

COUPE ANIMATH DE PRINTEMPS

4 juin 2025

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ **Pour les exercices 1 et 8**, seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.
- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8**, on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES. Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1.

Calculer

$$\frac{13}{6} + \frac{7}{10} + \frac{2}{15}.$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Exercice 2.

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB > AD$, soit P le point de la demi-droite $[DA)$ tel que $\widehat{DCP} = 30^\circ$ et soit Q le point du segment $[CD]$ tel que $\widehat{DAQ} = 45^\circ$. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AQC}$ et de la droite (CP) .

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PXQ}$.

Exercice 3.

Déterminer tous les réels a et b tels que $a + b \neq 0$, $3a - b \neq 0$ et les deux équations suivantes sont vérifiées :

$$a = \frac{2}{a+b} \text{ et } b = \frac{2}{3a-b}.$$

Exercice 4.

Soit a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 cinq entiers positifs distincts. Soit b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5 les mêmes entiers, écrits dans un ordre quelconque (soit le même ordre, soit un autre ordre).

Montrer que le produit

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$$

est pair.

Exercice 5.

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La droite parallèle à (BI) passant par C coupe la droite (AB) en P et la droite parallèle à (CI) passant par B coupe la droite (AC) en Q . Le segment $[PQ]$ coupe le cercle de centre P passant par B en X et le cercle de centre Q passant par C en Y .

Montrer que $PY = QX$.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$ un entier. Rémi a choisi $2n + 1$ points alignés et deux à deux distincts tels que toutes les distances entre deux de ces points sont des nombres entiers. Elsa se rend compte que peu importe le point qu'elle choisit parmi les $2n + 1$ points, lorsqu'elle calcule la somme des $2n$ distances de ce point aux $2n$ autres points, elle obtient un entier pair.

Montrer que toutes les distances entre deux de ces points sont des entiers pairs.

Exercice 7.

Sur un tableau sont écrits 2025 nombres entiers strictement positifs, non nécessairement distincts. Quels que soient les 2023 nombres que l'on choisit parmi ces 2025 nombres, chacun des deux nombres restants divise la somme des nombres choisis.

Combien y a-t-il, au maximum, de nombres différents écrits au tableau ?

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer

$$\sqrt{\sqrt{27} \cdot \sqrt{75} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} \cdot \sqrt{54}}.$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB > AD$, soit P le point de la demi-droite $[DA)$ tel que $\widehat{DCP} = 30^\circ$ et soit Q le point du segment $[CD]$ tel que $\widehat{DAQ} = 45^\circ$. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AQC}$ et de la droite (CP) .

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PXQ}$.

Exercice 10. Dans une pièce, certaines personnes sont amies. Une personne n'est jamais amie avec elle-même, et si une personne A est amie avec une personne B , alors la personne B est amie avec A . On remarque que "l'ennemi de mon ami est mon ami", autrement dit pour tout choix de trois personnes distinctes A, B et C dans la pièce, si A et B sont amies et B et C ne sont pas amies, alors A et C sont amies. Chaque personne dans la pièce a 4 amis.

Combien au maximum peut-il y avoir de personnes dans la pièce ?

Exercice 11. Soit ABC un triangle isocèle en A . Soient M et N les milieux des segments $[BC]$ et $[AC]$ respectivement, et soit P le pied de la hauteur issue de C dans ABC .

Montrer que $[PM)$ est la bissectrice de $\widehat{NPB}$.

Exercice 12. Déterminer tous les entiers positifs $n \geq 2$ pour lesquels il existe des entiers positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$ tels que les deux ensembles

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \text{ et } \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_n + a_1\}$$

contiennent n entiers consécutifs chacun.

Exercice 13. Sur un tableau sont écrits 2025 nombres entiers strictement positifs, non nécessairement distincts. Quels que soient les 2023 nombres que l'on choisit parmi ces 2025 nombres, chacun des deux nombres restants divise la somme des nombres choisis.

Combien y a-t-il, au maximum, de nombres différents écrits au tableau ?

Exercice 14. Soit n un entier vérifiant $n \geq 2$. On dit que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n -permutants si chaque élément de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ est égal à exactement un élément parmi $\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \dots, \lfloor x_n \rfloor$.

Déterminer, en fonction de n , la valeur maximale et la valeur minimale que peut prendre la somme

$$\lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \lfloor x_4 - x_3 \rfloor + \dots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor$$

lorsque les réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont n -permutants.

Ici, $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Exercice 15. Martin place des espions dans certaines cases d'une grille 2025×2025 (qui contient 2025^2 cases). Aurélien choisit alors un carré 1025×1025 dans la grille, composé de 1025^2 cases, et dit à Martin quels espions sont dans le carré qu'il a choisi.

Combien d'espions au minimum Martin doit-il placer pour être sûr de pouvoir déterminer le carré choisi par Aurélien ?