PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 17 MAI 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit $a, b, c, d \geqslant 0$ et $(a+c)(a+d)(b+c)(b+d) = 25$. Montrer que

$$a + b + c + d \geqslant 2\sqrt{5}.$$

Solution de l'exercice 1 On veut appliquer l'inégalité arithmético-géométrique sur le produit qui apparaît dans la condition de l'énoncé. Ceci donne

$$\sqrt[4]{(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)} \leqslant \frac{(a+c)+(a+d)+(b+c)+(b+d)}{4}$$

On utilise ensuite la condition de l'énoncé pour obtenir

$$\sqrt[4]{25} \leqslant \frac{2a+2b+2c+2d}{4}$$

ce qui se réécrit, en utilisant le fait que $\sqrt[4]{25} = \sqrt{5}$,

$$a + b + c + d \geqslant 2\sqrt{5}.$$

Commentaire des correcteurs : Beaucoup d'élèves ont traité l'exercice, la plupart ayant une solution correcte. Certains élèves ont tenté d'appliquer astucieusement plusieurs IAGs, parfois à tort et parfois à raison. Comme souvent en inégalités, l'erreur la plus répandue parmi ces élèves a été d'appliquer une inégalité à l'envers. Pour esquiver cet écueil, une solution peut être (si c'est faisable) de tester chaque inégalité écrite dans le raisonnement avec des valeurs extrêmes des variables (par exemple $(a, b, c, d) = (5, 5, 0, 0)$ ici) pour vérifier que chaque étape du raisonnement est correcte dans ce cas. Cela ne garantit bien sûr rien, mais peut aider à détecter les erreurs les plus flagrantes automatiquement. Enfin, on rappelle qu'il est toujours nécessaire de citer les inégalités utilisées à chaque étape, pour éviter toute confusion.

Exercice 2. Trouver tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que $3^a + 3^b + 3^c$ soit un carré parfait.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Soit (a, b, c) tel que $3^a+3^b+3^c$ soit un carré parfait. Commençons par remarquer que $3^a+3^b+3^c$ est un nombre impair, donc comme c'est un carré, il est congru à 1 modulo 8. Mais une puissance 3^n de 3 vaut soit 3, soit 1 modulo 8, selon si n est impair ou pair respectivement. Ainsi, la seule manière que $3^a + 3^b + 3^c$ soit congru à 1 modulo 8 soit que a, b, c soient tous impairs (alors on obtient $3^a + 3^b + 3^c \equiv 3+3+3 \equiv 1[8]$).
Par symétrie de l'énoncé en les variables a, b, c, on peut supposer que a est le plus petit des trois nombres, pour ensuite écrire

$$3^a + 3^b + 3^c = 3^a(1 + 3^{b-a} + 3^{c-a}).$$

Mais comme a est impair, pour que ce nombre soit un carré parfait, il faut nécessairement que 3 divise le deuxième facteur du produit $1 + 3^{b-a} + 3^{c-a}$. Mais les nombres 3^{b-a} et 3^{c-a} valent soit 1, soit sont divisibles par 3. Alors la seule manière que $1 + 3^{b-a} + 3^{c-a}$ soit divisile par 3 est que l'on ait $3^{b-a} = 1$ et $3^{c-a} = 1$. On doit donc avoir $a = b = c$.
Réciproquement, supposons que l'on ait effectivement $a = b = c$ et que a soit un nombre impair, que l'on écrit $a = 2k + 1$. Alors on a

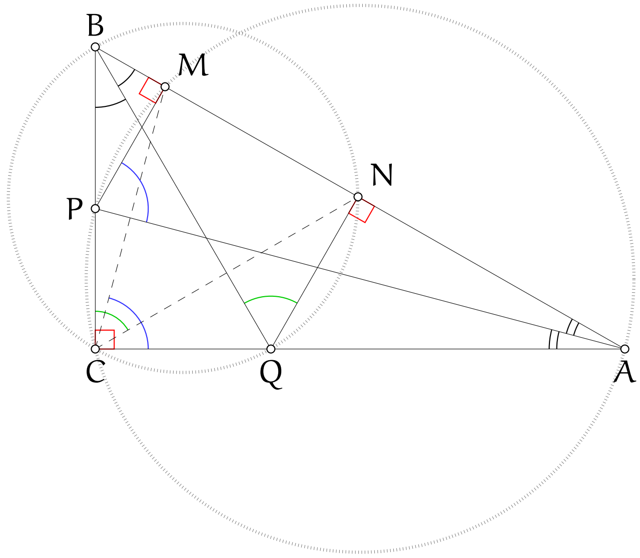
$$3^a + 3^b + 3^c = 3^{2k+1} + 3^{2k+1} + 3^{2k+1} = 3 \cdot 3^{2k+1} = 3^{2k+2} = (3^{k+1})^2$$

et donc $3^a + 3^b + 3^c$ est bien un carré parfait. Ainsi, les triplets solutions sont les triplets $(2k + 1, 2k + 1, 2k + 1)$ pour k entier naturel.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement bien réussi, mais trop peu d'élèves pensent à regarder directement modulo 8. C'est pourtant un des réflexes à avoir lorsqu'une équation contient des carrés parfaits et des puissances, en particulier lorsque regarder modulo 4 ne suffit pas. Plusieurs élèves oublient également de vérifier les solutions qu'ils ont obtenues.

