c'est que toute la solution repose sur un point que vous n'avez pas encore introduit. Cela ne veut pas dire qu'il faut démultiplier les tentatives désespérée en s'intéressant à des points de plus en plus étranges, mais plutôt de prendre du recul et pour ne pas gacher du temps inutilement.

Exercices

Exercice 1 (muraille 2023?)

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $AB < BC$ et $AD < DC$. Soit E un point sur le segment $[BC]$ tel que $AB = BE$ et F un point sur le segment $[CD]$ tel que $AD = DF$. Soit M le milieu du segment $[EF]$. Montrer que $\widehat{BMD} = 90^\circ$.

Exercice 2 (RMM P1 2018)

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique et P un point sur le coté AB . On note Q l'intersection de (PD) avec (AC) et K et L les projections de P et Q sur (BC) parallèlement à (CD) et (BD) respectivement.

Montrer que les cerles circonscrits à BPK et CQL sont tangents.

Exercice 3 (G3 2017)

Soit ABC un triangle, les hauteurs issues de B et C intersectent le diamètre issu de A en P et Q .

Montrer que le centre du cercle circonscrit à HPQ appartient à une médiane.

Exercice 4 (RMM 2019, P2)

Soit $ABCD$ un trapèze isocèle avec $(AB) \parallel (CD)$, et soit E le milieu de $[AC]$. On note ω et Ω les cercles passant par AEB et DEC respectivement, et on pose P l'intersection de la tangente à ω en A et celle à Ω en D .

Montrer que (PE) est tangente à Ω .

Exercice 5 (China TST 2024, ex 22)

Soit ABC un triangle isocèle en A , D un point sur la parallèle à (BC) passant par A et tel que $DB > DC$. Un point E bouge sur le petit arc BC et tel que $BE < CE$. La droite (BC) contient F tel que $\widehat{DFE} = \widehat{ADE}$.

Si on note X et Y les intersections de (FD) avec (AB) et (AC) , montrer que $\widehat{XEY}$ est constant.

Exercice 6 (P8 Sharygin olympiad 2025)

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible, $P = (AC) \cap (BD)$ et K et L sur $[AC]$ et $[BD]$ respectivement tels que $CK = AP$ et $DL = BP$.

Montrer que le centre de gravité du quadrilatère appartient à l'axe radical des cercles circonscrits à ALC et BKD .

Exercice 7 (G6 2020)

Dans un triangle ABC , on note I et I_A les centres des cercles inscrit et A -exinscrit. Soit D le point de tangence du cercle inscrit avec (BC) . La droite (AD) intersecte (I_AB) et (I_AC) en X et Y .

Si on note X et Y les intersections de (AD) avec (I_AB) et (I_AC) , montrer que les cercles circonscrits à XYI_A et AID sont tangents.

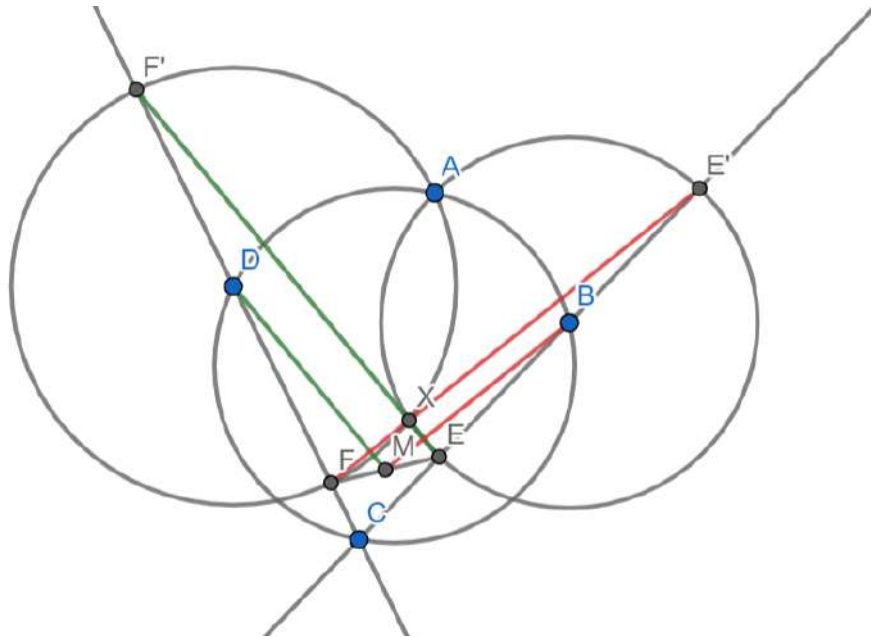
Exercice 8 (Israel TST 2023, P3)

Soit ABC un triangle, D le pied de la hauteur issue de A . Soit P l'intersection entre la médiane de $[AH]$ et la tangente au cercle circonscrit en A .

Si on note X et Y les intersections de (PH) avec (AB) et (AC) , montrer que $\widehat{XHY} = \alpha$ ou $180^\circ - \alpha$.

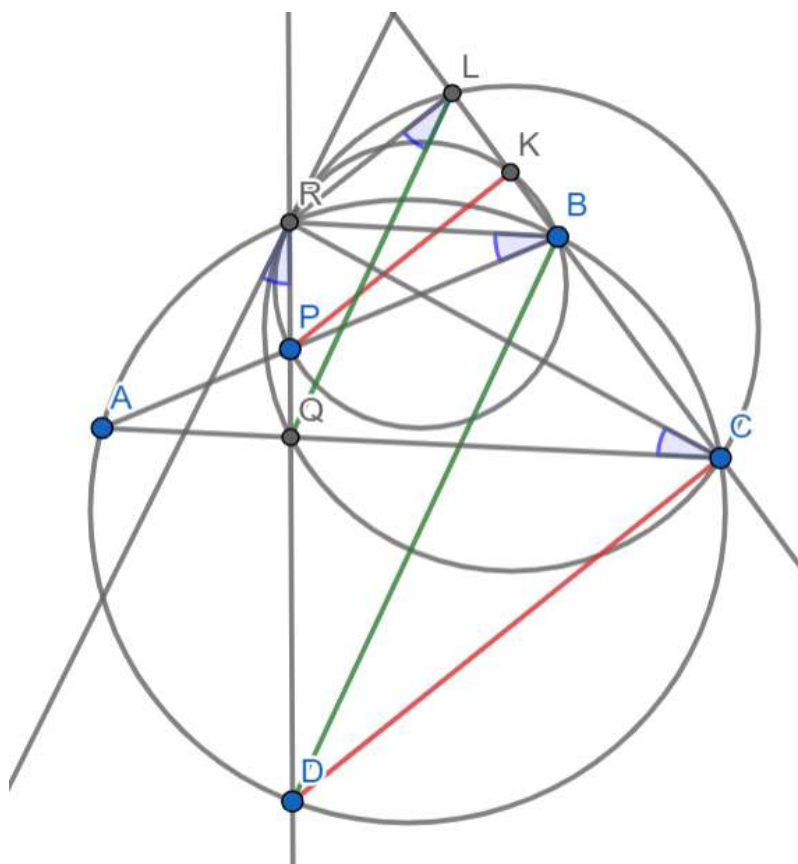
Solutions

Solution de l'exercice 1



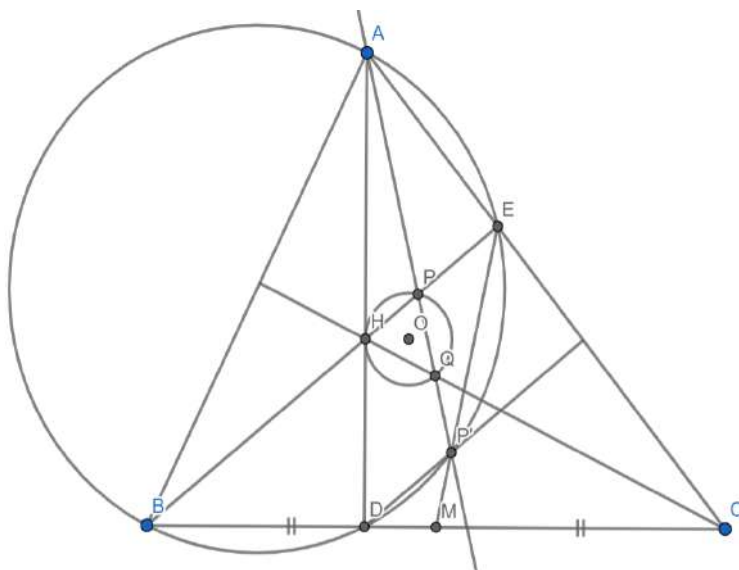
On introduit, suivant notre précepte, les points E' et F' symétrique de E et F par rapport à B et D . Comme M et B sont les milieux de $[EE']$ et $[EF]$, on a $(BM) \parallel (E'F)$ et de même $(DM) \parallel (F'E)$. Soit X la seconde intersection des cercles de centre B et D passant par A , on a par angle au centre $\widehat{FXA} + \widehat{AXE'} = 180^\circ - \frac{1}{2}\widehat{FDA} + \frac{1}{2}\widehat{E'BA} = 180^\circ$. Il vient que $X \in (FE')$, et de même $X \in (EF')$ d'où on conclut que $(EF') \perp (FE')$

Solution de l'exercice 2



Le point magique ici est R la seconde intersection de (PD) avec le cercle circonscrit du quadrilatère. Pour le coup il est moins évident qu'il s'agit du bon point même si on le contrôle bien, donc la motivation pour l'introduire relève plutôt de la foi et d'une bonne figure. Comme $(PK)/(DC)$, par parallèle/antiparallèle on a la cocyclicité de $PRBK$, et de même pour $RCQL$. On conclut facilement par angle tangentiel en montrant que l'angle entre la tangente en R et (DR) est le même pour les deux cercles.

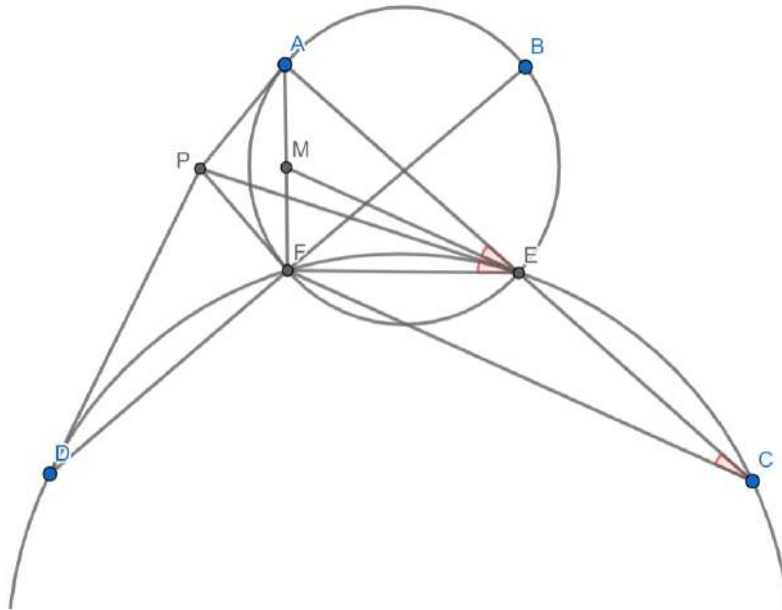
Solution de l'exercice 3



Dans ce problème, on connaît la direction de chaque droite par rapport au triangle, donc dès qu'une propriété à l'air vraie et ce traduit en terme d'angle, on arrive à la démontrer. Ainsi par chasse aux angles HPQ est tangent à (AH) , et si on note O le centre de HPQ , on a $(OH) \perp (AH)$. Pour des raisons de symétrie, la médiane doit être issue de A , et à présent il est utile de déporter le problème par homothétie depuis A car cela nous permet de travailler autour du milieu de $[BC]$ qui nous est plus familier.

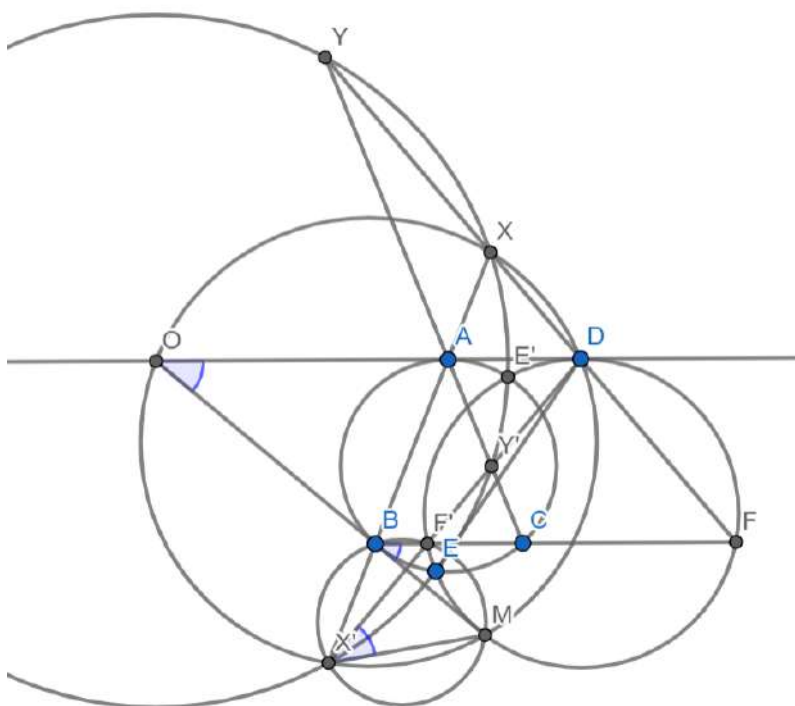
On pose alors D et E les pieds des hauteurs issues de A et B , et P' l'intersection de (AP) avec la perpendiculaire à (AC) passant par D . Il suffit alors de démontrer que le point à équidistance de D et P' sur (BC) est le milieu de $[BC]$. Par chasse aux angles, on obtient que $\widehat{AP'D} = 180^\circ - \widehat{ABD}$ d'où $ABDP'E$ cocycliques. Dès lors $BDP'E$ est un trapèze cyclique, donc isocèle. Ainsi $M = (BD) \cap (EP')$ est le milieu de $[BC]$ car $MB = ME$ et vérifie $MP' = MD$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4



Tout d'abord, notons F le milieu de $[BD]$. Par symétrie on a $F \in \omega \cap \Omega$ et si (PE) est tangente à Ω , (PF) doit être tangente à ω . Ainsi il suffit de démontrer que les tangentes à ω en A et F concourent avec la tangente à Ω en E , et une preuve analogue montreras que la tangente à Ω en D passe également par ce point. On redéfinis donc P comme l'intersection des tangentes à ω en A et F , et on peut oublier les points B et D : on a simplifié le problème ! Il est maintenant connu que (PE) est la symédiane issue de E dans le triangle AEF . En posant M le milieu de $[AF]$, avec le théorème des milieux on obtient $\widehat{PEF} = \widehat{AEM} = \widehat{ACF}$, d'où (EP) tangente à Ω par angle tangentiel, ce qui conclut.

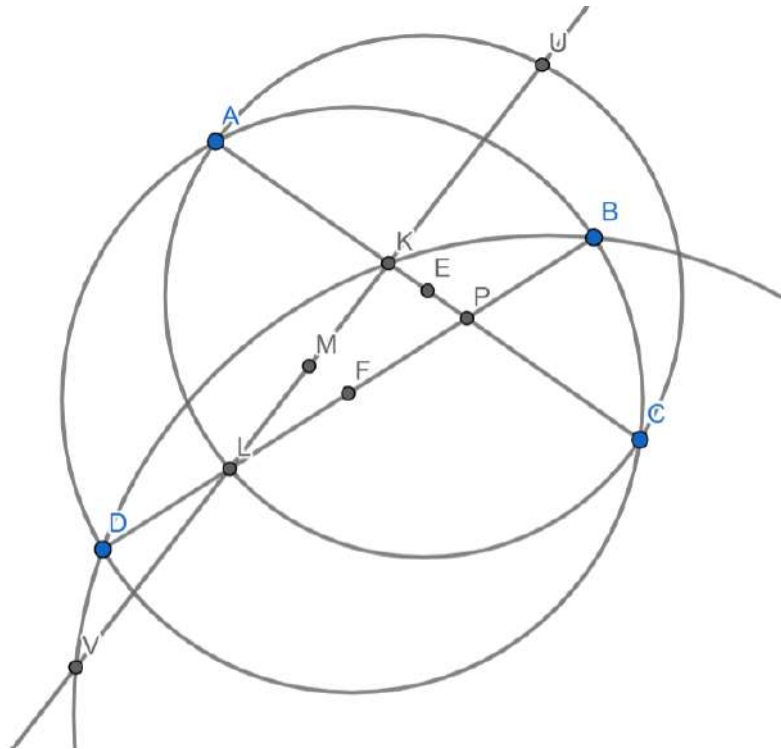
Solution de l'exercice 5



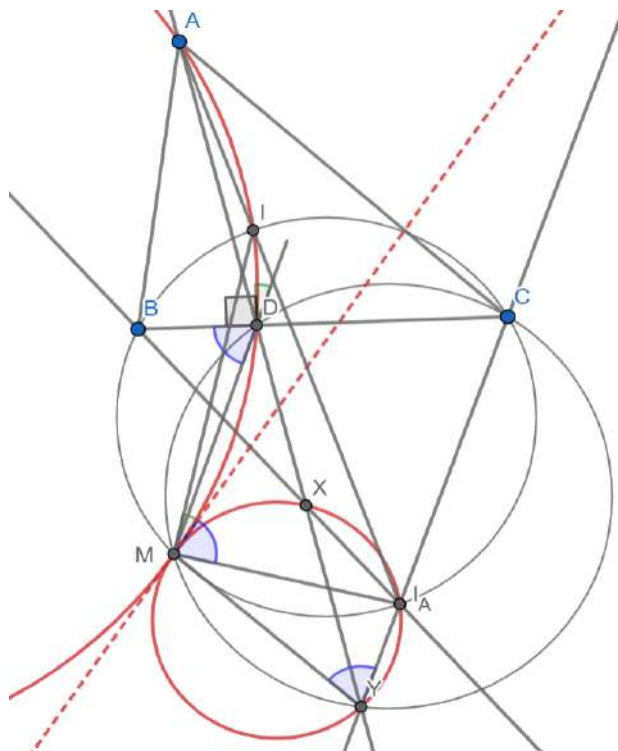
Comme d'habitude, il est important d'analyser l'énoncé : la condition qui restreint D à un demi-plan n'a rien d'algébrique. De plus la condition d'angle est clairement équivalente à la tangence entre (DA) et (DEF) (le cercle circonscrit au triangle DEF), mais avec cette approche plus algébrique F n'est pas distinguable de la seconde intersection de (DEF) avec (BC) . Ainsi il est naturel d'introduire F' , X' et Y' comme dans l'énoncé avec F' le point jumelé à F et E' la seconde intersection de (ABC) avec (DEF) . (DF') étant la symétrique de (DF) par rapport à (AD) , le quadrilatère $YXY'X'$ est symétrique selon l'axe (AD) . On remarque alors que les points $XX'YY'EE'$ semblent cocyclique, et cela permettrait de conclure car on aurait $\widehat{XEY} = \widehat{XY'Y} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Soit O le milieu de $(XX'YY')$, il appartient à (AD) qui bissecte $\widehat{YAX}$ et $\widehat{XDY'}$ donc par pôle sud on a $(XOAY)$, $(X'OAY')$, $(ODXX')$ et $(YOY'D)$. Dès lors l'inversion du cercle $(XX'YY')$ échange A et D , et on cherche en fait à démontrer que les cercles (ABC) et (DEF) sont échangés, car ainsi leurs intersections E et E' sont fixées. Pour ce faire on introduit M la seconde intersection de $(OXDX')$ avec $(EF'E'DF)$, et on remarque qu'il s'agit du point de Miquel du quadrilatère $XX'FF'$, donc M appartient également à $(X'BF')$. Par chasse aux angles $\widehat{MBF'} = \widehat{MX'F'} = \widehat{MOD}$ donc O, B et M sont alignés. L'inversion de $(XX'YY')$ renvoie (AB) sur (OXD) , donc M est l'image de B et finalement (ABC) le cercle passant par B tangent à (AD) en A est renvoyé sur (DEF) le cercle passant par M tangent à (AD) en D , ce qui conclut.

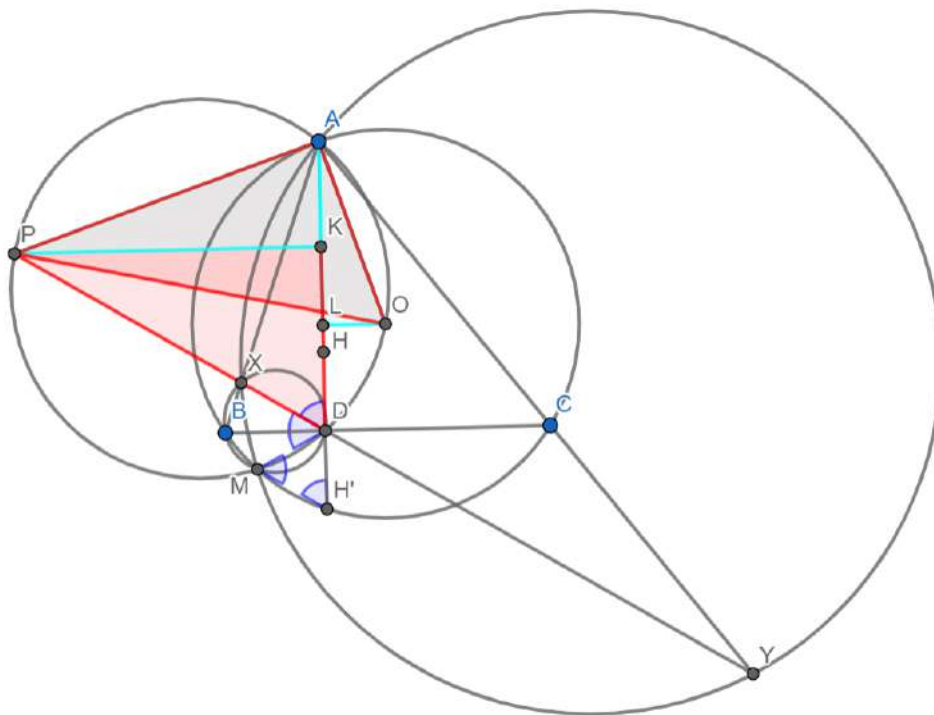
Solution de l'exercice 6



Tout d'abord il est clair que P appartient à l'axe radical de (ALC) et (DKB) et que G le centre de gravité est le milieu de $[EF]$ avec E et F les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ (donc de $[KP]$ et $[LP]$). Dès lors par homothétie de rapport 2 depuis P , il suffit de démontrer que M le milieu de $[KL]$ est sur l'axe radical. A partir de là il est possible de conclure par linearity of pop, mais on peut plus simplement introduire U et V les secondes intersections de (KL) avec (ALC) et (DKB) . Dès lors on par puissance d'un point $LK \cdot LV = LD \cdot LB = PB \cdot PD = PC \cdot PA = KC \cdot KA = KL \cdot KU$ d'où $KU = LV$ soit $MU = MV$ et il vient $MK \cdot MV = ML \cdot MU$ ce qui conclut.



Solution de l'exercice 8



L'angle à calculer correspond manifestement à un angle orienté : on se charge de trouver une condition équivalente géométrique. Sur une figure correctement tracée on voit que le symétrique de H par rapport à (PD) doit appartenir à (AXY) (ce qui permettrait de conclure) et (ABC) (ce qui nous permet d'avancer dans le problème). Ainsi on introduit plutôt M l'intersection de ces deux cercles : il s'agit du point de Miquel du quadrilatère $XDCA$! De ce fait il appartient également à (XBD) et pour montrer qu'il s'agit du symétrique de H par rapport à (PD) on introduit celui par rapport à (BC) , H' qui appartient à (ABC) classiquement.

Pour motiver ce qui va suivre, l'involution de Miquel permet bien de comprendre ce qui se passe dans la figure : celle-ci échange X et C , A et D , B et Y , (ABC) et (XY) , (PAD) et (AD) , P et H' . Si on note O le centre du cercle circonscrit, il s'agit de l'image de ∞ par la symétrie d'axe (ABC) (l'inversion de cercle (ABC)) et est renvoyé par l'involution de centre M sur le symétrique de M (l'image de ∞) par rapport à (XY) (l'image de (ABC)). Comme nous voulons démontrer qu'il s'agit de H , on doit démontrer que $O \in (PAD)$.

Soit K le milieu de $[AH]$ et L le projeté de O sur (AD) , comme $(AP) \perp (AO)$ et $(KP) \perp (AL)$ on a $\widehat{LAO} = \widehat{KPA}$ d'où $LAO \sim KPA$. De plus $AL = \frac{1}{2}AH' = KD$, d'où $\frac{PK}{KD} = \frac{PK}{AL} = \frac{PA}{AO}$ et $PKD \sim PAO$, on obtient $\widehat{PDA} = \widehat{POA}$ et $O \in (PMDA)$. A présent, O étant diamétralement opposé à P et vérifiant $OA = OM$, P joue le rôle du pôle sud issue de D dans ADM et le symétrique de M par rapport à (PD) appartient bien à (AD) . De plus $\widehat{MH'D} = 180^\circ - \widehat{MBX} = \widehat{MDX} = \widehat{XDH}$ donc $(MH') \parallel (XD)$ et il vient DMH' isocèle en D . Finalement $MD = MH' = MH$ et H est bien le symétrique de M par rapport à (XY) ce qui conclut.

4 Combinatoire : Problèmes de niveau P1 (Aurélien)

En stand-by...

5 Combinatoire : Problèmes de niveau P2 (Anatole)

Exercice 1 (RMM 2018, P5)

On prend $2n$ points sur un cercle. On veut les relier avec n flèches afin que

- Chaque point soit le départ ou l'arrivée d'une flèche
- Deux flèches ne se croisent jamais
- Si $ABCD$ sont quatre points du cercle dans le sens horaire, alors au moins une des deux flèches $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{CD}$ n'est pas tracée.

De combien de façons peut-on ainsi relier les points ?

Exercice 2 (IMO 2021, P5)

Aurélien et Camille les écureuils ont collecté 2025 noisettes pour l'hiver. Camille les numérote de 1 à 2025, et creuse 2025 trous en cercle pour les ranger. Le matin suivant, Aurélien remarque que Camille a bien rangé une noisette par trou, mais n'a pas fait attention à la numérotation. Il décide de les réordonner en faisant 2025 opérations. À la k -ième opération, il échange les positions des deux noisettes adjacentes à la noisette k . Montrer qu'il existe un k tel que, à la k -ième opération, il échange les noisettes a et b avec $a < k < b$.

Exercice 3 (IMO 2014, P5)

Une banque produit des pièces de valeur $\frac{1}{n}$ pour tout n . On considère une collection finie de ces pièces de valeur totale au plus $99 + \frac{1}{2}$. Montrer qu'on peut diviser cette collection en 100 groupes de pièces, chaque groupe de valeur au plus 1.

Exercice 4 (USA TST 2020, P4)

Soit G un graphe fini simple. On appelle le *dérivé* de G le graphe obtenu en prenant les mêmes sommets que G et en traçant une arête entre u et v ssi u et v ont un voisin commun dans G . Montrer que si G est isomorphe au dérivé de son dérivé, il est aussi isomorphe à son dérivé.

Exercice 5 (IMO 2016, P6)

On considère n segments qui se coupent deux à deux, et tels que trois d'entre eux ne sont jamais concourants. Auguste place une grenouille à une des deux extrémité de chaque segment, dirigée vers l'autre extrémité. Ensuite, il claqué $n - 1$ fois des mains. Chaque fois, chaque grenouille saute sur l'intersection suivante sur son segment, sans changer de direction. Si à un moment, deux grenouilles tombent sur la même intersection, elles meurent toutes deux dans d'atroces souffrances. Auguste veut que toutes ses grenouilles arrivent à la deuxième extrémité de leur segment sans mourir. Montrer que c'est toujours possible si n est impair, et jamais si n est pair.

Exercice 6 (RMM 2008, P4 (sur 4 problèmes))

On considère un carré de côté n contenant $(n + 1)^2$ points. Montrer qu'on peut en trouver 3 formant un triangle d'aire au plus $\frac{1}{2}$.

Exercice 7 (RMM 2017, P5)

Soit $n \geq 2$ un entier. Un tamis est une grille $n \times n$ dont n cases ont été retirées, avec exactement une retirée sur chaque ligne et sur chaque colonne. Un bâton est un rectangle $1 \times k$ ou $k \times 1$ de cases, avec k entier strictement positif. Pour un tamis A , soit $m(A)$ le nombre minimal de bâtons nécessaires pour partitionner A . Déterminer les valeurs possibles de $m(A)$.

Exercice 8 (RMM 2020, C3)

On considère une grille $100 * 100$ sur laquelle on place des dames. Quel est le plus petit entier k tel que pour toute disposition d'un certain nombre de dames sur l'échiquier, on peut les colorier en k couleurs afin que deux dames de même couleur ne s'attaquent jamais ?

Solution de l'exercice 1

Il suffit d'essayer sur les petits cas pour comprendre que la réponse sera $\binom{2n}{n}$. Ici, il est très utile d'intuiter cette formule. En effet, $\binom{2n}{n}$ est exactement le nombre de façon de choisir les points de départs et les points d'arrivée des flèches! Si la formule est bonne, cela veut dire que chaque choix des points de départs et d'arrivée donne lieu à une unique façon d'orienter les flèches.

Essayons donc de montrer ça. On considère un choix de n points de départs et n points d'arrivée. On va essayer de construire une orientation des flèches. On remarque que les flèches les moins contraignantes sont celles qui relient un point au point immédiatement à sa gauche. Pour essayer de construire les flèches, on commence donc par placer les flèches de ce type. Il y a au moins un point de chaque type, donc il y a clairement au moins un point d'arrivée tel que le point juste à sa droite est un point de départ, appelons-les A et D (pour arrivée et départ). Si D n'est pas relié à A , il est relié à un point A' . De même, la flèche arrivant à A vient d'un point D' . Les points D, A', D', A sont forcément placés dans cet ordre dans le sens horaire, sinon les deux flèches se croiseraient. La situation contredit alors la troisième condition!

Ainsi, D est forcément relié à A . On remarque que la flèche ainsi créée ne donne aucune contrainte vis-à-vis des trois conditions, on peut donc simplement effacer les deux points et continuer la construction avec les $2n - 2$ points restants. On a ainsi exhibé une construction unique à partir des points de départ et d'arrivée, d'où le résultat voulu.

Solution de l'exercice 2

L'énoncé nous incite à considérer, à la k -ième étape, les nombres plus petits que k et les nombres plus grands que k séparément. En effet, tous les nombres plus petits que k jouent le même rôle et sont donc indiscernables; la seule information importante à ce stade est qu'ils sont plus petits que k . On distingue ainsi les "petits" et les "grands" nombres. Supposons par l'absurde qu'à chaque tour, on échange deux petits nombres ou deux grands nombres.

Colorions en rouge les petits nombres et en bleus les grands nombres. Les remarques précédentes montrent qu'un nombre rouge et un nombre bleu n'échangent jamais leur place. À chaque opération, on colorie un nombre en rouge (après la k -ième opération, k devient un petit nombre) et les couleurs des nombres dans tous les autres trous ne changent pas. On sait de plus que le nombre qui change de couleur est entre deux nombres de même couleur.

On commence au stade où tous les nombres sont bleus et on finit à celui où tous les nombres sont rouges. Ici, on remarque que la parité joue un rôle important : s'il y avait un nombre pair de trous, on pourrait facilement trouver un ordre de coloriage qui conviendrait. On s'intéresse maintenant aux tailles des intervalles entre les trous rouges (c'est-à-dire le nombre de trous bleus entre deux trous rouges consécutifs). Montrons qu'au cours des opérations, il y a toujours un intervalle constitué d'un nombre pair non nul de trous bleus. Après la première opération, il y a un trou rouge et donc un intervalle de 2024 trous bleus.

Considérons maintenant un stade de la partie où on a un intervalle avec un nombre pair de trous bleus. Supposons par l'absurde qu'après l'opération suivante, il n'y a plus d'intervalle de taille paire. Le nombre colorié doit donc forcément être au sein de cet intervalle. Il sépare l'intervalle en deux parties de taille a et b . $a + b + 1$ est pair donc un nombre pair parmi a et b doit être pair. De plus, il ne peut pas être nul, sinon le nombre colorié ne serait pas entre deux nombres de la même couleur.

Ainsi, on a toujours un intervalle constitué d'un nombre pair non nul de trous bleus. Or, il n'y a pas de tel intervalle après les 2025 opérations, ce qui est absurde et conclut.

Solution de l'exercice 3

On commence par une remarque qui s'impose : si plusieurs pièces ont pour somme 1, on peut les regrouper en un tas et donc se ramener au même problème en diminuant de 1 les paramètres. On généralise donc l'énoncé avec $k - \frac{1}{2}$ pièces à répartir en k tas et on peut dès lors supposer que la somme de plusieurs pièces ne fait jamais 1. A fortiori, il y a au plus $n - 1$ pièces de valeur $\frac{1}{n}$. De même on peut regrouper 2 pièces de valeurs $\frac{1}{2n}$ en une pièce de valeur $\frac{1}{n}$, on peut donc supposer qu'il y a au plus une pièce de valeur $\frac{1}{2n}$ pour tout n .

Essayons un algorithme glouton. On veut placer les pièces dans l'ordre décroissant de valeurs dans les tas. Supposons que ce n'est plus possible au bout d'un moment. On veut placer une pièce de valeur $\frac{1}{a}$ mais tous les tas ont une valeur totale strictement supérieure à $1 - \frac{1}{a}$. La somme des valeurs des tas vaut alors au moins $k(1 - \frac{1}{a})$. Cette valeur est inférieure à $k - \frac{1}{2}$ donc $a < 2k$. Ça ne peut pas conclure directement, mais ça nous informe qu'il suffit de placer toutes les pièces de valeur au moins $\frac{1}{2k-1}$. En effet, si c'est fait, on place les autres pièces avec l'algorithme glouton et on sait alors que toutes les pièces peuvent être placées.

Pour placer les grosses pièces, il suffit de bidouiller un peu avec les remarques préliminaires : on met toutes les pièces de valeur $\frac{1}{2i-1}$ et $\frac{1}{2i}$ ensemble, pour tout $1 \leq i \leq k$. En effet, il y a au plus 1 pièce de valeur $\frac{1}{2i}$ et au plus $2i - 2$ de valeur $\frac{1}{2i-1}$, donc la valeur totale de chaque tas vaut au plus

$$\frac{2i-2}{2i-1} + \frac{1}{2i} < \frac{2i-1}{2i-1} + \frac{1}{2i-1} < 1$$

Donc on a gagné!

Solution de l'exercice 4

On remarque que la connexité joue un rôle important dans ce problème. En effet, lorsqu'on dérive un graphe, le nombre de composantes connexes ne peut pas diminuer strictement. Considérons alors un graphe G et soit $C_1, \dots, C_k$ ses composantes connexes. Lorsqu'on dérive deux fois le graphe, on obtient une permutation des composantes connexes (chacune est envoyée sur un graphe isomorphe à une autre des composantes connexes). Appelons σ cette permutation. On sait qu'une itérée de σ est l'identité (il suffit d'itérer un nombre de fois multiple de la taille de tous les cycles composant σ). Ainsi, en dérivant assez de fois, chaque composante connexe est envoyée sur elle-même. On peut alors se ramener à l'étude des graphes connexes pour regarder chaque composante séparément.

Intéressons-nous alors à un graphe connexe C , tel qu'en le dérivant suffisamment de fois on tombe sur un graphe isomorphe à C . Un autre aspect intéressant à considérer maintenant est les triangles. En effet, chaque triangle est conservé en dérivant donc le nombre de triangles est aussi un monovariant! Ainsi, aucun triangle n'est créé lorsqu'on dérive C . On distingue maintenant deux cas.

Supposons que C contient au moins un triangle. Considérons la plus grande clique contenue dans C , et soit $s_1, \dots, s_k$ ses sommets. Si C n'est pas une clique, il existe un autre sommet dans le graphe. Comme C est connexe, il existe même un sommet relié à un des sommets de la clique, SPDG il existe a relié à s_1 . Lorsqu'on dérive C , on crée alors les arêtes $a - s_2, a - s_3, \dots, a - s_k$. Comme $k \geq 3$ (C contient un triangle), on crée le triangle as_2s_3 , ce qui est contradictoire! Ainsi, C est forcément une clique s'il contient un triangle.

Intéressons-nous maintenant au cas où C ne contient pas de triangle. S'il existe un sommet de degré au moins 3, tous ses voisins formeront une clique après dérivation, donc un triangle sera créé. Tous les sommets sont donc de degré au plus 2. Le graphe est alors un cycle ou un chemin. Un chemin se déconnecte en dérivant, donc C est forcément un cycle. De plus, le cycle doit être de taille impaire, sinon C se déconnecte aussi.

Ainsi, chaque composante connexe de G est un cycle de taille impaire ou une clique de taille au moins 3. On vérifie aisément qu'en dérivant une seule fois, G est bien envoyé sur un graphe isomorphe à lui-même, ce qui conclut!

Solution de l'exercice 5

Considérons un cercle qui contient tous les points d'intersections entre les segments, et prolongeons les segments pour que leurs deux extrémités soient des points du cercle.

Intéressons-nous d'abord au cas où n est impair. On veut déterminer si chaque extrémité de segment est un point de départ ou d'arrivée. Pour cela, numérotons les points sur le cercle dans l'ordre $P_1, P_2, \dots, P_{2n}$ et considérons les indices modulo $2n$. Pour tout i , les points P_i et P_{n+i} sont alors les deux extrémités du même segment. On va alors décider arbitrairement que tous les P_i avec i pair sont des points de départ, et tous les P_i avec i impair sont des points d'arrivée. Comme n est impair, les deux extrémités d'un même segment ne sont pas du même type. Montrons alors que les grenouilles arriveront à bon port saines et sauves.

Considérons deux points de départ P_{2a} et P_{2b} . Quitte à changer la numérotation des points et échanger a et b , on peut supposer $2b > 2a$ et $2b < 2a + n$. On veut montrer que les grenouilles placées sur les deux segments correspondants ne s'entre-tueront pas. Soit I le point d'intersection de ces deux segments. Si le segment $S_1 = [P_{2a}I]$ est intersecté par k autres segments et que $S_2 = [P_{2b}I]$ est intersecté par l autres segments, alors les grenouilles correspondantes arriveront en I après k et l secondes. On veut donc simplement $k \neq l$. Or, chaque segment $[P_i P_{i+n}]$, avec $i \in \llbracket 2a+1, 2b-1 \rrbracket$ intersecte exactement un des deux segments. De plus, chaque autre segment intersecte les deux, ou aucun des deux. Or il y a un nombre impair d'entiers dans $\llbracket 2a+1, 2b-1 \rrbracket$, donc il y a au total un nombre impair d'intersections entre un segment parmi S_1 et S_2 et un segment du type $[P_i P_{i+n}]$. Ainsi, $k+l$ est impair, donc $k \neq l$, ce qui conclut.

Intéressons-nous maintenant au cas où n est pair. Considérons deux sommets consécutifs, P_a et P_{a+1} , et supposons que ce sont tous deux des sommets de départ. On considère de même I , l'intersection de $[P_a P_{a+n}]$ et $[P_{a+1} P_{a+n+1}]$. Soit $S_1 = [P_a I]$ et $S_2 = [P_{a+1} I]$. Chaque segment autre que $[P_a P_{a+n}]$ et $[P_{a+1} P_{a+n+1}]$ intersecte soit P_1 et P_2 , soit aucun des deux. Ainsi, S_1 intersecte autant de segments que S_2 . Les grenouilles placées en P_a et P_{a+1} mourront donc toutes deux.

On a ainsi montré que deux sommets consécutifs ne peuvent pas être tous deux des sommets de départ. Comme il y a n sommets de départ et n sommets d'arrivée, on doit alors nécessairement alterner sommets de départ et d'arrivée. Mais alors les deux extrémités de chaque segment sont du même type (car a et de la même parité que $a+n$), ce qui est absurde et conclut.

Solution de l'exercice 6

On a bien évidemment envie de trianguler l'ensemble de points puis appliquer le principe des tiroirs, alors allons-y. Soit c le nombre de points sur l'enveloppe convexe. On peut alors trianguler les points avec $2(n+1)^2 - c - 2$ triangles (ce qui peut être montré avec la formule d'Euler, ou par récurrence). Le carré a une aire de n^2 . Ainsi, si $2(n+1)^2 - c - 2 > 2n^2$, on peut trouver un triangle d'aire au plus $\frac{1}{2}$. On a donc gagné si $c < 4n$.

Intéressons-nous maintenant au cas où $c \geq 4n$. Cette condition nous donne envie de nous intéresser aux points de l'enveloppe convexe eux même. On va considérer les triangles formés par trois points consécutifs sur cette enveloppe convexe. On remarque que le périmètre de l'enveloppe convexe est inférieur au périmètre du carré, donc à $4n$. Ainsi, on peut trouver deux côtés consécutifs de l'enveloppe dont la somme des longueurs est inférieure ou égale à 2. Soit a, b ces deux longueurs. Par IAG, on a alors $ab \leq 1$. Or l'aire du triangle vaut $\frac{ab \sin \alpha}{2}$, avec α l'angle entre les deux côtés. Ainsi, cette aire est inférieure ou égale à $\frac{ab}{2} = \frac{1}{2}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7

Comme toujours, quelques petits cas suffisent à nous convaincre qu'il faut toujours $2n - 2$ bâtons, et que ça suffit. Tout d'abord il est clair que ça suffit : on peut placer deux bâtons par colonnes, un au-dessus et un en-dessous de la case retirée. On place juste un seul bâton sur les colonnes sur lesquelles la case retirée est sur la première ou dernière ligne, ce qui donne bien $2n - 2$ bâtons.

Montrons maintenant que $2n - 2$ bâtons sont toujours nécessaires. On procède par récurrence. Regardons ce qui se passe si l'on efface la ligne et la colonne d'une case retirée. On obtient un tamis de taille $n - 1$. Si un bâton intersecte la ligne ou la colonne retirée, il est coupé en deux puis reformé quand on recolte les morceaux. Si un bâton est intégralement sur la ligne ou la colonne effacée, il est supprimé. S'il y a au moins 2 tels bâtons, on obtient un pavage d'un tamis de taille $n - 1$ avec au moins deux bâtons de moins. Ce pavage contient au moins $2n - 4$ bâtons par hypothèse de récurrence, donc le pavage initial contenait au moins $2n - 2$ bâtons.