Exercice 3. Le triangle ABC est tel que $\angle BCA = 90°$. La bissectrice de l'angle $\angle CAB$ intersecte le côtés BC en un point P et la bissectrice de l'angle $\angle ABC$ intersecte le côté AC en Q. Si M et N sont les projetés orthogonaux de P et Q sur le côté AB, trouver la valeur de l'angle $\angle MCN$.

Solution de l'exercice 3



Notons $\alpha = \angle BAC$, afin que $\angle ABC = 90 - \alpha$. Remarquons que dans le quadrilatère $AMPC$, les angles $\angle ACP$ et $\angle AMP$ sont droits, donc les points A, M, P, C sont cocycliques. Ainsi, on peut calculer, par le théorème de l'angle inscrit et par le fait que AMP soit rectangle en M,

$$\angle MCA = \angle MPA = 90 - \angle MAP = 90 - \frac{\alpha}{2}$$

De la même manière, on trouve que le quadrilatère $BNQC$ est cyclique, et donc

$$\angle NCB = \angle NQB = 90 - \angle MBQ = 90 - \frac{90-\alpha}{2} = 45 + \frac{\alpha}{2}$$

On peut alors remarquer que $\angle MCN + \angle ACB = \angle MCA + \angle NCB$ et donc

$$\angle MCN + 90 = 90 - \frac{\alpha}{2} + 45 + \frac{\alpha}{2}$$

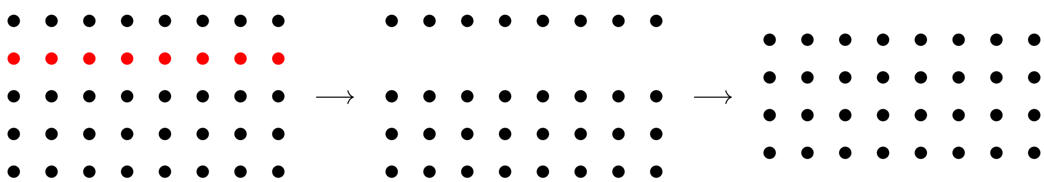
et donc

$$\angle MCN = 45°.$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi par les élèves l'ayant traité. De nombreux élèves se sont retrouvés à faire des chasses aux angles fastidieuses, qui pouvaient souvent se résumer en une ligne. Il est dommage que peu d'entre eux aient le réflexe, en voyant deux angles droits opposés, d'identifer un quadrilatère cyclique, ce qui pouvait fortement simplifier la preuve. De même, peu d'élèves ont vu naturellement la symétrie induite par la bissectrice et ont perdu du temps à la remontrer, ce qui est bien dommage.

Exercice 4. Soit (m, n) une paire d'entiers strictement positifs. Clémentina a planté dans son jardin m rangées de n pissenlits en forme de tableau $m \times n$. Maintenant, Emile et Baptiste décident de jouer un jeu avec une tondeuse qu'ils viennent de trouver. Chacun à leurs tour, et en commençant par Emile, ils rasent entièrement une rangée de pissenlits alignés verticalement ou horizontalement (ils doivent alors toujours raser au moins un pissenlit). Le vainqueur est celui qui rase le dernier pissenlit. Déterminer pour quelles paires d'entiers (m, n) Emile peut s'assurer de gagner si il joue de manière optimale.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Commençons par remarquer que si m ou n vaut 1, alors Emile gagne directement en rasant l'unique rangée de pissenlits. On suppose donc à présent que m et n sont tous les deux supérieurs ou égaux à 2, et on va montrer que Emile gagne précisément lorsque $m + n$ est impair.
En effet, montrons le résultat par récurrence sur $m+n$. Lorsque $m+n = 4$, on est dans le cas $m = n = 2$, et alors quelque soit la rangée que Emile rase, Baptiste peut raser les deux derniers pissenlits et gagner. Supposons donc le résultat vrai pour $m + n = N$ et montrons le pour $m + n = N + 1$, avec $N \geqslant 4$. Soient donc m, n deux entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $m + n = k + 1$.
On remarque la chose suivante : si Emile rase une rangée de pissenlits, alors les pissenlits restants peuvent être déplacés de manière à ce que la configuration devienne un rectangle de pissenlits de dimensions $(m - 1) \times n$ ou $m \times (n - 1)$, comme sur la figure suivante. De plus, ce déplacement ne change rien au déroulement du jeu par la suite.



Ainsi, si $m + n$ est pair (et m, n sont supérieurs ou égaux à 2), quoique Emile fasse, Baptiste se retrouvera avec un tableau dont la somme des dimensions est impaire. Dans tous les cas, par hypothèse de récurrence, Baptiste a une stratégie gagnante (si $m = 1$ ou $n = 1$, Baptiste gagne par la remarque au début de l'exercice).
Sinon, si $m + n$ est impair (et m, n sont supérieurs ou égaux à 2), remarquons que soit m, soit n, est supérieur ou égal à 3 (sinon les deux valent 2 et alors $m + n = 4$ est pair). Sans perte de généralité, supposons que $m \geqslant 3$. Mais alors Emile peut choisir de raser soit une rangée verticale, de manière à ce que Baptiste se retrouve avec l'équivalent d'un tableau $(m - 1) \times n$. Mais on a $m - 1 \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, et $(m - 1) + n = m + n - 1$ qui est pair, donc par hypothèse de récurrence, Baptiste ne peut pas gagner si Emile joue bien.
Ainsi, Emile gagne si et seulement si $m = 1$, $n = 1$, ou $m + n$ est impair.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est plutôt bien réussi par ceux qui l'ont traité, mais environ un tiers des copies n'a pas remarqué que le cas où $m = 1$ et n est quelconque (et l'inverse) est un cas particulier à traiter à part. On encourage bien sûr les élèves à traiter les petits cas pour se faire une idée et éviter des écueils comme ceux-ci. De plus les schémas sont les bienvenus lorsqu'ils sont clairs et utilisés à bon escient.

Exercice 5. Trouver le plus petit entier positif $n \geqslant 2$ pour lequel il existe un entier strictement positif m tel que mn divise $m^{2025} + n^{2025} + n$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Soit $n \geqslant 2$ un entier satisfaisant les conditions de l'énoncé, et m le nombre correspodant donné par l'énoncé. Soit p un nombre premier divisant n, qui existe car $n \geqslant 2$. Alors p divise mn, et donc doit diviser $m^{2025} + n^{2025} + n$. Mais p divise n donc divise les deux derniers termes de cette somme, et ainsi p doit diviser m^{2025}. Comme p est premier, p doit donc diviser m.
Posons à présent k la valuation p-adique de n, c'est-à-dire le plus grand entier positif tel que p^k divise n. Comme p divise n, p^{k+1} divise mn, et donc doit diviser $m^{2025} + n^{2025} + n$. On sait déjà que p^{2025k} divise n^{2025}, donc comme $k \geqslant 1$, p^{k+1} divise n^{2025}. Ainsi, p^{k+1} divise $m^{2025} + n$. Mais on sait de plus que p^{2025} divise m^{2025}. Ainsi, si jamais $k < 2025$, on a que p^{k+1} divise m^{2025}, et donc p^{k+1} diviserait $(m^{2025} + n) - m^{2025} = n$. Mais cela contredit la définition de k comme le plus grand entier tel que p^k divise n. On en conclut donc que pour tout nombre premier p tel que p divise n, p^{2025} doit diviser n.
Cherchons à présent la valeur minimale de n. On sait qu'il y a au moins un nombre premier p qui divise n, et alors p^{2025} doit diviser n. Notamment, cela donne que $n \geqslant 2^{2025}$ (puisque 2 est le plus petit nombre premier). Maintenant, montrons que $n = 2^{2025}$ satisfait les conditions de l'énoncé. On sait par l'analyse précédente que m doit être divisible par 2, donc on essaye par exemple $m = 2$. Ainsi, on a

$$mn = 2 \cdot 2^{2025} = 2^{2026}$$
$$m^{2025} + n^{2025} + n = 2^{2025} + 2^{2025^2} + 2^{2025} = 2^{2026} + 2^{2025^2}$$

et donc on a bien que mn divise $m^{2025} + n^{2025} + n$ car $2026 \leqslant 2025^2$.
Le plus petit $n \geqslant 2$ vérifiant les conditions de l'énoncé est donc 2^{2025}.

Commentaire des correcteurs : Exercice pas si bien réussi pour son placement. Peu d'élèves l'ont abordé et beaucoup ont fait des raisonnements érronés. Il faut faire attention en arithmétique à ne pas utiliser de fausses propriétés sur la divisibilité.