Supposons maintenant que sur la ligne ou la colonne de chaque case retirée, il y ait au plus 1 bâton. Chaque bâton vertical est sur la colonne d'une case retirée, chaque bâton horizontal est sur la ligne d'une case retirée, et chaque bâton 1×1 est sur la ligne d'une case retirée, et la colonne d'une autre case retirée. Si le pavage contient au moins $n + 1$ bâtons, par principe des tiroirs il existe une case sur la ligne ou la colonne d'au moins deux bâtons et on peut alors conclure. Si le pavage contient au plus n bâtons, on fait le même processus mais on supprime alors seulement un bâton. On obtient un pavage d'un tamis de taille $n - 1$ avec au plus $n - 1$ bâtons. Ainsi, $n - 1 \geq 2n - 4$ donc $n \leq 3$. Il suffit de traiter ces cas à la main pour conclure.

de la couleur 3 ou 4. De même, E attaque A_4 et A_5 donc est de la couleur 3 ou 4 et F attaque A_7 et A_{10} donc est de la couleur 3 ou 4. Or, D, E, F s'attaquent mutuellement donc sont de couleurs différentes, ce qui est contradictoire.

Ainsi, il faut et il suffit de 5 couleurs pour colorier les dames.

6 Arithmétique : Problèmes de suites (Théo)

L'objectif de la séance était de regarder des problèmes de suites d'entiers, en particulier des problèmes où apparaissent des problèmes de taille (des quantités croissent, décroissent, varient). L'objectif est de comprendre assez précisément des propriétés fines de ces suites pour réussir l'exercice. Quelques idées un peu clé :

- L'idéal quand on a une suite d'entiers positifs est quelle soit décroissante. Comme ça, la suite stationne, et on peut donc en déduire beaucoup de choses.
- Ceci dit, quand une suite $(d_n)_{n \geq 1}$ vérifie $d_{n+1} - d_n \leq K$, alors si on considère K entiers consécutifs, elle prend forcément à un moment une de ces valeurs ou est bornée. Ceci peut être très utile.
- Certaines suites itératives peuvent se calculer explicitement (les suites arithmético-géométrique par exemple), et utiliser des arguments d'ordre.
- Parfois, on est intéressé par le comportement asymptotique de la suite : par exemple croît-elle linéairement ? Géométriquement ?
- Dans ce Td on veut comprendre les variations d'une suite. Mais parfois la suite peut augmenter puis diminuer, etc. Dans ce cas, il faut se demander à quelle suite extraite je peux m'intéresser : par exemple pour une suite $(a_n)_{n \geq 1}$, on peut donner n_k les indices tels que $a_{n_k} \geq a_{n_k+1}$ (ou $>$, ou $<$, ou $\leq$) et regarder la suite $(a_{n_k})_{k \geq 1}$.
- Parfois la suite étudiée $(a_n)_{n \geq 1}$ n'est pas propice à l'étude de ses variations. Dans ce cas là, on peut étudier $V_p(a_n)$, ou $n/p^{V_p(a_n)}$. Ou éventuellement écrire $a_n + C = p^{a_n} \times b_n$ avec b_n premier avec p , en prenant un C astucieusement choisi, et regarder comment a_n et b_n évoluent.
- Essayer de comprendre la suite modulo k pour tout entier k .
- Faire des tests, essaie de calculer/construire des suites vérifiant l'énoncé, faire des conjectures.

Exercice 1

Soit $(p_k)_{k \geq 0}$ une suite de nombres premiers telle que p_{k+2} est le plus grand diviseur de $p_{k+1} + p_k + 2018$ pour tout $k \geq 0$. Montrer que la suite (p_k) prend un nombre fini de valeurs

Exercice 2

Soit a_0 un entier strictement positif. On définit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ telle que pour tout $n \geq 0$, a_{n+1} est le plus petit entier strictement positif tel que $a_{n+1} + a_n + \dots + a_0$ est un multiple de $n + 1$. Montrer que la suite stationne.

Exercice 3

On définit la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ par $a_0 = 2$, et pour tout $n \geq 1$, $a_n = a_{n-1} + l(a_n)$ où $l(k)$ est le plus grand facteur premier divisant k . Déterminer tous les carrés qui sont des termes de la suite (a_n) .

Exercice 4

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers prenant une infinité de valeurs positives, et une infinité de valeurs négatives. On suppose que pour tout $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n$ ont tous des valeurs distinctes modulo n . Montrer que tout entier apparaît exactement une fois dans la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'entiers strictement positifs définies par $a_{n+1} = \text{PGCD}(a_n, b_n) + 1$ et $b_{n+1} = \text{PPCM}(a_n, b_n) - 1$. Démontrer que la suite (a_n) est ultimement périodique.

Exercice 6

Soit p un nombre premier impair, on définit $d_p(n)$ le reste de la division euclidienne de n par p . On dit qu'une suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est une p -suite si pour tout $n \geq 0$, $a_{n+1} = a_n + d_p(a_n)$.

- Existe-t-il une infinité de nombres p premiers pour lesquels il existe deux p -suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n > b_n$ pour une infinité de n , et $a_n < b_n$ pour une infinité de n ?
- Existe-t-il une infinité de nombres p premiers pour lesquels il existe deux p -suites (a_n) et (b_n) telles que $a_0 < b_0$ mais $a_n > b_n$ pour tout $n \geq 1$?

Exercice 7

Soit $m > 0$, La suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est définie de la façon suivante : a_1 est un entier strictement positif, et pour tout $n \geq 1$, si $a_n < 2^m$, on pose $a_{n+1} = a_n^2 + 2^m$, sinon $a_{n+1} = a_n/2$. Déterminer en fonction de m toutes les valeurs de a_1 telle que la suite est à valeur entière.

Exercice 8

Pour deux rationnels r et s , on dit que r divise s s'il existe un entier k tel que $s = kr$. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs et premiers entre eux, et $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers naturels distincts. Supposons que pour tout $n \geq 1$ que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ divise $\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n = b_n$.

Exercice 9

Soit $a_1, \dots, a_n$ n entiers strictement positifs distincts, avec $n \geq 3$. Montrer qu'il existe des entiers distincts i, j tels que $a_i + a_j$ ne divise aucun nombre parmi $3a_1, \dots, 3a_n$.

Exercice 10

On définit une suite par $u_0 = M + \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n \lfloor u_n \rfloor$. Déterminer tous les entiers $M \geq 1$ pour lesquels la suite prend une valeur entière.

Exercice 11

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que pour k assez grand, $\frac{a_0}{a_1} + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_0}$ soit entier. Montrer que la suite est stationnaire.

Exercice 12

Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et $(q_n)_{n \geq 0}$ une suite de rationnels vérifiant $q_n = P(q_{n+1})$ pour tout $n \geq 0$. Démontrer que la suite (q_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 13

Pour tout entier $k \geq 1$, on note $p(k)$ le plus petit nombre premier ne divisant pas k . Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $a_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geq 0$, a_{n+1} est le plus petit entier strictement positif différent de $a_0, \dots, a_n$ tel que $a_n^{a_{n+1}} - 1$ est divisible par $p(a_n)$. Démontrer que tout entier strictement positif apparaît une unique fois dans la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Solution de l'exercice 1

On souhaite montrer que la suite est majorée, puisque c'est équivalent au fait qu'elle prenne un nombre fini de valeurs : on aimerait donc avoir des inégalités sur p_{k+2} en fonction de p_{k+1} et p_k .

Si parmi p_{k+1}, p_k , un des nombres vaut 2, alors $p_{k+2} \leq p_{k+1} + p_k + 2018 \leq \max(p_{k+1}, p_k) + 2020$.

Si par contre ni p_{k+1} ni p_k ne vaut 2, alors p_{k+1} et p_k sont impairs, donc $p_{k+1} + p_k + 2018$ est pair. On sait ainsi que p_{k+2} est le plus grand diviseur premier de $\frac{p_{k+1} + p_k + 2018}{2}$, donc vaut au plus $\max(p_{k+1}, p_k) + 1009$.

Ainsi dans tous les cas $p_{k+2} \leq \max(p_{k+1}, p_k) + 2020$. Posons $a_k = \max(p_0, \dots, p_k)$ pour tout $k \geq 0$. L'équation précédente nous donne que $a_{k+2} \leq a_{k+1} + 2020$. En effet, si $p_{k+2} = a_{k+2}$, l'inégalité est claire, et si $p_{k+2} < a_{k+2}$, alors $a_{k+2} = a_{k+1}$ et donc l'inégalité est aussi claire.

Ainsi la suite $(a_k)_{k \geq 0}$ est une suite croissante de nombres premiers, ne faisant jamais un saut de plus de 2020. Or en prenant $N > 2022$ et $N > p_0$, les nombres de $N! + 2$ à $N! + 2021$ ne sont pas premiers (car $N! + j$ est divisible par j mais différent de j si $2 \leq j \leq 2021$). On peut alors montrer par récurrence que $a_k < N! + 2$: en effet, $a_0 = p_0 \leq N < N! + 2$, et si pour un entier k on a $a_k < N! + 2$, alors $a_{k+1} < N! + 2022$, et comme a_{k+1} est premier, on ne peut pas avoir $N! + 2 \leq a_{k+1} \leq N! + 2021$. On a donc $a_{k+1} < N! + 2$, ce qui conclut la récurrence.

En particulier, la suite (a_k) est majorée, et comme pour tout entier k , $a_k \geq p_k$, la suite (p_k) est majorée, donc prend un nombre fini de valeurs.

Solution de l'exercice 2

Pour tout $n \geq 1$, on note k_n l'entier strictement positif tel que $a_0 + \dots + a_n = k_n \times n$. Notons alors que $a_{n+1} \leq k_n$, car $a_0 + \dots + a_n + k_n = k_n \times (n+1)$ qui est divisible par $n+1$. Ainsi $k_{n+1} \times (n+1) = a_0 + \dots + a_{n+1} \leq k_n \times (n+1)$, donc $k_{n+1} \leq k_n$ pour tout $n \geq 1$. Ainsi la suite (k_n) est une suite d'entier positifs décroissante, elle est donc stationnaire.

Il existe donc deux entiers k, N tels que si $n \geq N$, $k_n = k$. En particulier si $n \geq N+1$, $a_{n+1} = k_{n+1} \times (n+1) - k_n \times n = k(n+1) - kn = k$, donc la suite (a_n) stationne.

Solution de l'exercice 3

On calcule les valeurs au fur et à mesure : 2, 4, 6, 9, 12, 15, 20, 25, 30, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77 etc. Notons $(p_n)_{n \geq 0}$ la suite des nombres premiers par ordre croissant. On constate que les seuls carrés sont les nombres de la forme p^2 , et que la suite peut être découpée en période où elle passe de $p_k p_{k+1}$ à $p_{k+1} p_{k+2}$ en augmentant de p_{k+1} à chaque fois.

Si à un moment la suite prend la valeur $p_k p_{k+1}$ (pour un k quelconque) au rang N , alors on montre par récurrence que $a_{N+a} = (p_k + a)p_{k+1}$ tant que $p_k + a$ n'est pas divisible par un facteur premier strictement plus grand que p_{k+1} . En particulier ceci est vrai pour a dans $\{0, \dots, p_{k+2} - p_k\}$. Ainsi par récurrence, comme $a_2 = p_0 p_1$, la suite peut être découper en période où elle passe de $p_k p_{k+1}$ à $p_{k+1} p_{k+2}$ en augmentant de p_{k+1} à chaque fois.

Maintenant essayons de répondre au problème. Parmi a_0, a_1, a_2 , le seul carré est 4. Parmi chaque séquence où la suite va de $p_k p_{k+1}$ à $p_{k+1} p_{k+2}$, comme la suite prend toutes les valeurs de la forme $(p_k + a)p_{k+1}$ avec $0 \leq a \leq p_{k+2} - p_k$, la suite prend la valeur p_{k+1}^2 (pour $a = p_{k+1} - p_k$). S'il existait un autre a tel que $0 \leq a \leq p_{k+2} - p_k$ et $(p_k + a)p_{k+1}$ est un carré parfait, alors on aurait que p_{k+1} divise $p_k + a$, donc $p_k + a \geq 2p_{k+1}$ (sinon on retombe sur le même carré). Or $p_k + a \leq p_{k+2} < 2p_{k+1}$ par le postulat de Bertrand, ce qui est une contradiction. Ainsi sur

chacune des périodes où la suite passe de $p_k p_{k+1}$ à $p_{k+1} p_{k+2}$, la suite prend pour valeur un seul carré : p_{k+1}^2 .

Ainsi de tout ceci on conclut que les carrés qui sont des termes de la suite sont exactement des carrés de nombre premiers.

Solution de l'exercice 4

On essaie de construire itérativement une suite vérifiant l'énoncé, pour voir quelles propriétés celle-ci doit avoir. Une fois a_1 fixé, on remarque que $|a_2 - a_1| = 1$. En effet, si p premier divise $|a_2 - a_1|$, alors l'hypothèse n'est pas vraie au rang p . Essayons de regarder les valeurs que peut prendre a_3 . Posons m le minimum de a_2 et a_1 , par l'observation précédente, $\{a_1, a_2\} = \{m, m+1\}$. Notons que si $a_3 = m+k$ avec $k \geq 3$, alors l'hypothèse n'est plus vraie au rang k puisque a_3 donne le même reste que a_1 ou a_2 . Si $a_3 = m-k$ avec $k \geq 2$, alors l'hypothèse de l'énoncé n'est plus vraie au rang $k+1$ car $a_3 \equiv m+1 \pmod{k+1}$. Si $a_3 = m$ ou $m+1$, alors l'hypothèse de l'énoncé n'est plus vérifiée au rang 3. Ainsi $a_3 = m+2$ ou $m-1$.

Il semble émerger la propriété suivante : pour tout $n \geq 1$, il existe α_n, β_n tels que $\{a_1, \dots, a_n\} = \{\alpha_n, \alpha_n+1, \dots, \beta_n\}$, avec $\beta_n - \alpha_n = n-1$. Prouvons là par récurrence. Pour $n=1$, la propriété est claire. Supposons la propriété vraie au rang n , montrons là au rang $n+1$. On se donne α_n, β_n tels que $\{a_1, \dots, a_n\} = \{\alpha_n, \alpha_n+1, \dots, \beta_n\}$. Notons que :

- Si $a_{n+1} \in \{\alpha_n, \alpha_n+1, \dots, \beta_n\}$, alors l'hypothèse de l'énoncé est fausse au rang $n+1$.
- Si $a_{n+1} = \beta_n + p$ avec $p \geq 2$, alors $a_{n+1} \equiv \alpha_n + p + (n-1) \equiv \alpha_n \pmod{p+n-1}$. Comme $p+n-1 \geq n+1$, l'hypothèse de l'énoncé n'est pas vérifiée au rang $p+n-1$.
- Si $a_{n+1} = \alpha_n - p$ avec $p \geq 2$, alors $a_{n+1} \equiv \beta_n - p - (n-1) \equiv \beta_n \pmod{p+n-1}$. Comme $p+n-1 \geq n+1$, l'hypothèse de l'énoncé n'est pas vérifiée au rang $p+n-1$.

Ainsi $a_{n+1} = \beta_n + 1$ ou $\alpha_n - 1$. Poser $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ et $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$ dans le premier cas, et $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 1$ et $\beta_{n+1} = \beta_n$ donne le résultat : on a facilement $\{a_1, \dots, a_{n+1}\} = \{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1}+1, \dots, \beta_{n+1}\}$ et $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \beta_n - \alpha_n + 1 = n$.

Ceci conclut la récurrence. Ainsi il existe deux suites $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ et $(\beta_n)_{n \geq 0}$ telles que pour tout n , $\{a_1, \dots, a_n\} = \{\alpha_n, \alpha_n+1, \dots, \beta_n\}$ et $\beta_n - \alpha_n = n-1$. Ceci montre que pour tout n , l'ensemble $\{a_1, \dots, a_n\}$ a n valeurs distinctes. En particulier, la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ ne prend que des valeurs distinctes : chaque entier apparaît au plus une fois dans la suite.

De plus, comme $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$, on en déduit que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ est décroissante, et la suite $(\beta_n)_{n \geq 0}$ croissante. Ainsi la suite $(\beta_n)_{n \geq 0}$ est soit convergente et donc stationnaire, soit tend vers $+\infty$. Si la suite stationne à une certaine valeur b , alors on a $\beta_n \leq b$ pour tout n , donc $a_k \leq b$ pour tout k . Comme la suite ne prend chaque valeur au plus une fois, la suite prend au plus $b+1$ valeurs positives, ce qui contredit l'énoncé. Ainsi la suite $(\beta_n)_{n \geq 0}$ tend vers $+\infty$. De même on montre que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ tend vers $-\infty$.

En particulier si on fixe k un entier, on a $\alpha_n \leq k \leq \beta_n$ pour n assez grand, donc $k \in \{a_1, \dots, a_n\}$, donc k est un terme de la suite. Ainsi la suite tout entier apparaît une unique fois dans la suite.

Solution de l'exercice 5

Notons déjà que $a_{n+1} \leq a_n + 1$, avec égalité si et seulement si a_n divise b_n . En testant des petits cas, on voit que la suite a_n tend à avoir des phases de montées puis de descente. Essayons de formaliser cela : on dit que n est une descente si $a_{n+1} \leq a_n$ (ou de manière équivalente a_n ne divise pas b_n). Notons que pour tout k , il existe $n \geq k$ tel que n soit une descente : en effet, si

pour un k cela s'avérerait faux, on aurait pour tout $n \geq k$, a_n divise b_n , donc $a_{n+1} = a_n + 1$ et $b_{n+1} = b_n - 1$. En particulier, $b_{k+b_k} = b_k - b_k = 0$ ce qui est absurde.

On remarque sur plusieurs exemples que les a_n lorsque n est une descente décroissent : essayons de le prouver. Pour cela, notons $(n_k)_{k \geq 0}$ la suite des descentes, ordonnée de manière croissante. On va montrer que $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$.

Comme n_k est une descente, on sait que a_n ne divise pas b_n . Posons $d = \text{PGCD}(a_n, b_n)$, et $a_n = du$ et $b_n = dv$ avec u et v premiers entre eux et $u > 1$. On a alors $a_{n_{k+1}} = d + 1$ et $b_{n_{k+1}} = duv - 1$. Notons $a = n_{k+1} - n_k$, on a alors par récurrence immédiate $a_{n_k+a} = d + a$ et $b_{n_k+a} = duv - a$ pour tout a vérifiant $1 \leq a \leq n_{k+1} - n_k$, car les termes de la suite (a_n) augmente de 1 entre chaque descente. Supposons par l'absurde que $a_{n_{k+1}} > a_{n_k} = du$. On a alors $n_{k+1} - n_k > d(u - 1)$, donc pour $a = d(u - 1)$, $a_{n_k+d(u-1)} = d + d(u - 1) = du$, et $b_{n_k+d(u-1)} = duv - du + d = du(v - 1) + d$. En particulier $a_{n_k+d(u-1)} = du$ ne divise pas $du(v - 1) + d = b_{n_k+d(u-1)}$, donc $n_k + d(u - 1)$ est une descente, et est strictement inférieur à n_{k+1} , ce qui est absurde.

Ainsi on a $a_{n_{k+1}} \leq a_{n_k}$ pour tout entier positif k , donc la suite $(a_{n_k})_{k \geq 0}$ est bornée par un certain entier strictement positif M (car elle est décroissante et positive). En particulier, pour tout entier positif m , en notant n_k la première descente telle que $n_k \geq m$, on a $a_m \leq a_{n_k} \leq M$. La suite (a_n) est donc bornée!

Il reste à montrer que la suite est ultimement périodique. Si la suite (b_n) était elle aussi bornée, ce serait facile : en effet, le couple (a_n, b_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et comme (a_n, b_n) détermine (a_{n+1}, b_{n+1}) , dès que la suite prend deux valeurs identiques, elle boucle donc est ultimement périodique. Sauf qu'ici, à chaque montée on peut montrer que $a_n + b_n$ augmente. La suite (a_n) étant bornée, (b_n) ne le sera pas. Néanmoins, vu la relation de récurrence utilisée, seul le reste de (b_n) modulo $M!$ semble utile pour calculer a_n .

Posons alors b'_n le reste dans $\{1, \dots, M!\}$ de b_n modulo $M!$ pour tout $n \geq 0$. On a alors que $a_{n+1} = \text{PGCD}(a_n, b_n) + 1 = \text{PGCD}(a_n, b'_n) + 1$ car a_n divise $M!$. On a également l'égalité suivante :

$$b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{\text{PGCD}(a_n, b_n)} - 1 = \frac{a_n}{\text{PGCD}(a_n, b'_n)} b'_n + 1$$

En passant l'égalité précédente mod $M!$, $b'_{n+1} \equiv \frac{a_n}{\text{PGCD}(a_n, b'_n)} b'_n + 1 \equiv \text{PPCM}(a_n, b'_n) + 1 \pmod{M!}$. Ainsi (a_{n+1}, b'_{n+1}) ne dépend que de (a_n, b'_n) , et comme (a_n, b'_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, (a_n, b'_n) est ultimement périodique, donc (a_n) aussi.

Solution de l'exercice 6

Déjà essayons de comprendre le comportement d'une p -suite. Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une p -suite, notons que $a_{n+1} \equiv 2a_n \pmod{p}$. En particulier, par récurrence immédiate, $a_n \equiv 2^n a_0 \pmod{p}$. Notons ω l'ordre de 2 modulo p , on en déduit que $a_{n+\omega} = a_n + \sum_{j=0}^{\omega-1} d_p(2^j a_0)$. En effet, les nombres de la forme $a_n, \dots, a_{n+\omega-1}$ (donc $2^n a_0, \dots, 2^{n+\omega-1} a_0$) sont égaux à permutations près à $2^0 a_0, \dots, 2^{\omega-1} a_0$ par propriété de l'ordre. Posons $S(a_0) := \sum_{j=0}^{\omega-1} d_p(2^j a_0)$.

En particulier si on prend $(b_n)_{n \geq 0}$ une autre p -suite, on aura $b_{n+\omega} = b_n + S(b_0)$. Notons que $a_{r+k\omega} - b_{r+k\omega} = a_r - b_r + k(S(a_0) - S(b_0))$. Ainsi si par exemple $S(a_0) > S(b_0)$, pour tout r entre 0 et $\omega - 1$, pour k assez grand, $a_{r+k\omega} - b_{r+k\omega} > 0$, donc pour n assez grand $a_n > b_n$.

Ceci semble être une bonne piste pour la seconde partie de la question. Essayons de montrer que pour une infinité de premiers p , il existe $a_0 \neq b_0$ tels que $S(a_0) \neq S(b_0)$. Pour cela prenons $p > 2$ quelconque, et supposons que quelque soit x , $S(x) = S(1)$. Notons que $S(1) + \dots + S(p-1) = \omega(1 + \dots + p-1)$ car l'application qui à x associe $2^k x$ est une bijection des éléments non nuls modulo p . Ainsi, on a que $\omega \frac{(p-1)p}{2} = (p-1)S(1)$, donc $p\omega = 2S(1)$. En particulier ω est pair.

Par contraposée, si on prend p un diviseur d'un nombre de la forme $2^q - 1$ pour q premier impair, on a $\omega = q$ qui est impair, donc il existe x, y deux entiers strictement positifs tels que $S(x) \neq S(y)$. Par symétrie on suppose $S(x) > S(y)$, et on prend $(c_n)_{n \geq 1}$ la p -suite avec $c_0 = x$, et $(d_n)_{n \geq 1}$ la p -suite avec $d_0 = y + xp > x$. Comme $S(c_0) > S(d_0)$, pour n assez grand $c_n > d_n$. Notons $N \geq 0$ le plus grand entier tel que $c_N \leq d_N$ (qui existe car $c_0 \leq d_0$). Notons que $c_N = d_N$ est impossible, sinon on aurait $c_{N+1} = d_{N+1}$ ce qui est absurde. Ainsi $c_N < d_N$, et $c_k > d_k$ si $k > N$. Prendre $a_n = c_{N+n}$ et $b_n = d_{N+n}$ pour tout $n \geq 0$ donne deux p -suites, et montre que la réponse à la seconde partie de la question est oui pour ce nombre p . Par Zsigmondy, pour chaque q premier impair, on a un facteur p primitif divisant $2^q - 1$, donc on a une infinité de facteurs premiers pour lesquels cela est vrai.

Pour la première partie de la question, on cherche deux p suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ qui vérifient en particulier $S(a_0) = S(b_0)$, sinon on aurait $a_n < b_n$ pour n grand, ou l'inverse. Idéalement, on souhaiterait avoir $a_0 > b_0$ et $a_1 < b_1$: en effet, on aurait alors $a_{k\omega} = a_0 + kS(a_0) > b_0 + kS(b_0) = b_{k\omega}$ et $a_{k\omega+1} = a_1 + kS(a_0) < b_1 + kS(b_0) = b_{k\omega+1}$ pour tout $k \geq 1$, ce qui donnerait deux p -suites vérifiant la première condition de l'énoncé.

Une possibilité est de poser $a_0 = p+1$ et $b_0 = p-1$ pour avoir $a_0 > b_0$, ce qui donnerait $a_1 = p+2 < 2p-2 = b_1$ pour $p > 4$. Il reste alors à vérifier si on peut avoir $S(p+1) = S(p-1)$ pour une infinité de p , soit $S(1) = S(p-1)$.

Or si -1 est une puissance de 2 modulo p , disons 2^k , l'ensemble $\{2^0, \dots, 2^{\omega-1}\}$ et l'ensemble $\{(p-1)2^0, \dots, (p-1)2^{\omega-1}\}$ sont égaux modulo p car $\{(p-1)2^0, \dots, (p-1)2^{\omega-1}\} = \{2^k, \dots, 2^{k+\omega-1}\} = \{2^0, \dots, 2^{\omega-1}\}$ par définition de l'ordre. Il suffit donc de prendre $p > 4$ un facteur d'un nombre de la forme $2^q + 1$ avec q premier : dans ce cas $2^q \equiv -1 \pmod{p}$. Le théorème de Zsigmondy nous donne encore une fois l'infinité des nombres premiers p pour lequel cela est vérifié.

Ainsi dans les deux cas, on a bel et bien une infinité de nombres p qui conviennent, donc la réponse est oui aux deux questions.

Solution de l'exercice 7

Supposons la suite à valeurs entières. Déjà notons que si $a_n < 2^m$, alors $a_{n+1} > 2^m$, et la suite ne peut rester indéfiniment dans le cas $a_n \geq 2^m$ car à chaque fois elle est divisée par 2. Ainsi, il existe une infinité de n tel que $a_n < 2^m$.

Regardons comment la partie impaire de a_n évolue. Déjà si $a_{n+1} = a_n/2$, celle-ci ne change pas. Sinon, posons $a_n = \alpha 2^k$ avec α impair, on a que $a_{n+1} = \alpha^2 2^{2k} + 2^m$. Si $2k > m$, la partie impaire devient $\alpha^2 2^{2k-m} + 1 > \alpha$. Si $2k < m$, la partie impaire devient $\alpha^2 + 2^{m-2k} > \alpha$. Si $2k = m$, on a $a_{n+1} = 2^m(\alpha^2 + 1)$. Or comme α est impair, $\alpha^2 + 1$ vaut 2 modulo 4, donc la partie impaire de a_{n+1} vaut $\frac{\alpha^2+1}{2} \geq \alpha$ par IAG, avec égalité si et seulement si $\alpha = 1$.

En particulier, la partie impaire soit reste constante égale à 1, soit à un moment vaut strictement plus que 1 à un moment, et donc croît strictement une infinité de fois. Or une infinité de fois $a_n < 2^m$, donc la partie impaire de a_n est bornée, ce qui est absurde. Ainsi la partie impaire vaut toujours 1, et dans le cas $a_n < 2^m$, on a que $a_n = 2^k$ et $2k = m$ d'après la disjonction

de cas précédente. En particulier, fixons nous un tel n , on a ensuite $a_{n+1} = 2^{2k} + 2^m = 2^{m+1}$, donc $a_{n+2} = 2^m$ et $a_{n+3} = 2^{m-1} < 2^m$. On en déduit alors que $2(m-1) = m$, donc $m = 2$.

Ainsi la seule possibilité est d'avoir $m = 2$, et a_1 est une puissance de 2. Réciproquement, si $a_1 > 1$, alors tant que $a_i \geq 4$, on divise par 2, jusqu'à aboutir à un terme valant 2. Le terme suivant vaut $2^2 + 4 = 8$, puis 4 puis 2, et tout boucle. Si $a_1 = 1$, alors $a_2 = 5$ et $a_3 = 5/2$ donc a_1 ne convient pas. Ainsi si $m \neq 2$ il n'y a pas de solution, sinon les a_1 vérifiant l'énoncé sont les puissances de 2 différentes de 1.

Solution de l'exercice 8

Pour tout $n \geq 1$, posons k_n tel que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i} = k_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$. Posons pour tout $n \geq 1$, $S_n^{(a)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ et $S_n^{(b)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}$. On a

$$k_{n+1} S_{n+1}^{(a)} = S_{n+1}^{(b)} = S_n^{(b)} + \frac{1}{b_{n+1}} = k_n S_n^{(a)} + \frac{1}{b_{n+1}}$$

Donc

$$\frac{1}{b_{n+1}} = (k_{n+1} - k_n) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} + \frac{k_{n+1}}{a_{n+1}}.$$

Si $k_{n+1} > k_n$, on a $\frac{1}{b_{n+1}} \geq \frac{1}{a_1}$. Ainsi $b_{n+1} \leq a_1$, donc comme la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ prend des valeurs distinctes, ceci est possible uniquement pour un nombre fini de n . En particulier, pour n assez grand, $k_n \geq k_{n+1}$, donc la suite $(k_n)_{n \geq 1}$ décroît à partir d'un certain rang. C'est une suite d'entiers strictement positifs décroissante à partir d'un certain rang, donc elle stationne : il existe $k > 0$ tel que pour tout $n \geq k$, $k_n = k$. L'équation précédente donne $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{k}{a_{n+1}}$, donc $b_{n+1} = a_{n+1}/k$ pour tout n assez grand. Comme les a_n sont deux à deux premiers entre eux, et divisibles par k pour n assez grand, on obtient $k = 1$, donc $k_n = 1$ pour n grand.

De plus, si $k_{n+1} = 1$, l'équation précédente devient $\frac{1}{b_{n+1}} = (1 - k_n) \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} + \frac{1}{a_{n+1}}$. Si $k_n \geq 2$, alors le terme de droite vaut au plus $\frac{-1}{a_1} + \frac{1}{a_{n+1}} < 0$, donc est négatif ce qui est absurde. Ainsi par récurrence descendante, tous les k_n valent 1, donc d'après le raisonnement précédent, on a pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = b_{n+1}$. Or $\frac{1}{a_1} k_1 = \frac{1}{b_1}$, donc on a aussi $b_1 = a_2$, ce qui conclut. Ainsi $a_n = b_n$ pour tout $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 9

Quitte à renommer les a_i , supposons $a_1 < \dots < a_n$. Supposons que pour tout $i \neq j$, $a_i + a_j$ divise un nombre parmi $3a_1, \dots, 3a_n$. Pour $j = n$, on obtient que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe $m(i)$ tel que $a_i + a_n$ divise $3a_{m(i)}$. En particulier, comme $3a_{m(i)} < 3(a_i + a_n)$, on a soit $a_i + a_n = 3a_{m(i)}$, soit $2(a_i + a_n) = 3a_{m(i)}$.

Si $a_i > \frac{a_n}{2}$, alors comme $a_i + a_n > \frac{3}{2}a_n$, on ne peut pas avoir $2(a_i + a_n) = 3a_{m(i)}$ car le terme de gauche vaut strictement plus que $3a_n$. Ainsi on a $a_i + a_n = 3a_{m(i)}$, donc $a_{m(i)} > \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}a_n = \frac{1}{2}a_n$. De plus, $m(i)$ ne vaut pas n car l'égalité serait absurde. Ainsi la suite définie par $u_0 = a_i$, et $u_{k+1} = \frac{u_k + a_n}{3}$ est une suite de a_j strictement entre a_n et $\frac{a_n}{2}$. Celle-ci est une suite arithmético géométrique de raison $1/3$, donc est de la forme $u_k = 3^{-k}a + b$ avec b la solution de $b = \frac{b + a_n}{3}$. Comme cette suite ne peut pas prendre une infinité de valeur, $a = 0$, donc $u_k = b$ pour tout k , et $k = \frac{a_n}{2}$ en résolvant l'équation, ce qui est absurde. Ainsi aucun terme de la suite a_j n'est dans $]\frac{a_n}{2}, a_n[$.

En particulier, si un $i \neq n$ est tel que $2(a_i + a_n) = 3a_{m(i)}$, alors $a_{m(i)} \geq \frac{2}{3}a_n$, donc $m(i) = n$. Dans ce cas, on obtient $a_i = \frac{a_n}{2}$. Ainsi si $a_i \neq \frac{a_n}{2}$, on a $a_i + a_n = 3a_{m(i)}$. Ainsi la suite définie par $u_0 = a_i$, et $u_{k+1} = \frac{u_k + a_n}{3}$ est une suite de a_j strictement inférieurs à $\frac{a_n}{2}$. Celle-ci est une suite arithmético géométrique de raison $1/3$, donc est de la forme $u_k = 3^{-k}a + b$ avec b la solution de $b = \frac{b+a_n}{3}$. Comme cette suite ne peut pas prendre une infinité de valeur, $a = 0$, donc $u_k = b$ pour tout k , et $k = \frac{a_n}{2}$ en résolvant l'équation, ce qui est absurde. Ainsi aucun terme de la suite a_j n'est dans $]0, \frac{a_n}{2}[$.

On obtient alors que tous les a_i (sauf a_n) valent $a_n/2$, ce qui contredit le fait que $k \geq 3$, puisque cela impose deux a_i égaux. Ainsi on a obtenu une absurdité, donc il existe bien $i \neq j$ tel que $a_i + a_j$ ne divise aucun des nombres de la forme $3a_k$ pour $1 \leq k \leq n$.

Solution de l'exercice 10

Essayons de regarder à quelle condition u_1 est entier, puis si u_1 est non entier, à quelle condition u_2 est entier pour comprendre ce qui se passe. On a $u_1 = (M + \frac{1}{2})M$ qui est un entier si et seulement si M est pair.

Si M est impair, posons $M = 2k + 1$, on a $u_1 = M^2 + k + \frac{1}{2}$. On a alors $u_2 = (M^2 + k)(M^2 + k + \frac{1}{2})$ qui est entier si et seulement si $M^2 + k$ est pair. Or $M^2 + k = 4k^2 + 5k + 1$, donc si et seulement si k est impair. Ainsi si M est congru à 3 modulo 4, u_2 est entier, sinon u_2 ne l'est pas.

Il semble qu'à chaque fois le cas problématique soit $M \equiv 1 \pmod{2^k}$. En se rappelant pleins d'exos fonctionnant similairement (P2 Test français novembre 2020, BMO 2021 etc), on pose pour $M > 1$, $M = 1 + 2^k \alpha$ avec α impair. Notons que si un entier x est de la forme $1 + 2^\ell \beta$ avec β impair et $\ell \geq 1$, on a :

$$(x + \frac{1}{2}) \lfloor (x + \frac{1}{2}) \rfloor = (1 + 2^\ell \beta)^2 + \frac{1}{2}(1 + 2^\ell \beta) = \frac{1}{2} + 1 + 2^{\ell-1}(\beta + 4\beta + 2^{\ell+1}\beta^2)$$

en posant $\beta' = \beta + 4\beta + 2^{\ell+1}\beta^2$ qui est impair, on a $(x + \frac{1}{2}) \lfloor (x + \frac{1}{2}) \rfloor = \frac{1}{2} + 1 + 2^{\ell-1}\beta'$.

Ainsi comme $u_0 = \frac{1}{2} + 1 + 2^k \alpha$, l'observation précédente montre par récurrence immédiate que pour tout $n \leq k$, il existe un entier α_n impair que $u_k = \frac{1}{2} + 1 + 2^{k-n} \alpha_n$. Pour $k = n$, on obtient que $u_n = \frac{1}{2} + 1 + \alpha_n$, donc $u_{n+1} = (1 + \alpha_n)(\frac{1}{2} + 1 + \alpha_n)$ est entier car $1 + \alpha_n$ est pair. Ainsi si $M > 1$ la suite prend une valeur entière.

Si $M = 1$, on a $u_0 = \frac{3}{2}$, et en calculant $u_1 = \frac{3}{2}$. Par récurrence immédiate pour tout entier $n \geq 0$, $u_n = \frac{3}{2}$ donc la suite ne prend jamais de valeurs entières.

Ainsi la suite prend une valeur entière si et seulement si $M \neq 1$.

Solution de l'exercice 11

Posons pour tout $k \geq 0$ $S_k = \frac{a_0}{a_1} + \dots + \frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_0}$. Il existe un entier positif M tel que pour $k \geq M$, S_k est entier. Ainsi pour $k \geq M$ assez grand, $S_{k+1} - S_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_0} - \frac{a_k}{a_0}$ est entière, donc $\frac{a_k a_0 + a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}}{a_0 a_{k+1}}$ est entier. Ainsi $a_0 a_{k+1}$ divise $a_k a_0 + a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}$.

Regardons ce que cela implique :

- Si un nombre premier p divise a_{k+1} , il divise $a_0 a_{k+1}$ et $a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}$, donc p divise $a_k a_0$. Ainsi tout facteur premier de a_{k+1} divise a_0 ou a_k . De ceci, on tire par récurrence immédiate que pour tout $\ell \geq M$, les facteurs premiers de a_ℓ divisent a_M ou a_0 . Notons $p_1, \dots, p_j$ les facteurs premiers divisant a_M ou a_0 .
- (i) Si $V_{p_i}(a_k) < V_{p_i}(a_0)$, alors $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise $a_0 a_{k+1}$, donc divise $a_k a_0 + a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}$. Or $V_{p_i}(a_k a_0) < V_{p_i}(a_{k+1}) + V_{p_i}(a_k)$. Donc parmi $a_k a_0, a_{k+1}^2, a_k a_{k+1}$ deux termes ont la même valuation p_i adique, sinon la valuation est celle du minimum, donc au plus celle de $a_k a_{k+1}$ ce qui est absurde. Le cas $V_{p_i}(a_{k+1}^2) = V_{p_i}(a_k a_{k+1})$ donne $V_{p_i}(a_{k+1}) = V_{p_i}(a_k)$. Le cas $V_{p_i}(a_k a_0) = V_{p_i}(a_k a_{k+1})$ donne $V_{p_i}(a_{k+1}) = V_{p_i}(a_0)$ et le dernier cas $V_{p_i}(a_k a_0) = V_{p_i}(a_{k+1}^2)$ donne $V_{p_i}(a_{k+1}) = \frac{V_{p_i}(a_0) + V_{p_i}(a_k)}{2}$, donc $V_{p_i}(a_k) < V_{p_i}(a_{k+1}) < V_{p_i}(a_0)$.
- (ii) Si $V_{p_i}(a_k) \geq V_{p_i}(a_0)$, alors $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise $a_0 a_{k+1}$, donc divise $a_k a_0 + a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}$. Or $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise $a_k a_{k+1}$, donc divise $a_k a_0 + a_{k+1}^2$. Si $V_{p_i}(a_{k+1}) > V_{p_i}(a_k)$, $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise a_{k+1}^2 , donc divise $a_k a_0$, donc $V_{p_i}(a_{k+1}) \leq V_{p_i}(a_k)$ ce qui est absurde. Ainsi $V_{p_i}(a_{k+1}) \leq V_{p_i}(a_k)$, donc $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise $a_0 a_k$, donc divise a_{k+1}^2 . Ainsi $V_{p_i}(a_{k+1}) \geq V_{p_i}(a_0)$. Ainsi $V_{p_i}(a_k) \geq V_{p_i}(a_{k+1}) \geq V_{p_i}(a_0)$.

Ainsi pour tout p_i , soit il existe $k \geq M$ tel que $V_{p_i}(a_k) \geq V_{p_i}(a_0)$. Dans ce cas, par le point (ii), par récurrence immédiate, la suite $(V_{p_i}(a_j))_{j \geq k}$ est décroissante et minorée par $V_{p_i}(a_0)$, donc elle stationne. Soit pour tout $k \geq M$, $V_{p_i}(a_k) < V_{p_i}(a_0)$. Dans ce cas on est toujours dans le cas (i), et pour tout $k \geq M$, dans tous les cas on a $V_{p_i}(a_k) \leq V_{p_i}(a_{k+1})$. Ainsi la suite $(V_{p_i}(a_j))_{j \geq k}$ est croissante et majorée par $V_{p_i}(a_0)$, donc elle stationne.

Ainsi chaque a_k pour $k \geq M$ a ses diviseurs parmi un nombre fini de p_i , et chacune de ses valuation stationne donc la suite (a_k) stationne.

Solution de l'exercice 12

On va déjà montrer que $(q_n)_{n \geq 0}$ est bornée. Comme P est de degré au moins 2, il existe M tel que si $|x| \geq M$, $|P(x)| > |x|$. Quitte à augmenter M , on peut supposer $M > |q_0|$. Si pour un entier n , on a $|q_n| > M$, alors $|q_{n-1}| = |P(q_n)| > |q_n| > M$. Par récurrence immédiate, on obtient $|q_0| > M$ ce qui est absurde. Ainsi pour tout $n \geq 0$, $|q_n| \leq M$: la suite est bornée.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \frac{a_n}{b_n}$ avec a_n et b_n premiers entre eux. Posons $P = \sum_{k=0}^d c_k X^k$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n b_{n+1}^d = \sum_{k=0}^d c_k a_{n+1}^k b_n b_{n+1}^{d-k}.$$

En particulier, pour p premier divisant b_{n+1} , si $V_p(c_d) < V_p(b_{n+1})$, alors

$$V_p \left(\sum_{k=0}^d c_k a_{n+1}^k b_n b_{n+1}^{d-k} \right) = V_p(c_d a_{n+1}^d b_n) = V_p(b_n) + V_p(c_d).$$

Or $V_p(a_n b_{n+1}^d) \geq d V_p(b_{n+1}) > V_p(b_{n+1}) + V_p(c_d)$. Ainsi si $V_p(b_{n+1}) > V_p(c_d)$, $V_p(b_{n+1}) < V_p(b_n)$. Ceci implique par récurrence immédiate que $V_p(b_n) \leq \max(V_p(c_d), V_p(b_0))$ donc b_{n+1} divise $c_d b_0$. Ainsi la suite (b_n) est bornée.

En particulier, la suite $(q_n)_{n \geq 0}$ a ses dénominateurs bornés, donc $(a_n)_{n \geq 0} = (q_n b_n)_{n \geq 0}$ est bornée. Ainsi les suites $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ prennent un nombre fini de valeurs. Il existe donc un rationnel q pour lequel la suite $(q_n)_{n \geq 0}$ prend une infinité de fois la valeur q . Notons

$n_1 < n_2 < \dots$ la suite des entiers n tels que $q_{n_k} = q$. On a alors $P^{\circ(n_k - n_{k-1})}(q) = q$ pour tout $k \geq 2$, et $P^{\circ j}(q) \neq q$ si $j < n_k - n_{k-1}$. Ainsi pour tout k , $n_k - n_{k-1}$ est le plus petit entier $\ell > 0$ tel que $P^{\circ \ell}(q) = q$, donc $n_k - n_{k-1}$ est constant valant ℓ . On a alors $n_i = n_1 + (i-1)\ell$ pour tout $i \geq 1$. Soit $n \geq 0$, posons $n = k\ell - r$ avec $r \in \{0, \dots, \ell-1\}$, on a $q_{n_1+n+\ell} = q_{n_1+(k+1)\ell-r} = P^{\circ r}(q_{n_{k+1}}) = P^{\circ r}(q_{n_k}) = q_{n_1+k\ell-r} = q_{n_1+n}$. Ainsi la suite est ultimement ℓ périodique.

Solution de l'exercice 13

Déjà notons que la suite est bien définie : si $a_1, \dots, a_n$ sont construits, comme a_n est premier avec $p(a_n)$, il existe une infinité d'entiers k tels que $a_n^k \equiv 1 \pmod{p(a_n)}$ qui sont tous les multiples de l'ordre de a_n modulo $p(a_n)$. En particulier, il existe au moins un de ces entiers n'apparaissant pas parmi $a_1, \dots, a_n$, donc a_{n+1} existe bien.

Notons que chaque entier apparaît au plus une fois dans la suite par construction. Il faut donc montrer que tous apparaissent au moins une fois. Supposons qu'il existe un entier N qui n'apparaît pas dans la suite (x_n) , on prend alors N minimal. On note N_0 un entier tel que si $n \geq N_0$, $a_n > N$.

Montrons que pour tout premier q , il existe un nombre fini de n tels que $p(a_n) = q$. Supposons que ce n'est pas le cas, et fixons q un nombre premier tel que $p(a_n) = q$ pour une infinité de n . On se donne alors $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $p(a_{\phi(n)}) = q$. Notons alors que tout multiple de $q-1$ apparaît : en effet si on fixe M un multiple de $q-1$, alors comme les $a_{\phi(n)+1}$ sont deux à deux distincts, il existe n tel que $a_{\phi(n)+1} > M$. Or comme $q-1$ divise M , $a_{\phi(n)}^M \equiv 1 \pmod{q-1}$ par petit Fermat, ce qui contredit la définition de $a_{\phi(n)+1}$ si M n'apparaît pas dans la suite.

Ainsi tous les multiples de $q-1$ apparaissent. On note $p_1 < \dots < p_k$ les nombres premiers strictement inférieurs à q . On sait que pour tout $j \geq 1$, $(p_1 \dots p_k)^{j(q-1)}$ est congru à 1 modulo q , divisible par $q-1$ pour j assez grand (car tous les facteurs de $q-1$ sont parmi $p_1, \dots, p_k$) donc apparaît dans la suite, et vérifie $p((p_1 \dots p_k)^{j(q-1)}) = q$. Comme il y a une infinité de tels termes, il existe $N_1 > N_0$ tel que $a_{N_1} = (p_1 \dots p_k)^{j(q-1)}$ pour j assez grand. Ainsi $a_{N_1}^N \equiv 1 \pmod{q}$, ce qui contredit le fait que $a_{N_1+1} > N$.

Ainsi on a bien prouvé que pour tout premier q , il existe un nombre fini de n tels que $p(a_n) = q$. En particulier, pour tout $M \in \mathbb{N}$, comme la suite $(p(a_n))$ prend un nombre fini de fois chaque valeurs entre 1 et M , à partir d'un certain rang $p(a_n) > M$, donc $(p(a_n))$ tend vers $+\infty$. En particulier, pour tout k , à partir d'un certain rang, $p_1 \dots p_k$ divise a_n .

Soit k et m tels que $p_1 \dots p_k$ divise a_m , p_{k+1} ne divise pas a_m , et $p_1 \dots p_{k+1}$ divise a_{m+1} . On pose $a_{m+1} = p_1 \dots p_{k+1}^b \ell$ avec $b \geq 1$ et ℓ premier avec p_{k+1} . On a alors $p(a_m) = p_{k+1}$, et $a_n^{p_1 \dots p_k p_{k+1}^b \ell} \equiv 1 \pmod{p_{k+1}}$. Or par Petit Fermat, $a_n^{p_1 \dots p_k p_{k+1}^b \ell} \equiv a^{p_1 \dots p_k \ell} \pmod{p_{k+1}}$, donc pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq p_k - 1$, $a^{ip_1 \dots p_k \ell} \equiv 1 \pmod{p_{k+1}}$. Ainsi pour tout i vérifiant $1 \leq i \leq p_k - 1$, $ip_1 \dots p_k \ell$ apparaît dans la suite (a_n) . En prenant i un inverse de $p_1 \dots p_k \ell$ modulo $p_{k+1} - 1$ dans $\{1, \dots, p_{k+1} - 1\}$, on a alors que $(ip_1 \dots p_k \ell)^N \equiv N \pmod{p_{k+1}}$, donc si $a_n = ip_1 \dots p_k \ell$, alors $a_{n+1} < N$, donc $n \leq N_0$. Ainsi si de tels k, m existent, alors p_k divise $a_1 \dots a_{N_0+1}$, donc k est borné.

Or pour tout $K \in \mathbb{N}$, on peut trouver $k \geq K$ et m tels que $p_1 \dots p_k$ divise a_m , p_{k+1} ne divise pas a_m , et $p_1 \dots p_{k+1}$ divise a_n pour tout $n \geq m+1$ (donc aussi a_{m+1}). En effet, notons pour tout $k \geq 1$ r_k le premier rang à partir duquel $p_1 \dots p_k$ divise a_n . La suite (r_j) est croissante, et ne peut être stationnaire sinon un a_n serait divisible par tous les nombres premiers. Donc elle

tend vers $+\infty$, pour tout K , il existe $k \geq K$ tel que $r_{k+1} > r_k$. Ainsi $a_{r_{k+1}-1}$ est divisible par $p_1 \dots p_k$ car $r_{k+1} - 1 \geq r_k$, et pas par p_{k+1} . Mais tous les termes après r_{k+1} sont divisibles par $p_1 \dots p_{k+1}$, donc $m = r_{k+1} - 1$ convient. On a donc bien obtenu que pour tout $K \in \mathbb{N}$, on peut trouver $k \geq K$ et m tels que $p_1 \dots p_k$ divise a_m , p_{k+1} ne divise pas a_m , et $p_1 \dots p_{k+1}$ divise a_n pour tout $n \geq m + 1$, donc on a abouti à une contradiction.

Ainsi chaque entier apparaît une unique fois dans la suite.

7 Arithmétique : Problèmes de niveau P1

Dans ce TD, on s'intéresse à gagner en aisance sur des exercices de niveau P1-P4 d'Olympiades Internationales et à banaliser leur résolution. On veillera à ne pas se précipiter, à bien écrire les choses, aller au bout de chaque cas et à bien réfléchir après chaque exercice quelles sont les idées intéressantes que l'on a utilisées (la base).

Souvent, Un P1-P4 d'Olympiades Internationales, c'est original, élémentaire, joli et relativement court. Il suffit dans l'ensemble d'avoir une bonne idée à combiner avec des arguments de routine comme la divisibilité, la taille, les modulus.

Exercices

Exercice 1

(IMO SL 2006 N2) Soit $x \in (0, 1)$ un rationnel et soit $y \in (0, 1)$ le nombre dont la n -ème décimale correspond à la 2^n -ème décimale de x . Montrer que y est rationnel.

Exercice 2

(IMO SL 2007 N2) Soient $b, n > 1$ des entiers. Supposons que pour tout $k > 1$, il existe un entier a_k tel que k divise $b - a_k^n$. Montrer qu'il existe A un entier tel que $b = A^n$.

Exercice 3

(BXMO 2016) Soit n un entier strictement positif. On suppose que ses diviseurs positifs peuvent être répartis par paires de telle sorte que la somme de chaque paire est un nombre premier. Prouver que ces nombres premiers sont tous distincts et qu'aucun d'eux ne divise n .

Exercice 4

(IMO SL 2016 N1) Pour tout entier strictement positif k , on note $S(k)$ la somme de ses chiffres. Déterminer les polynômes P à coefficients entiers tels que, pour tout entier $n \geq 2016$, on a $P(n) > 0$ et

$$S(P(n)) = P(S(n)).$$

Exercice 5

(IMO SL 2011 N2) Soit $P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdots (x + d_9)$ avec $d_1, \dots, d_9$ des entiers distincts. Montrer qu'il existe N un entier tel que pour tous les entiers $x \geq N$ le nombre $P(x)$ est divisible par un nombre premier plus grand que 20.

Exercice 6

(IMO SL 2017 N2) Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Chacun à leur tour en commençant par Alice, ils choisissent un indice i dans $\{0, 1, \dots, p-1\}$ qui n'a pas encore été choisi précédemment par l'un des deux joueurs, puis choisissent un nombre a_i de $\{0, \dots, 9\}$. Lorsque tous les indices sont choisis, on considère le nombre

$$M = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_{p-1} \cdot 10^{p-1}.$$

Alice gagne si M est divisible par p , Bob gagne sinon. Qui dispose d'une stratégie gagnante?

Exercice 7

(IMO 2021 P1) Soit $n \geq 100$ un entier. On écrit les entiers $n, n+1, \dots, 2n$ chacun sur une carte. On mélange ensuite les $n+1$ cartes et on les divise en deux piles. Montrer qu'au moins une pile contient deux cartes dont la somme des numéros est un carré parfait.

Exercice 8

(IMO 2013 P1) Soient k et n deux entiers. Montrer qu'il existe des entiers $m_1, \dots, m_k$ tels que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Exercice 9

(USAMO 2021 P4) Un ensemble fini S d'entiers strictement positifs possède la propriété que pour tout entier $s \in S$ et tout diviseur d de s , il existe un unique élément t de S tel que $\gcd(s, t) = d$. Déterminer toutes les valeurs que peut prendre $|S|$.

Exercice 10

(USAMO 2018 P1) Soit p un nombre premier et $a_1, \dots, a_p$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier k tel que les nombres

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$$

donnent au moins $\frac{p}{2}$ restes différents modulo p .

Exercice 11

(USA TSTST 2022 P4) Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n , exactement un seul des entiers

$$f(m+1), \dots, f(m+f(n))$$

est divisible par n . Montrer que $f(n) = n$ pour une infinité d'entiers n .

Exercice 12

(BXMO 2017) Un n -carré est une grille $n \times n$ dans laquelle on inscrit n^2 entiers strictement positifs deux à deux distincts et vérifiant la propriété suivante :

Si on calcule le plus grand commun diviseur de chaque ligne et le plus grand commun diviseur de chaque colonne, les $2n$ nombres obtenus sont distincts.

1) Montrer qu'un n -carré contient au moins un nombre supérieur ou égal à $2n^2$.

2) On suppose que tous les nombres de la grille sont majorés par $2n^2$. Trouver les valeurs possibles de n .

Solutions

Exercice 1

(IMO SL 2006 N2) Soit $x \in (0, 1)$ un rationnel et soit $y \in (0, 1)$ le nombre dont la n -ème décimale correspond à la 2^n -ème décimale de x . Montrer que y est rationnel.

Solution de l'exercice 1

Notons $x = 0, x_1 \dots x_n \dots$ le développement décimal de x , où x_n est le n -ème chiffre de x après la virgule. Puisque x est rationnel, son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang, et on note p la période et N le rang à partir duquel cette suite est périodique. L'objectif est de montrer que la suite (x_{2^n}) est également périodique à partir d'un certain rang.

Décomposons la période p sous la forme $p = 2^\alpha \beta$ avec β impair. Soit ω l'ordre de 2 modulo β . Alors pour $n \geq \alpha$, on vérifie les deux congruences

$$2^{n+\omega} \equiv 2^n \pmod{\beta}, \quad 2^{n+\omega} \equiv 0 \equiv 2^n \pmod{2^\alpha}.$$

On déduit que $2^{n+\omega} - 2^n$ est un multiple de p , de sorte que $x_{2^{n+\omega}} = x_{2^n}$. La suite (x_{2^n}) est donc périodique à partir du rang $\max(2^\alpha, N)$, ce qui conclut.

Exercice 2

(IMO SL 2007 N2) Soient $b, n > 1$ des entiers. Supposons que pour tout $k > 1$, il existe un entier a_k tel que k divise $b - a_k^n$. Montrer qu'il existe A un entier tel que $b = A^n$.

Solution de l'exercice 2

Pour montrer que b est une puissance n -ème, on montre que pour tout nombre premier p , n divise $v_p(b)$. On fixe donc un nombre premier p et on pose $a = v_p(b)$.

On teste l'hypothèse de l'énoncé pour des valeurs particulières et intelligentes de k .

Pour $k = p$, on obtient qu'il existe un entier a_p tel que p divise $b - a_p^n$. Malheureusement, on ne peut rien conclure de cette substitution.

On teste alors pour $k = p^a$, ce qui ne nous apporte pas d'informations non plus.

Pour $k = p^{a+1}$, il existe un entier $a_{p^{a+1}}$ tel que p^{a+1} divise $b - a_{p^{a+1}}^n$. On déduit que

$$b \equiv a_{p^{a+1}}^n \pmod{p^{a+1}}$$

Or p^a divise b donc $a_{p^{a+1}}^n$ est divisible par p^a mais pas par p^{a+1} . Comme $a_{p^{a+1}}^n$ est une puissance n -ème, cela implique que p^a soit aussi une puissance n -ème donc n divise a , ce que l'on désirait.

Exercice 3

(BXMO 2016) Soit n un entier strictement positif. On suppose que ses diviseurs positifs peuvent être répartis par paires de telle sorte que la somme de chaque paire est un nombre premier. Prouver que ces nombres premiers sont tous distincts et qu'aucun d'eux ne divise n .

Solution de l'exercice 3

Examinons l'hypothèse donnée. Etant donné un couple (d_1, d_2) de diviseurs, si ces diviseurs admettent un diviseur premier commun p , ce diviseur divise également leur somme, qui n'est donc pas un nombre premier. En conclusion, dans un couple (d_1, d_2) , les nombres d_1 et d_2 sont premiers entre eux. En particulier, $d_1 d_2 \leq n$.

Or, le produit de tous les diviseurs de n vaut $n^{d(n)/2}$, avec $d()$ le nombre de diviseurs de n , et il y a $d(n)/2$ paires de diviseurs et le produit de chaque paire vaut au plus n . Donc le produit des produits de chaque n vaut au plus $n^{d(n)/2}$. Comme ce produit est effectivement égal à $n^{d(n)/2}$ donc il y a égalité dans chaque paire. En conclusion, dans chaque paire, $d_1 d_2 = n$. Autrement dit, les paires de diviseurs sont de la forme $(d, \frac{n}{d})$.

A présent, on résoud le problème. Soit d un diviseur de n et $p = d + \frac{n}{d}$ le nombre premier somme des éléments de la paire $(d, \frac{n}{d})$. Si p divise n , p divise d ou n/d et est donc strictement inférieur à la somme $d + \frac{n}{d} = p$ ce qui est absurde. Ainsi, les nombres premiers des diverses paires ne divisent pas n .

On montre que les nombres premiers sont distincts. En effet, soient d_1 et d_2 deux diviseurs, il s'agit de montrer que $d_1 + \frac{n}{d_1} \neq d_2 + \frac{n}{d_2}$. Mais l'égalité est équivalente à $(n - d_1 d_2)(d_1 - d_2) = 0$. Or les éléments d_1 et d_2 sont supposés être distincts et dans des paires distinctes. Ainsi, on ne peut ni avoir $d_2 = d_1$ ni avoir $d_2 = \frac{n}{d_1}$. On a donc le résultat désiré.

Exercice 4

(IMO SL 2016 N1) Pour tout entier strictement positif k , on note $S(k)$ la somme de ses chiffres. Déterminer les polynômes P à coefficients entiers tels que, pour tout entier $n \geq 2016$, on a $P(n) > 0$ et

$$S(P(n)) = P(S(n)).$$

Solution de l'exercice 4

Si P est constant égal à c , on a $S(c) = c$. Comme $S(x) \leq x$ pour tout x , avec égalité seulement si c n'a qu'un chiffre, on déduit que $1 \leq c \leq 9$, et réciproquement ces constantes sont solutions.

On suppose que P est non constant.

Commençons par noter qu'en prenant $n = \overline{99 \dots 9}$ (avec k chiffres), alors $P(S(n)) = P(9k)$ est un nombre positif (car il vaut $S(P(n))$), donc le coefficient dominant de P est strictement positif.

L'objectif est de construire des entiers n grand dont on maîtrise $S(n)$. Les candidats idéaux sont les nombres de la forme $x \cdot 10^k$ avec $x \in \{1, \dots, 9\}$, car ce sont de grands nombres et qu'ils ont un seul chiffre non nul. Notons d le degré de P et $P(X) = c_d X^d + \dots + c_0$.

Prenons $n = 10^k$ avec k suffisamment grand, c'est-à-dire tel que $|c_i| < 10^k$ pour tout indice i . On a

$$P(1) = S(P(10^k)) = S(c_d 10^{kd} + \dots + c_0).$$

Supposons que l'un des c_i soit négatif et prenons l'indice i maximal pour cette propriété. Notons que $i \leq d-1$. Si on note $c_j = \overline{b_1^j b_2^j \dots b_{r_j}^j}$ pour tout j , on trouve

$$\begin{aligned} S(P(10^k)) &\geq S(c_{i+1} 10^{i+1} - |c_i| 10^i) \\ &= S\left(\overline{b_1^{i+1} b_2^{i+1} \dots b_{r_{i+1}}^{i+1}} \underbrace{\overline{9 \dots 9}}_{k-r_i \text{ chiffres}} \overline{(9-b_1^i)(9-b_2^i) \dots (9-b_{r_i}^i)}\right) \\ &\geq 9(k-r_i). \end{aligned}$$

Mais alors $P(S(10^k)) = 1 \geq 9(k-r_i)$, ce qui est absurde. Ainsi, tous les coefficients de P sont positifs.

On recommence cette fois-ci avec $n = 9 \times 10^k$. Là aussi, en prenant k suffisamment grand,

$$P(9 \times 10^k) = \overline{9^d c_d} 0 \dots 0 \overline{9^{d-1} c_{d-1}} 0 \dots 0 \dots \overline{9 c_1} 0 \dots 0 \overline{c_0},$$

de sorte que

$$9^d c_d + \dots + c_0 = P(9) = P(S(9 \times 10^k)) = S(P(9 \times 10^k)) = S(9^d c_d) + \dots + S(c_0).$$

Sachant que $S(m) \leq m$ avec égalité seulement si $m \leq 9$, on trouve que $S(9^i c_i) = 9^i c_i$ pour tout i et que $9^d c_d \leq 9$, si bien que $d \leq 1$.

Si $d = 1$, comme $9c_1 \leq 9$, $c_1 = 1$. L'égalité devient $S(n + c_0) = S(n) + c_0$. Prenons alors $n = 10^k + 10 - c_0$, l'égalité donne $2 = S(n + c_0) = 1 + 10 - c_0 + c_0 = 11$, ce qui est absurde.

Ainsi $d \leq 0$ et P est constant, ce qui nous ramène au cas traité plus haut.

Les seules solutions sont les polynômes constants égaux à un nombre compris entre 1 et 9.

Exercice 5

(IMO SL 2011 N2) Soit $P(x) = (x + d_1)(x + d_2) \cdots (x + d_9)$ avec $d_1, \dots, d_9$ des entiers distincts. Montrer qu'il existe N un entier tel que pour tous les entiers $x \geq N$ le nombre $P(x)$ est divisible par un nombre premier plus grand que 20.

Solution de l'exercice 5

L'idée est de remarquer qu'il y a 8 nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 et d'appliquer le principe des tiroirs puisque qu'il y a 9 facteurs.

Pour deviner l'entier N à choisir, on commence naïvement par procéder par l'absurde : On suppose qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ n'admet que des facteurs premiers inférieurs ou égaux à 20. Pour un tel entier n , on dispose donc de deux indices i et j et d'un nombre premier p parmi les nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 tels que p divise $n + d_i$ et $n + d_j$. Ainsi, p divise $d_i - d_j$.

A partir de cette remarque, on propose la preuve suivante.

On suppose par l'absurde que l'on dispose d'une suite (x_n) d'entiers strictement positifs tels que les nombres $P(x_n)$ n'admettent pas de facteurs premiers strictement supérieurs à 20.

La suite $(x_n + d_1)_n$ n'est pas bornée, on dispose donc d'un nombre premier $p_1 < 20$ tel que la suite $(v_{p_1}(x_n + d_1))_n$ ne soit pas bornée non plus. Quitte à extraire une sous-suite y_n de la suite x_n telle que la suite $(v_{p_1}(y_n + d_1))_n$ tende vers $+\infty$, on peut supposer que la suite (x_n) satisfait déjà cette propriété.

A nouveau, quitte à extraire de la suite (x_n) , on peut supposer que l'on dispose de nombres premiers $p_2, \dots, p_9$ tels que la suite $(v_{p_i}(x_n + d_i))_n$ tende vers $+\infty$ pour tout entier i .

D'après le principe des tiroirs, on dispose de deux indices i et j tels que $p_i = p_j$, que l'on note désormais p . Ainsi, les suites $(v_p(x_n + d_i))_n$ et $(v_p(x_n + d_j))_n$ tendent toutes les deux vers $+\infty$. En particulier, on dispose d'un entier N tel que $v_p(x_n + d_i) > v_p(d_i - d_j)$ et $v_p(x_n + d_j) > v_p(d_i - d_j)$. Ceci constitue la contradiction désirée puisque si p^k divise $x_n + d_j$ et $x_n + d_i$, il divise également $d_i - d_j$ pour tout entier k .

Exercice 6

(IMO SL 2017 N2) Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Chacun à leur tour en commençant par Alice, ils choisissent un indice i dans $\{0, 1, \dots, p-1\}$ qui n'a pas encore été choisi précédemment par l'un des deux joueurs, puis choisissent un nombre a_i de $\{0, \dots, 9\}$. Lorsque tous les indices sont choisis, on considère le nombre

$$M = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \dots + a_{p-1} \cdot 10^{p-1}.$$

Alice gagne si M est divisible par p , Bob gagne sinon. Montrer qu'Alice dispose d'une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 6

On met de côté les cas $p = 2$ et $p = 5$, pour lesquels il suffit de choisir $a_0 = 0$ pour Alice.

Posons $d = \frac{p-1}{2}$.

Dans la suite, on cherche à mettre en place une stratégie miroir. Alice commence pour cela par choisir $i = p-1$ et $a_{p-1} = 0$. Puis par la suite, on considère les paires d'indices $(i, d+i)$, qui partitionnent l'ensemble des indices restant. On doit donc aider Alice à bien choisir a_i ou a_{d+i} lorsque Bob a choisi l'un de ces indices. On distingue alors deux cas :

- a) $10^d \equiv -1 \pmod{p}$.
- b) $10^d \equiv 1 \pmod{p}$.

A noter qu'il n'y a pas d'autre cas car le petit théorème de Fermat indique que $p \mid 10^{2d} - 1 = (10^d - 1)(10^d + 1)$.

Dans le premier cas : si Bob choisit l'indice i et le chiffre a_i , alors Alice choisit l'indice $i+d$ et le chiffre $a_{i+d} = a_i$, de sorte que $a_{i+d}10^{i+d} + a_i10^i = a_i10^i(10^d + 1)$ est bien divisible par p (de même, si Bob joue $(i+d)$ et a_{i+d} , Alice joue i et $a_i = a_{i+d}$). A la fin du jeu, M est bien divisible par p comme somme d'entiers divisibles par p .

Dans le second cas, Alice choisit a_i (ou a_{i+d}) de sorte que $a_i + a_{i+d} = 9$. Alors $a_{i+d}10^{i+d} + a_i10^i \equiv 9 \cdot 10^i \pmod{p}$, de sorte que

$$M \equiv \sum_{i=0}^{d-1} 9 \cdot 10^i = 10^d - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Dans tous les cas, Alice gagne.

Exercice 7

(IMO 2021 P1) Soit $n \geq 100$ un entier. On écrit les entiers $n, n+1, \dots, 2n$ chacun sur une carte. On mélange ensuite les $n+1$ cartes et on les divise en deux piles. Montrer qu'au moins une pile contient deux cartes dont la somme des numéros est un carré parfait.

Solution de l'exercice 7

La meilleure façon de forcer cette situation, c'est d'exhiber trois entiers $n \leq a < b < c \leq 2n$ et trois entiers k, ℓ et m tels que

$$\begin{cases} a + b = k^2 \\ a + c = \ell^2 \\ b + c = m^2 \end{cases}$$

Si on fixe k, ℓ et m consécutifs, c'est-à-dire en prenant $\ell = k+1$ et $m = k+2$, on trouve

$$\begin{cases} a = \frac{k^2 - 2k - 3}{2} \\ b = \frac{k^2 + 2k + 3}{2} \\ c = \frac{k^2 + 6k + 5}{2} \end{cases}$$

On voit ici que l'entier k doit être impair pour que cela fonctionne. On remplace donc k par $2x-1$ dans les équations, ce qui donne

$$\begin{cases} a = 2x^2 - 4x \\ b = 2x^2 + 1 \\ c = 2x^2 + 4x. \end{cases}$$

L'entier x doit donc satisfaire

$$n \leq 2x^2 - 4x < 2x^2 + 4x \leq 2n.$$

ou encore

$$x^2 + 2x \leq n \leq 2x^2 - 4x.$$

Notons A_x l'ensemble des entiers n vérifiant cette inégalité. Il suffit de montrer que A_x et A_{x+1} ne sont jamais disjoints pour x suffisamment grand, de sorte que tout entier $n \geq 100$ appartient bien à l'un des A_x . Pour cela, il suffit de vérifier que

$$2x^2 - 4x \geq (x+1)^2 + 2(x+1),$$

ce qui est vrai lorsque $x \geq 9$. Ainsi, $A_9 \cup \dots \cup A_k \cup \dots$ contient tous les entiers supérieurs ou égaux à $9^2 + 2 \times 9 = 99$, ce qui permet de conclure.

Remarque : Si l'on n'utilise pas le caractère impaire de k et qu'on poursuit avec k quelconque, on obtient des inégalités qui ne sont pas suffisamment précises pour inclure $n = 100$ dans l'union des A_k .

Exercice 8

(IMO 2013 P1) Soient k et n deux entiers. Montrer qu'il existe des entiers $m_1, \dots, m_k$ tels que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

Solution de l'exercice 8

On teste des petits cas et très vite, on s'aperçoit que le plus simple est de tenter une récurrence sur k .

Initialisation : Si $k = 1$, alors on vérifie bien que

$$1 + \frac{2^1 - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Hérédité : On fixe $k \geq 1$ et on suppose que, pour tout entier n , il existe $m_1, \dots, m_k$ tels que

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right).$$

On souhaite montrer l'énoncé pour $k + 1$. Pour cela, on distingue deux cas.

Cas 1 : Si n est impair, on peut l'écrire sous la forme $n = 2m + 1$. Dans l'écriture qui suit, l'objectif est de faire apparaître un numérateur pair, de sorte à factoriser par 2, ce qui fait apparaître 2^k plutôt que 2^{k+1} . Une fois cette idée acquise, le reste n'est que du bidouillage.

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{2m + 1} &= \frac{2m + 2^{k+1}}{2m + 1} \\ &= 2 \cdot \frac{m + 1 + (2^k - 1)}{m + 1} \cdot \frac{m + 1}{2m + 1} \\ &= \left(1 + \frac{2^k - 1}{m + 1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2m + 1}\right). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, $1 + \frac{2^k - 1}{m + 1}$ admet une écriture sous la forme $\left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$, ce qui permet de conclure.

Cas 2 : Si n est pair, on peut l'écrire sous la forme $n = 2m$. On a alors dans la même veine

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2^{k+1} - 1}{2m} &= \frac{2m + 2^{k+1} - 1}{2m} \\ &= \frac{2m + 2^{k+1} - 1}{2m + 2^{k+1} - 2} \cdot \frac{2m + 2^{k+1} - 2}{2m} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2m + 2^{k+1} - 2}\right) \cdot \left(1 + \frac{2^k - 1}{m}\right). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse, $1 + \frac{2^k - 1}{m}$ admet une écriture sous la forme $\left(1 + \frac{1}{m_1}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)$, ce qui permet de conclure.

Remarque : Notons que dans le cas impair, l'astuce que l'on a employée, c'est d'écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b+1} \frac{b+1}{b},$$

tandis que dans la cas pair, le télescopage était

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{a-1}{b}.$$

Il est fréquent qu'il faille essayer une astuce "d'un côté" puis "de l'autre" du problème, et pas toujours du même côté. De même, si une astuce ne marche pas "d'un côté", ce n'est pas pour cela qu'elle ne marche pas du tout, il faut d'abord essayer de l'appliquer dans tous les sens possibles.

Exercice 9

(USAMO 2021 P4) Un ensemble fini S d'entiers strictement positifs possède la propriété que pour tout entier $s \in S$ et tout diviseur d de s , il existe un unique élément t de S tel que $\gcd(s, t) = d$. Déterminer toutes les valeurs que peut prendre $|S|$.

Solution de l'exercice 9

Réponse : les puissances de 2.

On suppose que S est non vide et contient au moins deux éléments.

Notons que 1 n'est pas dans S car il est premier avec tous les autres nombres de S (y compris lui-même), donc on n'a pas unicité du t tel que $\gcd(1, t) = 1$.

Ensuite, on remarque que $|S| \geq d(a)$ pour tout a , puisque pour chaque diviseur de a , on peut associer de façon injective un élément t de S . Si $|S| > d(a)$, par principe des tiroirs on a deux éléments t et s vérifiant $\gcd(s, a) = \gcd(t, a)$. Donc $|S| = d(a)$ pour tout a .

Soit p diviseur premier de a et $\beta = v_p(a)$. La condition implique alors qu'il y a exactement $d(a/p^\beta)$ éléments de S non divisibles par p . Comme $\frac{d(a/p^\beta)}{d(a)} = \frac{1}{\beta+1}$, inversement, exactement $\beta/(\beta+1)$ des éléments de S sont divisibles par p . Comme on doit pouvoir mettre par pair les éléments premiers entre eux, on a $\beta/(\beta+1) \leq 1/2$, donc $\beta \leq 1$. On déduit que $\beta = 1$. Ainsi, a est un produit de nombres premiers distincts et $d(a) = 2^k$.

Réciproquement, si $|S| = 2^k$, on prend $a_1, \dots, a_k$ des nombres premiers, et $b_1, \dots, b_k$ d'autres nombres premiers distincts et on vérifie que l'ensemble $S = \{\prod_{i \in I} a_i \prod_{i \in J} b_j, I \sqcup J = \{1, \dots, k\}\}$ satisfait les conditions de l'énoncé.

Exercice 10

(USAMO 2018 P4) Soit p un nombre premier et soient $a_1, \dots, a_p$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier k tel que les nombres

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \dots, a_p + pk$$

donnent au moins $\frac{1}{2}p$ restes distincts modulo p .

Solution de l'exercice 10

La première chose à faire est de regarder à quelle condition deux nombres $a_j + jk$ et $a_i + ik$ donnent le même reste modulo p . Cette condition se réécrit

$$a_j + jk \equiv a_i + ik \pmod{p}$$

$$k \equiv -\frac{a_i - a_j}{i - j} \pmod{p}$$

On souhaite donc trouver un ensemble S de $\frac{p+1}{2}$ entiers $i_1, \dots, i_{\frac{p+1}{2}}$ tels que pour tous les couples d'indices i, j dans cet ensemble $k \not\equiv -\frac{a_i - a_j}{i - j} \pmod{p}$.

On dispose de $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ couples $\{i, j\}$ donc d'après le principe des tiroirs, il existe un élément k de $\{0, \dots, p-1\}$ tel qu'il y a au plus $\frac{p-1}{2}$ couples satisfaisant $k \equiv -\frac{a_i - a_j}{i - j} \pmod{p}$.

On suppose dès lors, par l'absurde, qu'il y a au plus $\frac{p-1}{2}$ restes distincts modulo p avec l'entier k obtenu. On note $c_1, \dots, c_r$ ces restes distincts, et r_i le nombre d'éléments de $\{a_1, \dots, a_p\}$ tels que $a_i + lk = c_i \pmod{p}$.

On obtient pour chaque i $\binom{a_i}{2}$ couples $\{s, t\}$ tels que $k \equiv -\frac{a_s - a_t}{s - t} \pmod{p}$.

On obtient en tout $\binom{a_1}{2} + \dots + \binom{a_p}{2}$ couples satisfaisant la congruence ci-dessus.

La fonction $x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}$ est convexe donc d'après l'inégalité de Jensen,

$$\binom{a_1}{2} + \dots + \binom{a_p}{2} \geq \frac{p(\frac{p}{2} - 1)}{2} \geq \frac{p(\frac{2p}{p-1} - 1)}{2} > \frac{p-1}{2}$$

ce qui est la contradiction voulue.

Exercice 11

Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que, pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n , exactement un seul des entiers

$$f(m+1), \dots, f(m+f(n))$$

est divisible par n . Montrer que $f(n) = n$ pour une infinité d'entiers n .

Solution de l'exercice 11

Soit $n \geq 1$. Pour tout entier $m \geq 1$, chacun des deux ensembles

$$\{f(m+1), \dots, f(m+f(n))\} \quad \text{et} \quad \{f(m+2), \dots, f(m+1+f(n))\}$$

contient exactement un entier divisible par n . Ainsi, si $n \mid f(m+1)$, aucun des entiers $f(m+2), \dots, f(m+f(n))$ n'est divisible par n , de sorte que n divise $f(m+1+f(n))$. De même, si n ne divise pas $f(m+1)$, n divise un des entiers $f(m+2), \dots, f(m+f(n))$, donc n ne divise pas $f(m+1+f(n))$. En conclusion, pour tout entier $m \geq 2$, n divise $f(m)$ si et seulement si n divise $f(m+f(n))$. Cela signifie que pour toute paire d'entiers (x, y) supérieurs ou égaux à 2, n divise $f(x)$ et $f(y)$ si et seulement si $f(n)$ divise $x - y$.

Soient maintenant $k \geq 1$ un entier et x un entiers tel que $kn \mid f(x)$. Alors kn divise également $f(x+f(kn))$, de sorte que n divise $f(x)$ et $f(x+f(kn))$. On déduit que $f(n)$ divise $f(kn)$ pour tout entier $k \geq 1$.

En particulier $f(n)$ divise $f(n)$ et $f(2n)$, donc $f(f(n))$ divise $2n - n = n$. Remarquons ensuite que si n divise $f(n)$, alors il existe un entier k tel que $f(n) = kn$. Mais alors $f(kn) = f(f(n)) \mid n \mid f(n) \mid f(kn)$, de sorte que $f(kn) = f(n)$, donc $n \mid f(n) = f(kn) = f(f(n)) \mid n$ et $f(n) = n$. Ainsi, il suffit de trouver des entiers n tels que $f(n) = n$.

D'autre part, puisque $f(f(n))$ divise n , on a en particulier pour tout nombre premier, $f(f(p))$ divise p , donc $f(f(p)) \in \{1, p\}$. Supposons que x soit tel que $f(x) = 1$. Alors pour tout entier $m \geq 1$, l'ensemble $\{f(m+1), \dots, f(m+f(x))\}$ est réduit à $\{f(m+1)\}$, de sorte que x divise $f(m+1)$ pour tout m . En particulier, x divise $f(x) = 1$, donc $x = 1$. Ainsi, $f(p) \neq 1$ et $f(f(p)) \neq 1$ donc $f(f(p)) = p$ pour tout nombre premier p .

Si p divise $f(p)$ pour une infinité de nombres premiers p , alors d'après la discussion précédente, $f(p) = p$ pour une infinité de nombres premiers, ce qui donne le résultat voulu. Sinon, pour tout nombre premier p suffisamment grand, $f(p)$ et p sont premiers entre eux. On a alors $f(p) \mid f(pf(p))$ et $p = f(f(p)) \mid f(pf(p))$, de sorte que $pf(p) \mid f(pf(p))$ et $f(pf(p)) = pf(p)$.

Il reste à voir que $pf(p)$ peut prendre une infinité de valeurs différentes. Pour cela, on suppose que l'on a construit k entiers différents de la forme $pf(p)$ et on choisit q un nombre premier strictement plus grand que ces k entiers. Alors $qf(q)$ est un bien un entier distincts des k précédents.

f admet donc une infinité de points fixes.

Exercice 12

(BXMO 2017) Un n -carré est une grille $n \times n$ dans laquelle on inscrit n^2 entiers strictement positifs deux à deux distincts et vérifiant la propriété suivante :

Si on calcule le plus grand commun diviseur de chaque ligne et le plus grand commun diviseur de chaque colonne, les $2n$ nombres obtenus sont distincts.

1) Montrer qu'un n -carré contient au moins un nombre supérieur ou égal à $2n^2$.

2) On suppose que tous les nombres de la grille sont majorés par $2n^2$. Trouver les valeurs possibles de n .

Solution de l'exercice 12

1) Comme les PGCD sont deux à deux distincts, l'un des pgcd est supérieur ou égal à $2n$. Disons que ce PGCD, noté δ , est celui des éléments de la ligne L . Les éléments de la ligne L sont donc de la forme $\delta \times k$ avec $k \geq 1$, et deux à deux distincts. Donc l'un des éléments est de la forme $\delta \times k$ avec $k \geq n$, de sorte qu'il est plus grand que $2n \times n$.

2) Soit n une solution. On écarte le cas $n = 1$ qui est impossible. Si le plus grand élément est $2n^2$, cela signifie qu'il y a égalité dans les inégalités de la question 1 et que $\delta = 2n$, donc les PGCD des lignes et colonnes sont exactement les nombres $1, \dots, 2n$. De plus, les éléments de la ligne L sont exactement les éléments de la forme $2n \times k$ avec $1 \leq k \leq n$.

Notons qu'aucun élément n'est divisible par $2n$ et $2n - 1$, car leur produit est supérieur à $2n^2$. Ainsi, $2n - 1$ est le PGCD d'éléments d'une ligne L_2 . De même, comme aucun élément n'est divisible par $(2n - 1)$ et $(2n - 2)$, $2n - 2$ est le PGCD des éléments d'une ligne L_3 . Comme $(2n - 1)(n + 1) > 2n^2$, les éléments de L' sont les $(2n - 1)k$ avec $1 \leq k \leq n$. Ainsi, si n est le PGCD des éléments d'une ligne L' , on trouve que l'ensemble $L' \cup L_2 \cup L$ contient $n + 1 + n$ multiples de n distincts, ce qui est absurde. n est donc le PGCD des éléments d'une colonne C .

Cas 1 : Si n est impair, alors il y a n multiples de n qui sont pairs parmi $\{1, \dots, 2n^2\}$. Ils sont donc tous dans la ligne L , ce qui signifie que les $n - 1$ autres éléments de C sont tous impairs, donc les PGCD des $n - 2$ autres lignes du tableau sont tous impairs, ce qui contredit le fait que les éléments de L'' sont divisibles par $2n - 2$. Ce cas n'est donc pas possible.

Cas 2 : Si n est pair et suffisamment grand, le même argument implique que $2n - 3$ et $2n - 4$ sont les PGCD d'éléments d'une ligne, notées L_4 et L_5 . Notons qu'il y a alors $n + 1$ multiples de $n - 1$ qui sont pairs et inférieurs à $2n^2$, et n d'entre eux sont dans la ligne L_3 . Mais si $n - 1$ est le PGCD d'une ligne, alors cette ligne contient au moins $n - 1$ termes impairs, donc au moins $n - 1$ nombres impairs sont PGCD d'une colonne, ce qui contredit le fait que $2n - 1$ et $2n - 3$ sont PGCD d'une ligne. Donc $n - 1$ est le PGCD d'une ligne L'' , mais alors cette ligne contient un multiple de $2n$ et un multiple de $2n - 4$, donc cette ligne contient au moins 2 termes pairs, d'où la contradiction.

n est donc petit et vérifie notamment $(2n - 3)(2n - 4) \leq 2n^2$, soit $n \leq 6$.

Si $n = 6$, pour les mêmes raisons que dans le cas précédents, 10, 11 et 12 sont les PGCD de trois lignes, ce qui force 7, 8 et 9 à être également PGCD de lignes, puisque 7×11 , 8×11 et 9×11 ne sont pas des éléments du carré, ce qui nous ramène à la situation précédente.

On a par ailleurs les constructions suivantes pour $n = 2$ et $n = 4$:

5	6	7	8
10	30	14	16
15	18	21	24
20	12	28	32

3	4
6	8

8 Algèbre : Problèmes de niveau P1 (Serge)

Ce TD comporte des exercices de niveau P1 IMO d'algèbre sans thème ou idée particulière. Il présente des astuces assez variées. Voici une liste générale de conseils :

- Lorsque c'est possible, il faut s'intéresser aux petits cas. En particulier, lorsqu'il s'agit d'étudier une suite il est toujours intéressant de calculer les premiers termes.
- Dans de nombreux cas, un diagramme ou un dessin permet de mieux comprendre un exercice. Par exemple, lorsqu'on étudie une suite, représenter ses termes sur un diagramme peut permettre de comprendre son comportement.
- Certains exercices peuvent mélanger plusieurs thèmes. Il n'est pas rare que des idées de combinatoire puissent être utiles en algèbre : algorithme glouton, principe des tiroirs, une manière particulière d'ordonner des variables.
- Lorsque l'énoncé présente un calcul sous une forme compliquée, il faut parfois d'abord simplifier l'énoncé par des manipulations algébriques. Par exemple, lors d'une étude de suite il peut être intéressant de poser une suite auxiliaire.
- Pour ce qui est des inégalités, il faut avoir en tête les inégalités classiques : IAG pondérée, Cauchy-Schwarz et Jensen. Par changements de variable, manipulations algébriques ou démonstration de lemmes intermédiaires, il faut chercher à se ramener à des résultats équivalents plus simples à montrer.