Exercice 6. Soit a, b, c des nombres réels tels que

$$\begin{cases} a^2 + a = b^2 \\ b^2 + b = c^2 \\ c^2 + c = a^2 \end{cases}$$

Montrer que soit $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, soit $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

Solution de l'exercice 6 Sommons les trois équations : on obtient que

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$$

donc $a + b + c = 0$.
En particulier, la première équation devient $-a = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = -c \times (a - b)$. Ainsi $a = c \times (a - b)$. De même, avec la seconde a la troisième équation on obtient que $b = a \times (b - c)$ et que $c = b \times (c - a)$. En faisant le produit, on obtient que

$$abc = abc(a - b)(b - c)(c - a),$$

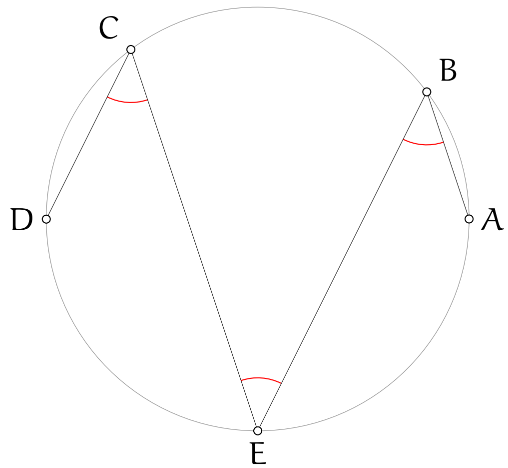
donc $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$, sauf potentiellement dans le cas où a, b ou c est nul.
Si une des trois variables est nul, comme l'énoncé est cyclique, on peut supposer que $a = 0$. La première équation donne $b = 0$, puis la seconde donne $c = 0$, donc $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ on a bien le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi, la première erreur venant des élèves qui simplifient par abc sans traiter le cas où cette quantité est nulle.

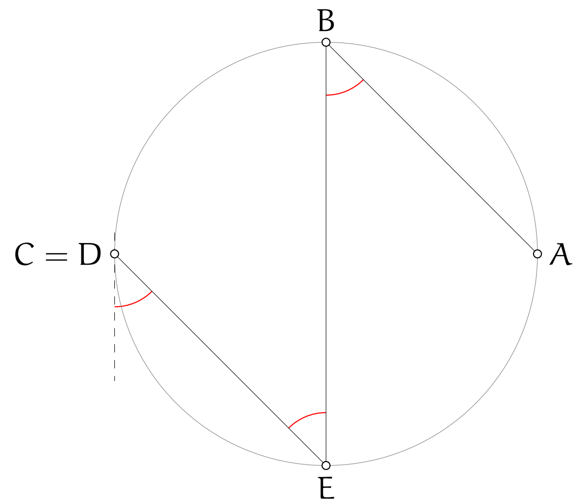
Exercice 7. On place des points A, B, C, D et E sur un cercle γ dans cet ordre de telle sorte que $\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD = 45°$. Montrer que

$$AB^2 + CE^2 = BE^2 + CD^2.$$

Solution de l'exercice 7



$AB + CE = \sqrt{2}BE$



$AB = CE$

On commence par réinterpréter l'égalité d'angles $\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD$ en une égalité des longueurs des arcs $\overset{\frown}{AE}, \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{DE}$ sur γ. Comme ce sont trois arcs sur un même cercle, cela implique l'égalité des longueurs $AE = BC = DE$, et on note cette longueur commune ℓ. A présent, on peut utiliser le théorème d'Al-Kashi sur les triangles ABE, BCE, CDE en utilisant que $\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\begin{cases} \ell^2 = AB^2 + BE^2 - \sqrt{2}AB \cdot BE & (1) \\ \ell^2 = BE^2 + CE^2 - \sqrt{2}BE \cdot CE & (2) \\ \ell^2 = CE^2 + CD^2 - \sqrt{2}CE \cdot CD & (3) \end{cases}$$

Nous allons conclure à partir de ces trois égalités. Tout d'abord, en soustrayant (2) de (1), on trouve

$$AB^2 - CE^2 - \sqrt{2}BE(AB - CE) = 0$$

Supposons pour commencer que $AB = CE$. Par angles alternes-internes, $[AB]$ et $[CE]$ sont deux cordes parallèles et distinctes de γ, donc pour qu'elles soient de même longueur, elles doivent être symétriques par rapport au centre O de γ, et notamment $[BE]$ est un diamètre de γ. Mais on trouve alors que $\angle OCD = 45 + \angle OCE = 45 + \angle OEC = 45 + \angle CEB = 90$, donc (CD) est en fait tangente à γ donc $C = D$ et l'énoncé n'a aucun sens (puisque $\angle ECD$ n'est pas défini). On a donc que $AB \neq CE$ et on peut diviser par $AB - CE$ pour obtenir