Exercices traités en cours

Exercice 1 (P4 Iran TST 2019)

Soit $t \in]1, 2[$. Montrer qu'il existe un polynôme P dont les coefficients valent tous -1 ou 1 tel que $|P(t) - 2019| \leq 1$.

Exercice 2 (P1 IMO 2007)

Soit n nombres réels $a_1, \dots, a_n$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit :

$$d_i = \max_{1 \leq j \leq i} (a_j) - \min_{i \leq j \leq n} (a_j)$$

et on pose $d = \max_{1 \leq i \leq n} (d_i)$.

(a) Montrer que pour tout réels $x_1 \leq \dots \leq x_n$:

$$\max\{|x_i - a_i|, 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2} \quad (*)$$

(b) Montrer qu'il existe des réels $x_1 \leq \dots \leq x_n$ tels que (*) soit une égalité.

Exercice 3 (P1 Iran TST 2025)

Soit $a_1, a_2, \dots$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout $n > 2025$,

$$a_n = \max_{1 \leq i \leq 2025} a_{n-i} - \min_{1 \leq i \leq 2025} a_{n-i}$$

. Montrer qu'il existe M tel que pour tout $n > M$, $a_n < \frac{1}{1000}$.

Exercice 4 (A1 IMO SL 2016)

Soit a, b et c des nombres réels strictement positifs tels que $\min(ab, bc, ca) \geq 1$. Montrer que

$$\sqrt[3]{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)} \leq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2 + 1$$

Exercices non traités en cours

Exercice 5 (A1 IMO SL 2015)

Soit $a_1, a_2, \dots$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que

$$a_{k+1} \geq \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 6 (P1 USA TST 2024)

Trouver la plus petite constante $C > 1$ tels que la propriété suivante est vérifiée : pour tout $n \geq 2$ et suite de réels strictement positifs non-entiers $a_1, a_2, \dots, a_n$ satisfaisant

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1$$

il est possible de choisir des entiers strictement positifs b_i tels que :

- (i) pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, ou bien $b_i = \lfloor a_i \rfloor$ ou bien $b_i = \lfloor a_i \rfloor + 1$, et
- (ii) on a

$$1 < \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \leq C$$

Exercice 7 (P1 IMO 2014)

Soit $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. Prouver qu'il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

Exercice 8 (A3 IMO SL 2016)

Trouver tous les entiers $n \geq 3$ vérifiant la propriété suivante : pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n$ et $b_1, b_2, \dots, b_n$ satisfaisant $|a_k| + |b_k| = 1$ pour tout $1 \leq k \leq n$, il existe $x_1, x_2, \dots, x_n$, chacun valant -1 ou 1 , tels que

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n x_k b_k \right| \leq 1$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons d'abord que $1 + t + t^2 + \dots + t^n = \frac{t^{n+1} - 1}{t - 1}$. Cette somme tend vers l'infini quand t tend vers l'infini. Donc, pour n suffisamment grand, $1 + t + t^2 + \dots + t^n \geq 2019$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 + t + t^2 + \dots + t^n \geq 2019$.

Ensuite, une idée serait de montrer que les polynômes de l'énoncé évalués en t sont proches les uns des autres.

Pour cela on va ordonner les $(n+1)$ -uplets $a_n, \dots, a_0$ de réels à valeurs dans $\{-1, 1\}$ dans l'ordre lexicographique (c'est à dire qu'on va supposer $(a_n, \dots, a_0) < (b_n, \dots, b_0)$ si et seulement si le plus petit i tel que $a_i \neq b_i$ est tel que $a_i < b_i$).

On va montrer le résultat suivant : Quand on prend des $(n+1)$ -uplets consécutifs $(a_n, \dots, a_0) < (b_n, \dots, b_0)$, alors, en notant S la différence :

$$S = (b_0 + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_nt^n) - (a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n) \leq 2$$

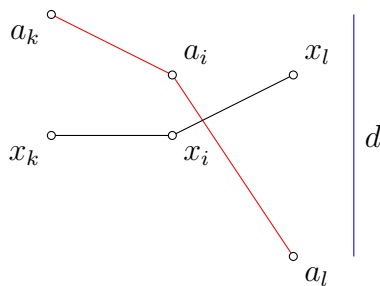
Prenons le plus petit i tel que $a_i \neq b_i$. On a alors $a_i = -1$ et $b_i = 1$. De plus, comme les deux $(n+1)$ -uplets sont consécutifs, on peut vérifier que pour tout $j < i$, $a_j = 1$ et $b_j = -1$ sinon il y aurait un $(n+1)$ -uplet entre les (a_i) et les (b_i) . Donc :

$$S = 2(t^i - t^{i-1} - \dots - 1) \leq 2 \cdot (t^i - \frac{t^i}{2} - \frac{t^i}{2^2} - \dots - \frac{t^i}{2^i}) = \frac{2t^i}{2^i} = 2 \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^i \leq 2$$

Ainsi, à chaque fois qu'on augmente dans l'ordre lexicographique, on augmente la valeur du polynôme $a_0t^0 + \dots + a_nt^n$ d'au plus 2. Or $-t^n - \dots - 1 \leq 0 < 2019 \leq t^n + \dots + 1$ par hypothèse. Donc en augmentant progressivement dans l'ordre lexicographique, on passera nécessairement à un moment à une distance au plus 2 de 2019, d'où la conclusion de l'exercice car on a trouvé un polynôme P de degré n tel que $|P(t) - 2019| \leq 2$.

Solution de l'exercice 2

(a) L'important sur cet exercice est de faire un dessin pour comprendre le comportement de la suite.



Ainsi, on commence par choisir $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que d_i soit maximal, c'est-à-dire tel $d_i = d$. Alors par définition, il existe $1 \leq k \leq i \leq l \leq n$ tels que $a_k - a_l = d$. Or $x_l \geq x_k$. On voit avec un dessin alors que l'on ne pourra pas avoir x_k à distance au plus $\frac{d}{2}$ de a_k tout en ayant a_l à distance au plus $\frac{d}{2}$ de x_l , ce qu'on s'empresse de démontrer avec des calculs. En effet on peut écrire :

$$|a_k - x_k| + |a_l - x_l| \geq (a_k - x_k) + (x_l - a_l) = (a_k - a_l) + (x_l - x_k) \geq (a_k - a_l) \geq d$$

. Donc $\max(|a_k - x_k|, |a_l - x_l|) \geq \frac{d}{2}$ ce qui conclut la partie (a).

(b) Pour la deuxième partie on va encore une fois se baser sur les observations que l'on peut obtenir avec un schéma. Ainsi, on se rend compte que les termes a_k et a_l (avec $k \leq l$) de

la suite tels $a_k - a_l = d$ doivent être tels que pour $k \leq i \leq l$, on a x_i qui est constamment égal à $a_l + \frac{d}{2}$. Ensuite l'idée est de "suivre" avec la suite (x_i) la suite (a_i) quand elle augmente. En comprenant le comportement de la suite (x_i) avec un dessin, cela nous amène à poser pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: $x_i = \min(a_j, i \leq j \leq n) + \frac{d}{2}$.

On vérifie aisément que la suite ainsi définie est bien croissante. Il reste à vérifier que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_i - x_i| \leq \frac{d}{2}$. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors

$$a_i + \frac{d}{2} \geq \min(a_j, i \leq j \leq n) + \frac{d}{2} = x_i = \max(a_j, i \leq j \leq n) - d_i + \frac{d}{2} \geq a_i - d + \frac{d}{2} = a_i - \frac{d}{2}$$

Ainsi $|x_i - a_i| \leq \frac{d}{2}$ comme voulu.

Solution de l'exercice 3

Vu les valeurs totalement arbitraires des variables de l'énoncé, on se doute que le but de l'exercice est en fait de montrer que la suite (a_n) tend vers 0. L'exercice est donc en fait un peu un exercice d'analyse.

Comme pour l'exercice précédent, il peut être utile de faire des dessins pour intuitiver le comportement de la suite.

Une première remarque utile qu'on peut garder pour la suite est que la suite des maximums de blocs de 2025 termes consécutifs est décroissante.

Montrons d'abord qu'il existe des termes de la suite aussi petits qu'on veut. Pour cela, supposons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i > \varepsilon$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons le $M_i = \max(a_{2025i+1}, \dots, a_{2025i+2025})$, c'est-à-dire le maximum d'un bloc de 2025 termes consécutifs. Soit $j \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2025(j+1)$. Alors

$$a_n = \max_{1 \leq i \leq 2025} a_{n-i} - \min_{1 \leq i \leq 2025} a_{n-i} \leq M_j - \varepsilon$$

Donc $M_{j+1} \leq M_j - \varepsilon$.

Donc $M_j \leq M_0 - j\varepsilon$. Donc la suite (M_i) est négative à partir d'un certain rang ce qui est impossible. Contradiction. Ainsi, il existe des termes aussi proches de 0 qu'on veut dans la suite (a_i) .

Maintenant il faut étudier ce qui se passe lorsqu'il y a des grands et des petits termes dans la suite. Pour cela, nous allons montrer le résultat suivant :

Pour tout $n > 2025$, il existe un rang $M \in \mathbb{N}$ à partir duquel $a_i \leq 3a_n$ pour tout $i \geq M$.

Notons que le 3 est ici complètement arbitraire et a pour seul but d'être pris suffisamment grand pour que le raisonnement qui suit soit correct. Ce résultat combiné au résultat du paragraphe précédent permettra directement de conclure que la suite (a_i) tend vers 0 quand i tend vers l'infini.

Soit $n \geq 2026$. Si pour tout $n-2025 \leq i \leq n-1$, $a_i \leq 3a_n$, alors comme on a vu que le maximum de 2025 blocs consécutifs est décroissant, on a déjà montré le résultat voulu. Supposons que le maximum des 2025 termes qui précèdent a_i soit strictement supérieur à $3a_n$. Notons M le maximum de ces 2025 termes et m leur minimum. Alors par définition de la suite, le minimum de ces 2025 termes vérifie $m = M - a_n > 2a_n$. Donc pour tout $j \in \llbracket n+1, n+2024 \rrbracket$,

$$a_j = \max_{1 \leq i \leq 2025} a_{j-i} - \min_{1 \leq i \leq 2025} a_{j-i} \geq a_{n-1} - a_n \geq m - a_n > a_n$$

Donc :

$$a_j = \max_{1 \leq i \leq 2025} a_{j-i} - \min_{1 \leq i \leq 2025} a_{j-i} \leq M - a_n = m$$

Enfin :

$$a_{n+2025} = \max_{1 \leq i \leq 2025} a_{n+2025-i} - \min_{1 \leq i \leq 2025} a_{n+2025-i} = \max_{1 \leq i \leq 2024} a_{n+2025-i} - a_n$$

Or on a vu que pour tout $j \in \llbracket n+1, n+2024 \rrbracket$, $a_j \geq m - a_n$. On en déduit que : $\min_{1 \leq i \leq 2025} a_{n+2026-i} = a_{n+2025}$ puis que $a_{n+2026} = a_n$. Ainsi, on a montré que le maximum des blocs de 2026 termes consécutifs va diminuer de a_n à chaque bloc tant que ce maximum est strictement supérieur à $3a_n$. On en déduit comme voulu qu'à partir d'un certain rang tous les (a_i) sont inférieurs à $3a_n$ ce qui conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 4 (solution élégante mais plus dure)

Une première approche de cet exercice est de se reporter sur l'étude des "petits cas" en inégalités en l'absence d'idées pour $n = 3$. Ainsi, on peut commencer par étudier le cas $n = 2$. Cela nous amène à montrer le lemme suivant :

Soit x, y des nombres réels strictement positifs tels que $xy \geq 1$. Montrer que :

$$\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 1$$

Pour le montrer, on va utiliser la relation $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (xz + yt)^2 + (xt - yz)^2$. Ainsi :

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (x + y)^2 + (xy - 1)^2$$

Or :

$$\begin{aligned} & \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 1\right)^2 - (x+y)^2 \\ &= \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 1 - x - y\right)\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + 1 + x + y\right) \\ &= \left(\frac{x+y}{2} - 1\right)^2 \left(\frac{x+y}{2} + 1\right)^2 = \left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - 1\right)^2 \end{aligned}$$

Or par définition : $\frac{x+y}{2} - 1 \geq xy - 1 \geq 0$

Donc $\left(\frac{x+y}{2} - 1\right)^2 \geq (xy - 1)^2 \geq 0$ ce qui conclut la preuve du lemme.

Ensuite on va pouvoir réutiliser ce lemme pour montrer maintenant l'inégalité de l'exercice. Le rôle des variables étant symétrique, on peut supposer sans perte de généralité que $a \geq b \geq c$. On remarque une certaine ressemblance entre tous les termes du type $(x^2 + 1)$. Pour essayer de l'exploiter, on pose alors $d = \frac{a+b+c}{3}$. On vérifie alors que $ad \geq ac \geq 1$. Il suffit alors de montrer que

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) \leq (d^2 + 1)^4$$

Or d'après le lemme :

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)(d^2 + 1) \leq \left(\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + 1\right)^2 \left(\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + 1\right)^2$$

Or par IAG $(a + d)(b + c) \geq 4abcd \geq 4$. Donc, encore d'après le lemme :

$$\left(\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 + 1\right)^2 \left(\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + 1\right)^2 \leq \left(\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2 + 1\right)^4 = (d^2 + 1)^4$$

ce qui conclut l'exercice.

Cette solution peut sembler un peu parachutée d'où la solution alternative suivante qui illustre une idée souvent utile en inégalités.

Solution n°2 de l'exercice 4 (solution avec la méthode de "se placer dans le cas optimal")

L'idée de la deuxième solution est la suivante : On va montrer que si on fixe la valeur de c et qu'on fixe la valeur de la somme $a + b$, alors le membre de droite reste constant mais le membre de gauche augmente "quand on rapproche a et b ".

De manière plus rigoureuse, cela s'écrit que si $a < b$, alors pour tout $\delta \leq \frac{b-a}{2}$, on a

$$((a + \delta)^2 + 1)((b - \delta)^2 + 1) \geq (a^2 + 1)(b^2 + 1)$$

. On vérifie d'abord que si $\min(ab, bc, ca) \geq 1$, alors on a encore $\min((a + \delta)(b - \delta), (b - \delta)c, c(a + \delta)) \geq 1$

Si l'on est pas encore à l'aise avec les dérivées, on peut développer l'inégalité précédente puis vérifier grâce aux hypothèses données que l'inégalité est bien vérifiée. Je vais préférer ici utiliser la dérivée : Pour cela je pose $s = a + b$ et pour $x \in [0, s]$, $f(x) = (x^2 + 1)((s - x)^2 + 1)$. Il suffit alors de montrer que f est croissante sur $[0, \frac{s}{2}] \cap \{x \in [0, s], x(s - x) \geq 1\}$. On calcule la dérivée :

$$f'(x) = 2x((s - x)^2 + 1) - 2(s - x)(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = x(s - x)(2(s - x) - 2x) + 2x - 2(s - x) = (x(s - x) - 1)(2s - 4x) \geq 0$$

d'après nos hypothèses sur x ce qui montre le résultat voulu.

Supposons maintenant sans perte de généralité que $a \leq b \leq c$. Supposons de plus que b est plus proche de c que de a , l'autre cas se traitant de manière analogue.

Alors d'après le résultat qu'on a démontré, si on fixe c et qu'on fixe la somme $a + b$, alors le terme de droite de l'inégalité est constant quand on rapproche a et b tandis que le terme de gauche augmente. On peut donc rapprocher a et b jusqu'à ce que b soit la moyenne de a et c , puis en fixant b et la somme $a + c$ rapprocher a et c jusqu'à avoir $a = b = c$. Ainsi, pour une somme $a + b + c$ fixée, le terme de gauche est maximal lorsque $a = b = c$, c'est-à-dire que ce cas est en quelque sorte "optimal". De plus, lorsque $a = b = c$, l'inégalité de l'énoncé est encore vérifiée ce qui montre que l'inégalité est toujours vérifiée pour a, b, c que l'on choisit.

Bien sûr, on aurait pu écrire plus rigoureusement le raisonnement précédent explicitant clairement les valeurs intermédiaires de a, b, c par lesquelles on passe en écrivant par exemple que pour certains a', b', c' tels que $a + b + c = a' + b' + c'$ que $(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \leq (a'^2 + 1)(b'^2 + 1)(c'^2 + 1)$. C'est conseillé de faire ça en compétition mais cela aurait ici rendu la présentation de la solution moins claire.

Solution de l'exercice 5

Un exercice plus difficile qu'il n'y paraît. Il faut bien entendu commencer par regarder l'énoncé pour des petites valeurs.

Pour $n = 2$, on a $a_2 \geq \frac{1}{a_1}$, si bien que par IAG la somme est bien ≥ 2 .

Pour $n = 3$, cela se complique. Une observation facile est que si $a_3 \geq 1$, alors $a_1 + a_2 + a_3 \geq 2 + a_3 \geq 3$ comme voulu. Cette remarque nous encourage à procéder par récurrence.

Ainsi, pour l'hérédité, si $a_n \geq 1$, on a déjà gagné. Dans le cas contraire, il est désormais nécessaire de se salir les mains. En passant la relation à l'inverse, on a

$$\frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \leq a_k$$

En sommant et en télescopant (c'est magnifique!) et en utilisant que $\frac{1}{a_n} \geq 1$:

$$a_1 + \dots + a_n \geq \frac{n-1}{a_n} + a_n \geq n-2 + \frac{1}{a_n} + a_n \geq n$$

ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 6

Un algorithme type glouton fonctionne ici pour prouver qu'on peut prendre $C \leq \frac{3}{2}$. Prouvons-le. En prenant tous les $b_i = \lfloor a_i + 1 \rfloor > a_i$, on a nécessairement :

$$\sum_i \frac{1}{b_i} < \sum_i \frac{1}{a_i} = 1$$

On peut maintenant progressivement changer tous b_i en $\lfloor a_i \rfloor < a_i$, à la fin du processus :

$$\sum_i \frac{1}{b_i} > \sum_i \frac{1}{a_i} = 1$$

Il y a donc un moment où la somme vient juste de passer au-dessus de 1, notons i_0 l'indice pour lequel on vient de changer b_{i_0} de $\lfloor a_{i_0} \rfloor + 1$ en $\lfloor a_{i_0} \rfloor$, on a alors :

$$1 < \sum_i \frac{1}{b_i} \leq 1 + \frac{1}{\lfloor a_{i_0} \rfloor} - \frac{1}{\lfloor a_{i_0} \rfloor + 1} = 1 + \frac{1}{(\lfloor a_{i_0} \rfloor)(\lfloor a_{i_0} \rfloor + 1)} \leq \frac{3}{2}$$

avec égalité quand $\lfloor a_{i_0} \rfloor = 1$. Prouvons maintenant que c'est optimal.

On cherche une suite a_i qui minimise optimalement C , ainsi, il faut que l'algorithme glouton précédent soit optimal pour cette suite : il faudrait qu'il n'y ait qu'un seul passage de $\lfloor a_i \rfloor + 1$ à $\lfloor a_i \rfloor$ qui permette d'avoir une somme plus grande que 1 et que ce passage se fasse sur un $\lfloor a_i \rfloor = 1$.

Considérons pour n entier la suite : $a_1 = \dots = a_{n-1} = \frac{4n+1}{2}$ et $a_n = \frac{4n+1}{2n+3}$. Tout d'abord elle correspond à l'énoncé car :

$$\sum_i \frac{1}{a_i} = \frac{2(n-1) + 2n+3}{4n+1} = 1$$

Soit maintenant une suite b_i de l'énoncé telle que

$$1 < \sum_i \frac{1}{b_i} \leq C$$

On remarque tout d'abord que pour $1 \leq i \leq n-1$, on a $b_i = 2n$ ou $2n+1$ et $b_n = 1$ ou 2 . Supposons tout d'abord que $b_n = 2$, on a alors :

$$\sum_i \frac{1}{b_i} \leq \frac{1}{2} + (n-1) \frac{1}{2n} < 1$$

C'est absurde, donc $b_n = 1$, ainsi, on a :

$$\sum_i \frac{1}{b_i} \geq 1 + (n-1) \frac{1}{2n+1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4n+2}$$

En particulier, pour un C qui correspond à l'énoncé on a :

$$1 < \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \leq C$$

D'où, $C \geq \frac{3}{2} - \frac{3}{4n+2}$, en faisant tendre n vers plus l'infini, on a $C \geq \frac{3}{2}$.

Solution de l'exercice 7

Dans un problème de suites, une bonne idée est régulièrement d'introduire d'autres suites.

Posons notamment $d_n = na_n - (a_0 + \dots + a_n)$. L'énoncé réécrit revient à montrer qu'il existe un indice n tel que

$$d_n < 0 \leq d_{n+1}.$$

Autrement dit, il faut montrer que la suite passe du négatif au positif. On étudie pour cela ses variations :

$$d_{n+1} - d_n = (n+1)a_{n+1} - (a_0 + \dots + a_{n+1}) - na_n + (a_0 + \dots + a_n) = n(a_{n+1} - a_n) > 0.$$

D'autre part, $d_1 = -a_0 < 0$, donc la suite (d_n) est une suite strictement croissante d'entiers telle que $d_1 < 0$. Il existe donc un unique indice n tel que $d_n < 0 \leq d_{n+1}$.

Solution de l'exercice 8

On commence par regarder les petits cas. $n = 1$ vérifie clairement la propriété de l'énoncé. Pour $n = 2$ on peut trouver le contre-exemple $(a_1, a_2) = (1, 0)$ et $(b_1, b_2) = (0, 1)$. Pour $n = 3$ ça commence à devenir plus compliqué mais on a beau chercher des contre-exemples la propriété est toujours vérifiée. Passons donc à la solution générale.

Montrons d'abord que pour n pair on pourra toujours trouver un contre-exemple et donc que n pair ne convient pas. Soit n pair. On choisit $a_1 = 1, b_1 = 0$ puis $a_i = 0$ et $b_i = 1$ pour tout $i \geq 2$. Alors $\left| \sum_{k=1}^n x_k a_k \right| = 1$ quelque soit le choix des x_i . De plus $\left| \sum_{k=1}^n x_k b_k \right|$ est un entier impair

pour tout choix de x_i et est par conséquent plus grand ou égal à 1. Donc, quelque soit le choix des x_i , on aura

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^n x_k b_k \right| \geq 2$$

Maintenant on va montrer que tout n impair vérifie la propriété de l'énoncé. Pour cela l'idée va être de séparer en deux groupes les couples (a_i, b_i) de même signe et ceux de signes opposés puis d'appliquer un algorithme glouton. Quitte à réordonner les variables, il existe $l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que pour tout $i \leq l$, a_i et b_i sont de même signe (par convention 0 est à la fois positif et négatif) pour tout $i \geq l+1$, a_i et b_i sont de signe opposé. Supposons de plus que l est impair, le cas où l est pair se traitant de manière analogue. Quitte à réordonner les variables, on peut supposer que $|a_1| \geq |a_2| \geq \dots \geq |a_l|$. On pose alors pour tout i entre 1 et l : x_i de même signe que a_i si i est impair et de signe opposé si i est pair. (si $a_i = 0$ alors on utilise le fait qu'on suppose que a_i et b_i sont de même signe pour définir le signe de a_i puis celui de x_i) Alors, comme (a_i) est décroissante on a d'après les inégalités sur les sommes alternées :

$$0 \leq \sum_{k=1}^l x_k a_k = \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} |a_k| \leq |a_1| \leq 1$$

et comme les a_i et b_i sont de même signe on également :

$$\sum_{k=1}^l x_k b_k = \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} |b_k| = \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} (1 - |a_k|) = 1 - \left(\sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} |a_k| \right)$$

Par commodité, notons $x = \sum_{k=1}^l x_k a_k$. Ainsi, on sait que $0 \leq x \leq 1$ et que $\sum_{k=1}^l x_k b_k = 1 - x$. De plus, remarquons que si l'on remplace tous les x_i par leur opposé, alors on peut remplacer x par $-x$ et $1 - x$ par $-(1 - x)$.

En raisonnant de manière analogue sur les termes d'indice $l+1$ à n (en les réordonnant puis en faisant la somme alternée), on trouve que l'on peut écrire $\sum_{k=l+1}^n x_k a_k = y$

et $\sum_{k=l+1}^n x_k b_k = y$ avec y entre 0 et 1 inclus.

Il reste à montrer que si l'on a 2 couples $(x, 1-x)$ et (y, y) avec $x, y \in [0, 1]$, alors en soustrayant le deuxième couple au premier on obtient $(x-y, 1-x-y)$ et que $|x-y| + |1-x-y| \leq 1$. Or par inégalité triangulaire, en posant $u = x - \frac{1}{2}$ et $v = y - \frac{1}{2}$:

$$|x-y| + |1-x-y| = \left| x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - y \right| + \left| \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2} - y \right| = |u-v| + |u+v| \leq 2 \max(|u|, |v|) \leq 1$$

ce qui conclut l'exercice.

2 Entraînement de mi-parcours

Veillez rédiger chaque problème sur une copie différente. Veillez à rendre tous vos brouillons. Pour chaque copie, indiquez clairement votre nom, le numéro du problème, le numéro de la copie et s'il s'agit d'un brouillon ou d'un propre. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 1

Soit M et n deux entiers strictement positifs. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Bob choisit un ensemble S composé de M n -uplets dont les n éléments sont dans $[0, 1]$. Alice choisit un n -uplet $y_1, \dots, y_n$ tels que $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq 1$, et $x_1, \dots, x_n$ des réels. Bob gagne s'il peut choisir $(z_1, \dots, z_n) \in S$ tel que

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq x_1 z_1 + \dots + x_n z_n.$$

Déterminer, en fonction de n , pour quelle valeur de M Bob peut-il gagner peu importe les choix d'Alice.

Exercice 2

Alice et Bob jouent au jeu suivant. Les sommets d'un 1001-gone régulier sont initialement coloriés en blanc, et l'on pose un jeton sur l'un de ces sommets. À chaque tour, Alice choisit un entier $k \geq 0$ et Bob choisit un sens (horaire ou anti-horaire), et ils déplacent le jeton de k sommets dans ce sens. Si le sommet sur lequel se trouve le jeton à la fin du tour est blanc, le sommet est colorié en rouge.

Déterminer le plus grand nombre de sommets qu'Alice peut garantir de colorier en rouge, peu importe les choix de Bob.

Exercice 3

Soit $k \geq 1$, $a_1, \dots, a_k$ des entiers strictement positifs et P leur produit. On suppose que l'équation

$$n = \sum_{i=1}^k \left\lceil \frac{n}{a_i} \right\rceil$$

admet strictement plus de $P/2$ solutions strictement positives. Montrer qu'elle admet au moins P solutions positives.

Solutions

Exercice 1

Soit M et n deux entiers strictement positifs. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Bob choisit un ensemble S composé de M n -uplets dont les n éléments sont dans $[0, 1]$. Alice choisit un n -uplet $y_1, \dots, y_n$ tels que $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq 1$, et $x_1, \dots, x_n$ des réels. Bob gagne s'il peut choisir $(z_1, \dots, z_n) \in S$ tel que

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq x_1 z_1 + \dots + x_n z_n.$$

Déterminer, en fonction de n , pour quelle valeur de M Bob peut-il gagner peu importe les choix d'Alice.

Solution de l'exercice 1

Montrons que Bob peut gagner si et seulement si $M \geq n + 1$.

Preuve du fait que si Bob peut gagner à coup sûr, alors $M \geq n + 1$:

Supposons que Bob a choisi un certain S lui permettant de gagner à coup sûr. Fixons-nous $i \in \{0, \dots, n\}$, et prenons $x_1 = \dots = x_i = -1$ et $x_{i+1} = \dots = x_n = 1$ (si $i = 0$, tous les x_i valent 1, et si $i = n$, tous les x_i valent -1).

Si Alice choisit ces x_i , et prend $y_1 = \dots = y_i = 0$ et $y_{i+1} = \dots = y_n = 1$ (même convention si $i = 0$ ou n), alors $x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = n - i$. Comme on a supposé que Bob pouvait gagner, alors S contient un n -uplet $(z_1, \dots, z_n)$ tel que

$$x_1 z_1 + \dots + x_n z_n = (z_{i+1} + \dots + z_n) - (z_1 + \dots + z_i) \geq n - i.$$

Or comme les z_i sont dans $[0, 1]$, on a

$$(z_{i+1} + \dots + z_n) - (z_1 + \dots + z_i) \leq (z_{i+1} + \dots + z_n) \leq n - i.$$

On a donc égalité dans l'inégalité : il faut donc avoir $z_1 = \dots = z_i = 0$, et $z_{i+1} = \dots = z_n = 1$. S contient ainsi, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, les n -uplets avec i éléments nuls, puis $n - i$ égaux à 1. Il contient donc au moins $n + 1$ éléments : ainsi $M \geq n + 1$.

Preuve du fait que si $M \geq n + 1$, alors Bob peut gagner à coup sûr :

Vu la preuve précédente, il faut que S contienne tous les n -uplets avec i éléments nuls, puis $n - i$ égaux à 1. On prend donc S contenant ces $n + 1$ éléments, et $M - (n + 1)$ autres éléments (ce qui est possible car il y a une infinité de n -uplets dont les valeurs sont dans $[0, 1]$).

Fixons nous un n -uplet $y_1, \dots, y_n$ tels que $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq 1$, et $x_1, \dots, x_n$ des réels, et montrons qu'il existe $(z_1, \dots, z_n) \in S$ tel que

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq x_1 z_1 + \dots + x_n z_n.$$

Posons, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $(z_1^{(i)}, \dots, z_n^{(i)})$ le n -uplet de S vérifiant $z_1^{(i)} = \dots = z_i^{(i)} = 0$ et $z_{i+1}^{(i)} = \dots = z_n^{(i)} = 1$. Posons en outre, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $d_i = y_i - y_{i-1}$, avec la convention que $y_0 = 0$. On a donc $y_i = d_1 + \dots + d_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et chaque d_i est positif. D'ailleurs, leur somme valant y_n , celle-ci est plus petite que 1.

Choisissons $j \in \{0, \dots, n\}$ tel que $x_1 z_1^{(j)} + \dots + x_n z_n^{(j)}$ est maximal. Ce maximum est positif, car pour $j = n$ la somme est nulle. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_1 y_1 + \dots + x_n y_n &= x_1 d_1 + x_2 (d_1 + d_2) + \dots + x_n (d_1 + \dots + d_n) \\ &= (x_1 + \dots + x_n) d_1 + (x_2 + \dots + x_n) d_2 + \dots + x_n d_n \\ &= d_1 (x_1 z_1^{(0)} + \dots + x_n z_n^{(0)}) + \dots + d_n (x_1 z_1^{(n-1)} + \dots + x_n z_n^{(n-1)}) \\ &\leq (d_1 + \dots + d_n) (x_1 z_1^{(j)} + \dots + x_n z_n^{(j)}) && \text{par définition de } j \\ &\leq (x_1 z_1^{(j)} + \dots + x_n z_n^{(j)}) && \text{par positivité, et car } d_1 + \dots + d_n \leq 1. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $(z_1, \dots, z_n) \in S$ tel que

$$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \leq x_1 z_1 + \dots + x_n z_n.$$

Bob peut donc bien gagner à coup sûr lorsque $M \geq n + 1$.

Exercice 2

Alice et Bob jouent au jeu suivant. Les sommets d'un 1001-gone régulier sont initialement coloriés en blanc, et l'on pose un jeton sur l'un de ces sommets. À chaque tour, Alice choisit un entier $k \geq 0$ et Bob choisit un sens (horaire ou anti-horaire), et ils déplacent le jeton de k sommets dans ce sens. Si le sommet sur lequel se trouve le jeton à la fin du tour est blanche, elle est coloriée en rouge.

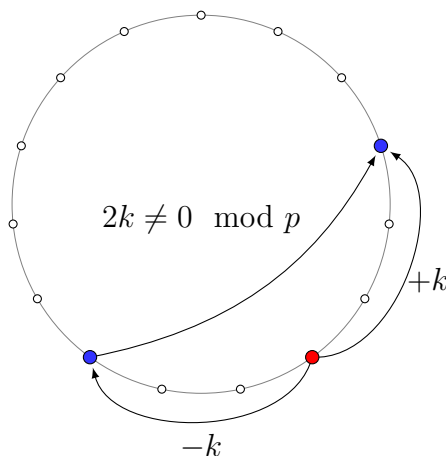
Déterminer le plus grand nombre de sommets qu'Alice peut garantir de colorier en rouge, peu importe les choix de Bob.

Solution de l'exercice 2

Nous allons montrer que la réponse attendue est $\frac{6}{7} \cdot 1001 = 858$. Plus généralement, si l'on remplace 1001 par un nombre impair composé $N \geq 3$ dans l'énoncé, la réponse est $\frac{p-1}{p} \cdot N$, où p est le plus petit facteur premier de N . Dans un premier temps, nous donnerons une stratégie permettant à Bob de conserver au moins $\frac{N}{p}$ sommets en blanc et dans un second temps, nous expliquerons pourquoi Alice peut s'assurer de colorier au moins $\frac{p-1}{p} \cdot N$ sommets en rouge, ce qui conclura.

Partie 1 : la stratégie de Bob.

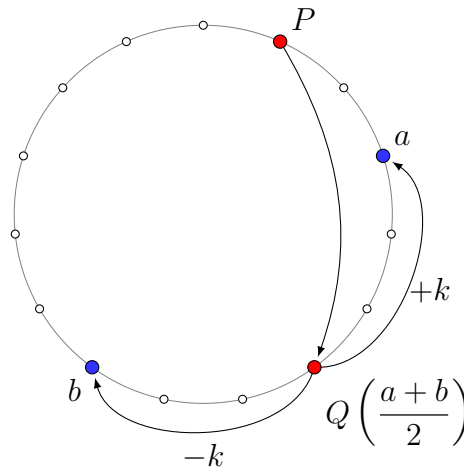
Commençons par numérotter (en les parcourant dans le sens horloger) les sommets du N -gone par les nombres de 0 à $N-1$, en faisant en sorte que le numéro du sommet sur lequel se situe le jeton initialement ne soit pas divisible par p . Puisque p divise N , cela a un sens de considérer les numéros de nos sommets modulo p . La stratégie de Bob consiste alors à ne jamais amener le jeton sur un sommet dont le numéro est divisible par p . Cela est toujours possible, quel que soit l'entier $k \geq 0$ choisi par Alice. En effet, si $p \mid k$, quel que soit le sens choisi par Bob, le numéro du nouveau sommet sur lequel se situera le jeton sera congru à celui de l'ancien sommet modulo p , et le reste est non nul par hypothèse. Sinon, remarquons que la distance séparant les deux sommets où Bob peut amener le jeton vaut $2k \not\equiv 0 \pmod{p}$ car p est impair. Ces sommets ont donc des restes distincts modulo p , et Bob peut donc bien amener le jeton sur un sommet dont le numéro n'est pas divisible par p .

**Partie 2 : la stratégie d'Alice.**

Supposons désormais que la meilleure stratégie d'Alice lui permette de colorier M sommets en rouge quels que soient les choix de Bob (qui joue de façon optimale, c'est-à-dire de

sorte qu'Alice ne puisse pas colorier plus de M sommets). Alice et Bob jouent une telle partie, et après un nombre fini de tours, Alice a donc colorié M sommets et le jeton se situe sur un certain sommet P . Soit S l'ensemble des sommets qui sont restés en blanc. Nous allons montrer que cet ensemble est stable par moyenne, puis qu'un tel ensemble de sommets est nécessairement de taille au plus $\frac{N}{p}$, ce qui conclura.

Commençons par clarifier ce que l'on entend par la moyenne de deux sommets du polygone. Puisque N est impair, 2 est inversible modulo N , et il est donc possible de donner un sens à $\frac{a+b}{2} \pmod{N}$, si a et b sont les numéros de deux sommets. Le sommet correspondant, appelé le milieu, sera à égale distance des deux sommets précédents, et Alice peut donc garantir d'atteindre l'un des deux sommets depuis leur milieu.



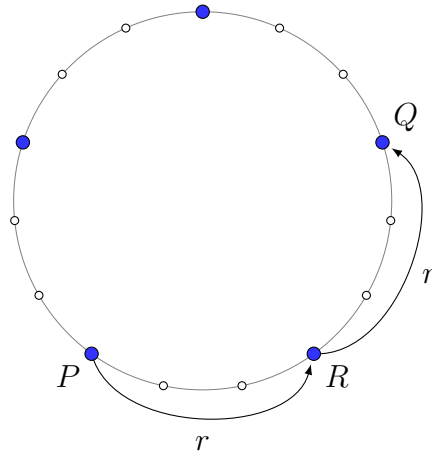
Remarquons désormais que par symétrie, Alice peut s'assurer d'atteindre au moins M sommets différents depuis P . Or, par hypothèse, Bob peut l'empêcher d'atteindre un nouveau sommet blanc. Ainsi, cet argument montre qu'à n'importe quel moment de la partie où M sommets ont été coloriés en rouge, Alice peut s'assurer de repasser par tous les sommets qui ont été coloriés en rouge. Or, s'il existait deux sommets de S dont le milieu Q n'est pas dans S , Alice pourrait s'assurer d'amener le jeton sur le sommet Q , puis sur un sommet appartenant à S , ce qui est absurde car elle pourrait alors colorier $> M$ sommets en rouge. L'ensemble S est donc bien stable par moyenne. Montrons que cela implique qu'il est très régulier.

Nous savons que S est un ensemble contenant au moins 2 éléments (puisque l'on a déjà vu que Bob pouvait garder au moins $\frac{N}{p}$ sommets en blanc) et qui ne contient pas tous les sommets du polygone (Alice peut colorier au moins un sommet). Par abus de notation, nous considérons que $S \subset \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Fixons un sommet $s_0 \in S$. Lorsque s parcourt les éléments de S , $\frac{s_0+s}{2}$ parcourt autant d'éléments distincts de S . Tout élément de S s'écrit donc de manière unique sous cette forme. En particulier, si $t \in S$, le symétrique de t par rapport à s_0 le long des sommets du polygone est dans S également. Supposons désormais que s_0 et $t = s_0 + r$ sont deux éléments distincts de S minimisant le nombre r de sommets les séparant. En faisant des réflexions successives, on obtient que tous les sommets de la forme $s_0 + k \cdot r$ sont dans S , pour $k \in \mathbb{N}$. En particulier, $s_1 = s_0 + \lfloor \frac{N}{r} \rfloor \cdot r$ est dans S et est à distance $< r$ de s_0 , donc $s_0 = s_1$ par minimalité de r . Cela montre que $r \mid N$, et $r > 1$, donc $r \geq p$. Toujours par minimalité de r , les éléments de S sont exactement de la forme $s_0 + k \cdot r$, et sont donc au nombre de $\frac{N}{r} \leq \frac{N}{p}$.

En conclusion, $M \geq \frac{p-1}{p} \cdot N$, et cela clôture notre démonstration.

Solution n°2 de l'exercice 2

Preuve alternative de la régularité de S : Puisque N est impair et composé, $\frac{N}{p} \geq 3$, donc S contient au moins 3 éléments. On reprend la preuve en supposant que S est stable par moyenne. Si P et Q sont deux éléments consécutifs (le long du cercle) de S , ils ont un nombre pair de sommets entre eux (sinon le milieu serait dans S aussi). Mais si R est tel que P , Q et R sont des éléments consécutifs de S , il y a donc un nombre impair de sommets entre P et R . On en déduit donc que Q est à égale distance entre P et R . Cela montre bien que deux éléments consécutifs sont toujours à une certaine distance r , qui doit donc diviser N .



Exercice 3

Soit $k \geq 1$, $a_1, \dots, a_k$ des entiers strictement positifs et P leur produit. On suppose que l'équation

$$n = \sum_{i=1}^k \left\lceil \frac{n}{a_i} \right\rceil.$$

admet strictement plus de $P/2$ solutions strictement positives. Montrer qu'elle admet au moins P solutions positives.

Solution de l'exercice 3

On suppose que les a_i remplissent les conditions de l'énoncé. Soit n une éventuelle solution. Les inégalités usuelles sur les parties supérieures indiquent

$$n = \sum_{i=1}^k \left\lceil \frac{n}{a_i} \right\rceil \geq \sum_{i=1}^k \frac{n}{a_i}.$$

On obtient que $1 \geq \sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i}$. Si $1 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i}$, alors $n = \ell P$ est une solution de l'équation pour tout entier ℓ , puisque chaque terme de la somme est alors entier et on a égalité dans l'inégalité précédente. Ceci implique que l'équation admet une infinité de solutions.

On suppose dans la suite que $1 > \sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i}$ et on pose $\delta = 1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i}$. On note que δ peut s'écrire sous la forme $\delta = \frac{a}{P}$.

Étape 1 : Les a_i sont premiers entre eux deux à deux.

On pose pour tout entier n ,

$$f(n) = n - \sum_{i=1}^k \left\lceil \frac{n}{a_i} \right\rceil.$$

Si l'on pose $M = \text{ppcm}(a_1, \dots, a_k)$, alors pour tout entier n , on vérifie que

$$f(n + M) = n + M - \sum_{i=1}^k \left\lceil \frac{n + M}{a_i} \right\rceil = n + M - \sum_{i=1}^k \left\lceil \frac{n}{a_i} \right\rceil - \sum_{i=1}^k \frac{M}{a_i} = f(n) + M\delta.$$

Ainsi, pour tout résidu r modulo M , la suite $(f(r + \ell M))_\ell$ est une suite strictement croissante à valeur entière, elle prend donc la valeur 0 au plus une fois. En particulier, l'équation de l'énoncé admet au plus une solution dans la classe de congruence de chaque résidu modulo M et donc au plus M solutions. On a donc l'inégalité $M > P/2$. Or, M est un diviseur de P , donc on a exactement $M = P$, ce qui implique que les a_i sont premiers entre eux deux à deux.

Étape 2 : On a $a \leq 2$.

Puisque les a_i sont premiers entre eux, a est premier avec P . En effet, soit p un nombre premier qui divise P . Soit i_0 l'unique indice tel que p divise a_{i_0} . On a donc que $\prod_{j \neq i} a_j$ est divisible par p si et seulement si $i \neq i_0$. Or,

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{a_i} = \frac{\sum_{i=1}^k \prod_{j \neq i} a_j}{P} = \frac{P - a}{P},$$

donc p ne divise pas $P - a$, donc ne divise pas a .

Pour tout indice i , on note r_i l'entier tel que $\left\lfloor \frac{n}{a_i} \right\rfloor = \frac{n}{a_i} + \frac{r_i}{a_i}$. Notons que r_i est l'unique entier vérifiant $0 \leq r_i \leq a_i - 1$ et $r_i \equiv -n \pmod{a_i}$. L'équation devient

$$n = \sum_{i=1}^k \frac{n}{a_i} + \sum_{i=1}^k \frac{r_i}{a_i},$$

ou encore, après réarrangement,

$$n = \frac{r_1 \frac{P}{a_1} + \dots + r_k \frac{P}{a_k}}{a}.$$

Si n est une solution, la fraction de droite doit être entière. Réciproquement, pour tout choix de $(r_1, \dots, r_k)$ tels que le membre de droite est entier, l'entier obtenu n vérifie $n \equiv -r_i \pmod{a_i}$ et est solution de l'équation, de sorte que deux n -uplets $(r_1, \dots, r_k)$ distincts fournissent deux entiers n distincts. Ainsi, le nombre de solutions à l'équation correspond au nombre de k -uplets $(r_1, \dots, r_k)$ vérifiant les encadrements annoncés et tels que la fraction de droite est un entier, puisqu'il y a au plus une solution dans chaque classe modulo P .

Fixons $r_1, \dots, r_{k-1}$ des entiers vérifiant les encadrements $0 \leq r_i \leq a_i - 1$ pour tout i . Pour que la fraction de droite soit un entier, il faut et il suffit que

$$r_k \frac{P}{a_k} \equiv -r_1 \frac{P}{a_1} - \dots - r_{k-1} \frac{P}{a_{k-1}} \pmod{a}.$$

Notons que a est premier avec P donc avec P/a_k , de sorte que P/a_k est inversible modulo a . Ainsi, le nombre de r_k vérifiant la congruence et compris entre 0 et $a_k - 1$ est majoré par $\left\lceil \frac{a_k}{a} \right\rceil$. Comme il y a au plus $a_1 \dots a_{k-1}$ façons de choisir $(r_1, \dots, r_{k-1})$, on obtient la majoration

$$\frac{P}{2} < a_1 \dots a_{k-1} \left\lceil \frac{a_k}{a} \right\rceil = P \frac{1}{a_k} \left\lceil \frac{a_k}{a} \right\rceil.$$

On déduit que $\frac{a_k}{2} < \left\lceil \frac{a_k}{a} \right\rceil < \frac{a_k}{a} + 1$. Notons que si $a \geq 3$, cette inégalité implique que $a_k < 6$ et on vérifie à la main que l'inégalité $\frac{a_k}{2} < \left\lceil \frac{a_k}{3} \right\rceil$ n'a pas de solutions pour $a_k = 1, \dots, 5$. On a donc montré que $a = 1$ ou $a = 2$.

Étape 3 : Conclusion

Si $a = 2$: Comme a est premier avec P , a est premier avec les a_i , donc les a_i sont impairs. Le numérateur de la fraction dans l'expression de n est alors de la même parité que $r_1 + \dots + r_k$. Parmi les k -uplets $(r_1, \dots, r_k)$ vérifiant les encadrements nécessaires, on note A l'ensemble de ceux dont la somme est pair et B l'ensemble de ceux dont la somme est impaire. On désire montrer que $A < \frac{P}{2}$. On peut pour cela (entre autres méthodes telles qu'une récurrence sur k), considérer l'égalité entre séries génératrices suivante :

$$\sum_{(r_1, \dots, r_k) \in A} X^{r_1 + \dots + r_k} + \sum_{(r_1, \dots, r_k) \in B} X^{r_1 + \dots + r_k} = \prod_{i=1}^k \left(\sum_{r_i=0}^{a_i-1} X^{r_i} \right) = \prod_{i=1}^k \frac{X^{a_i} - 1}{X - 1}.$$

En évaluant cette égalité en $X = -1$, le côté gauche vaut $|A| - |B|$ tandis que le côté droit vaut 1 (les a_i sont impairs donc chaque terme du produit vaut 1). On déduit que $|A| = \frac{P+1}{2}$. Or, $n = 0$ n'est pas parmi les $P/2$ solutions de l'équation données par l'énoncé, donc les $(r_1, \dots, r_k)$ donnant des solutions sont parmi $A \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Ainsi, il y a $(P-1)/2$ solutions dans ce cas, ce qui contredit l'énoncé.

Si $a = 1$: Alors le numérateur de la fraction dans l'expression de n est toujours un multiple de a , donc n est solution pour chaque $(r_1, \dots, r_k)$, ce qui implique qu'il y a exactement $a_1 \dots a_k = P$ solutions dans ce cas.

3 Deuxième partie

1 Géométrie : géométrie dynamique (Aurélien)

En stand-by...

2 Algèbre : Problèmes de niveau P2 ou "Résoudre des exos c'est surfait" (Antoine)

Exercice 1

(A3 2015)

Soit n un entier fixé. Trouver la valeur maximale de

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2n} (j - i - n)x_i x_j,$$

où les x_i , $1 \leq i \leq 2n$ varient entre -1 et 1 (inclus).

Exercice 2

(A3 2018)

Soit S un ensemble d'entiers strictement positifs. Montrer qu'au moins une des deux assertions suivantes est vraie :

1. Il existe deux ensembles finis distincts $F, G \subset S$ tels que

$$\sum_{x \in F} \frac{1}{x} = \sum_{x \in G} \frac{1}{x}$$

2. Il existe un nombre rationnel $r \in]0, 1[$ tel que pour tout sous-ensemble fini $F \subset S$,

$$\sum_{x \in F} \frac{1}{x} \neq r$$

Exercice 3

(P5 2009)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$(a, f(b), f(f(a) + b - 1))$$

soit les longueurs d'un triangle non-dégénéré.

Exercice 4

(P2 entraînement 2023)

Déterminer la plus grande constante $C > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout 2025-uplet $(a_1, a_2, \dots, a_{2025})$ de réels strictement positifs deux à deux distincts, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \dots + \frac{a_{2025}}{|a_1 - a_2|} > C$$

Exercice 5

(A5 2022)

Trouver tous les entiers $n \geq 2$ tels qu'il existe des réels $a_1 < \dots < a_n$ et un réel $r > 0$ tels que les ensembles

$$\{a_j - a_i, j > i\} \text{ et } \{r^k, 1 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}\}$$

soient égaux.

Solution de l'exercice 1

Elle est moche cette expression hein? Appelons-la E , comme ça elle existe plus et elle fait plus peur.

On teste les petits cas et on se rend compte de trucs intéressants : E a l'air d'être maximale lorsque $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, \dots$, et que la valeur maximale est $n(n-1)$.

Un truc qu'on peut alors commencer par se demander est si c'est facile de montrer qu'on doit forcément avoir $x_i = \pm 1$, comme c'est des fois le cas dans ce genre d'exercice. La réponse ici est oui. En effet, si on fixe tous les x_i sauf un certain x_{i_0} et qu'on voit E comme une fonction de x_{i_0} , c'est une fonction affine. Ainsi, elle atteint son maximum aux extrémités de son intervalle de définition. On suppose donc que $x_i = \pm 1$ pour tout i .

Il va forcément falloir réécrire cette expression, sinon on va pas s'en sortir. Un truc qu'on peut essayer est de dire que $Nx_i x_j$ veut dire que $x_i x_j$ apparaît N fois dans la somme. On comprend aussi $nx_i x_j$ pas trop mal, c'est les doubles produits dans l'expression du carré de la somme des x_i (avec un coeff mais bref).

Essayons donc de comprendre la partie $(j-i)x_i x_j$. D'habitude on imagine la somme des $x_i x_j$ comme un triangle isocèle rectangle de côté $2n$ avec $x_i x_j$ écrit aux coordonnées (i, j) . Et si maintenant on empilait juste les $x_i x_j$ $j-i$ fois sur ce triangle? On obtient alors une pyramide (à base triangulaire). Si on la regarde de profil et qu'on la découpe selon les diagonales (voir figure...) et qu'on a assez d'imagination, on obtient alors la formule suivante :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq 2n} (j-i)x_i x_j = \sum_{k=1}^{2n-1} (x_1 + x_2 + \dots + x_k)(x_{k+1} + \dots + x_{2n}).$$

J'ai essayé de décrire une des manières plausibles d'obtenir cette formule, il y en a d'autres. Je pense néanmoins que ce n'est pas complètement stupide de se rappeler vaguement de cette formule, ainsi que potentiellement la technique de réarrangement de sommes en faisant des dessins en 3 (ou plus?) dimensions. Appelons alors $a_k = x_1 + \dots + x_k$, et $b_k = x_{k+1} + \dots + x_{2n}$ et tant qu'on y est appelons aussi $S = a_k + b_k = x_1 + \dots + x_{2n}$. Pour la suite il sera pratique de voir cette somme comme allant jusqu'à $2n$ et non $2n-1$, le dernier terme est nul vu que $b_{2n} = 0$. On triture alors l'expression E un peu pour faire apparaître du $a_k + b_k$:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{k=1}^{2n} a_k b_k - \frac{n}{2} \left(S^2 - \sum x_i^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2n} (a_k + b_k)^2 - (a_k - b_k)^2 - \frac{n}{2} (S^2 - 2n) \\ &= n^2 - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2n} (a_k - b_k)^2. \end{aligned}$$

(Rappelons qu'on a $x_i^2 = 1$). Maintenant chaque $a_k - b_k$ est un entier pair, et deux termes consécutifs ne peuvent pas être égaux, puisque ça voudrait dire que $x_k = 0$. Ainsi, parmi deux termes l'un au moins est plus grand que $2^2 = 4$, et en combinant on obtient bien

$$E \leq n^2 - n$$

comme voulu. On a par ailleurs égalité quand $a_k - b_k$ oscille entre 0 et ± 2 , ce qui est bien le cas avec $x_i = (-1)^i$.

Solution de l'exercice 2

On raisonne bien sûr par contradiction, auquel cas la fonction

$$F \mapsto \sum_{x \in F} \frac{1}{x}$$

est injective, et surjective sur les rationnels de $]0, 1[$. Ainsi, on a une bijection entre une sous-partie des parties finies de S et les rationnels de $]0, 1[$. Pour un rationnel $r \in]0, 1[$, on pose alors $F(r)$ l'unique sous-ensemble fini de S tel que

$$\sum_{x \in F(r)} \frac{1}{x} = r.$$

Bien sûr l'idée est de bidouiller avec des éléments de S pour aboutir à une contradiction. Un truc qu'on peut par exemple remarquer est que si on a $r < 1$ et $a \in S \setminus F(r)$, si on ajoute $1/a$ à r et qu'on reste en dessous de 1 alors $F(r + 1/a) = F(r) \cup \{a\}$ par unicité. Prenons donc $a, b \in S$, mettons tels que $a < b$, et regardons $r = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$. Par la remarque précédente, si $F(r)$ ne contient pas b , alors $F(r + 1/b) = F(1/a)$ devrait contenir b . Seulement on doit avoir $F(1/a) = \{a\}$: ce serait une contradiction ! Ainsi $F(r)$ doit contenir b . En particulier, $r \geq \frac{1}{b}$, autrement dit $2a \leq b$. Seulement, cet inégalité doit être vraie à partir du moment où $a, b \in S$ sont tels que $a < b$! Ainsi si on pose $a_1 < a_2 < \dots$ les éléments de S , on doit avoir $a_{n+1} \geq 2a_n$ pour tout n , et donc $u_n \geq 2^n$. Mais alors, comme

$$\sum_n 2^n = 1,$$

si on n'avait pas égalité pour tous les termes, on aurait

$$A = \sum_{x \in S} \frac{1}{x} < 1,$$

et on pourrait donc trouver un rationnel plus petit que 1 plus grand que A , qui ne pourrait donc certainement pas être de la forme $\sum_{x \in F} \frac{1}{x}$ avec $F \subset S$. Ainsi $u_n = 2^n$ pour tout n . La contradiction vient alors du fait que si on prend une somme finie de puissances négatives de 2, on aura forcément un nombre dyadique, de la forme $\frac{a}{2^n}$ avec a impair. Seulement, des rationnels ne peuvent pas s'écrire sous cette forme, par exemple $\frac{1}{3}$.

Solution de l'exercice 3

Bon, c'est une condition un peu bizarre tout de même... Un truc qu'on peut remarquer est que si l'un des nombres du triangle est égal à 1, les deux autres doivent être égaux pour satisfaire la condition de non-dégénérescence. Posons donc $a = 1$! On obtient alors $f(b) =$

$f(f(1) + b - 1)$. Si on pose $c = f(1) - 1$, on obtient donc que f est c -périodique. Si $c \neq 0$ on obtient alors que f est bornée, ce qui pose problème si on prend a très grand. Ainsi $f(1) = 1$. On peut maintenant poser $b = 1$, vu qu'on sait que mettre des 1 dans le triangle c'est cool! On obtient alors $a = f(f(a))$, donc f est une involution. En particulier, f est bijective.

Bon ça c'est fait mais maintenant c'est déjà un peu plus dur de trouver des trucs pour avoir 1 dans le triangle. Après 1 le nombre à essayer est... 2? On trouve alors que $|f(f(2) + b - 1) - f(b)| < 2$. Posons $k = f(2) - 1$. Comme f est injective, $f(2) \neq 1$, donc $k \neq 0$. En particulier $f(b + k) \neq f(b)$, et $|f(b + k) - f(b)| = 1$. Remarquons que cette différence est de signe constant sur les classes modulo k . En effet, si pour une certaine valeur de b on a $f(b + k) - f(b) = 1$ et $f(b + 2k) - f(b + k) = -1$ alors $f(b + 2k) = f(b)$, contredisant l'injectivité. Le cas $f(b + k) - f(b) = -1$ est identique. À présent, si on avait $f(b + k) - f(b) = -1$ pour une certaine valeur de b , on aurait donc $f(b + tk) = f(b) - t$, contredisant le fait que f est à valeurs positives pour t suffisamment grand. On a donc montré que $f(b + k) = f(b) + 1$ pour tout b . Il va maintenant encore y avoir un problème d'injectivité si $k > 1$. En effet, les nombres de la forme $f(1 + tk) = f(1) + t = t + 1$ décrivent l'entièreté de $\mathbb{N}$, et il n'y a plus de place pour les autres nombres (plus formellement, $f(1 + (f(2) - 1)k) = f(2)$ mais $2 \not\equiv 1 + (f(2) - 1)k \pmod{k}$, contredisant l'injectivité). Enfin, on a $k = 1$, et on obtient $f(1 + tk) = f(1 + t) = 1 + t$ pour tout $t \geq 1$. Comme on a aussi $f(1) = 1$, on a $f = \text{id}$.

Et bien sûr on n'oublie pas de vérifier la solution! Ici, le triplet $(a, b, a + b - 1)$ est bien toujours un triangle non dégénéré.

Solution de l'exercice 4

(Corrigé "emprunté" au corrigé de l'entraînement du groupe E 2023.)

Réponse : 1013

On commence par montrer que $C \leq 1013$.

Pour cela, on se donne $0 < \varepsilon$ suffisamment petit et on pose

$$a_1 = \varepsilon^2, a_2 = 1, a_3 = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_{2i} = (i - 1)\varepsilon, a_{2i+1} = 1 + i\varepsilon \quad \forall 2 \leq i \leq 1012$$

pour laquelle on vérifie que les termes de la suite sont deux à deux distincts.

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \dots + \frac{a_{2025}}{|a_1 - a_2|} \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + \frac{1}{1 + \varepsilon - \varepsilon} + \frac{1 + \varepsilon}{1} + \sum_{i=2}^{1011} \left(\frac{(i - 1)\varepsilon}{1 + i\varepsilon - i\varepsilon} + \frac{1 + i\varepsilon}{1 + (i + 1)\varepsilon - i\varepsilon} \right) \\ &\quad + \frac{1011\varepsilon}{1 + 1012\varepsilon - \varepsilon^2} + \frac{1 + 1012\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \\ &= \varepsilon + 1 + 1 + \varepsilon + \sum_{i=2}^{1011} \left((i - 1)\varepsilon + 1 + \underbrace{\frac{(i - 1)\varepsilon}{1 + \varepsilon}}_{< (i - 1)\varepsilon} \right) + \underbrace{\frac{1011\varepsilon}{1 + 1012\varepsilon - \varepsilon^2}}_{< 1011\varepsilon} + \underbrace{\frac{1 + 1012\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}}_{< 1 + 1013\varepsilon} \\ &< 1013 + \left(\frac{1012 \times 1013}{2} + 2 \right) \varepsilon \end{aligned}$$

où chacune des inégalités est satisfaite pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Ainsi, pour tout $C' > 1013$, on dispose de $(a_1, \dots, a_{2025})$ tel que l'expression du membre de gauche est inférieur à C' . On a donc bien $C \geq 1013$.

On démontre désormais que $C \geq 1013$. Soit $(a_1, \dots, a_{2025})$ un ensemble de réels strictement positifs et distincts. Pour simplifier la notation, on pose $a_{2026} = a_1$ et $a_{2027} = a_2$

Pour tout i , on pose $f(i) = a_{i+1}$ si $a_{i+1} > a_{i+2}$ et $f(i) = i + 2$, de sorte que $\frac{a_i}{|a_{i+1} - a_{i+2}|} \geq \frac{a_i}{a_{f(i)}}$.

La suite $(f^{(n)}(1))_n$ étant à valeurs dans $\{1, \dots, 2025\}$, de sorte que l'on dispose de $r < s$ tel que $f^{(r)}(1) = f^{(s)}(1)$. Quitte à translater la suite, on peut supposer que $r = 0$. La suite est donc périodique, on note p sa période. Puisque $|f(i) - i| \leq 2$, on a $2p \geq 2025$ de sorte que $p \geq 1013$.

On peut alors conclure par l'inégalité des moyennes :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \dots + \frac{a_{2025}}{|a_1 - a_2|} \geq \sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_{f(i)(1)}}{a_{f(i+1)(1)}} \geq p \sqrt[p]{\prod \frac{a_{f(i)(1)}}{a_{f(i+1)(1)}}} = p \geq 1013$$

Remarque : Le problème reste vrai si les réels ne sont plus supposés deux à deux distincts (mias en imposant que le membre de gauche soit bien défini). La construction peut alors être simplifiée par

$$a_1 = \varepsilon^2, a_2 = 1, a_3 = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_{2i} = \varepsilon, a_{2i+1} = 1 \quad \forall 2 \leq i \leq 1012$$

Solution de l'exercice 5

(Corrigé "emprunté" au corrigé du test d'avril 2023, où ce problème est apparu)

En traitant les petits cas, on trouve que 2 et 3 sont solution. Pour 2 il n'y a vraiment rien à faire, prendre $r = 1$ et $a_2 = a_1 + 1$ marche. Pour $n = 3$, il faut un nombre tel que $r^3 = r^2 + r$, et prendre $r = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ marche. On peut alors poser $a_1 = 0$, $a_2 = r$ et $a_3 = r^2 = r + 1$, et ça marche.

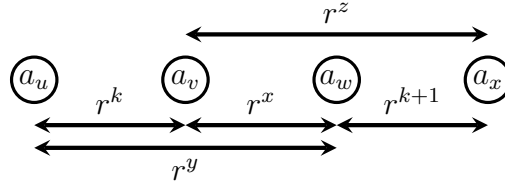
Si on triture les moins petits cas, on trouve que 4 fonctionne également, en prenant pour r une racine entre 1 et 2 du polynôme $x^3 - x - 1$, qui existe par TVI. Si on pose alors $a_1 = 0$, $a_2 = r$, $a_3 = r + r^2$ et $a_4 = r + r^2 + r^3$, on a donc $a_3 - a_1 = r(r + 1) = r^4$, $a_4 - a_2 = r^2 + r^3 = r^5$ et $a_4 - a_1 = r^3 + r(1 + r) = r^3 + r^4 = r^3(1 + r) = r^6$, comme espéré. Par contre, pour $n \geq 5$ on a déjà plus de problèmes.

En pratique, on pouvait trouver les constructions ci-dessus par étude exhaustive des valeurs possibles pour les différences $a_j - a_i$. Cependant, lorsque $n \geq 5$, on n'a guère envie de continuer sur cette lancée avec $n(n-1)/2 \geq 10$ différences à traiter. On suppose donc que l'on dispose d'une solution $n \geq 5$, ainsi que de réels $r > 0$ et $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ adéquats.

Posons $t = n(n-1)/2$. Quitte à remplacer r par $1/r$ et chaque nombre a_i par a_i/r^{t+1} , on suppose que $r \geq 1$. En outre, puisque $a_3 - a_1 > a_2 - a_1$, on sait même que $r > 1$. Désormais, à chaque entier $k \leq t$, on associe l'intervalle $\mathcal{I}(k) = \{i, i+1, \dots, j-1\}$ pour lequel $a_j - a_i = r^k$. Lorsque l'on scinde un intervalle $\mathcal{I}(k)$ en deux sous-intervalles $\mathcal{I}(\ell)$ et $\mathcal{I}(\ell')$, on constate immédiatement que $r^k = r^\ell + r^{\ell'}$.

Supposons maintenant qu'il existe un entier k pour lequel l'ensemble $\mathcal{I}(k) \cup \mathcal{I}(k+1)$ n'est pas un intervalle. Quitte à remplacer chaque nombre a_i par $-a_i$, il existe quatre entiers $u < v < w < x$ tels que $r^k = a_v - a_u$ et $r^{k+1} = a_x - a_w$. Soit alors x, y et z les entiers tels que

$r^x = a_w - a_v$, $r^y = a_w - a_u$ et $r^z = a_x - a_v$. Comme $r^y = r^k + r^x < r^{k+1} + r^x = r^z$, on sait que $z \geq y + 1$, de sorte que $r^{k+1} + r^x = r^z \geq r^{y+1} = r^{k+1} + r^{x+1}$, ce qui est absurde. Ainsi, l'ensemble $\mathcal{I}(k) \cup \mathcal{I}(k+1)$ est toujours un intervalle.



Par ailleurs, la bijection réciproque $\mathcal{I}^{-1}$ de $\mathcal{I}$ est croissante : lorsque $\mathcal{I}(k) \subseteq \mathcal{I}(\ell)$, on sait que $k \leq \ell$. Par conséquent, et quitte à remplacer chaque terme a_i par $-a_i$, les intervalles $\mathcal{I}(1)$ et $\mathcal{I}(2)$ sont des singletons voisins, de la forme $\{k\}$ et $\{k+1\}$.

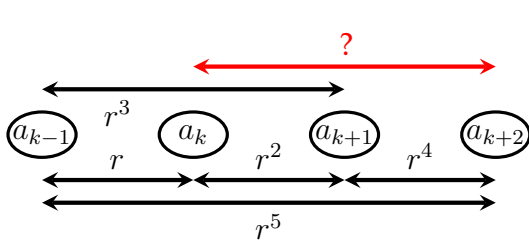
Soit ℓ le plus grand entier pour lequel $\mathcal{I}(\ell+1) = \{k+\ell\}$. L'intervalle $\mathcal{I}(\ell+2)$ ne peut contenir, parmi éventuels ses sous-intervalles stricts, que les singletons $\{k\}, \{k+1\}, \dots, \{k+\ell\}$. En outre, $\mathcal{I}(\ell+2)$ ne coïncide avec aucun des singletons $\{k\}, \{k+1\}, \dots, \{k+\ell+1\}$. Or, $\mathcal{I}(\ell+2) \cup \{k+\ell\}$ est un intervalle, donc $\mathcal{I}(\ell+2)$ contient l'un des trois entiers $k+\ell-1, k+\ell$ et $k+\ell+1$. Par conséquent, il existe un entier a , égal à $\ell-2$ ou à $\ell-1$, tel que $\mathcal{I}(\ell+2) = \{k+a, k+a+1\}$. On note alors ℓ' l'entier $\mathcal{I}^{-1}(\{k, k+1\})$. Puisque $r^1 + r^2 = r^{\ell'} \geq r^\ell = r^{a+1} + r^{a+2}$, on sait que $a = 0$. Ainsi, $\mathcal{I}(\ell+2) = \{k, k+1\}$ et ℓ est égal à 1 ou à 2.

— Si $\ell = 1$, alors $r + r^2 = r^3$. Cette situation est pour l'instant analogue au cas $n = 2$.

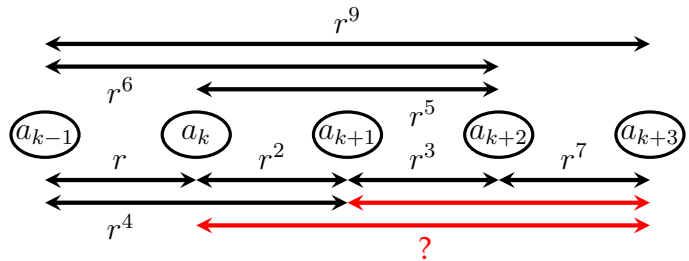
En outre, l'intervalle $\mathcal{I}(4)$ est un singleton $\{k-1\}$ ou $\{k+2\}$, et sa réunion disjointe avec $\mathcal{I}(3)$ forme un intervalle $\mathcal{I}(m)$ égal à $\{k-1, k, k+1\}$ ou à $\{k, k+1, k+2\}$, pour lequel $r^m = r^3 + r^4 = r^2(r + r^2) = r^5$. Mais alors $\mathcal{I}(5)$ compte 6 sous-intervalles, ce qui est impossible.

— Si $\ell = 2$, alors $r + r^2 = r^4$. On en déduit immédiatement que $r^2 + r^3 = r^5$ et $r^3 + r^4 = r^6$, donc que $\mathcal{I}(5) = \{k+1, k+2\}$ et $\mathcal{I}(6) = \{k, k+1, k+2\}$. Cette situation est pour l'instant analogue au cas $n = 3$.

Ainsi, l'intervalle $\mathcal{I}(7)$ est un singleton $\{k-1\}$ ou $\{k+3\}$, et sa réunion disjointe avec $\mathcal{I}(6)$ forme un intervalle $\mathcal{I}(m)$ égal à $\{k-1, k, k+1, k+2\}$ ou à $\{k, k+1, k+2, k+3\}$, pour lequel $r^m = r^6 + r^7 = r^5(r + r^2) = r^9$. Par conséquent, $\mathcal{I}(9)$ compte 10 sous-intervalles, ce qui est impossible.



Cas $\ell = 1$ et $\mathcal{I}(4) = \{k+2\}$



Cas $\ell = 2$ et $\mathcal{I}(7) = \{k+3\}$

En conclusion, nul entier $n \geq 5$ ne convient, et les solutions sont donc $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.

3 Arithmétique : TN combi (Emilhan et Mano)

Combinatorial Nullstellensatz

Théorème 1.

Si $P(x_1, \dots, x_n)$ est un polynôme à coefficients réels de degré $\sum_{i=1}^n d_i$ possédant un monôme dominant (c'est-à-dire de degré maximal) de degré $(d_1, \dots, d_n)$ et si les S_i sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tel que $|S_i| \geq d_i + 1$, alors il existe des x'_i dans S_i tels que $P(x'_1, \dots, x'_n) \neq 0$.

Remarque 2. On peut appliquer le combinatorial Nullstellensatz sur n'importe quel corps, et donc en particulier sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lorsque p est un nombre premier. Dans ce cas, il est d'autant plus important de vérifier que le coefficient dominant d'un polynôme que l'on expliciterait est non nul.

Exercices

Exercice 1

Deux nombres distincts sont écrits sur chaque sommet d'un 2026-gone. Montrer que l'on peut retirer un nombre par sommet de sorte que deux nombres écrits sur des sommets consécutifs soient toujours distincts.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$. On écrit n nombres réels au tableau. Une opération consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, et à les remplacer tous les deux par $\frac{a+b}{2}$. Déterminer tous les nombres naturels $n \geq 1$ tels que quels que soient les nombres écrits initialement au tableau, il existe une suite d'opérations permettant de rendre tous les nombres égaux.

Exercice 3

Soit p un nombre premier et $a_1, \dots, a_p$ des nombres entiers. Montrer qu'il existe $k \geq 0$ tel que les nombres

$$a_1 + 1 \cdot k, \quad a_2 + 2 \cdot k, \quad \dots, \quad a_p + p \cdot k$$

prennent au moins $\frac{p}{2}$ valeurs différentes modulo p .

Exercice 4

Trouver tous les $n \geq 2$ ayant la propriété suivante : quels que soient des nombres entiers $a_1, \dots, a_n$ tels que $n \nmid a_1 + \dots + a_n$, il existe un indice $1 \leq i \leq n$ tel qu'aucun des nombres $a_i, a_i + a_{i+1}, \dots, a_i + \dots + a_{i+n-1}$ ne soient divisibles par n , où l'on prend par convention $a_{n+k} = a_k$ pour tout $1 \leq k \leq n-1$.

Exercice 5

- (*) Soit $n \geq 1$ un entier naturel, et $(a_i)_{1 \leq i \leq 2n-1}$ des entiers. Montrer qu'il existe un sous-ensemble I de $\llbracket 1, \dots, 2n-1 \rrbracket$ tel que $|I| = n$ et tel que $\sum_{i \in I} a_i \equiv 0 \pmod{n}$.
- Soit m et n des naturels strictement positifs et p un nombre premier. Trouver le plus grand naturel strictement positif s (en fonction de m, n, p) tel que de tout ensemble d'entiers de taille mnp , on puisse en extraire un sous-ensemble de taille snp tel que l'on puisse séparer ce sous-ensemble en s sous-ensembles de taille np tel que la somme dans chaque ensemble de taille np soit congru à la même chose modulo p .

Exercice 6

Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un ensemble S d'entiers à n éléments tel que ab est divisible par $(a - b)^2$ pour tous $a, b \in S$ distincts.

Exercice 7

(*) Existe-il un entier $n > 1$ tel que $\mathbb{N}^*$ puisse être partitionné en n sous-ensemble tel que si l'on somme $n - 1$ éléments venant de $n - 1$ ensemble distincts, la somme totale est dans le dernier ensemble ?

Exercice 8

(*) Soit $f(n)$ le nombre de partitions de n par des puissances de 2. Montrer que pour tout $n \geq 3$,

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Solutions**Solution de l'exercice 1**

Nous allons montrer que le résultat est valable pour tout n -gone, avec n pair. Numérotons les sommets de 1 à n et notons $\{a_i, b_i\}$ les nombres écrits sur le sommet de numéro i . On considère le polynôme

$$P(X_1, \dots, X_n) = (X_1 - X_2) \cdot (X_2 - X_3) \dots (X_n - X_1).$$

Ce polynôme admet un monôme dominant de degré $(1, 1, \dots, 1)$ dont le coefficient vaut $1 + (-1)^n \neq 0$. La conclusion suit alors par Nullstellensatz avec, pour tout i entre 1 et n , $S_i = \{a_i, b_i\}$.

Solution n°2 de l'exercice 1

Il y a aussi une autre solution beaucoup plus élémentaire. Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas possible de choisir les nombres à retirer de sorte à atteindre notre objectif. On remarque que si l'on choisit le nombre a_1 sur le sommet 1, puisque chaque sommet possède deux nombres distincts, on peut supposer sans perte de généralité que $a_2 \neq a_1$, puis que $a_3 \neq a_2, \dots, a_n \neq a_{n-1}$. On doit donc nécessairement avoir $a_n = a_1$, car sinon on aurait une absurdité. De même, on trouve que $b_n = b_1$. Ainsi, par récurrence immédiate, tous les sommets ont les mêmes nombres $\{a_1, b_1\}$, et il suffit donc de retirer a_1 sur les sommets de numéro pair et de retirer b_1 sur les sommets de numéro impair pour conclure.

Remarque 3. Si n était impair, la conclusion serait fausse en choisissant d'écrire les mêmes valeurs $\{a, b\}$, $a \neq b$ sur tous les sommets.

Solution de l'exercice 2

Montrons qu'il s'agit exactement des puissances de 2.

Par récurrence, toutes les puissances de 2 nous permettent d'atteindre notre objectif. Il n'y a rien à faire pour $n = 1$, et $n = 2$ vérifie clairement la propriété. Supposons avoir montré la propriété pour 2^k , avec $k \geq 0$. On considère $n = 2^{k+1}$, et on sépare les nombres écrits au tableau en deux groupes de 2^k nombres. On les rend tous égaux sur chaque groupe par hypothèse de récurrence, puis en faisant successivement la moyenne d'un nombre du premier groupe avec un nombre du deuxième groupe, tous les nombres écrits deviennent égaux.

Soit maintenant $n \geq 3$ un nombre qui n'est pas une puissance de 2, et soit p l'un de ses diviseurs premiers. On choisit des multiples de $p : x_1, \dots, x_n$ tels que $p^2 \nmid \sum_{i=1}^n x_i$. Remarquons que la somme des nombres écrits au tableau est un invariant. En outre, lors des opérations successives, tous les nombres écrits au tableau seront des rationnels avec une valuation p -adique > 0 . Ainsi, s'il existait une suite d'opérations les rendant tous égaux à un certain $p \cdot \frac{a}{b}$, avec $p \nmid b$, alors la somme totale serait égale à $p^2 \frac{a}{b}$ et aurait donc une valuation p -adique d'au moins 2, ce qui est absurde.

Alternativement, on peut aussi choisir des nombres dyadiques dont la somme vaut 1. Les nombres écrits au tableau seront alors toujours des nombres dyadiques, et s'il était possible de rendre tous les nombres égaux à $\frac{m}{2^l}$, avec m impair et $l \geq 1$, cela voudrait dire que la somme des nombres vaudrait

$$1 = p \cdot \frac{m}{2^l},$$

ce qui est absurde car $v_p(1) = 0$.

Solution de l'exercice 3

Soit $1 \leq i, j \leq p$ deux indices distincts. Puisque $j - i$ est inversible modulo p , il existe un unique k entre 0 et $p - 1$ tel que $a_i + i \cdot k \equiv a_j + j \cdot k \pmod{p}$. Or, il y a $\frac{p(p-1)}{2}$ couples d'indices en tout. Ainsi, il existe un nombre k entre 0 et $p - 1$ tel qu'il existe au plus $\frac{p-1}{2}$ paires d'indices $\{i, j\}$ entre 1 et p telles que $a_i + i \cdot k \equiv a_j + j \cdot k \pmod{p}$. Or, un graphe possédant s sommets et v arêtes contient au moins $s - v$ composantes connexes (puisque chaque arête diminue le nombre de composantes connexes d'au plus 1). Cela montre que les nombres $a_i + i \cdot k$ prennent au moins $\frac{p+1}{2}$ valeurs modulo p .

Solution de l'exercice 4

Montrons qu'il s'agit exactement des nombres premiers.

Tout d'abord, si n s'écrit sous la forme $n = ab$, avec $a, b \geq 2$, on obtient un contre-exemple en prenant $a_1 = \dots = a_{b+1} = a$, et $a_i = 0$ pour $i > b + 1$.

Supposons désormais que $n = p$ soit un nombre premier. Soit $a_1, \dots, a_p$ des nombres entiers tels que $p \nmid \sum_i a_i$. Supposons par l'absurde que pour tout indice $1 \leq i \leq n$, il existe un indice k_i tel que $1 \leq k_i \leq p - 1$ et tel que

$$p \mid \sum_{j=0}^{k_i-1} a_{i+j}.$$

On construit une suite d'indices (modulo p) $(\alpha_m)_{m \geq 1}$ en posant $\alpha_1 = 1$, puis en choisissant récursivement $\alpha_{m+1} = \alpha_m + k_{\alpha_m}$. Ainsi, par définition, si on considère un certain $m \geq 1$, on a toujours

$$\sum_{j=\alpha_m}^{\alpha_{m+1}-1} a_j \equiv 0 \pmod{p}.$$

On considère le premier moment où la suite $(\alpha_m)_m$ reprend un indice précédent, et on suppose sans perte de généralité que cet indice est 1. Ainsi, on a $2 \leq M \leq p + 1$ tel que $\alpha_1 = \alpha_M$.

Il y a donc $\sum_{j=1}^{M-1} k_{\alpha_j} \leq p \cdot (p - 1) < p^2$ termes dans la somme

$$S = \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{j=\alpha_m}^{\alpha_{m+1}-1} a_j \equiv 0 \pmod{p}.$$

Or, puisque $\alpha_1 = \alpha_M$, chaque nombre entre a_1 et a_p a été compté le même nombre x de fois. Donc $S = x \cdot \sum_i a_i \equiv 0 \pmod{p}$, ce qui est absurde car $1 \leq x < p$ et $p \nmid \sum_i a_i$.

Solution de l'exercice 5

- (a) Ce résultat s'appelle le théorème d'Erdős-Ginzburg-Ziv. Nous le montrerons en deux étapes. Dans un premier temps, nous traiterons le cas où $n = p$ est un nombre premier afin de pouvoir utiliser le combinatorial Nullstellensatz dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans un second temps, nous montrerons que si le résultat est vrai pour un certain $m \geq 2$, il est également vrai pour $n = m \cdot p$, où p est un nombre premier.

Première étape : Supposons que $n = p$ soit un nombre premier. Quitte à translater tous nos nombres par $-a_{2p-1}$, supposons que $a_{2p-1} = 0$. Supposons sans perte de généralité que les nombres restants soient réduits à leurs restes modulo p , dans l'ordre croissant :

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{2p-2} \leq p-1.$$

Pour tout i entre 1 et $p-1$, posons $S_i = \{a_i, a_{i+p-1}\}$. Si l'on dispose d'un certain $1 \leq i \leq p-1$ tel que $a_i = a_{i+p-1}$, on dispose alors de p nombres égaux modulo p par croissance, et on conclut en choisissant ces p nombres là.

Supposons donc que tous les S_i soient de cardinal 2. Considérons le polynôme $P \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X_1, X_2, \dots, X_{p-1}]$ défini par :

$$P(X_1, \dots, X_{p-1}) = \prod_{j=1}^{p-1} (X_1 + X_2 + \dots + X_{p-1} - j).$$

Ce polynôme possède un monôme dominant de degré $(1, 1, \dots, 1)$ dont le coefficient vaut $(p-1)! \not\equiv 0 \pmod{p}$. Par Nullstellensatz appliqué aux $(S_i)_i$, il est donc possible de choisir $p-1$ nombres parmi $a_1, \dots, a_{2p-2}$ tels que leur somme est différente de j modulo p pour tout $1 \leq j \leq p-1$. Cette somme est donc divisible par p , et on conclut en y rajoutant $a_{2p-1} = 0$.

Deuxième étape : Soit $m \geq 2$ pour lequel le résultat est vérifié et soit p un nombre premier. Soient $(x_i)_{1 \leq i \leq 2mp-1}$ des nombres entiers. Nous avons vu que tant que nous avons au moins $2p-1$ nombres, il est possible d'en choisir p dont la somme est divisible par p . Cela nous permet de construire $2m-1$ paquets disjoints, tous inclus dans $\{x_i\}_i$, de taille p et dont les sommes sont divisibles par p . Notons $s_1, \dots, s_{2m-1}$ les sommes obtenues. En appliquant le résultat pour m aux $\left(\frac{s_i}{p}\right)_{1 \leq i \leq 2m-1}$, on peut en choisir m dont la somme est divisible par m . Cela veut dire que la somme des mp nombres x_i apparaissant dans l'une des m sommes choisies est bien divisible par mp , ce qui conclut.

- (b) Si $m = 1$, la réponse est $s = 1$. Supposons désormais que $m > 1$, et montrons que $s = m-1$. On a nécessairement $s < m$, car il est impossible d'avoir une telle partition lorsque tous les nombres valent 0, sauf un nombre qui vaut 1. En outre, en appliquant le théorème d'Erdős-Ginzburg-Ziv pour p , on a vu qu'il était possible de faire des paquets de taille p dont la somme des éléments était divisible par p tant qu'il nous restait au moins $2p-1$ éléments à disposition. En particulier, on peut isoler $(m-1) \cdot n$ de ces paquets, et les regrouper en $m-1$ paquets de taille np dont la somme est toujours divisible par p .

Solution de l'exercice 6

On construit les ensembles S_n voulus par récurrence sur $n \geq 2$, en prenant $\{0, 1\}$ pour $n = 2$.

Supposons maintenant que S_n soit construit pour un certain $n \geq 2$. Soit M le ppcm de tous les nombres non nuls de la forme $(a - b)^2$, où $a, b \in S_n$. On définit

$$S_{n+1} = \{M + a, a \in S_n\} \cup \{0\}.$$

Soit $a, b \in S_{n+1}$ deux éléments distincts. Si $a = 0$ ou $b = 0$, $ab = 0$ est divisible par tout entier. Sinon, on peut écrire $a = M + a'$ et $b = M + b'$, avec $a', b' \in S_n$ distincts. Ainsi, par hypothèse de récurrence et définition de M ,

$$ab = (M + a')(M + b') = M(M + a' + b') + a'b' \equiv 0 \pmod{(a - b)^2},$$

car $a - b = a' - b'$. Cela montre bien que S_{n+1} convient.

Solution de l'exercice 7

Montrons que la réponse est négative. Si $n = 2$, il n'y a pas de telle partition car la condition de l'énoncé impliquerait que les sous-ensembles seraient inclus les uns dans les autres.

Supposons par l'absurde qu'il existe un certain $n \geq 3$ et une partition

$$\mathbb{N}^* = \coprod_{i=1}^n I_n$$

satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Fait : Si $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ sont tels que b et c soient tous les deux dans un même ensemble I_k , avec $1 \leq k \leq n$, alors $a + b$ et $a + c$ sont tous les deux dans un même ensemble I_j , pour un certain $1 \leq j \leq n$.

Preuve : Si $b = c$, le résultat est évident. Sinon, supposons par l'absurde que $a + b \in I_1$ et que $a + c \in I_3$, sans perte de généralité. Soient $a_4, \dots, a_n$ des éléments quelconques de $I_4, \dots, I_n$, respectivement.