$$AB + CE = \sqrt{2}BE \quad (4)$$

De la même manière, on doit avoir que $CE \neq CD$ et on obtient

$$BE + CD = \sqrt{2}CE \quad (5)$$

Les égalités (4) et (5) permettent alors d'exprimer AB et CD en fonction de BE et CE, et on calcule alors la quantité désirée dans l'énoncé

$$AB^2 + CE^2 - BE^2 - CD^2 = (\sqrt{2}BE - CE)^2 + CE^2 - BE^2 - (\sqrt{2}CE - BE)^2$$

$$= 2BE^2 - 2\sqrt{2}BE \cdot CE + CE^2 + CE^2 - BE^2 - 2CE^2 + 2\sqrt{2}BE \cdot CE - BE^2 = 0$$

ce qui est l'égalité cherchée.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été très bien résolu par de nombreux élèves.

Exercice 8. Considérons les suites de réels $x_0, x_1, \ldots, x_{100}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

— $x_0 = 0$.

— Pour tout entier i entre 1 et 100, on a $1 \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant 2$.

Trouver le plus grand entier $k \leqslant 100$ tel que pour toute telle suite $x_0, \ldots, x_{100}$, on ait

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} \leqslant x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{100}.$$

Solution de l'exercice 8 Afin de faire apparaître la condition de l'énoncé, on pose pour tout i, $d_i = x_{i+1} - x_i$ qui est entre 1 et 2. Alors pour tout i, on a

$$x_i = d_0 + d_1 + \ldots + d_{i-1}$$

et l'inégalité écrite dans l'énoncé se réécrit

$$0 + d_0 + (d_0 + d_1) + \ldots + (d_0 + d_1 + \ldots + d_{k-2}) \leqslant (d_0 + d_1 + \ldots + d_{k-1}) + (d_0 + d_1 + \ldots + d_k) + \ldots + (d_0 + d_1 + \ldots + d_{99}).$$

C'est-à-dire

$$(k-1)d_0 + (k-2)d_1 + \ldots + 2d_{k-3} + d_{k-2} \leqslant (101-k)d_0 + \ldots + (101-k)d_{k-1} + (100-k)d_k + \ldots + 2d_{98} + d_{99}.$$

Si $i \leqslant k-2$, le coefficient de d_i à gauche est $k-1-i$, celui à droite est $100-k+1$. Celui de gauche est plus grand que celui de droite tant que $k-1-i \geqslant 101-k$, soit $i \leqslant 2k-102$. Si $2k-102$ est négatif, alors tous les coefficients à gauche sont plus petits que ceux de droite et l'inégalité est toujours vérifiée. Sinon, on met les coefficients du côté où ils sont positifs :

$$(2k-102)d_0 + (2k-103)d_1 + \ldots + d_{2k-103} \leqslant d_{2k-101} + 2d_{2k-100} + \ldots + (101-k)d_{k-1} + \ldots + 2d_{98} + d_{99}.$$

Avec k fixé, le côté de gauche est maximal pour $d_0 = d_1 = \ldots = d_{2k-103} = 2$, et celui de droite est minimal pour $d_{2k-101} = d_{2k-100} = \ldots = d_{99} = 1$. Dans ce cas, le côté gauche vaut

$$2((2k-102) + (2k-103) + \ldots + 1) = (2k-101)(2k-102)$$

et le côté droit vaut

$$1+2+\ldots+(100-k)+(101-k)+(100-k)+\ldots+2+1 = (101-k)+(100-k)(101-k) = (101-k)^2.$$

Ainsi, l'énoncé est vrai pour k si et seulement si

$$(2k-101)(2k-102) \leqslant (101-k)^2.$$

Le côté de gauche est compris entre les carrés consécutifs $(2k-102)^2$ et $(2k-101)^2$. Comme le côté droit est un carré, l'inégalité devient

$$\begin{aligned}(2k-101)^2 &\leqslant (101-k)^2\\ 2k-101 &\leqslant 101-k\\ 3k &\leqslant 202\\ k &\leqslant 67.\end{aligned}$$

La valeur maximale de k est donc 67.

Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a pas été très bien résolu. Trop d'élèves ont affirmé qu'une certaine configuration produirait la solution optimale sans le justifier. L'erreur la plus courante étant de mettre que des différences de 2 jusqu'au rang k, puis uniquement des différences valant 1. Toutefois, cela ne prend pas en compte le fait que les dernières différences avant le rang k vont davantage augmenter le membre de droite que celui de gauche. Cette situation montre l'importance de toujours démontrer que le cas auquel on se ramène est le "meilleur".