Premier cas : Supposons que $b, c \in I_2$. On a alors que :

$$(a + b) + c + a_4 + \dots + a_n \in I_3,$$

et

$$b + (a + c) + a_4 + \dots + a_n \in I_1,$$

ce qui est absurde car I_3 et I_1 sont disjoints.

Second cas : Supposons que $b, c \in I_1$. Soit a_3 un élément quelconque de I_3 . Alors

$$c + a_3 + a_4 + \dots + a_n \in I_2,$$

donc

$$(a + b) + (c + a_3 + a_4 + \dots + a_n) + a_4 + \dots + a_n = (a + b + c) + (a_3 + \dots + a_n) + (a_4 + \dots + a_n) \in I_3.$$

Or, $b + a_3 + \dots + a_n \in I_2$ et $a + c \in I_3$, donc

$$(b + a_3 + \dots + a_n) + (a + c) + a_4 + \dots + a_n \in I_1,$$

ce qui est absurde car I_1 et I_3 sont disjoints. Cela conclut la preuve du fait.

On a donc montré en particulier que si $b < c$ sont tous les deux dans le même ensemble I_k , et si $b \leq a \in I_j$, alors $a + c - b \in I_j$. Soit $r \geq 1$ minimal qui puisse s'écrire sous la forme $c - b$, avec b et c dans le même ensemble. Par principe des tiroirs, deux éléments entre 1 et $n + 1$ sont dans le même ensemble, donc $r \leq n$. Si $r < n$, on trouve tout de suite une absurdité, puisque chaque ensemble doit être stable par translation par r à partir d'un certain r , mais les ensembles sont disjoints. Si $r = n$, cela veut dire qu'à partir d'un certain rang, chaque ensemble contient exactement tous les nombres qui sont dans une classe modulo n fixée. Mais cela est absurde car si $n \neq 4$, alors

$$0 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n - 1) - 2}{2} \not\equiv 1 \pmod{n},$$

et si $n = 4$,

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} \not\equiv 0 \pmod{n}.$$

Solution de l'exercice 8

<https://web.evanchen.cc/exams/IMO-1997-notes.pdf>

4 Géométrie : Problèmes de niveau P1 (Martin)

Dans ce TD, on s'intéresse à gagner en aisance sur des exercices de niveau P1-P4 d'Olympiades Internationales et à banaliser leur résolution. On veillera à ne pas se précipiter, à bien écrire les choses, aller au bout de chaque cas et à bien réfléchir après chaque exercice quelles sont les idées intéressantes que l'on a utilisées (la base).

Souvent, Un P1-P4 d'Olympiades Internationales, c'est original, élémentaire, joli et relativement court. En général, la clé est de repérer une propriété intermédiaire cachée (points cocycliques, points alignés, droites concourantes, triangles semblables, réécriture de l'énoncé à l'aide d'observations géométriques) ou d'introduire un point intermédiaire intéressant. Une fois cette étape repérée, des arguments comme la chasse aux angles ou la chasse aux rapports permettent de conclure.

Il est très important, lorsque vous avez repéré une propriété et que vous bloquez sur comment la montrer, de montrer également que cette propriété implique l'énoncé. Autrement dit, si vous n'arrivez pas à montrer que les trois points que vous voyez sont alignés, montrez que cet alignement permet de conclure afin de gratter des points et d'évaluer la difficulté de ce que vous voulez montrer par rapport au problème : si vous arrivez à conclure très facilement à partir de l'alignement supposé, c'est sans doute que celui-ci est tout autant difficile que le problème de base, tandis que si cette étape est difficile, c'est que l'alignement à montrer n'est peut-être pas si dur après tout.

Exercices

Exercice 1

(Hong-Kong TST 2024, USAMO 2023 P1) Soit ABC et M le milieu du segment $[BC]$. Soit P le projeté orthogonal de C sur la droite (AM) . Le cercle circonscrit au triangle ABP recoupe la droite (BC) au point Q . Soit N le milieu du segment $[AQ]$. Montrer que $NB = NC$.

Exercice 2

(IMO SL 2012 G2) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les diagonales se coupent au point E et tel que $AB < CD$. Les droites (AD) et (BC) se coupent en F . Soit G le point tel que $ECGD$ est un parallélogramme et soit H le symétrique de E par rapport à (AD) . Montrer que le quadrilatère $DHFG$ est cyclique.

Exercice 3

(IMO 2015 P4) Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Ω de centre O . Un cercle Γ de centre A coupe le segment $[BC]$ en D et E , de sorte que B, D, E et C sont alignés dans cet ordre. Soient F et G les points d'intersection des cercles Ω et Γ , avec F appartenant à l'arc AB de Ω ne contenant pas C et G appartenant à l'arc AC de Ω ne contenant pas B . Les cercles circonscrits aux triangles BDF et CEG recoupent les côtés $[AB]$ et $[AC]$ en K et L . Soit X le point d'intersection des droites (FK) et (GL) . Montrer que A, X et O sont alignés.

Exercice 4

(IMO 2017 P4) Soient R et S des points distincts appartenant à un cercle Ω tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre du cercle Ω . Soit ℓ la tangente au cercle Ω au point R . Le point T est tel que le point S est le milieu du segment $[RT]$. Le point J est choisi sur le plus petit arc RS du cercle Ω de sorte que le cercle Γ circonscrit au triangle JST rencontre la droite ℓ

en deux points distincts. Soit A le point commun du cercle Γ et de la droite ℓ qui est le plus proche du point R . La droite (AJ) recoupe le cercle Ω au point K . Prouver que la droite (KT) est tangente au cercle Γ .

Exercice 5

(IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC .

Exercice 6

(IMO 2022 P4) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe un point T à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD$, $TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{AET}$. On note P et Q les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (CT) avec la droite (AB) ; on suppose que les points P, B, A et Q sont alignés dans cet ordre. De même, on note R et S les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (DT) avec la droite (AE) , et on suppose que les points R, E, A et S sont eux aussi alignés dans cet ordre. Démontrer que les points P, S, Q et R sont cocycliques.

Exercice 7

(IMO 2021 P4) Soit Γ un cercle de centre I , et soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que chacun des segments AB , BC , CD et DA soit tangent à Γ . Soit Ω le cercle circonscrit au triangle AIC . Le prolongement de BA au-delà de A coupe Ω en X , et le prolongement de BC au-delà de C coupe Ω en Z . Les prolongements de AD et CD au-delà de D rencontrent Ω en Y et T , respectivement. Montrer que

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Exercice 8

(RMM SL 2020 G1) Soit ABC un triangle et soient E et F les points de contact de son cercle inscrit avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$. Soit P le point tel que $PA = PE$ et $\widehat{EPA} = \widehat{ACB}$. Soit Q le point tel que $QA = QF$ et $\widehat{AQF} = \widehat{ABC}$. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Exprimer en fonction des angles du triangle ABC la valeur de l'angle $\widehat{PMQ}$.

Exercice 9

(USA 2021 TSTST P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O . Soient X et Y des points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[CD]$. Le cercle circonscrit au triangle ADX recoupe (XY) en P , tandis que le cercle circonscrit au triangle CBY recoupe (XY) en Q . Montrer que $OP = OQ$.

Exercice 10

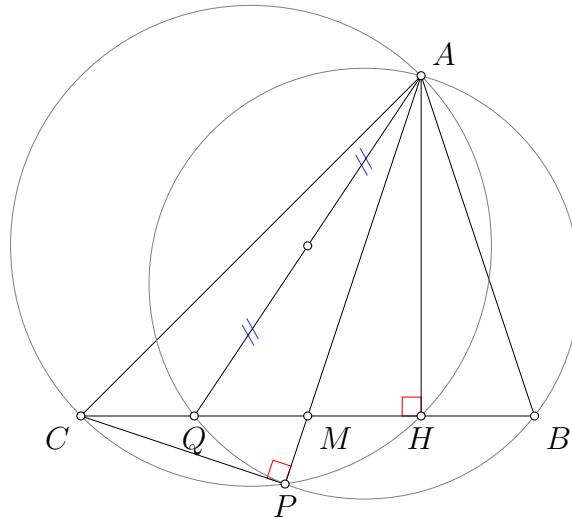
(Iran TST 2019 P1) Soit ABC un triangle et soit H son orthocentre. Les points M et N sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AH]$. La parallèle à la droite (BC) passant par le point A coupe la droite (MH) en un point D . Le cercle circonscrit au triangle DMN recoupe la droite (AH) en un point K . Soit E un point du segment $[AC]$ tel que $\widehat{EHM} = \widehat{ACB}$ et soit F un point sur le segment $[AB]$ tel que $\widehat{FHM} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points D, E, F et K sont cocycliques.

Solutions

Exercice 1

(Hong-Kong TST 2024, USAMO 2023 P1) Soit ABC et M le milieu du segment $[BC]$. Soit P le projeté orthogonal de C sur la droite (AM) . Le cercle circonscrit au triangle ABP recoupe la droite (BC) au point Q . Soit N le milieu du segment $[AQ]$. Montrer que $NB = NC$.

Solution de l'exercice 1



Lorsqu'on voit un angle à 90° , on peut introduire des points avec la même égalité d'angles, pour compléter un quadrilatère cyclique. Ainsi, on introduit H le pied de la hauteur issue de A . Les points A, H, P et C sont donc cocycliques.

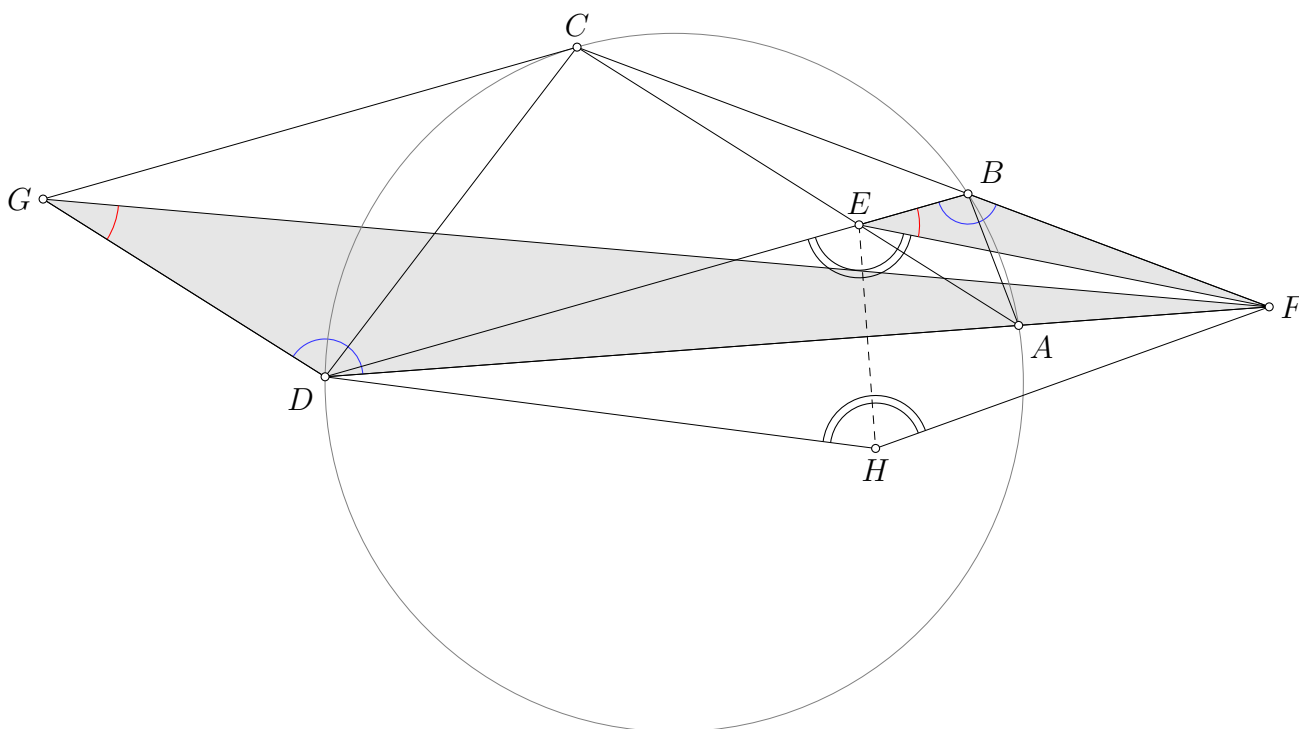
Le point M est sur la droite (AP) qui est l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_{ABP}$ et $\mathcal{C}_{AHC}$, donc on a égalité des puissances de points et

$$MC \cdot MH = MQ \cdot MB,$$

si bien que $MH = MQ$. Le point M est donc le milieu du segment $[HQ]$, donc les droites (MN) et (AH) sont parallèles. La droite (MN) est donc perpendiculaire à (BC) , donc N est sur la médiatrice du segment $[BC]$, comme voulu.

Exercice 2

(IMO SL 2012 G2) Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les diagonales se coupent au point E et tel que $AB < CD$. Les droites (AD) et (BC) se coupent en F . Soit G le point tel que $ECGD$ est un parallélogramme et soit H le symétrique de E par rapport à (AD) . Montrer que le quadrilatère $DHFG$ est cyclique.

Solution de l'exercice 2

La cocyclicité revient à montrer que

$$\widehat{DGF} = 180^\circ - \widehat{DHF} = 180^\circ - \widehat{DEF} = \widehat{FEB}.$$

On va montrer directement que les triangles FEB et FGD sont semblables.

D'après le théorème de l'angle inscrit et les différents parallélismes dans $CEDG$,

$$\widehat{GDF} = \widehat{GDC} + \widehat{CDF} = \widehat{DCA} + \widehat{ABF} = \widehat{DBA} + \widehat{ABF} = \widehat{EBF}.$$

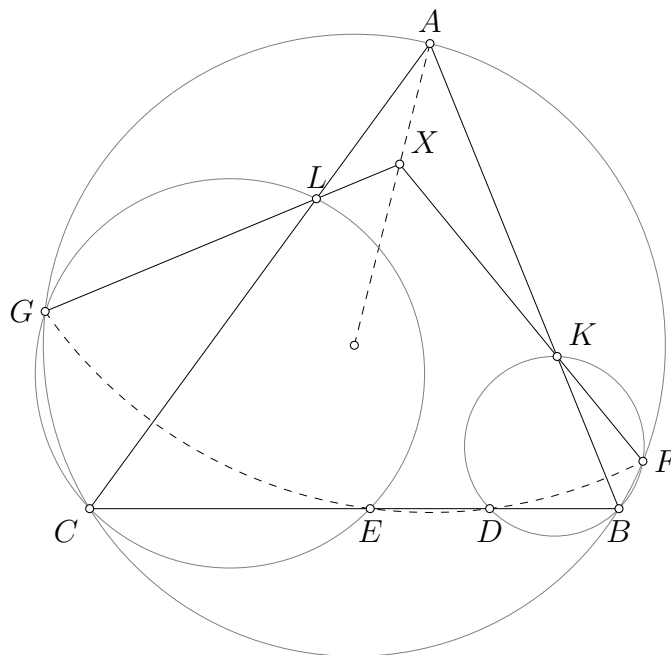
D'autre part, on rappelle que les triangles ABF et CDF sont semblables, de même que les triangles ABE et DCE . On déduit les égalités de rapport suivantes :

$$\frac{EB}{BF} = \frac{EB}{BA} \cdot \frac{BA}{BF} = \frac{CE}{CD} \cdot \frac{CD}{FD} = \frac{DG}{DF}.$$

Les triangles GDF et EBF sont donc semblables, comme annoncé.

Exercice 3

(IMO 2015 P4) Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Ω de centre O . Un cercle Γ de centre A coupe le segment $[BC]$ en D et E , de sorte que B, D, E et C sont alignés dans cet ordre. Soient F et G les points d'intersection des cercles Ω et Γ , avec F appartenant à l'arc AB de Ω ne contenant pas C et G appartenant à l'arc AC de Ω ne contenant pas B . Les cercles circonscrits aux triangles BDF et CEG recoupent les côtés $[AB]$ et $[AC]$ en K et L . Soit X le point d'intersection des droites (FK) et (GL) . Montrer que A, X et O sont alignés.

Solution de l'exercice 3


Les points O et A sont tous les deux sur la médiatrice du segment $[FG]$, donc il suffit de montrer que $XF = XG$, ou encore que $\widehat{KFA} = \widehat{LGA}$ (et on n'a plus à se préoccuper des points O et X).

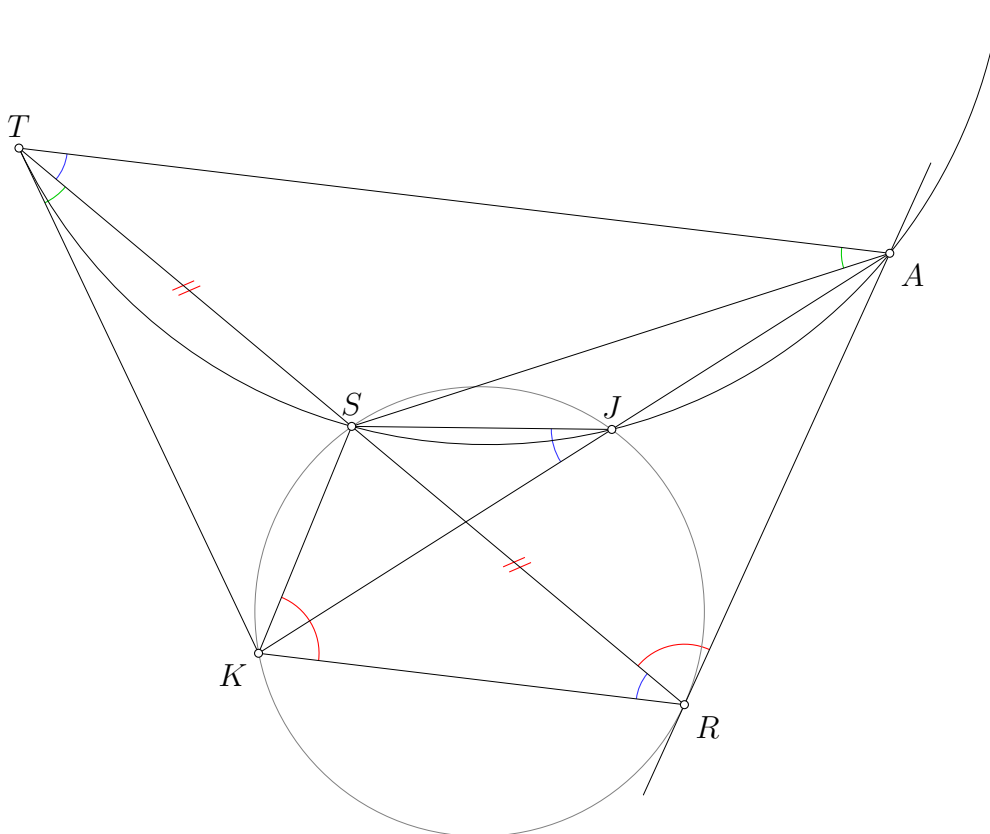
On décompose chaque angle pour faire apparaître des angles que l'on peut calculer à l'aide du théorème de l'angle inscrit :

$$\begin{aligned}
 \widehat{AFK} &= \widehat{AFG} - \widehat{KFG} = \widehat{AFG} - (\widehat{KFD} - \widehat{GFD}) \\
 &= \widehat{ABG} + \widehat{GFD} - \widehat{KFD} \\
 &= \widehat{ABG} + \widehat{CEG} - \widehat{KBD} \\
 &= \widehat{CEG} - \widehat{GBD} \\
 &= \widehat{GLC} - \widehat{GAC} \\
 &= \widehat{LGA},
 \end{aligned}$$

comme voulu.

Exercice 4

(IMO 2017 P4) Soient R et S des points distincts appartenant à un cercle Ω tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre du cercle Ω . Soit ℓ la tangente au cercle Ω au point R . Le point T est tel que le point S est le milieu du segment $[RT]$. Le point J est choisi sur le plus petit arc RS du cercle Ω de sorte que le cercle Γ circonscrit au triangle JST rencontre la droite ℓ en deux points distincts. Soit A le point commun du cercle Γ et de la droite ℓ qui est le plus proche du point R . La droite (AJ) recoupe le cercle Ω au point K . Prouver que la droite (KT) est tangente au cercle Γ .

Solution de l'exercice 4

Il suffit de montrer que $\widehat{KTR} = \widehat{TAS}$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{STA} = 180^\circ - \widehat{SJA} = \widehat{SJK} = \widehat{SRK}$$

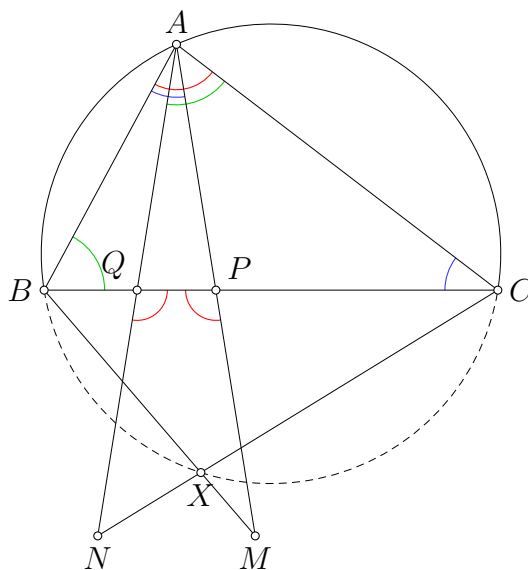
D'autre part, d'après le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{SKR} = \widehat{SRA}$. Les triangles ATR et SRK ont donc deux angles en commun, ils sont donc semblables. On déduit que

$$\frac{TR}{KR} = \frac{AT}{SR} = \frac{AT}{ST}$$

en utilisant que $SR = ST$. Puisque de plus $\widehat{TRK} = \widehat{STA}$, les triangles TAS et RTK sont semblables. En particulier, $\widehat{KTR} = \widehat{TAS}$ comme voulu.

Exercice 5

(IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC .

Solution de l'exercice 5

Ici, il s'agit de réinterpréter les égalités qui sont données. Puisque $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$, la droite (AB) est tangente au cercle circonscrit au triangle APC . Le centre du cercle APC s'obtient comme le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A et la médiatrice du segment $[AC]$. Si on peut tracer le cercle APC , on peut tracer le point P . De même on trace le point Q . On peut alors tracer le reste de la figure. On note X le point d'intersection des droites (BM) et (CN) .

Les égalités d'angles nous apportent que les triangles ABC , PBA et QCA sont semblables. En particulier on déduit que

$$\frac{NQ}{QC} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AP} = \frac{BP}{PM}$$

et puisque $\widehat{BPM} = 180^\circ - \widehat{BPA} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{NQC}$, les triangles BPM et NQC sont semblables.

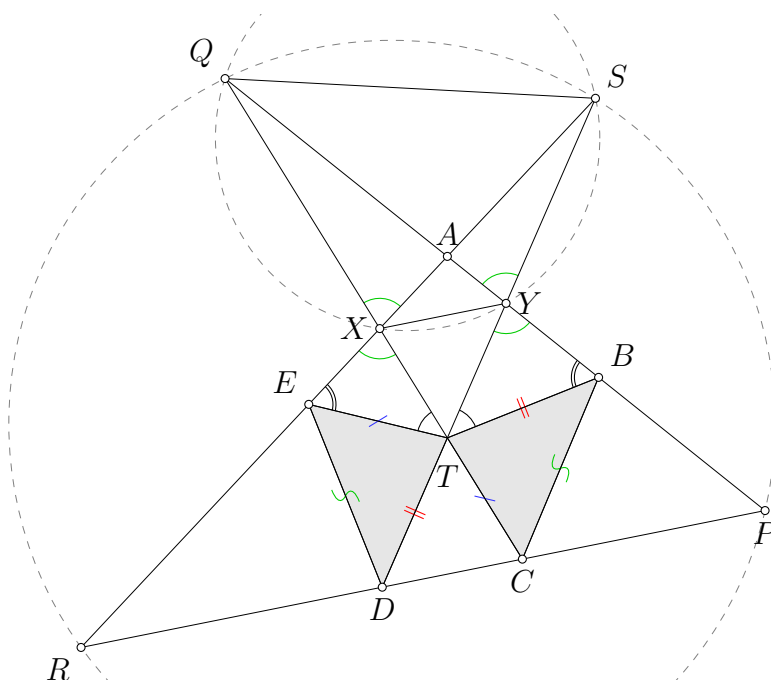
On a donc

$$\widehat{XBC} + \widehat{XCB} = \widehat{MBP} + \widehat{NCQ} = \widehat{MBP} + \widehat{BMP} = \widehat{BPA} = \widehat{BAC}$$

donc $\widehat{BXC} = 180^\circ - \widehat{BAC}$ et les points A, B, C et X sont cocycliques.

Exercice 6

(IMO 2022 P4) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe un point T à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD$, $TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{AET}$. On note P et Q les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (CT) avec la droite (AB) ; on suppose que les points P, B, A et Q sont alignés dans cet ordre. De même, on note R et S les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (DT) avec la droite (AE) , et on suppose que les points R, E, A et S sont eux aussi alignés dans cet ordre. Démontrer que les points P, S, Q et R sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6

Pour tracer la figure, on commence par le segment $[AT]$. On prend un point B et on note B' son symétrique par rapport au segment $[AT]$. On peut alors choisir E sur le cercle circonscrit au triangle $AB'T$. On choisit ensuite un point C sur le cercle de centre T et de rayon TE . Le point D sera alors le point d'intersection du cercle de centre T de rayon TB avec le cercle de centre E de rayon BC .

Passons désormais à la résolution de l'exercice. Les triangles ETD et CTB sont isométriques d'après les conditions de longueur. On déduit que

$$\widehat{QTE} = 180^\circ - \widehat{ETD} - \widehat{DTC} = 180^\circ - \widehat{BTC} - \widehat{DTC} = \widehat{STB}$$

Si on note X et Y les points d'intersection respectivement de (QT) avec (AE) et de (ST) avec (AB) , alors on a

$$\widehat{EXT} = 180^\circ - \widehat{XET} - \widehat{XTE} = 180^\circ - \widehat{TYB} - \widehat{YTB} = \widehat{TYB}$$

de sorte que $\widehat{QXS} = \widehat{QYS}$ et les points Q, X, Y et S sont cocycliques.

D'autre part, puisque les triangles EXT et BYT partagent les mêmes angles deux à deux, il sont semblables et

$$\frac{XT}{YT} = \frac{ET}{BT} = \frac{TC}{TD}$$

de sorte que d'après Thalès, les droites (XY) et (CD) sont parallèles.
On peut alors conclure

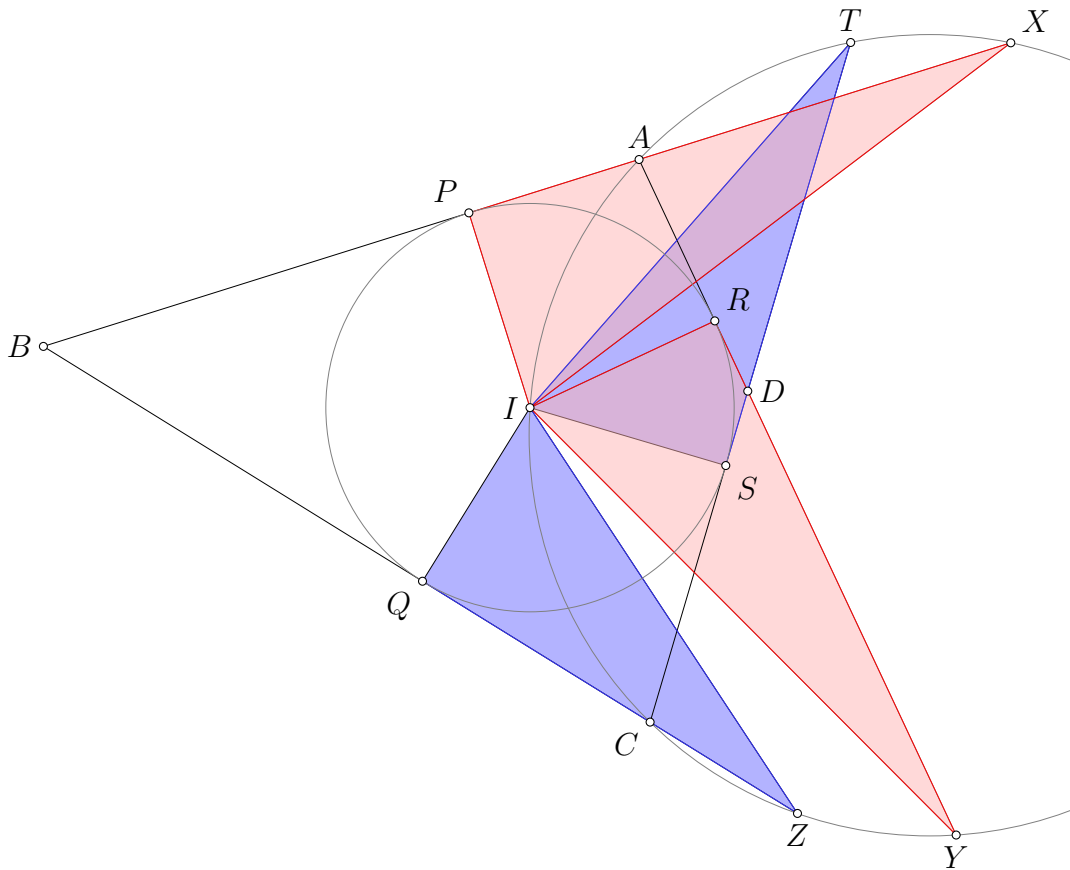
$$\widehat{PQS} = \widehat{YQS} = \widehat{YXS} = \widehat{YXA} = \widehat{PRA} = \widehat{PRS}$$

donc les points P, R, Q et S sont cocycliques.

Exercice 7

(IMO 2021 P4) Soit Γ un cercle de centre I , et soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que chacun des segments AB , BC , CD et DA soit tangent à Γ . Soit Ω le cercle circonscrit au triangle AIC . Le prolongement de BA au-delà de A coupe Ω en X , et le prolongement de BC au-delà de C coupe Ω en Z . Les prolongements de AD et CD au-delà de D rencontrent Ω en Y et T , respectivement. Montrer que

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$

Solution de l'exercice 7

Notons P, Q, R et S les points de contact de Γ avec les côtés du quadrilatère $ABCD$. On observe déjà que

$$AD + DT + XA = AR + RD + DT + XA = AP + DS + DT + XA = XP + TS.$$

De même,

$$CD + DY + ZC = CS + SD + DY + ZC = CQ + DR + DY + ZC = ZQ + RY.$$

Notons que

$$\widehat{PXI} = \widehat{AXI} = \widehat{AYI} = \widehat{RYI},$$

et que $\widehat{IPX} = 90^\circ = \widehat{IRY}$. Les triangles IPX et IRY sont donc semblables, et puisque $IP = IR$, ces deux triangles sont même isométriques. On déduit en particulier que $PX = RY$.

Sur le même jeu,

$$\widehat{QZI} = \widehat{CZI} = \widehat{ITC} = \widehat{ITS},$$

et $\widehat{IQC} = 90^\circ = \widehat{IST}$, donc les triangles IQZ et IST sont semblables. Comme $IQ = IS$, ils sont même isométriques et $QZ = ST$.

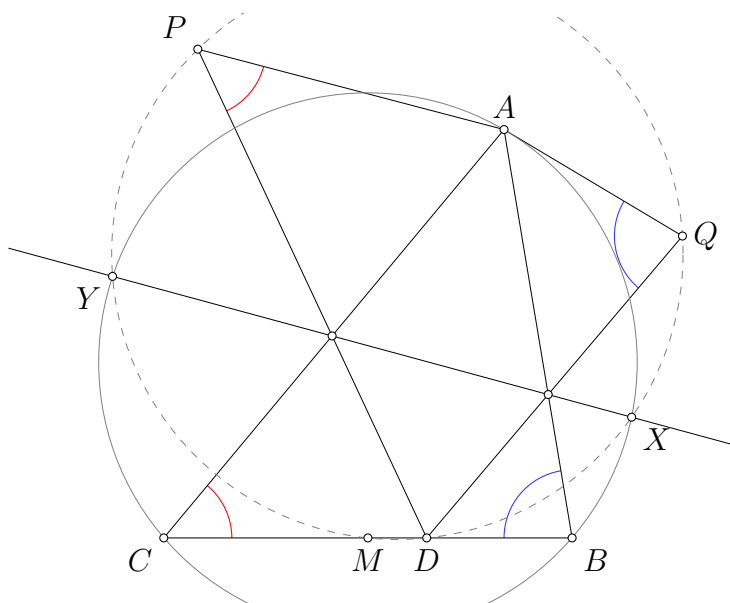
Si on fait le compte, il reste à montrer que $TX = YZ$. Or, des isométries précédentes, on trouve que $IT = IZ$ et $IX = IY$, donc I est sur la médiatrice commune des segments $[TZ]$ et $[XY]$. On déduit que $\widehat{TIX} = \widehat{ZIY}$, puis que $TX = ZY$. On a donc bien

$$PX + QZ + TX = RY + ST + ZY.$$

Ceci conclut.

Exercice 8

(RMM SL 2020 G1) Soit ABC un triangle et soient E et F les points de contact de son cercle inscrit avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$. Soit P le point tel que $PA = PE$ et $\widehat{EPA} = \widehat{ACB}$. Soit Q le point tel que $QA = QF$ et $\widehat{AQF} = \widehat{ABC}$. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Exprimer en fonction des angles du triangle ABC la valeur de l'angle $\widehat{PMQ}$.

Solution de l'exercice 8

Pour chercher cet angle, il est intéressant de tracer le cercle circonscrit au triangle MPQ pour voir si d'autres points s'y trouvent, afin de calculer l'arc PQ avec un point plus simple. On conjecture alors que $PQDM$ est cyclique. Notons également X et Y les points d'intersection de la droite (EF) avec le cercle circonscrit au triangle ABC (qu'il est toujours de bon goût de tracer).

Les hypothèses impliquent que les triangles APE et ECD sont semblables, donc $\widehat{PEA} = \widehat{DEC}$ et les points P, E et D sont alignés, et on déduit que les points A, P, C et D sont cocycliques. La puissance d'un point donne alors

$$ED \cdot EP = EA \cdot EC = EX \cdot EY, \quad FD \cdot FQ = FA \cdot FC = FX \cdot FY.$$

On déduit que les points P, Y, D, X et Q sont cocycliques. Il reste donc à montrer que M est sur le cercle passant par D, X et Y . Pour cela, on note Z le point d'intersection des droites (BC) et (XY) . Comme $(AD), (BE)$ et (CF) sont concourantes, les points B, C, Z et D sont harmoniques. La relation de MacLaurin donne alors

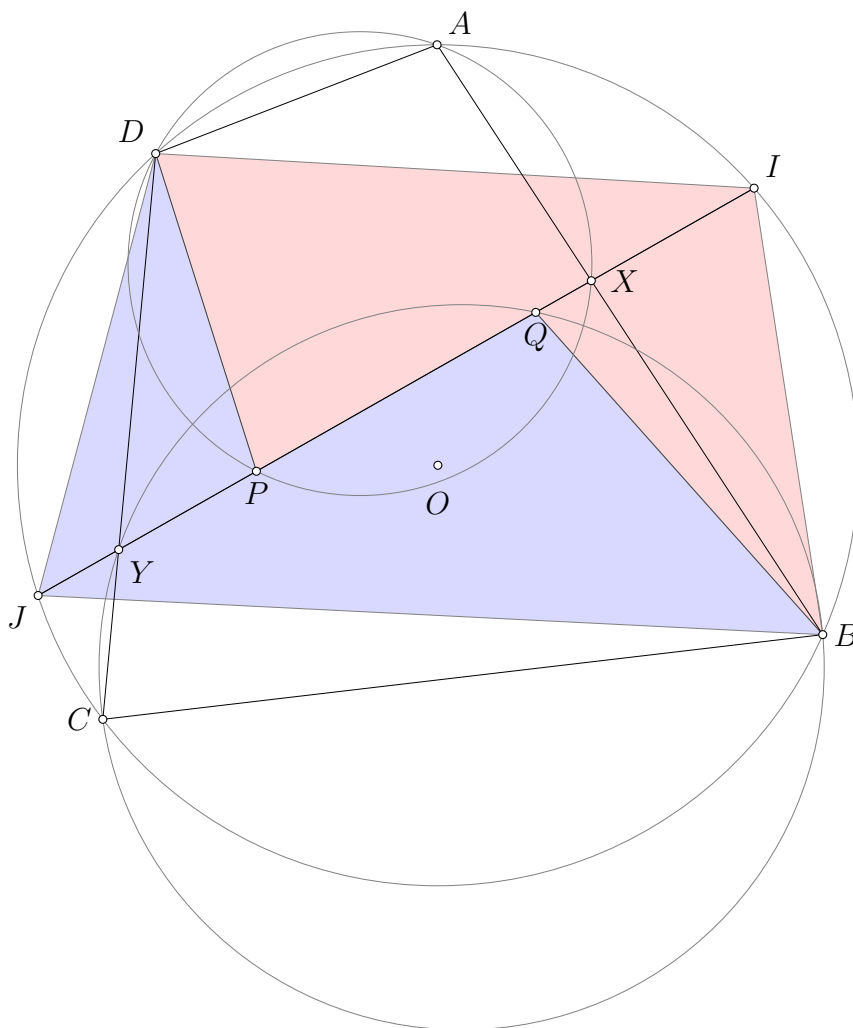
$$ZD \cdot ZM = ZB \cdot ZC = ZX \cdot ZY,$$

ce qui prouve la cocyclicité recherchée. D'après le théorème de l'angle inscrit, on déduit

$$\widehat{PMQ} = \widehat{PDQ} = \widehat{EDF} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Exercice 9

(USA 2021 TSTST P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre O . Soient X et Y des points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[CD]$. Le cercle circonscrit au triangle ADX recoupe (XY) en P , tandis que le cercle circonscrit au triangle CBY recoupe (XY) en Q . Montrer que $OP = OQ$.

Solution de l'exercice 9

Comme souvent avec les centres de cercles, on va se débrouiller pour ne pas avoir à traiter avec le point O .

Notons I et J les points d'intersection de la droite (XY) avec le cercle circonscrit au triangle ABC . On a alors

$$\widehat{QBI} = \widehat{IBC} - \widehat{QBC} = 180^\circ - \widehat{IDC} - \widehat{QYD} = \widehat{DIP},$$

et

$$\widehat{BQI} = \widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{DAX} = \widehat{DPX}.$$

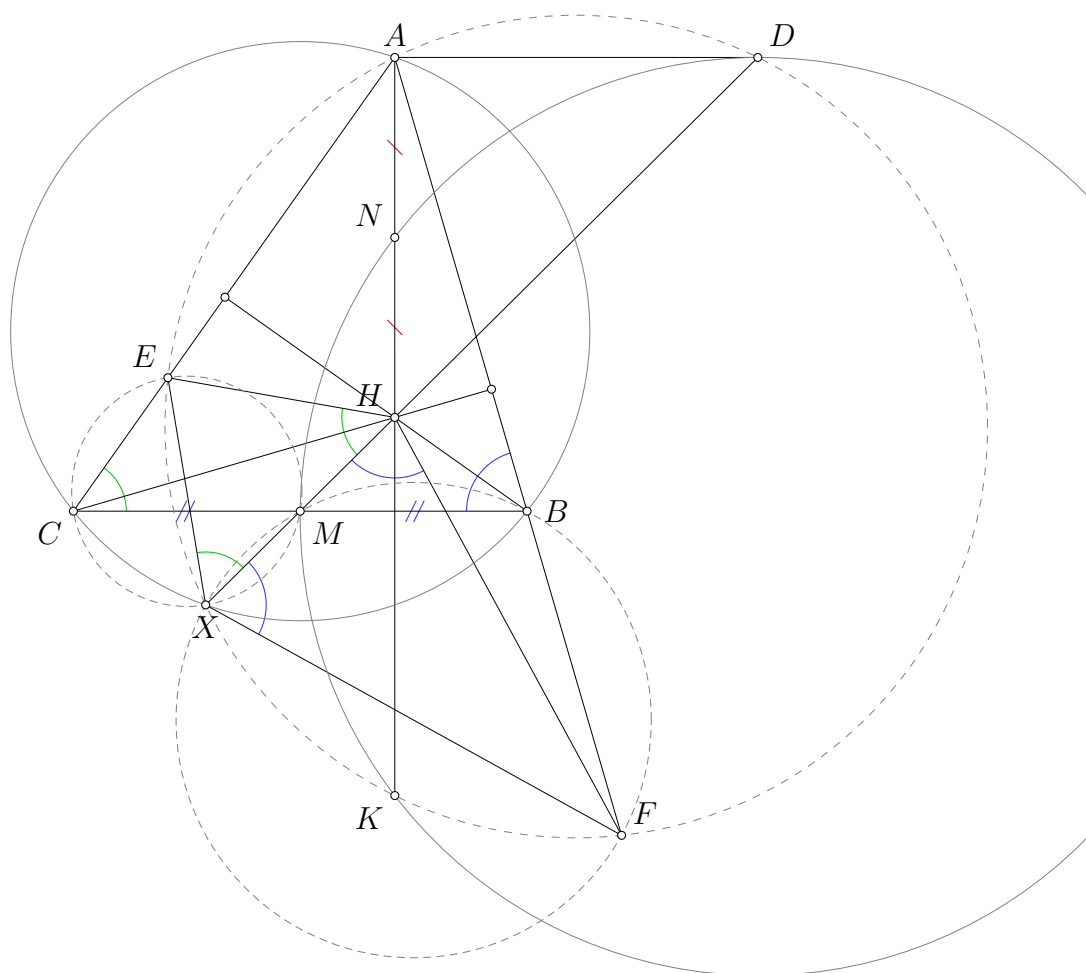
On déduit que les triangles QBI et PID ont deux angles en commun donc ils sont semblables. De même, les triangles JBQ et JDP sont semblables. On a alors les égalités de rapport

$$\frac{IP}{QJ} = \frac{IP}{QB} \cdot \frac{QB}{QJ} = \frac{DP}{IQ} \cdot \frac{JP}{DP}.$$

On déduit que $IP \cdot IQ = JP \cdot JQ$. Donnons-nous un cercle ω passant par P et Q . Les points I et J ont la même puissance par rapport à ω . Ils ont alors la même distance au centre O' de ω . Ainsi, O et O' sont sur la médiatrice de $[IJ]$. Le projeté orthogonal de O' sur $[IJ]$ est donc le milieu de $[IJ]$, donc ce milieu est aussi le milieu de $[PQ]$, donc $OP = OQ$.