Exercice 9. On dit qu'un rectangle de côtés de longueur a et b se *plonge* dans un rectangle de côtés de longueurs c et d si ($a \leqslant c$ et $b \leqslant d$) ou bien ($a \leqslant d$ et $b \leqslant c$). Par exemple, le rectangle de côtés 1 et 5 se plonge dans un autre rectangle de côtés 1 et 5, mais également dans un rectangle de côtés 6 et 2. Supposons que l'on dispose d'un ensemble E composés de 2025 rectangles ayant tous des côtés de longueur un nombre entier compris entre 1 et 2024 inclus. Montrer qu'il y a 3 rectangles A, B et C dans E de telle sorte que A se plonge dans B, et que B se plonge dans C.

Solution de l'exercice 9 On montre le résultat suivant par récurrence sur $n \geqslant 1$: Soit E un ensemble de $2n+1$ rectangles ayant tous des côtés de longueur un nombre entier compris entre 1 et $2n$ inclus. Alors il y a trois rectangles A, B, C dans E tels que A se plonge dans B et B se plonge dans C.
Lorsque $n = 1$, les rectangles de côtés inférieurs ou égaux à 2 peuvent avoir des dimensions 1×1, 1×2 ou 2×2. Ils se plongent les uns dans les autres, donc si on choisit $2+1 = 3$ rectangles de ces dimensions, on peut les ordonner en A, B, C de manière à ce que A se plonge dans B et B se plonge dans C.
Supposons maintenant le résultat vrai pour n et mmontrons le pour $n + 1$. Soit alors E un ensemble de $2n + 3$ rectangles dont les côtés sont des entiers entre 1 et $2n + 2$. Considérons tous les rectangles de E dont les côtés sont de longueur entre 2 et $2n + 1$. En soustrayant 1 à chaque côté, on obtient un ensemble E' de rectangles de côtés entre 1 et $2n$. Alors si E' contient au moins $2n + 1$ rectangles, par hypothèse de récurrence, on trouve trois rectangles A', B', C' dans E' tels que A' se plonge dans B' et B' se plonge dans C'. Si A, B, C sont les trois rectangles correspondants dans E, alors A se plonge dans B et B se plonge dans C comme voulu.
Si E' contient au plus $2n$ éléments, alors il y a au moins 3 rectangles dans E ayant un côté de longueur 1 ou $2n+2$. Mais remarquons que tous ses rectangles se plongent les uns dans les autres, comme le montre le diagramme suivant (où il faut lire "$\rightarrow$" comme "se plonge dans") :

$$\begin{aligned} 1 \times 1 \rightarrow 2 \times 1 \rightarrow \ldots \rightarrow (2n+1) \times 1 \rightarrow (2n+2) \times 1 \rightarrow (2n+2) \times 2 \rightarrow \ldots \\ \rightarrow (2n+2) \times (2n+1) \rightarrow (2n+2) \times (2n+2) \end{aligned}$$

donc si A, B, C sont trois rectangles ayant chacun un côté de longueur 1 ou $2n+2$, on peut les réordonner de manière à ce que le premier se plonge dans le deuxième et que le deuxième se plonge dans le troisième. Ainsi, dans tous les cas, on a bien trouvé trois rectangles A, B, C dans E, tels que A se plonge dans B et B se plonge dans C, ce qui conclut la récurrence.
On conclut alors l'exercice avec le cas $n = 1012$ qui donne $2n = 2024$ et $2n + 1 = 2025$.

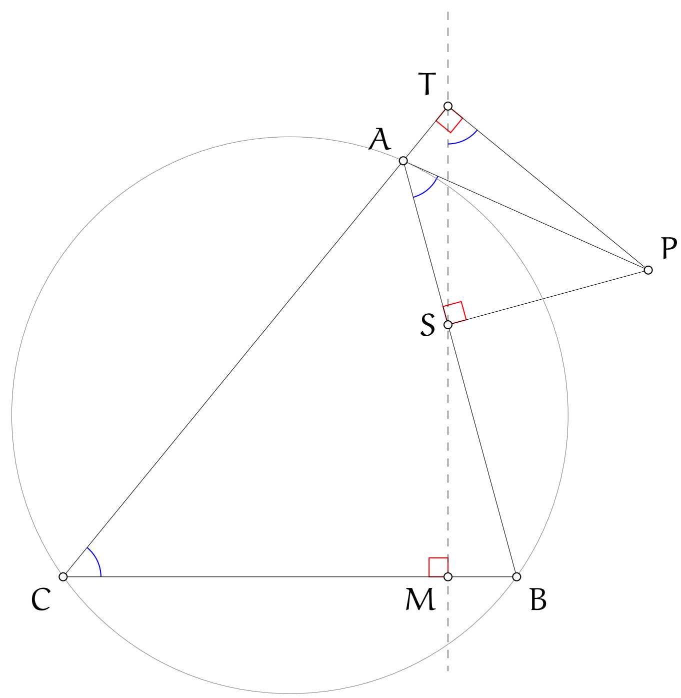
Remarque : Remarquons que l'énoncé est faux si E est un ensemble de taille $n + 1$ de rectangles de côtés entre 1 et n si n est impair : en effet, si E est composé de deux rectangles de dimensions $i \times (n - i + 1)$ pour chaque $1 \leqslant i \leqslant \frac{n+1}{2}$, alors E contient $n + 1$ rectangles mais les seuls rectangles qui se plongent les uns dans les autres sont ceux de même dimension, donc on ne peut qu'en trouver deux.

Commentaire des correcteurs : Le problème est relativement bien réussi pour sa position, et avec des preuves très diverses. Ceci dit, beaucoup d'élèves ne prennent pas soin de justifier leurs différentes affirmations. Ce qui mène à des erreurs qui peuvent être plus ou moins grave, et potentiellement endommager la totalité de la solution.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle, on note Ω le cercle circonscrit au triangle ABC. On choisit un point P sur la tangente à Ω passant par A. Le point P a pour projetés orthogonaux S et T sur la droite (AB) et (AC) respectivement. Montrer que la droite (ST) est perpendiculaire à la droite (BC).

Solution de l'exercice 10



Supposons sans perte de généralité que $AB < AC$ et que P est du même côté de la droite (AC) que le point P.

Tout d'abord, puisque les points S et T sont les projetés orthogonaux du point P sur les droites (AB) et (AC), on a $\widehat{ASP} + \widehat{ATP} = 90° + 90° = 180°$ donc les points E, A, D et P sont cocycliques.

On en déduit notamment que $\widehat{STP} = \widehat{SAP}$.

Puisque la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC, $\widehat{DAP} = \widehat{BAP} = \widehat{BCA}$.

Si on note M le point d'intersection des droites (BC) et (ST), on trouve

$$\begin{aligned}
\widehat{MTC} &= \widehat{STA} \\
&= 90° - \widehat{STP} \\
&= 90° - \widehat{SAP} \\
&= 90° - \widehat{BCA} \\
&= 90° - \widehat{MCT}
\end{aligned}$$

donc $\widehat{CMT} = 90°$ est les droites (ST) et (BC) sont perpendiculaires.

Remarque : D'autres configurations sont possibles (par exemple les points S et T peuvent tous les deux appartenir aux segments $[AC]$ et $[AB]$), elles se traitent alors d'une façon similaire.

Commentaire des correcteurs : Le problème est très bien réussi par les élèves l'ayant cherché.

Exercice 11. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout nombre premier p on ait :

$$p \mid (f(a) - f(b)) \implies p \mid (a - b)$$

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> Soit f une fonction solution. A priori, on ne connait rien sur la fonction f, donc on ne sait pas quand $f(a) - f(b)$ est divisible par un nombre premier. On va donc plutôt utiliser la contraposée de l'implication, qui s'écrit

$$p \nmid (a - b) \implies p \nmid (f(a) - f(b))$$

et qui est équivalente à l'énoncé original. On aimerait ensuite poser $a - b$ qui vaut 1, puisqu'il n'y a alors pas de nombre premier qui divise $a - b$. Ceci implique donc qu'il n'y a pas de nombre premier divisant $f(a) - f(b)$, et donc $f(a) - f(b)$ doit valoir soit 1, soit -1. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n+1) - f(n)$ vaut soit 1, soit -1.
Remarquons en plus que si $a \neq b$, alors il existe un nombre premier p ne divisant pas $a - b$, et donc p ne divise pas $f(a) - f(b)$, et notamment $f(a) - f(b) \neq 0$. Ceci montre que la fonction est injective.
On va maintenant montrer que les seules fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injectives telles que pour tout n, $f(n+1) - f(n)$ vale 1 ou -1 sont les fonctions de la forme $f : x \mapsto c + x$ ou $f : x \mapsto c - x$ pour un certain $c \in \mathbb{Z}$.
Posons $c = f(0)$ et $\varepsilon = f(1) - f(0) \in \{-1, 1\}$, on va montrer par récurrence sur n que $f(n) = c + \varepsilon n$ et $f(-n) = c - \varepsilon n$. Pour $n = 0$ c'est vrai par définition. Pour $n = 1$, on a par définition $f(1) = f(0) + \varepsilon = c + \varepsilon$. On a ensuite que $f(-1)$ vaut soit $c + 1$, soit $c - 1$. Mais par injectivité de f, $f(-1)$ ne peut pas valoir $c + \varepsilon$, donc $f(-1)$ vaut l'autre option, c'est-à-dire $c - \varepsilon$.
Supposons le résultat vrai aux rangs $n - 1$ et n, et montrons le au rang $n + 1$. On sait que $f(n+1)$ vaut soit $f(n) + 1$, soit $f(n) - 1$, c'est-à-dire soit $c + \varepsilon n + 1$, soit $c + \varepsilon n - 1$. Mais ces deux options sont simplement $c + \varepsilon(n-1)$ et $c + \varepsilon(n+1)$. Or, $f(n-1) = c + \varepsilon(n-1)$, donc l'injectivité de f assure que $f(n+1) = c + \varepsilon(n+1)$, comme voulu. L'expression de $f(-(n+1))$ est obtenue de la même manière.
Ainsi les seules fonctions solutions sont celles de la forme $f : x \mapsto c + x$ ou $f : x \mapsto c - x$ pour un $c \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, pour une telle fonction, on a $f(a) - f(b)$ qui vaut soit $a - b$, soit $b - a$ pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, donc ces fonctions sont bien solution de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été globalement bien réussi par les élèves l'ayant traité. Comme l'on pouvait s'y attendre, certains ont malgré tout oublié que -1, tout comme 1, n'est divisible par aucun nombre premier...