Exercice 10

(Iran TST 2019 P1) Soit ABC un triangle et soit H son orthocentre. Les points M et N sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AH]$. La parallèle à la droite (BC) passant par le point A coupe la droite (MH) en un point D . Le cercle circonscrit au triangle DMN recoupe la droite (AH) en un point K . Soit E un point du segment $[AC]$ tel que $\widehat{EHM} = \widehat{ACB}$ et soit F un point sur le segment $[AB]$ tel que $\widehat{FHM} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points D, E, F et K sont cocycliques.

Solution de l'exercice 10

Le point clé est d'avoir une figure exacte. Pour cela, il est essentiel de comprendre comment sont construits les points E et F . On va se concentrer ici sur la construction du point E .

On aimerait transformer l'égalité d'angle en une condition de cocyclicité. Pour cela, soit X le symétrique du point H par rapport au point M . Soit E' le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle CXM avec la droite (AC) . Alors $\widehat{E'CX} = \widehat{ACX} = 90^\circ$ et $\widehat{E'XM} = \widehat{BCA}$. Ainsi $\widehat{EMX} = 90^\circ$ donc le point M est le pied de la hauteur issue du sommet E' dans le triangle XEH . M est également le milieu du segment $[HX]$ donc le triangle $XE'H$

est isocèle en E' et $\widehat{E'HM} = \widehat{E'XM} = \widehat{ACB}$ donc $E' = E$. Le point E est donc le point d'intersection du cercle circonscrit au triangle CXM avec la droite (AC) et le point F est le second point d'intersection de la droite (AB) avec le cercle circonscrit au triangle BXM de la même façon.

Passons maintenant à la résolution du problème. Avec une figure exacte, on s'aperçoit que les points A et X appartiennent eux aussi au cercle circonscrit au triangle DEF .

Tout d'abord, par chasse aux angles on trouve

$$\widehat{EXD} = \widehat{EXM} = \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{CAB} - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{EAD}$$

donc les points X, E, A et D sont cocycliques et de même on obtient que les points A, E, F, X et D sont cocycliques.

Par ailleurs, par puissance du point H par rapport au cercle circonscrit au triangle NMD , on a $HN \cdot HK = HM \cdot HD$. Puisque le point N est le milieu du segment $[AH]$ et le point M le milieu du segment $[XH]$:

$$HA \cdot HK = 2 \cdot HN \cdot HK = 2 \cdot HM \cdot HD = HX \cdot HD$$

donc les points X, A, D et K sont cocycliques par la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle. Donc les points A, E, F, D, X et K sont cocycliques.

5 Arithmétique : Problèmes de niveau P2 (Erik et Théo)

Exercice 1 (N5 2023)

Soit $a_1, \dots$ une suite d'entiers strictement positifs strictement croissante telle que pour tout $k \geq 1$,

$$a_{k+1} \mid 2(a_1 + \dots + a_k)$$

On suppose que l'ensemble des diviseurs premiers d'au moins un terme de la suite est infini. Montrer que pour tout entier strictement positif divise au moins un terme de la suite.

Exercice 2 (P5 2022)

Déterminer tous les triplets (a, b, p) d'entiers avec p premier et vérifiant :

$$a^p = b! + p$$

Exercice 3 (P2 2024)

Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que la suite

$$(pgcd(a^n + b, b^n + a))_{n \in \mathbb{N}}$$

est stationnaire.

Exercice 4 (N4 2021)

Soit $r > 1$ un rationnel. Alice joue au jeu suivant. Au départ, sur la droite réelle, il y a un pion rouge en 0 et un bleu en 1. A chaque coup, Alice choisit un entier k , et note x, y la position des deux pions dans l'ordre qu'elle veut. Elle déplace alors le pion posé en y en y' tel que $y' - x = r^k(y - x)$. Alice gagne si elle peut déplacer le pion rouge en 1 en au plus 2021 coups.

Pour quels r Alice peut-elle gagner ?

Exercice 5 (P2 test français 2020)

Une suite d'entiers (u_n) est dite sicilienne si pour tout n ,

$$u_{n+1} \in \{u_n/2, u_n/3, 2u_n + 1, 3u_n + 1\}$$

Montrer que pour tout entier k , il existe une suite (u_n) sicilienne vérifiant $u_0 = k$ et il existe ℓ tel que $u_\ell = 1$.

Exercice 6 (N5 2014)

Déterminer tous les triplets (x, y, p) d'entiers strictement positifs avec p premier tel que

$$x^{p-1} + y \quad \text{et} \quad y^{p-1} + x$$

soient des puissances de p .

Exercice 7 (N5 2021)

Démontrer que l'équation $a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} = n!$ a un nombre fini de solutions (a, b, c, n) strictement positives.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Dans un tel exercice, une idée classique est de poser k_n le quotient entre a_{n+1} et $2(a_1 + \dots + a_n)$ pour tout $n \geq 1$, et d'obtenir des équations à partir de là, en utilisant le fait que $a_1 + \dots + a_{n+1}$ s'exprime à partir de $a_1 + \dots + a_n$.

Soit $n \geq 1$, on a que $2(a_1 + \dots + a_{n+1}) = k_{n+1}a_{n+2}$, mais aussi

$$2(a_1 + \dots + a_{n+1}) = 2(a_1 + \dots + a_n) + 2a_{n+1} = (k_n + 2)a_{n+1}.$$

On obtient donc que pour tout $n \geq 1$,

$$a_{n+2}k_{n+1} = (k_n + 2)a_{n+1}$$

On a alors, comme $a_{n+2} > a_{n+1}$, que $k_{n+1} < k_n + 2$, donc $k_{n+1} \leq k_n + 1$. Ainsi la suite $(k_n)_{n \geq 1}$ ne peut pas augmenter de plus qu'un strictement.

De plus, l'équation précédente montre que pour tout $n \geq 2$, a_n divise $(k_{n-1} + 2) \dots (k_1 + 2)a_2$, donc si la suite $(k_n)_{n \geq 2}$ est bornée disons par M , tout nombre premier divisant un terme de la suite divise soit a_1 , soit a_2 , soit est plus petit que $M + 2$, donc est borné. Ainsi l'hypothèse de l'énoncé serait fautive : la suite $(k_n)_{n \geq 1}$ prend des valeurs arbitrairement grande.

Soit $M \geq 1$, montrons que M divise un terme de la suite. Pour cela, donnons nous $n \geq 1$ tel que $nM > k_2$. Comme la suite $(k_n)_{n \geq 2}$ prend des valeurs arbitrairement grande, il existe i tel que $k_i \geq nM$, prenons le i minimal vérifiant cela. On a alors $i \geq 3$, et $k_{i-1} < nM$, donc $k_i \leq k_{i-1} + 1 < nM + 1$. On en déduit que $k_i = nM$, et donc que $nM \leq k_{i-1} + 1 < nM + 1$, donc $k_{i-1} = nM - 1$. En particulier, $a_{i+1}k_i = (k_{i-1} + 2)a_i$, donc $a_{i+1}nM = (nM + 1)a_i$. Ainsi M , divise $(nM + 1)a_i$, donc comme M est premier avec $nM + 1$, M divise a_i . Ceci montre que tout entier strictement positif divise au moins un terme de la suite.

Solution de l'exercice 2

Cet exercice est plus calculatoire mais demande quand même des idées intelligentes. On peut déjà se dire qu'on va sûrement avoir recours à des arguments de plusieurs natures : de taille car $b!$ et a^p peuvent vite devenir très grand, et de divisibilité car p est premier. Avec ces deux idées en tête, on peut déjà bien avancer.

On commence par traiter le cas où $b < p$. Alors si $a > b > 1$, $a^p \geq (b+1)^p > b^{p-1} + b^p \geq b! + p$ car $b^p \geq 2^p \geq p$. Si $b = 1$, il n'y a pas de solution car $a = 1$ donne $1 = p + 1$ qui est absurde, et si $a \geq 2$, on a que $2^p = (1+1)^p \geq 1 + p + 1 > p + 1$ avec le binôme de Newton. Ainsi, on a $a \leq b$. Donc $a \mid b!$, donc $a \mid p$. Ainsi comme $a \leq b < p$, $a = 1$, ce qui ne marche pas.

Maintenant, si $b \geq p$, on a $p \mid b! + p = a^p$ donc $p \mid a$. On remarque aussi que : $v_p(b!) = v_p(a^p - p) = 1$ donc $b < 2p$. Il nous faut alors encore une autre idée pour avancer : on sait que $p \mid a$, mais cela nous laisse encore pleins de valeurs possible pour a car $(2p-1)!$ est très grand. On peut remarquer que si q est un facteur premier de a plus petit que b , on a $q \mid p$ donc $q = p$. Ainsi, a n'a que des facteurs plus grands que b ou égaux à p . Ainsi, soit $a = p$ soit $a \geq p^2$.

On a alors encore besoin d'un argument de taille pour pouvoir écarter le deuxième cas. On utilise une minoration souvent utile de $b!$:

$$b! \leq (2p-1)! = p \cdot (p+1)(p-1) \dots (p+p-1)(p-(p-1)) = p \cdot (p^2-1) \dots (p^2-(p-1)^2) < p^{2p-1}$$

Ainsi, $a^p = b! + p < p^{2p}$ donc $a < p^2$. On a donc $a = p$.

On s'est ramené à résoudre :

$$p^p = b! + p$$

Maintenant, on n'a plus trop d'arguments de divisibilité par b , ni de taille car b est entre p et $2p - 1$ mais on a $p! < p^p < (2p - 1)!$. On peut cependant remarquer que $b!$ a beaucoup de facteurs, donc notamment une très grande v_2 . Avec le LTE, on a, si $p > 2$, comme 4 divise $p^2 - 1$, et 2 ne divise ni 1 ni p^2 :

$$v_2(b!) = v_2(p(p^{p-1} - 1)) = v_2(p^{p-1} - 1) = v_2\left((p^2)^{\frac{p-1}{2}} - 1^{\frac{p-1}{2}}\right) = v_2(p^2 - 1) + v_2\left(\frac{p-1}{2}\right)$$

On voit bien que cela va être inférieur à la v_2 de $p!$ pour p assez grand, mais on veut se débrouiller pour avoir une borne pas trop grande pour ne pas avoir à faire de trop gros calculs.

On peut alors utiliser une petite ruse :

$$v_2(p^2 - 1) + v_2\left(\frac{p-1}{2}\right) = v_2(p-1) + v_2\left(\frac{p+1}{2}\right) + v_2\left(\frac{p-1}{2}\right) + v_2(2)$$

Si $p \geq 11$, ces quatre termes sont deux à deux distincts donc tous dans $b!$ car $b > p$. Or à ce moment, $b!$ a au moins 5 termes pairs, donc la v_2 de $b!$ est strictement plus grande que ce nombre.

Ainsi, $p < 11$ donc $p \leq 7$. Il ne nous reste plus que les cas $p = 2, 3, 5, 7$ à tester :

- pour $a = p = 2$, on trouve la solution $(2, 2, 2)$
- pour $a = p = 3$, on trouve la solution $(3, 4, 3)$
- pour $a = p = 5$, on a $13 \mid 5^2 + 1 \mid 5^4 - 1 \mid 5(5^4 - 1) = b!$ donc $b \geq 13$ or $b < 2p = 10$, absurde
- pour $a = p = 7$, on a $19 \mid 7^3 - 1 \mid 7^6 - 1 \mid 7(7^6 - 1) = b!$ donc de même $b \geq 19$, absurde

Solution n°2 de l'exercice 2

On a une deuxième méthode pour conclure à partir de l'équation $p^p = b! + p$, c'est-à-dire :

$$p(p^{p-1} - 1) = b!$$

On peut utiliser Zsigmondy sur $p^{p-1} - 1$ (on n'est pas dans les exceptions pour $p > 3$), ce qui nous donne q un facteur premier de $p^{p-1} - 1$ qui ne divise pas : $p - 1, p^2 - 1, \dots, p^{p-2} - 1$, c'est-à-dire tel que $o_q(p) = p - 1$.

On a donc $p - 1 \mid q - 1$ donc q est de la forme $k(p - 1) + 1$. On n'a pas $k = 1$ car $q \neq p$. Et on remarque que $q \mid b!$ donc $2p > b \geq q$, donc $k = 2$ et $q = 2p - 1$, donc $b = 2p - 1$.

Or pour $p > 3$,

$$(2p - 1)! > p^p \cdot (p - 1)! > p^p$$

Donc il n'y a pas de solution pour $p > 3$ et on retrouve bien les mêmes solutions que dans l'autre preuve.

Solution de l'exercice 3

Cet exercice est dur et repose sur une astuce qui apparaît également dans le P4 de 2005 :

trouver tous les nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Si vous n'avez pas trouvé, vous pouvez maintenant chercher ce P4 puis si vous le trouvez essayer de rechercher ce problème.

L'astuce est de remarquer que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ et donc que en prenant $n \equiv -1 \pmod{p-1}$, $p > 3$ divise le terme de la suite. L'idée est que en fait prendre n négatif est tout à fait possible modulo un nombre premier avec 2 et 3.

On passe maintenant à la résolution de notre exercice :

Soit a, b des entiers vérifiant l'énoncé. On remarque ici que si on prend $n = -1$, les deux termes valent $\frac{ab+1}{a}$ et $\frac{ab+1}{b}$, ce qui nous pousse à procéder ainsi :

Soit $x = ab + 1$. x est premier avec a et b , donc, si k est un entier, $a^{k\varphi(x)} \equiv b^{k\varphi(x)} \equiv 1 \pmod{x}$. Ainsi,

$$a^{k\varphi(x)-1} + b \equiv \frac{1}{a} + b \equiv \frac{ab+1}{a} \equiv 0 \pmod{x}$$

Et de même, $x \mid b^{k\varphi(x)-1} + a$. Ainsi, x divise des termes arbitrairement grands de la suite, donc il divise tous les termes à partir d'un certain rang.

Mais on remarque aussi que $a^{k\varphi(x)} + b \equiv a + 1 \pmod{x}$, donc $ab + 1 \mid a + 1$ en prenant k assez grand. Cela implique que $ab + 1 \leq a + 1$ donc $b = 1$. De même $a = 1$.

On vérifie réciproquement que le couple $(1, 1)$ est solution.

Remarque : dans cet exercice, une autre raison de prendre $n = -1$ et de chercher un facteur symétrique en a et b apparaissant dans un terme de la forme $a^n + b$: en effet, il est très dur d'avoir un facteur commun divisant $a^2 + b$ et $b^2 + a$. Par contre, avoir un facteur pour $n = 1$ divisant $a + b$ et $b + a$ est super facile. Le problème est qu'on ne peut pas utiliser l'argument d'ordre si celui-ci divise a ou b pour montrer que le pgcd est parfois divisible par p , et parfois pas par p . En testant les puissances positives de n , on n'arrive pas à factoriser $a^n + b$ et $b^n + a$ par deux mêmes polynômes en a et b . Mais par contre $n = -1$ donne cette opportunité.

Solution de l'exercice 4

Posons $r = c/d$ avec c et d premiers entre eux et $c > d$. Notons déjà que la longueur formée par le segment pion rouge-pion bleu est toujours une puissance de r par récurrence immédiate, et que le pion rouge est toujours à gauche strictement du bleu.

Notons aussi que si Alice choisit deux fois d'affilé pour x l'abscisse du point de la même couleur, et choisit k et k' , Alice aurait juste pu choisir le même x , et $k + k'$ et obtenir la même situation en un seul coup.

Ainsi si Alice peut déplacer le pion rouge en 1 en au plus 2021 coups, elle peut le faire en déplaçant alternativement le rouge et le bleu.

Si elle déplace d'abord le rouge, quitte à changer l'origine et l'unité de la droite réelle, on peut supposer que le point rouge est en 0 et le bleu en 1, et que sur celle-ci Alice peut déplacer le pion rouge en au plus 2020 coups sur 1. Ainsi dans tous les cas, si Alice peut bouger le pion rouge en bleu en 1 en 2021 coups, elle peut le faire en 2020 coups en alternant un mouvement du bleu et du rouge, en commençant par le bleu.

Notons (a, b) les abscisses du pion rouge et du bleu avant mouvement du bleu puis du rouge. Si Alice choisit k , a ne bouge pas lors du premier mouvement mais b devient $r^k(b - a) + a$. Après mouvement du rouge, si Alice choisit ℓ , l'abscisse du rouge devient $r^\ell(a - (r^k(b - a) + a) + a$.

$a) + a)) + r^k(b - a) + a = a + (r^k - r^{\ell+k})(b - a)$. Or $b - a$ est de la forme r^h pour un certain entier h , donc a est remplacé par $a + r^{\ell+h} - r^{\ell+k+h}$.

Ainsi au bout de k mouvements avec un bleu puis un rouge, on obtient une abscisse de la forme $\sum_{\ell=1}^k r^{a_\ell} - r^{b_\ell}$ pour $(a_\ell)_{1 \leq \ell \leq k}$ et $(b_\ell)_{1 \leq \ell \leq k}$ des entiers. Si Alice réussit à placer le jeton rouge en 1, alors on a l'égalité précédente pour un bon choix de $k \leq 1010$ (car elle peut le faire en au plus 2020 coups) et des $(a_\ell)_{1 \leq \ell \leq k}$ et $(b_\ell)_{1 \leq \ell \leq k}$. Quitte à prolonger (a_ℓ) et (b_ℓ) par 0, l'équation $\sum_{\ell=1}^{1010} r^{a_\ell} - r^{b_\ell} = 1$ a une solution qu'on fixe désormais.

Idéalement, on aimerait utiliser un peu d'arithmétique, donc passer modulo un nombre $n > 0$. Le must serait que $r \equiv 1 \pmod{n}$, i.e. que $c \equiv d \pmod{n}$, soit que n divise $c - d$. On peut donc regarder modulo $c - d$: notons que $(c, c - d) = (d, c - d) = (d, c) = 1$, et $c - d > 0$. Ainsi c et d sont premiers avec $c - d$, on peut donc regarder l'équation modulo $c - d$, on obtient que $r \equiv \frac{d}{c} \equiv 1 \pmod{c - d}$, donc $1 \equiv \sum_{\ell=1}^{1010} r^{a_\ell} - r^{b_\ell} \equiv \sum_{\ell=1}^{1010} 1 - 1 \equiv 0 \pmod{c - d}$. En particulier, $c - d$ divise 1 donc $c = d + 1$. On a donc $r = 1 + \frac{1}{d}$.

On peut également regarder modulo $c + d$, pour lequel $r \equiv -d/d \equiv -1 \pmod{c + d}$. En particulier $1 \equiv \sum_{\ell=1}^{1010} (-1)^{a_\ell} - (-1)^{b_\ell} \pmod{c + d}$. Or $\sum_{\ell=1}^{1010} (-1)^{a_\ell} - (-1)^{b_\ell}$ est entre -2020 et 2020 , est pair et vaut 1 modulo $2d + 1$. Ainsi $(2d + 1) + 1 \leq 2020$ ou $-(2d + 1) + 1 \geq -2020$. Dans le premier cas, $2d \leq 2018$, donc $d \leq 1009$ et dans le second cas, $2d \leq 2020$ donc $d \leq 1010$. Ainsi r est de la forme $1 + \frac{1}{d}$ avec $1 \leq d \leq 1010$.

Réciproquement, si r est de cette forme, et on note $(a, a + 1)$ les positions du jeton rouge et du bleu si ceux-ci sont à distance 2, en faisant bouger le jeton bleu pour $k = 1$, sa nouvelle position est $a + 1 + 1/d$. En faisant bouger le jeton rouge pour $k = -1$, sa nouvelle abscisse a' vérifie : $a' - (a + 1 + 1/d) = \frac{a - (a + 1 + 1/d)}{r} = -1$, donc $a' = a + 1/d$ et chaque jeton a été translaté de $1/d$.

Ainsi en effectue k double mouvements ainsi, les deux jetons se retrouvent en $(k/d, (k + 1)/d)$. Pour $k = d$, $2d \leq 2021$ mouvements ont été fait, et le jeton rouge est en 1 : les nombres de la forme $1 + \frac{1}{d}$ avec $1 \leq d \leq 1010$ conviennent réciproquement.

Solution de l'exercice 5

En testant beaucoup de petits cas, on se rend compte qu'il est possible avec pas mal de mouvements de passer de k à un nombre plus petit, et donc d'itérer. Montrons que pour tout $k > 1$, on peut prolonger la suite pour avoir un indice n tel que $u_n < k$. En itérant le processus, au bout d'un moment on obtiendra un n' tel que $u_{n'} = 1$ car la suite est à valeurs strictement positives.

Déjà notons que si k est pair, on pose $u_1 = k/2$ ce qui conclut. Supposons donc k impair. Si k vaut 1 modulo 4, on peut poser $u_1 = 3k + 1$, $u_2 = \frac{3k+1}{2}$ et $u_3 = \frac{3k+1}{4} < k$. En itérant ces calculs au brouillon, on voit que les cas 3 modulo 8, 7 modulo 16, etc se traitent bien, mais pas le cas où $k \equiv -1 \pmod{2^n}$. Ceci nous invite à poser $k + 1 = 2^n \times a$ avec a premier avec 2 et $n \geq 1$, et regarder ce qui arrive en appliquant $x \rightarrow 3x + 1$ puis $x \rightarrow x/2$. Si $k = 2^n \times a - 1$, $\frac{3k+1}{2} = \frac{3 \times 2^n a - 2}{2} = 3 \times 2^{n-1} a - 1$. Ainsi, par récurrence immédiate, on peut construire un début de suite sicilienne vérifiant $u_{2i+1} = 3^i 2^{n-i} a - 1$ pour tout $i \leq n$.

On a donc $a_{2n+1} = 3^n a - 1$. On peut choisir $a_{2n+2} = \frac{3^n a - 1}{2}$ et $a_{2n+3} = 2a_{2n+2} + 1 = 3^n a$. A partir de là, on peut compléter en $a_{2n+3+i} = 3^{n-i} a$, jusqu'à $i = n$ et obtenir $a_{3n+3} = a$.

Reste à vérifier que $a < 2^n a - 1$, ce qui est clair car $(2^n - 1)a > 1$ sauf si $n = 1$ et $a = 1$, ce qui implique $k = 1$. On obtient donc le résultat voulu.

Solution de l'exercice 6

Premièrement si $p = 2$, il faut et suffit que $x + y$ soit une puissance de 2. Supposons alors $p > 2$.

Déjà notons que x est premier avec p , si ce n'était pas le cas, comme $x^{p-1} + y$ est une puissance de p strictement plus grande que 1, p divise y . Par symétrie on peut supposer $V_p(x) \geq V_p(y)$. On a alors $V_p(x^{p-1}) = (p-1)V_p(x) \geq 2V_p(y) > V_p(y)$, donc $V_p(x^{p-1} + y) = V_p(y)$, ainsi $p^{V_p(y)} = x^{p-1} + y > y \geq p^{V_p(x)}$ ce qui est absurde. On a donc x et y premiers avec p . En particulier, comme le pgcd de x et y divise une puissance de p , on en déduit que x et y sont premiers entre eux.

De plus, si $x = y$, x divise une puissance de p , donc vaut 1, idem pour y , donc $x^{p-1} + y$ n'est pas une puissance de p . On peut donc supposer $x > y$. Posons alors $x^{p-1} + y = p^k$ et $y^{p-1} + x = p^\ell$, on a

$$p^k - p^\ell = x(x^{p-2} - 1) - y(y^{p-2} - 1) > 0$$

donc $k > \ell$.

Ainsi $y^{p-1} + x$ divise $x^{p-1} + y$. Or modulo $y^{p-1} + x$, x vaut $-y^{p-1}$, donc $y^{p-1} + x$ divise $y^{(p-1)^2} + y$. Comme y et x sont premiers entre eux, $y^{p-1} + x$ et y le sont, donc $y^{p-1} + x$ divise $y^{p(p-2)} - 1$.

Le théorème de Petit Fermat nous donne que p divise $x^{p-1} + y$ donc $1 + y$. Ainsi $V_p(y^{p(p-2)} + (-1)^{p(p-2)}) = V_p(y+1) + V_p(p(p+2)) = V_p(y+1) + 1$. On a donc que $p^\ell = y^{p-1} + x$ divise $p(y+1)$.

On obtient donc que $y^{p-1} + x \leq p(y+1)$. Or $x \geq y+1 \geq p$, et $y^{p-1} > py$ équivaut à $y^{p-2} > p$, et cette inégalité est vérifiée dès que $y > 3$ par récurrence immédiate. On a donc $y \leq 3$, et p divise $y+1$, donc $p = 3$ et $y = 2$. De plus, p^ℓ divise 9, et vaut au moins $2^2 + x$, donc vaut 9, donc $x = 5$.

Réciproquement $(x, y, p) = (5, 2, 3)$ ou $(2, 5, 3)$ convient car $2^2 + 5 = 9 = 3^2$, et $5^2 + 2 = 27 = 3^3$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7

L'exercice est un exercice très difficile, qui combine à la fois des encadrements, des petits arguments simplistes et d'autres plus sophistiqués. C'est ce qui fait toute la complexité du problème.

Déjà notons qu'à n fixé, a, b, c sont bornés, donc il y a un nombre fini de solutions. Il suffit donc de montrer que pour n assez grand, il n'y a plus de solutions.

Essayons déjà de majorer a, b, c . On a que pour n grand par IAG

$$n!^2 = (1 \times 2 \times (n-2) \times (n-1) \times n)^2 \prod_{i=3}^{n-3} i \times (n-i) \leq \frac{n^7}{2^7} \prod_{i=3}^{n-3} \frac{n^2}{4} = \left(\frac{n}{2}\right)^{2(n-5)+7}.$$

Ainsi $n!^2 < \left(\frac{n}{2}\right)^{2(n-1)}$, donc pour n assez grand, $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$. Cette majoration semble sortir de nulle part : en fait on affine juste la majoration standard de $n!$ par IAG faite dans le problème 2, pour avoir un exposant $n-1$ et du $n/2$. Désormais, on considérera uniquement le cas des n assez grands vérifiant ces inégalités, pour lesquels on a $a, b, c < n/2$.

Fixons p premier inférieur ou égal à n , on a que $V_p(n!) = \frac{n-s_p(n)}{p-1} \leq n-1$ (où $s_p(n)$ est la somme des chiffres de n en base p), et on a égalité si et seulement si n est une puissance de p et $p = 2$. En particulier, aucun premier impair ne peut diviser a, b, c , et 4 ne divise pas a, b et c en même temps. Ceux-ci étant plus petits que $n/2$, soit 2 les divise tous, soit ils sont 2 à 2 premiers entre eux (un facteur premier commun de a et b diviserait $n!$ donc c).

Si n est impair et plus grand que 5, alors en regardant mod 4, $n!$ vaut 0 et est somme de 3 carrés (car $n-1$ est pair), donc ces carrés valent tous 0. Ainsi a, b, c sont pairs, donc d'après la remarque précédente, n est une puissance de 2 ce qui est absurde. On a donc n pair.

S'il existe un nombre p premier impair divisant $a+b, a+c$ ou $b+c$ (disons $a+b$ par symétrie), on a $p \leq a+b \leq n$, donc p divise $n!$ et comme $n-1$ impair, p divise $a^{n-1} + b^{n-1}$, donc p divise c^{n-1} donc c . En particulier, $V_p(c^{n-1}) \geq n-1 > V_p(n!)$, donc $V_p(n!) = V_p(a^{n-1} + b^{n-1})$. Or p ne divise pas a ni c (sinon il diviserait l'autre, et donc a, b et c), donc $V_p(n!) = V_p(n-1) + V_p(a+b)$. Or rappelons que $a, b < n/2$ et n est pair, donc $a+b \leq 2\frac{n}{2} - 2 = n-2$. Ainsi si p divise $n-1$, $n-1 \geq 3p$ (car $n-1$ est impair, et $p \leq a+b \leq n-2$), donc on obtient une contradiction car $a+b$ et $n-1$ figurent parmi les multiples de p dans $n!$, mais un autre tel multiple existe. Ainsi p ne divise pas $n-1$. De plus p divise c , donc $p < n/2$, donc deux multiples de p sont dans $n!$: ainsi $a+b$ n'est pas le seul multiple de p dans $n!$, donc $V_p(n!) = V_p(a+b)$ est impossible.

On a donc que $a+b, b+c$ et $c+a$ sont des puissances de 2 valant au moins 2. Ainsi a, b, c ont tous la même parité. Comme $n \geq 2$, $n!$ est pair donc ils sont tous pairs. Posons $a = 2d, b = 2e$ et $c = 2f$. Si parmi d, e, f , deux n'ont pas même parité, disons d et e , alors $a+b$ est divisible par 2 mais pas 4, donc $a+b = 2$ ce qui est absurde. Ainsi d, e, f ont tous même parité, ne peuvent être tous pairs car 4 ne peut diviser a, b et c en même temps, donc sont tous impairs. Deux parmi d, e, f ont la même congruence mod 4, donc leur somme vaut 2 mod 4. Disons que d et e ont la même congruence mod 4, alors $a+b = 2(d+e)$ est divisible par 4 mais pas 8 : on a donc $a+b = 4$, soit $a = b = 2$ par parité. On a donc $2^n + c^{n-1} = n!$, et $2+c$ est une puissance de 2. Or $c \leq n$, donc c divise $n! - c^{n-1}$, donc c est une puissance de 2. Or 4 ne divise pas c car f est impair, mais 2 divise c . Ainsi $c = 2$, donc $n! = 3 \times 2^{n-1}$ ce qui est faux dès que $n \geq 5$.

Ainsi pour n assez grand il n'y a pas de solutions, ce qui conclut.

Remarque : Au début de la preuve, on fait une majoration laborieuse de $n!$. On connaît en fait assez bien la croissance de $n!$: on a $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

Ce qui nous donne directement que pour n assez grand, $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$ (et on peut remplacer 2 car n'importe quelle constante strictement plus petite que e et $n-1$ par $n - cste$). Vous pouvez vous référer au [cours d'Antoine de Valbonne 2023 sur les Techniques asymptotiques en arithmétique](#).

6 Combinatoire : le lemme de Sperner (Mano)

En stand-by...

7 Algèbre : Equations fonctionnelles (Paul A)

Ce TD s'inspire en partie de celui d'Emile AVÉROUS dispensé lors du stage olympique de Valbonne de 2023.

Exercices

Exercice 1 (Putnam 1988, A5)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ telles que

$$\begin{cases} f(f(x)) = 6x - f(x) \\ f(x) > 0 \text{ pour } x > 0 \end{cases}$$

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f, g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x > 0, \quad \begin{cases} g(f(x)) = \frac{x}{xf(x)-2} \\ f(g(x)) = \frac{x}{xg(x)-2} \end{cases}.$$

Exercice 3 (RMM 2019, A1)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(a^2 + ab + f(b^2)) = af(b) + b^2 + f(a^2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Exercice 4

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y > 0$,

$$f\left(\frac{f(x)}{yf(x)+1}\right) = \frac{x}{xf(y)+1}.$$

Exercice 5 (RMM 2019, P5)

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y ,

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2023y).$$

Exercice 6

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1$$

pour tous réels strictement positifs x et y .

Solutions**Solution de l'exercice 1**

Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par :

$$\begin{cases} a_0 = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

Alors la première égalité de l'énoncé appliquée à $x = a_n$ nous donne

$$a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$$

On est donc face à une suite récurrente linéaire, de polynôme caractéristique $X^2 + X - 6 = (X + 3)(X - 2)$, donc il existe deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \alpha \times (-3)^n + \beta \times 2^n$$

Or, si $\alpha \neq 0$, alors à partir d'un certain rang, on aura $a_n < 0$ (car $(-3)^n$ oscille autour de 0 et $n \mapsto 3^n$ croît plus rapidement que $n \mapsto 2^n$). Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 2^n a_0$$

D'où finalement

$$a_1 = \boxed{f(x) = 2x} = 2^1 a_0$$

Réciproquement, on vérifie que $f : x \mapsto 2x$ est bien solution de l'équation initiale, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

Remarquons que comme le côté gauche de l'équation est forcément strictement positif, on a toujours $xf(x) - 2 > 0$ et $xg(x) - 2 > 0$ pour tout $x > 0$, ou encore $xf(x) > 2$ et $xg(x) > 2$ pour tout x .

Supposons maintenant que l'on ait montré que pour tout x , $xf(x) > a$ et $xg(x) > a$, où $a > 1$ est une constante strictement positive. En réintroduisant dans les équations, on trouve que pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{xf(x) - 2} &= g(f(x)) > \frac{a}{f(x)} \\ xf(x) &> axf(x) - 2a \end{aligned}$$

et donc

$$xf(x) < \frac{2a}{a-1}$$

car $a > 1$. Le même raisonnement donne que pour tout $x > 0$, $xg(x) < \frac{2a}{a-1}$. On réapplique donc la même méthode pour obtenir, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{x}{xf(x) - 2} &= g(f(x)) < \frac{2a}{(a-1)f(x)} \\ (a-1)xf(x) &< 2axf(x) - 4a \end{aligned}$$

$$xf(x) > \frac{4a}{a+1}$$

et la même inégalité pour g . Posons donc $a_0 = 2$ et pour tout n , $a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n+1}$. On vérifie facilement que pour tout n , $a_n > 1$, on sait alors que pour tout $n \geq 0$ et $x > 0$,

$$a_n < xf(x) < \frac{2a_n}{a_n-1}.$$

Étudions maintenant la convergence de la suite a_n . On voudrait montrer que cette suite est croissante et qu'elle converge vers le point fixe de $x \mapsto \frac{4x}{x+1}$ qui est 3. Pour ceci, on peut par exemple remarquer que si un couple f, g de fonctions comme dans l'énoncé existait, alors on aurait nécessairement $a_n < \frac{2a_n}{a_n-1}$, et donc $a_n < 3$. Alors on a pour tout n , $a_{n+1} > \frac{4a_n}{3+1} = a_n$, donc la suite a_n est croissante. Ainsi, comme elle est bornée par 3, elle converge, vers 3 qui est l'unique point fixe de $x \mapsto \frac{4x}{x+1}$ supérieur à $a_0 = 2$.

À la limite, on obtient donc que pour tout x , $xf(x) \geq 3$. Mais de plus, $\frac{2a_n}{a_n-1}$ converge aussi, vers $\frac{2 \cdot 3}{3-1} = 3$, et donc à la limite, $xf(x) \leq 3$ pour tout x . Comme on a de même pour g , on a donc que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = g(x) = \frac{3}{x}.$$

Réciproquement, on vérifie bien que ce couple de fonctions est bien solution.

Solution de l'exercice 3

En $a = \pm 1$ et $b = 0$ et en exploitant la symétrie du membre de gauche dans ce cas, on trouve :

$$f(0) + f(1) = f(1 + f(0)) = -f(0) + f(1)$$

Donc $\boxed{f(0) = 0}$.

En prenant désormais $a = 0$, on trouve donc :

$$f(f(b^2)) = b^2 \tag{VII.1}$$

Puis avec $a = -b$:

$$af(-a) + a^2 + f(a^2) = f(f(a^2)) \stackrel{(1)}{=} a^2$$

D'où

$$f(a^2) = -af(a) \tag{VII.2}$$

ou encore avec le changement de variable $a \longleftarrow -a$:

$$f(a^2) = af(a) \tag{VII.3}$$

Ce qui donne finalement en combinant (2) et (3) que f est **impaire**.

Or, (1) nous montre que f est involutive sur les nombres positifs, et comme f est impaire, elle doit aussi l'être sur les négatifs. Donc f est **involutive**, et donc **bijective**. Ainsi,

$$f(a^2) \stackrel{(3)}{=} af(a) \stackrel{\text{involution}}{=} f(f(a))f(a) \stackrel{(3)}{=} f(f(a)^2)$$

On peut alors utiliser l'injectivité de f pour trouver que $f(a)^2 = a^2$, d'où

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f(a) = \pm a$$

On est alors face à un problème de multigraphes. Supposons par l'absurde qu'il existe a et b des réels non-nuls disincts tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$.

Alors, $f(a^2) = af(a) = a^2$ et $f(b^2) = bf(b) = -b^2$, donc en injectant dans l'équation initiale, on trouve

$$f(a^2 + ab - b^2) = a^2 - ab + b^2$$

Reste alors une disjonction de cas à faire selon la valeur du membre de gauche :

- Si $f(a^2 + ab - b^2) = a^2 + ab - b^2$, alors le membre de gauche et de droite sont différents car $a \neq b$ et $b \neq 0$.
- Si $f(a^2 + ab - b^2) = -(a^2 + ab - b^2)$, alors les deux membres sont différents car $a \neq 0$

Donc les seules solutions possibles sont Id et $-\text{Id}$. Réciproquement, ces deux fonctions sont évidemment solutions de l'équation initiale.

Solution de l'exercice 4

On remarque tout d'abord que pour tout $z > 0$, l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x}{xz+1} \in]0, z^{-1}[$ est une bijection strictement croissante.

Maintenant, si $f(x) = f(x')$, on trouve que

$$\frac{x}{xf(1)+1} = f\left(\frac{f(x)}{1 \times f(x)+1}\right) = f\left(\frac{f(x')}{1 \times f(x')+1}\right) = \frac{x'}{x'f(1)+1}$$

donc $x = x'$ et f est injective.

D'autre part, fixons $y > 0$. Chaque z compris entre 0 et $f(y)^{-1}$ (strictement) s'écrit comme un $\frac{x}{xf(y)+1}$ pour un certain x strictement positif, tout $0 < z < f(y)^{-1}$ est atteint par f . En particulier, si $0 < z < f(y)^{-1}$, on peut écrire $z = f(y')$. Mais alors f atteint tout point entre 0 et $f(y')^{-1} = z^{-1}$. En faisant tendre z vers 0 (ce qui est permis, la seule contrainte étant $0 < z < f(y)^{-1}$), on en déduit que f est surjective, donc f est bijective.

Soit g la bijection réciproque de f , i.e. la seule fonction telle que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ pour tout $x > 0$. On vérifie que g vérifie la même équation fonctionnelle que f : en appliquant l'équation fonctionnelle de départ à $g(x)$ et $g(y)$, on obtient

$$f\left(\frac{x}{xg(y)+1}\right) = \frac{g(x)}{yg(x)+1}.$$

En appliquant g des deux côtés, on obtient que g vérifie la même équation que f .

Soient maintenant $x, x' > 0$ tels que $x' < f(x)$. Alors il existe un $y > 0$ tel que $x' = \frac{f(y)}{yf(x)+1}$ (il suffit de prendre $y = \frac{1}{x'} - \frac{1}{f(x)}$), donc $f(x') = f\left(\frac{f(y)}{yf(x)+1}\right) = \frac{x}{xf(y)+1} < x$.

Donc si $x' < f(x)$, alors $f(x') < x$. En particulier, si $x < f(x)$, alors $f(x) < x$, c'est absurde. Donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leq x$.

Or, on a vu que g était également solution de l'équation, donc pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \leq x$. Notamment, si $x > 0$, $x = g(f(x)) \leq f(x)$. On a donc forcément $f(x) = x$, donc f est l'identité, et on vérifie facilement que l'identité est bien solution.

Solution de l'exercice 5

Tout d'abord, voyons que le 2023 est arbitraire et n'a aucune influence sur l'équation. En effet, en posant $g(x) = \frac{f(2023x)}{2023}$ pour tout x , l'équation de l'énoncé avec $2023x$ au lieu de x donne que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x + yg(x)) + g(xy) = g(x) + g(y).$$

On cherche maintenant à égaliser des termes dans la fonction g , par exemple xy et y qui peuvent être égalisés en posant $x = 1$. Dans ce cas, l'équation donne

$$g(1 + yg(1)) = g(1).$$

Remarquons déjà que si $g(1) \neq 0$, alors $1 + yg(1)$ prend toutes les valeurs réelles lorsque y varie, et donc g est constante. Ceci donne comme solution f constante, dont on vérifie que c'est bien une solution pour tout choix de la constante.

On suppose à présent que l'on est dans le cas $g(1) = 0$. Alors en posant $y = 1$ pour égaliser xy et x , on trouve que pour tout x ,

$$g(x + g(x)) = 0.$$

Si 1 est le seul point où g s'annule, alors g est de la forme $g(x) = 1 - x$, et f est donc de la forme $f(x) = 2023 - x$, dont on vérifie que c'est effectivement une solution. Supposons à présent qu'il existe un point $a \neq 1$ tel que $g(a) = 0$.

Remarquons qu'en posant $x = b$ pour b un zéro quelconque de g , on trouve dans l'équation de g que pour tout y , $g(by) = g(y)$. Or on sait que pour tout x , $x + g(x)$ est un zéro de g , donc par exemple avec $x = 0$, on trouve que $g(0)$ est un zéro de g , donc pour tout y , $g(g(0)y) = g(y)$.

Si g est identiquement nulle, on retombe sur une fonction constante, cas qui a déjà été traité précédemment, on suppose donc que ce n'est pas le cas, et qu'il existe un point $s \in \mathbb{R}$ tel que $g(s) \neq 0$. En posant $x = as$ dans l'équation de g (où on rappelle que $a \neq 1$ est un zéro de g), on trouve que pour tout y ,

$$g(as + yg(s)) + g(sy) = g(as + yg(as)) + g(asy) = g(as) + g(y) = g(s) + g(y)$$

et donc $g(as + yg(s))$ est indépendant du choix de a comme zéro de g . Si b est un autre zéro de g , on a donc $g(as + yg(s)) = g(bs + yg(s))$ pour tout y réel, et donc comme $g(s) \neq 0$, $yg(s)$ prend toutes les valeurs réelles et g est $(a - b)s$ -périodique.

Si jamais on peut choisir $s \neq 0$ tel que $g(s) \neq 0$, alors g est effectivement périodique de période $p = (a - 1)s \neq 0$. En posant $x = p$ dans l'équation de g , on trouve que pour tout y ,

$$g(y) + g(py) = g(g(0)y) + g(py) = g(p + g(p)y) + g(py) = g(p) + g(y) = g(0) + g(y)$$

d'où $g(py) = g(0)$ pour tout y . Comme $p \neq 0$, on obtient que g est constante. Ainsi, g est forcément nulle en dehors de 0.

On pourrait s'attendre à en conclure facilement que g est nulle, mais en fait toute fonction nulle en dehors de 0 fonctionne! En effet, soit g n'importe quelle fonction nulle en dehors de 0, on suppose même que $g(0) \neq 0$ car l'autre cas a déjà été traité, et soient x, y des réels. Si x, y sont tous les deux non nuls, alors x, y, xy et $x + yg(x) = x$ sont tous non nuls et l'équation sur g s'écrit $0 + 0 = 0 + 0$. Si maintenant $y = 0$ et x est non nul, l'équation devient $0 + g(0) = 0 + g(0)$. Si $x = 0$ et y est non nul, alors $x + yg(x) = yg(0) \neq 0$ et l'équation devient $0 + g(0) = g(0) + 0$. Enfin, si $x = y = 0$, l'équation devient $g(0) + g(0) = g(0) + g(0)$. On voit donc que g fonctionne bien, on obtient donc que toutes les fonctions f nulles en dehors de 0 sont solutions.

Pour conclure, les solutions sont $f : x \mapsto 2023 - x$, f constante, et f nulle en dehors de 0, prenant une valeur quelconque en 0.

Solution de l'exercice 6

Soit f une solution éventuelle du problème. Dans la suite, on notera $\mathbf{E}_{x,y}$ l'égalité de l'énoncé. Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $f(a) = f(b)$. Les égalités $\mathbf{E}_{1,a}$ et $\mathbf{E}_{1,b}$ indiquent que

$$a = f(1)f(a) + 1 - f(1 + f(a)) = f(1)f(b) + 1 - f(1 + f(b)) = b,$$

ce qui signifie que f est injective.

Soit ensuite c et d deux réels tels que $0 < c < d$, puis soit t un réel strictement positif. Puisque f est injective, les égalités $\mathbf{E}_{c/t,t}$ et $\mathbf{E}_{d/t,t}$ indiquent que

$$f(c/t + f(c)) = f(c/t)f(t) + 1 - t \neq f(d/t)f(t) + 1 - t = f(d/t + f(d)),$$

de sorte que $c/t + f(c) \neq d/t + f(d)$, ou encore que $f(d) - f(c) \neq (d - c)/t$. Cette dernière inégalité étant valide pour tout $t > 0$, on en déduit que $f(d) \geq f(c)$, ce qui signifie que f est croissante.

On pose alors $p = \inf\{f(x) : x > 0\}$ et $q = \inf\{f(x) : x > p\}$. Puisque f est croissante, on sait que $f(x) \rightarrow p$ lorsque $x \rightarrow 0$ et que $x > 0$, et que $f(y) \rightarrow q$ lorsque $y \rightarrow p$ et que $y > p$. Un réel $y > 0$ étant fixé, si on fait tendre x vers 0, on en déduit que $f(x) \rightarrow p$ et que $f(xy) \rightarrow p$, de sorte que $x + f(xy) \rightarrow p$ et que $f(x + f(xy)) \rightarrow q$. Par conséquent, l'égalité $\mathbf{E}_{x,y}$ indique que

$$y - 1 = f(x)f(y) - f(x + f(xy)) \rightarrow pf(y) - q,$$

ce qui signifie que $f(y) = y + (q - 1)/p$.

La fonction f est donc une fonction affine, de la forme $f : t \mapsto ut + v$. Réciproquement, une fois les coefficients u et v fixés, l'égalité $\mathbf{E}_{x,y}$ indique que

$$u^2xy + ux + uv + v + y = f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1 = u^2xy + uvx + uvy + v^2 + 1,$$

ou encore que $u(v - 1)x + (uv - 1)y = uv + v - v^2 - 1$. Cela signifie que

$$uv - u = uv - 1 = uv + v - v^2 - 1 = 0.$$

On en déduit que $u - 1 = (uv - 1) - (uv - u) = 0$, c'est-à-dire que $u = 1$, puis que $v - 1 = uv - u = 0$, c'est-à-dire que $v = 1$. Mais alors la triple égalité

$$uv - u = uv - 1 = uv + v - v^2 - 1 = 0$$

est bien respectée.

En conclusion, la fonction $f : t \mapsto t + 1$ est l'unique solution du problème.

8 Géométrie : Problèmes de niveau P2 (Anatole)

Exercice 1 (IMO 2012, P5)

Soit ABC un triangle avec $\widehat{BCA} = 90$. Soit D le pied de la hauteur issue de C . Soit X un point sur le segment CD . Soit K sur AX tel que $BK = BC$. Soit L sur BX tel que $AL = AC$. Soit M l'intersection de AL et BK . Montrer que $MK = ML$.

Exercice 2 (IMO 2009, P2)

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit. Soit P et Q sur les segments $[CA]$ et $[AB]$. Soit K, L, M les milieux de BP, CQ, PQ respectivement, et soit Γ le cercle circonscrit à KLM . On suppose que PQ est tangente à Γ . Montrer que $OP = OQ$.

Exercice 3 (IMO 2023, P2)

Soit ABC un triangle acutangle, $AB < AC$. Soit Ω son cercle circonscrit. Soit S le milieu de l'arc BC contenant A . La hauteur issue de A rencontre BS en D et Ω en $E \neq A$. La parallèle à BC passant par D coupe BE en L . Soit ω le cercle circonscrit à BDL . Soit $P \neq B$ l'intersection de Ω et ω . Prouver que la tangente à ω en P recoupe BS sur la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$.

Exercice 4 (IMO 2008, P6)

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $BA \neq BC$. Soit ω_1 et ω_2 les cercles inscrits à ABC et ADC . Supposons qu'il existe un cercle ω tangent à $[BA]$ au-delà de A , à $[BC]$ au-delà de C , à AD et à CD . Prouver que les tangentes communes extérieures à ω_1 et ω_2 se coupent sur ω .

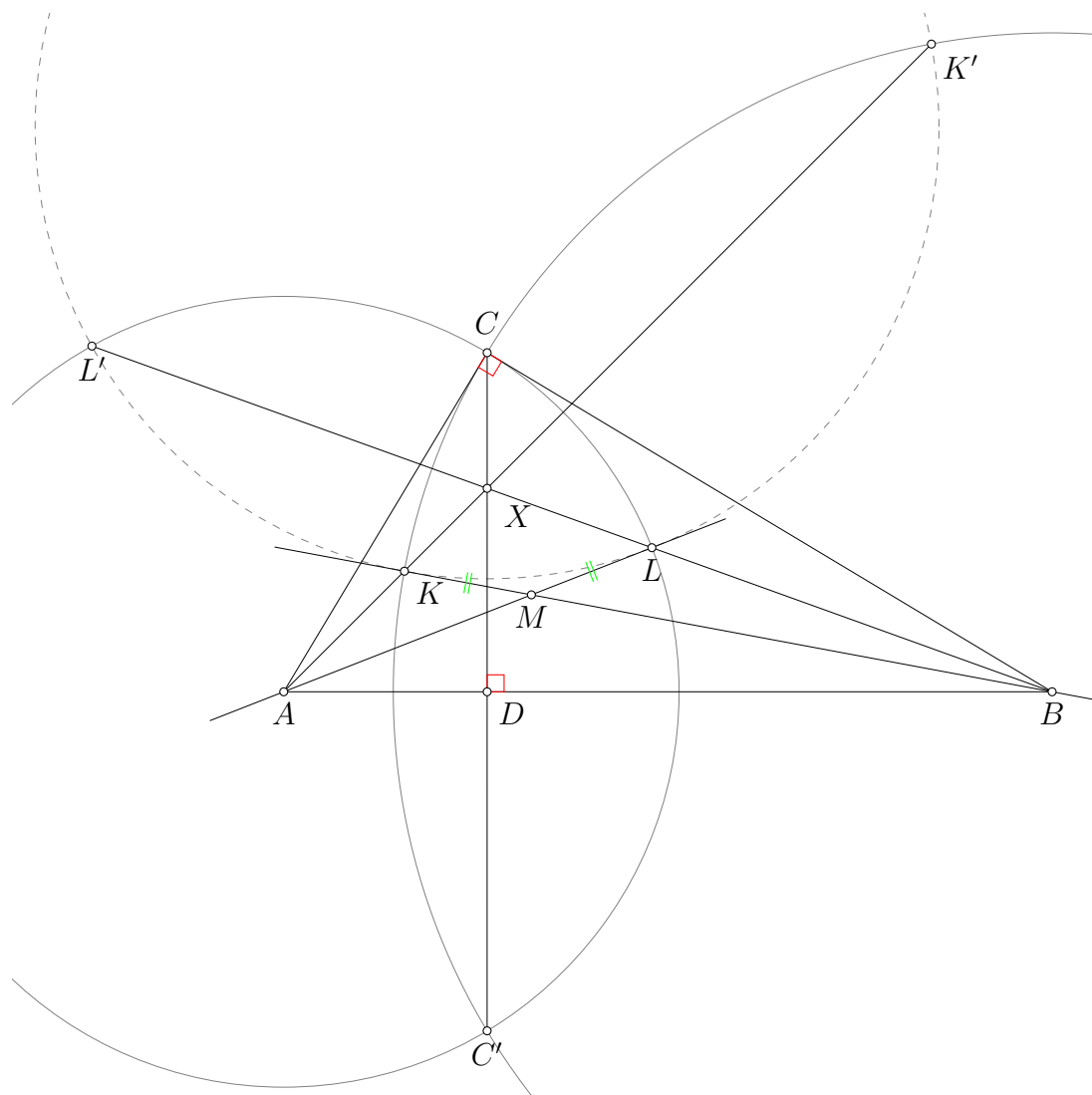
Solution de l'exercice 1

Face à ce problème, le premier réflexe doit être incontestablement de se demander comment tracer une figure propre. Cela a deux avantages majeurs : si on arrive à répondre à cette question, on pourra déjà tracer une figure propre, ce qui permet évidemment de mieux repérer les différentes propriétés et conjectures. D'autre part, si on comprend comment définir plus simplement ou intuitivement les points, on peut directement trouver des propriétés sur ces points, ou comprendre quels objets (points, droites, cercles) il faut naturellement introduire dans le processus.

Bref, on fait une figure. Ce qui est intéressant dans une figure propre, comme en art moderne, c'est le processus tout autant (et même parfois bien plus) que le résultat. Cette phrase semble évidente, mais ne pas faire l'effort de tracer une figure à la règle et au compas revient à essayer de courir un marathon sans suivre de programme d'entraînement : c'est le meilleur moyen de ne pas réussir.

Regardons alors comment tracer la figure. La seule étape délicate semble être de tracer les points K et L . Mais cette difficulté n'en est pas une : K est simplement l'intersection de la droite AX avec le cercle de centre B passant par C . Alors où est le problème ? Eh bien, toute personne ayant déjà vu une figure de géométrie le sait : une droite et un cercle se coupent en deux points. On se demande donc naturellement lequel des deux est K . La réponse est dans l'énoncé : K est sur le segment AX . Mais cette réponse n'est pas satisfaisante : un segment, ça n'a aucun sens géométrique. Ce qui est intéressant, c'est seulement les droites : pourquoi vouloir considérer seulement une section de droite quand le reste des points est tout aussi intéressant ? Le deuxième point d'intersection a donc toutes les chances d'être aussi important que K , puisqu'il joue un rôle symétrique avec K a priori. Bilan : on introduit ce deuxième point d'intersection de AX avec le cercle de centre B passant par C , et on l'appelle K' .

On définit de même L' .



Soit C' le symétrique de C par rapport à AB . CC' est l'axe radical des cercles de centre A et B passant par C . On a alors, par puissance de points,

$$XK \cdot XK' = XC \cdot XC' = XL \cdot XL'$$

donc K, L, K', L' sont cocycliques!

Essayer de construire proprement la figure nous a déjà amené à un premier résultat intéressant. Il est temps d'exploiter la figure elle-même pour repérer des propriétés intéressantes. On rappelle que le problème met en jeu les longueurs MK et ML . Deux longueurs égales mettant en jeu deux points sur un cercle et un point à l'extérieur, ça fait penser à des tangentes... La figure confirme ces suspicions : MK et ML ont bel et bien l'air tangents au cercle circonscrit à $CLK'L'$.

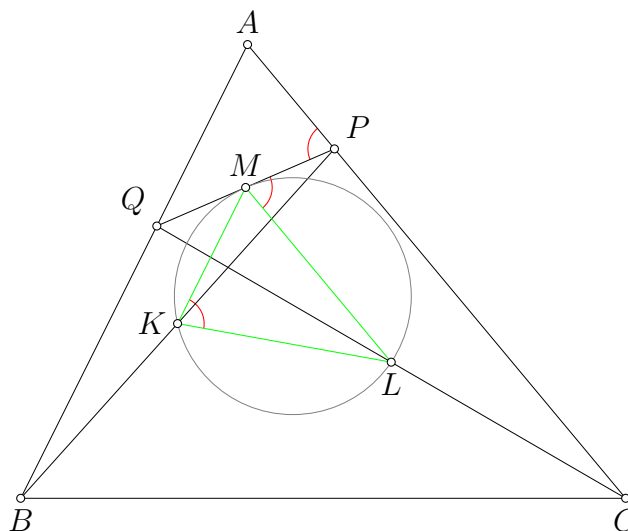
Ne reste plus qu'à le montrer. Le fait qu'on ait beaucoup de cercles et de droites concourantes donne envie de pousser plus avant nos puissances de points. Le cercle de centre B passant par C est tangent à AC , donc $AC^2 = AK \cdot AK'$. Or, $AC = AL$ donc

$$AL^2 = AK \cdot AK'$$

Ainsi, AL est bel et bien tangent au cercle circonscrit à $KLK'L'$! Par le même argument, BK est tangent au même cercle. Ainsi, MK et ML sont deux segments tangents à un même cercle, donc ont la même longueur, ce qui conclut la preuve.

Solution de l'exercice 2

La figure semble être ardue à tracer, mais ce n'est pas vraiment le cas : on peut raisonnablement supposer que l'implication est une équivalence. Il suffit alors de choisir P et Q tels que $OP = OQ$.



Ici, il peut être plus naturel de raisonner à partir de la conclusion du problème, idée récurrente en géométrie. En effet, utiliser ce qu'on veut montrer pour essayer de découvrir de nouvelles choses sur la figure peut très souvent amener à remarquer des propriétés qui "doivent" être vraies si le problème est vrai. Il suffit alors de montrer ces propriétés pour conclure.

Ici, l'énoncé nous demande de montrer que $OP = OQ$. Ce n'est pas une égalité très conviviale *a priori*, d'autant plus que le point O n'est pas introduit. Mais en fait, cela revient à montrer que P et Q ont la même puissance par rapport au cercle circonscrit à ABC (puisque la puissance d'un point X par rapport à ce cercle dépend uniquement de la distance XO). Et ça, c'est une propriété plus conviviale ! On veut donc montrer que $PA \cdot PC = QA \cdot QB$.

Or, on a justement $PC = 2ML$ et $QB = 2MK$ (par droites des milieux). On veut donc en fait montrer que

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{MK}{ML}$$

Cette égalité de rapports fait tout de même fortement penser à des triangles semblables... Plus que cela, le fait que AQP et MLK soient semblables semble être la seule façon à peu près raisonnable de démontrer cette égalité. On a déjà utilisé un aspect des triangles semblables : les rapports de longueurs. Pour continuer, on utilise l'autre aspect : les angles égaux. Alors on y va. On veut montrer que $\widehat{MKL} = \widehat{APQ}$.

Le moment est venu d'utiliser la tangence : par angle tangentiel, $\widehat{MKL} = \widehat{PML}$. Par angles alternes internes dans les droites parallèles (AP) et (ML) , on a aussi $\widehat{PML} = \widehat{APM}$. Ainsi, $\widehat{MKL} = \widehat{APM} = \widehat{APQ}$, comme voulu.

On montre de même que $\widehat{MLK} = \widehat{AQP}$.

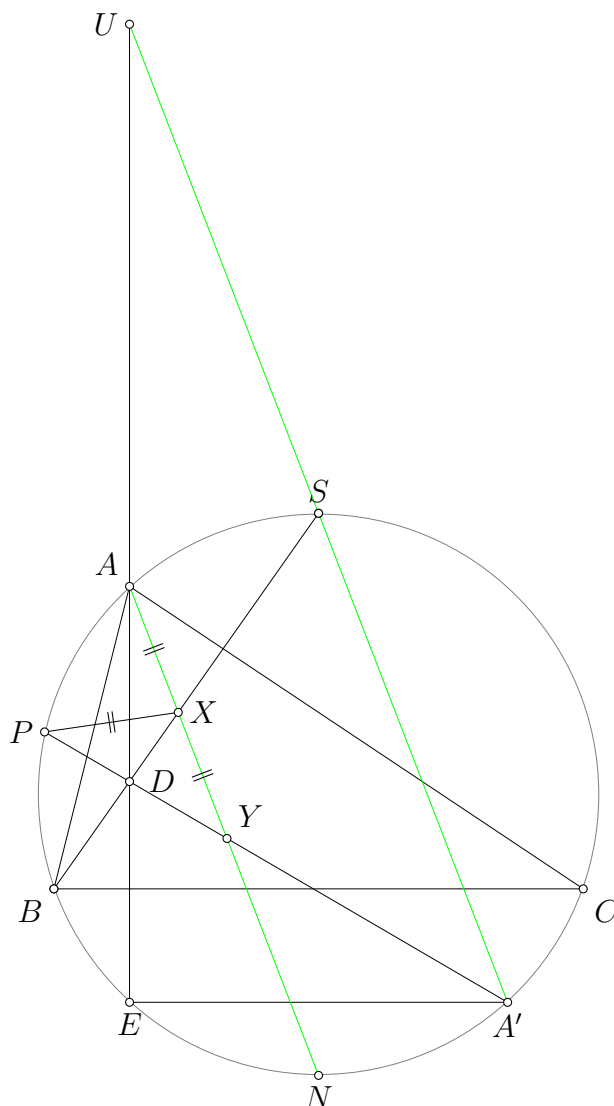
Ainsi, nos deux triangles sont bel et bien semblables. Il suffit alors de remonter les arguments pour conclure.

The diagram illustrates a geometric construction involving two intersecting circles. The left circle has points L and B on its circumference. The right circle has points A , D , E , C , and A' on its circumference. A point P is located on the left circle, and a point S is located on the right circle. Lines connect A to B , B to C , C to A , A to D , D to E , E to A , and A to P . Red horizontal lines connect L to B , B to C , and E to A' . A vertical line segment AD is also shown.

Notons A' la deuxième intersection de PD avec le cercle circonscrit à ABC . On a

$$\widehat{PDL} = \widehat{PBL} = 180 - \widehat{PBE} = \widehat{PA'E}$$

Cette remarque nous permet en fait de définir P sans passer par L ! On peut donc refaire une figure (toujours à la règle et au compas bien entendu) sans le point L pour avoir les idées plus claires.



On remarque que $ASNE$ est un trapèze isocèle. Ainsi,

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABS} = \widehat{AES} = \widehat{EAN} = \widehat{DAX}$$

Soit Y l'intersection de AX avec PA' . Une homothétie de centre A et de rapport 2 envoie la médiatrice de AP sur PA' (car les deux droites sont perpendiculaires à AP). On veut donc montrer que l'image de X est sur PA' , c'est à dire que X est le milieu de AY .

Comme $(AN) // (SA')$ (car $ASA'N$ est un rectangle), on a envie de considérer l'homothétie de centre D qui envoie une droite sur l'autre : elle envoie en effet X et Y sur S et A' respectivement. Soit alors U l'image de A . On veut montrer que S est le milieu de UA' . Comme

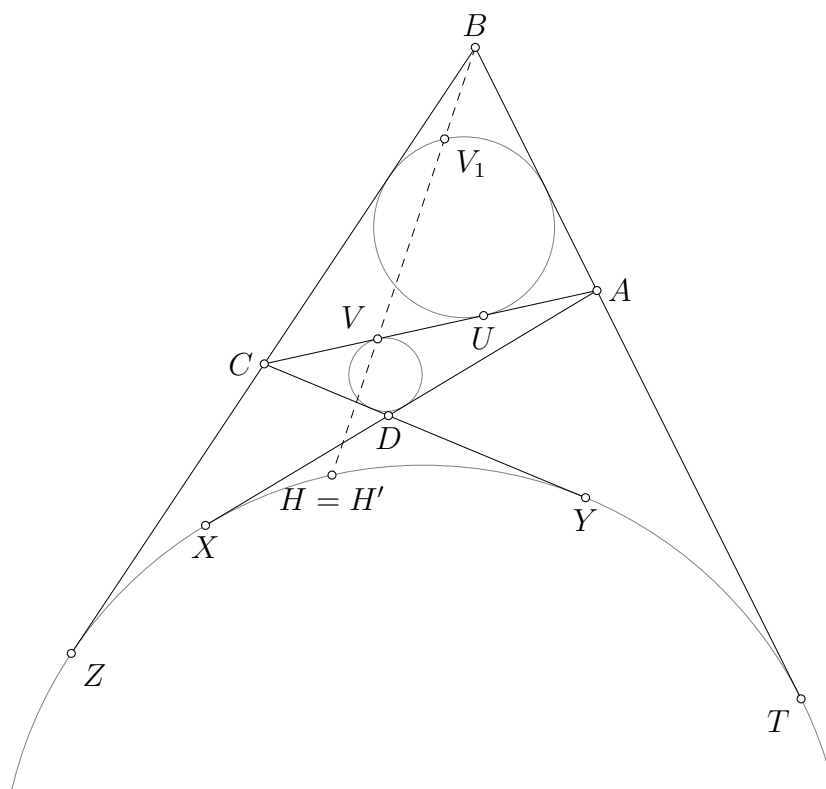
$(AS) \perp (SA')$, cela revient à montrer que UAA' est isocèle en A . Or,

$$\widehat{AUA'} = 90 - \widehat{UA'E} = 90 - \widehat{SA'E} = 90 - \widehat{SNE} = \widehat{NSE} = \widehat{SNA} = \widehat{SA'A}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4

Comme toujours, premier réflexe : on fait une figure propre. Ici, l'énoncé suppose une condition a posteriori, il semble donc délicat de tracer la figure. Mais en fait non ! Il suffit de tracer d'abord ω , puis de choisir 4 tangentes et de définir les points d'intersection A, B, C, D . Cet exemple montre bien qu'une figure peut être beaucoup plus facile à tracer si on la prend à l'envers et qu'on commence par dessiner les objets les plus durs à définir. Cela peut même aider à tracer des figures plus précises : imaginons qu'on veuille tracer le cercle circonscrit à un triangle ABC . Si l'on trace le cercle d'abord, puis qu'on prend trois points A, B, C dessus, on gagne du temps et de la précision par rapport à si on commençait par tracer ABC , puis qu'on traçait les médiatrices pour définir O et enfin tracer le cercle...



On remarque que le point dont il est question est le centre d'homothétie envoyant ω_1 sur ω_2 . On s'intéresse donc à cette homothétie. Regardons plus particulièrement les images des points de tangence des différentes droites avec ces deux cercles. La droite la plus intéressante semble être (AC) car elle est tangente aux deux cercles. Soit donc U et V les points de tangence de (AC) avec ω_1 et ω_2 respectivement.

Soit V_1 l'image de V par l'homothétie de centre H envoyant ω_2 sur ω_1 . La tangente en V_1 à ω_1 est parallèle à (AC) , donc V_1 est le point opposé à U sur le cercle. On définit de même U_1 , l'image de U par l'homothétie de centre H envoyant ω_1 sur ω_2 . U_1 est alors de même le point opposé à V sur ω_2 .

Et maintenant on peut voir la magie arriver : B semble être aligné avec H, V et V_1 ! Pourquoi est-ce autant incroyable ? Si c'est vrai, et si H est bien sur ω , on sait que l'homothétie de centre B envoyant ω_1 sur ω envoie V_1 sur le point de ω dont la tangente est parallèle à

(AC) ! Ainsi, la tangente en H à ω devrait être parallèle à (AC) . Définissons donc H' , l'image de V_1 par l'homothétie de centre B envoyant ω_1 sur ω .

Récapitulons ce qu'on sait :

B, V_1, H' sont alignés

H, V, V_1 sont alignés

Et on veut montrer que les 5 points sont sur la même droite. Pour cela, il nous suffit de montrer que B, V et V_1 sont alignés.

Alors allons-y. Il faut maintenant se rappeler les configurations classiques. Soit Γ le cercle B -exinscrit dans ABC . Soit V' le point de tangence de Γ avec AC . On sait que l'homothétie de centre B envoyant ω_1 sur Γ envoie V_1 sur V' (pourquoi? parce que les tangentes en V_1 et V' à ω_1 et Γ respectivement sont toutes deux parallèles à AC). Ainsi, on veut simplement montrer que $V' = V$.

Or, on sait que $CV' = AU$ par un calcul de chasse aux tangentes classiques. Il nous suffit donc de montrer que $CV = AU$. Mais on sait calculer ces deux longueurs en fonction des côtés des triangles ABC et ACD :

$$CV = \frac{AC + CD - AD}{2}$$

$$AU = \frac{AC + AB - BC}{2}$$

On veut donc montrer que $AC + CD - AD = AC + AB - BC$, c'est-à-dire que

$$CD + BC = AB + AD$$

Cette égalité classique met en jeu les longueurs des côtés d'un quadrilatère circonscriptible. Il suffit de faire une petite chasse aux tangentes pour la montrer. On définit les points X, Y, Z, T comme sur la figure. On a

$$\begin{aligned} CD + BC &= CY - DY + BZ - CZ \\ &= BZ - DY \\ &= BT - DX \\ &= BT - AT + AX - DX \\ &= AB + AD \end{aligned}$$

ce qui conclut cette partie.

Ainsi, B, V_1, V, H, H' sont alignés. De même, D, U, U_1, H, H' sont alignés. H et H' sont à l'intersection des deux mêmes droites, donc $H = H'$, ce qui conclut.

4 Entraînement de fin de parcours

24 août 2024

Veillez rédiger chaque problème sur une copie différente. Veillez à rendre tous vos brouillons. Pour chaque copie, indiquez clairement votre nom, le numéro du problème, le numéro de la copie et s'il s'agit d'un brouillon ou d'un propre. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 4

Soit ABC un triangle. Soit N le milieu de l'arc BC contenant A et Q le symétrique de A par rapport à N . Soit I le centre du cercle inscrit à ABC et R le projeté orthogonal de A sur (QI) . Soit P le point tel que $ABPC$ est un parallélogramme. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PQR est tangent à la droite (AI) .

Exercice 5

Soit P un polynôme à coefficients entiers et positifs. On suppose qu'il existe une suite (x_n) d'entiers strictement positifs telle que $x_1 = 1$ et, pour tout indice $n \geq 1$,

$$x_{n+1}^2 + P(n) = x_n x_{n+2}.$$

Montrer que P est un polynôme constant.

Exercice 6

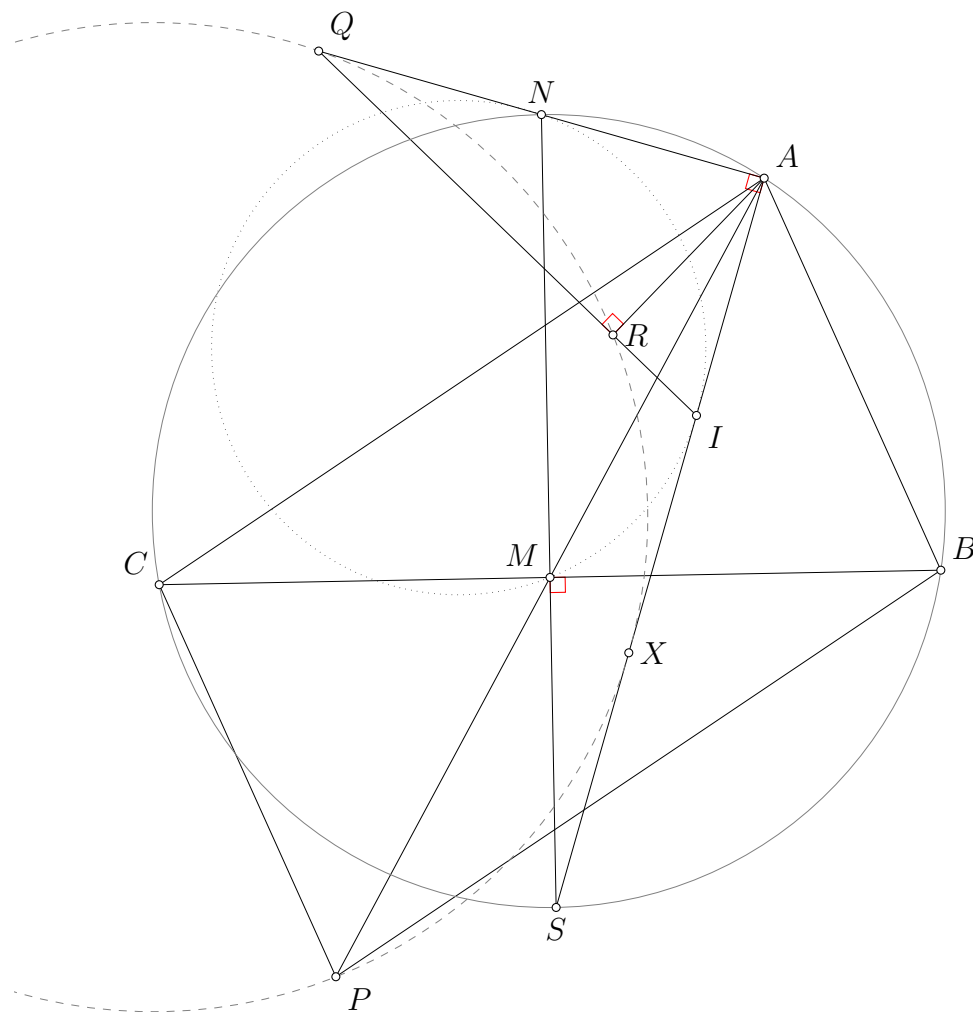
Soit $n > 0$ un entier. Anatole et Emilhan jouent à un jeu. Ils ont n cartes numérotées de 1 à n . D'abord, Emilhan place les cartes en ligne dans l'ordre qu'il veut. Ensuite, Anatole place un jeton sur la carte de son choix. Chacun à leur tour, en commençant par Emilhan, ils déplacent le jeton sur une carte adjacente, sachant que le jeton ne peut pas être posé strictement plus de i fois sur la carte de numéro i . Le premier joueur qui ne peut plus jouer perd. En fonction de n , quel joueur dispose d'une stratégie gagnante ?

Solutions

Exercice 4

Soit ABC un triangle. Soit N le milieu de l'arc BC contenant A et Q le symétrique de A par rapport à N . Soit I le centre du cercle inscrit à ABC et R le projeté orthogonal de A sur (QI) . Soit P le point tel que $ABPC$ est un parallélogramme. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PQR est tangent à la droite (AI) .

Solution de l'exercice 4



On va montrer que le cercle circonscrit à PQR est tangent à (AI) en X le symétrique de A par rapport à I .

Le triangle AIQ est rectangle par propriété du pôle Sud/pôle Nord et R est le pied de la hauteur issue de A dans ce triangle rectangle, d'où :

$$IX^2 = IA^2 = IR \cdot IQ$$

Donc par puissance d'un point, le cercle circonscrit à XRQ est tangent à (AI) en X .

On note M le milieu de $[BC]$ et S le pôle sud. Par cercle antarctique et la relation d'Euclide dans le triangle rectangle SBN , on a alors :

$$SI^2 = SB^2 = SM \cdot SN$$

d'où le cercle circonscrit à NMI est tangent à (AI) en I . Or l'homothétie de centre A et de rapport 2 envoie N sur Q , I sur X et M sur P (car $ABPC$ est un parallélogramme), ce qui signifie que le cercle circonscrit à (PXQ) est tangent à (AI) en X .

On en déduit que le cercle tangent à (AI) en X et passant par Q passe également par R et P . Ainsi, il est le cercle circonscrit à PQR qui est bien tangent à (AI) en X .

Exercice 5

Soit P un polynôme à coefficients entiers et positifs. On suppose qu'il existe une suite (x_n) d'entiers strictement positifs telle que $x_1 = 1$ et, pour tout indice $n \geq 1$,

$$x_{n+1}^2 + P(n) = x_n x_{n+2}.$$

Montrer que P est un polynôme constant.

Solution de l'exercice 5

Cet exercice combine les arguments de divisibilités liés au caractère entier de la suite avec le contrôle de la croissance du polynôme P par rapport à la croissance de la suite (x_n) .

On suppose que P est non nul. Regardons la relation de récurrence aux indices $n-1$, n et $n+1$, à savoir les trois égalités suivantes :

$$\begin{aligned} x_n^2 + P(n-1) &= x_{n-1} x_{n+1}; \\ x_{n+1}^2 + P(n) &= x_n x_{n+2}; \\ x_{n+2}^2 + P(n+1) &= x_{n+1} x_{n+3}. \end{aligned}$$

Puisque l'entier x_{n+1} est présent dans les trois équations, il est pertinent de combiner ces trois équations modulo x_{n+1} . On obtient

$$P(n-1) \equiv -x_n^2, \quad P(n) \equiv x_n x_{n+2}, \quad P(n+1) \equiv -x_{n+2}^2 \pmod{x_{n+1}}.$$

On déduit que

$$P(n+1)P(n-1) \equiv x_n^2 x_{n+2}^2 \equiv P(n)^2 \pmod{x_{n+1}}.$$

On a donc montré que x_{n+1} est un diviseur de $P(n)^2 - P(n+1)P(n-1)$.

On montre à présent que lorsque n est suffisamment grand, $x_{n+1} > |P(n)^2 - P(n-1)P(n+1)|$. Puisque P est à coefficients positifs, $P(n)$ est positif pour tout entier n et on trouve que, pour tout entier naturel n ,

$$x_n x_{n+2} \geq x_{n+1}^2,$$

ce qui se réécrit comme $\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} \geq \frac{x_{n+1}}{x_n}$. Soit d le degré de P et c_d son coefficient dominant.

Puisque $x_2 \geq 1$, on a

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1} + \frac{P(1)}{x_1 x_2} \geq 1 + \frac{P(1)}{x_1 x_2}.$$

Notons $c = 1 + \frac{P(1)}{x_1 x_2}$, qui vérifie $c > 1$. En utilisant la croissance de $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ on a par récurrence immédiate que $x_n \geq c^{n-2}$ pour tout entier $n \geq 3$. Notons que $P(n)^2 - P(n-1)P(n+1)$ est un polynôme de degré $d-1$, et par croissance comparée, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, $|P(n)^2 - P(n-1)P(n+1)| \leq n^d < c^{n-2}$. On déduit que

$$|P(n)^2 - P(n-1)P(n+1)| < n^d < c^{n-2} \leq x_{n+1}.$$

On déduit que $P(n)^2 = P(n-1)P(n+1)$ pour tout entier n suffisamment grand. Par rigidité, cette égalité devient vraie pour tout entier n . La suite $\left(\frac{P(n)}{P(n-1)}\right)$ est donc constante égale à un réel c . Comme P est à coefficients positifs, il est croissant, donc $c \geq 1$.

Si $c > 1$, on montre par récurrence immédiate que $P(n) = c^{n-1}P(1)$. Or, pour tout entier n suffisamment grand, par croissance comparée, $P(n) \leq n^{d+1}$. On déduit que $c^{n-1}P(1) < n^{d+1}$ pour tout entier n suffisamment grand, ce qui est absurde par croissance comparée.

On déduit que $c = 1$. Mais alors $P(n) = P(n-1)$ pour tout entier n , ce qui implique que tous les entiers n sont racines du polynôme $P(X) - P(0)$, ce qui implique que $P(X) - P(0)$ est le polynôme nul, donc que P est constant.

Remarque : On présente une deuxième façon de montrer que P est constant à partir de l'égalité $P(n)^2 = P(n-1)P(n+1)$ vraie pour tout entier n suffisamment grand. Par rigidité, on a que $P(X)^2 = P(X-1)P(X+1)$. Supposons que P est non constant. Soit α une racine complexe de P (qui existe d'après le théorème de D'Alembert-Gauss). Alors $P(\alpha+1)^2 = P(\alpha)P(\alpha+2) = 0$, donc $\alpha+1$ est également une racine de P . Par récurrence immédiate, $\alpha+n$ est une racine de P pour tout n , ce qui implique que P admet une infinité de racine et qu'il s'agit du polynôme nul, d'où la contradiction.

Exercice 6

Soit $n > 0$ un entier. Anatole et Emilhan jouent à un jeu. Ils ont n cartes numérotées de 1 à n . D'abord, Emilhan place les cartes en ligne dans l'ordre qu'il veut. Ensuite, Anatole place un jeton sur la carte de son choix. Chacun à leur tour, en commençant par Emilhan, ils déplacent le jeton sur une carte adjacente, sachant que le jeton ne peut pas être posé strictement plus de i fois sur la carte de numéro i . Le premier joueur qui ne peut plus jouer perd. En fonction de n , quel joueur dispose d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 6

On remarque d'abord que la parité de la position dans la ligne des cartes sur lesquelles un joueur pose son jeton est constante. Numérotions les positions des cartes de 1 à n , leur placement correspond alors à une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On sait alors que si Anatole pose initialement son jeton sur une carte à une position paire, il le posera toujours sur une carte à une position paire. Ceci nous incite à considérer la somme des cartes à une position paire, S_0 , et la somme des cartes à une position impaire, S_1 . Si la somme des nombres de 1 à n est paire, on peut alors intuitivement qu'Emilhan pourra placer les cartes afin que $S_1 = S_0$ pour ensuite établir une stratégie miroir. Cette intuition est en fait vraie, comme nous allons le montrer.

Dans la suite, pour simplifier les explications, on imaginera que la carte numéro i correspond à un tas de i allumettes et que poser son jeton sur la carte i revient à enlever une allumette du tas.

Cas 1 : $n \equiv 0[4]$

Emilhan peut positionner les tas d'allumettes ainsi :

$$\underbrace{1, 3, 4, 2, 5, 7, 8, 6, \dots}_{\text{paire}}, \underbrace{4k+1, 4k+3, 4k+4, 4k+2, \dots}_{\text{impaire}}, \underbrace{n-3, n-1, n, n-2}_{\text{paire}}$$

Elle va maintenant répartir les allumettes en couples comme ceci (on désigne les tas par leur nombre d'allumettes, pas par leur position) : pour tout k tel que $4k < n$,

- les allumettes du tas $4k+1$ sont couplées avec des allumettes du tas $4k+3$
- les allumettes du tas $4k+2$ sont couplées avec des allumettes du tas $4k+4$
- les deux allumettes restantes du tas $4k+3$ sont couplées avec les deux restantes du tas $4k+4$

Maintenant, dès qu'Anatole prend une allumette, Emilhan prend la deuxième allumette du couple correspondant. Il est ainsi sûr de toujours pouvoir jouer, donc c'est lui qui gagne.

Cas 2 : $n \equiv 3[4]$ Écrivons $n = 4m + 3$. Emilhan met en place la même stratégie. Il répartit les allumettes ainsi :

$$\underbrace{1, 3, 2, 4, 6, 7, 5}_{\text{tas 1}}, \underbrace{\dots, 4k, 4k+2, 4k+3, 4k+1}_{\text{tas 2}}, \dots, \underbrace{n-3, n-1, n, n-2}_{\text{tas 3}}$$

Il couple les allumettes des $n - 3$ derniers tas comme précédemment. Pour les trois premiers tas, il fait un couple entre les deux premiers tas, et deux couples entre le deuxième et le troisième tas. De même que dans le cas précédent, Emilhan dispose ainsi d'une stratégie gagnante.

Intéressons maintenant aux cas où la somme des nombres est impaire. Il s'avère que c'est toujours Anatole qui gagne, avec une stratégie similaire mais qui repose sur le fait qu'on ne peut pas coupler toutes les allumettes.

Cas 3 : $n \equiv 1, 2[4]$

Soit $a_1, \dots, a_n$ les tailles des tas dans l'ordre. Anatole va essayer de coupler les allumettes avec l'algorithme suivant :

Pour i allant de 1 à $n - 1$, il couple chaque allumette non couplée du tas numéro i avec une allumette du tas $i + 1$. Si ce n'est pas possible, il couple chaque allumette du tas $i + 1$ avec une allumette du tas i et laisse des allumettes solitaires dans le tas i .

Il commence par coupler chaque allumette du tas 1 avec une du tas 2 (si $a_1 > a_2$ ça s'arrête immédiatement) puis continue avec les allumettes restantes du tas 2, etc...

Si l'algorithme ne s'arrête pas, Anatole aura couplé toutes les allumettes, sauf certaines du tas n . Il y a au moins une allumette non couplée, car leur nombre total est impair. Il commence alors au tas n , puis quand Emilhan retire une allumette il prend toujours la deuxième allumette du couple correspondant. Ceci lui assure de pouvoir toujours jouer, donc il gagne.

De même, si l'algorithme s'arrête au tas i , tous les tas de 1 à $i + 1$ sont entièrement couplés sauf le tas i . Il commence au tas i puis applique la même stratégie. Emilhan ne peut pas retirer une allumette non couplée car il joue toujours sur des tas de parité opposée à i (et il ne peut pas jouer sur le tas $i + 3$ car Anatole ne jouera jamais sur le tas $i + 2$, dont aucune allumette n'est couplée).

Ainsi, Emilhan gagne si et seulement si $n \equiv 0, 3[4]$.

VIII. Citations mémorables

- *Assem* : « L'exo 7, c'est le sin-bash de la TN. »
- *Théo* : « Je suis une poule. »
- *Thibault* : « Cette lettre ressemble vachement au π latin. »
- *Paul A* : « Ici on va utiliser une formule importante : $2 \times 2 = 4$. »
- *Hadriel* : « Je vais t'expliquer pourquoi ta formule est fausse. Elle est fausse parce qu'elle donne la mauvaise valeur. »
- *Anatole* : « Le problème il est méchant avec vous. »
- *Akin* : « C'est un peu un jeu psychologique avec le problème. »
- *Raphaël* : « Donc là on a trois points concourants. »
- *Assem* : « Imagine t'es né en 2014... imagine t'as 5 ans. »
- *Daniel* : « Il est 10h43, il faut revenir Théo nous a dit. »
- *Horia* : « Oui mais Théo c'est Théo. »
- *Hugo* : « Qui n'a pas compris? Qui a compris? Qui n'a pas compris mais lève la main parce qu'il ne veut pas expliquer pourquoi il n'a pas compris? »
- *Théo* : « On fait tendre x_n vers l'infini à la Schlague. »
- *Paul A* : $-\infty$ c'est un peu un entier naturel.