Exercice 12. Soit a, b, c des nombres réels tels que

$$\begin{cases} a^2 + a = b^2 \\ b^2 + b = c^2 \\ c^2 + c = a^2 \end{cases}$$

Montrer que soit $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, soit $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

Solution de l'exercice 12 Sommons les trois équations : on obtient que

$$a^2 + b^2 + c^2 + a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$$

donc $a + b + c = 0$.
En particulier, la première équation devient $-a = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = -c \times (a - b)$. Ainsi $a = c \times (a - b)$. De même, avec la seconde a la troisième équation on obtient que $b = a \times (b - c)$ et que $c = b \times (c - a)$. En faisant le produit, on obtient que

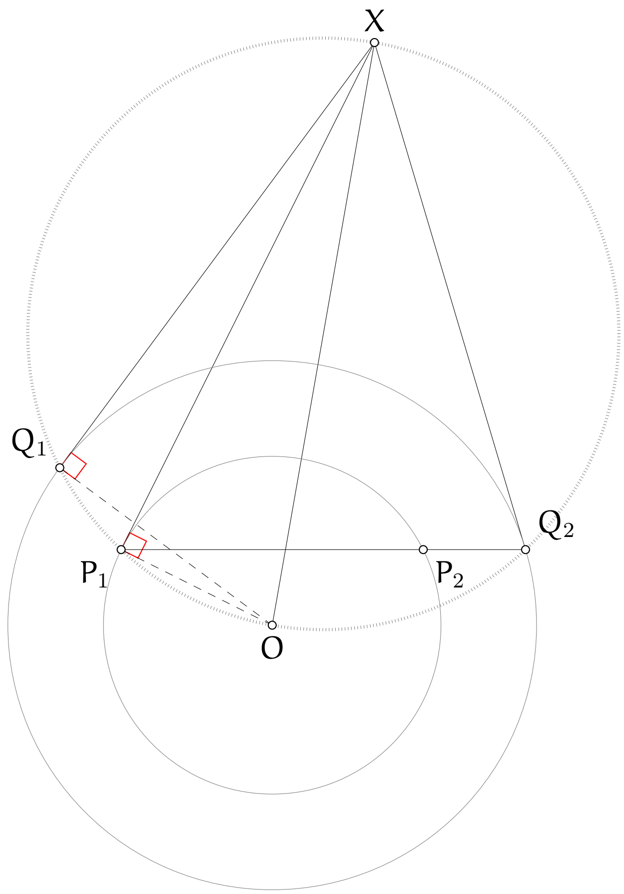
$$abc = abc(a - b)(b - c)(c - a),$$

donc $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$, sauf potentiellement dans le cas où a, b ou c est nul.
Si une des trois variables est nul, comme l'énoncé est cyclique, on peut supposer que $a = 0$. La première équation donne $b = 0$, puis la seconde donne $c = 0$, donc $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ on a bien le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : Presque tous les élèves ont une solution complète. Aucun n'a oublié le cas $abc = 0$ dans la simplification (mais certains en ont parfois oublié des sous-cas).

Exercice 13. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles concentriques, avec $\mathcal{C}_1$ à l'intérieur de $\mathcal{C}_2$. Soient P_1, P_2 deux points sur $\mathcal{C}_1$ qui ne sont pas diamétralement opposés. La demi-droite $[P_1P_2)$ coupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en un point Q_2. On trace la tangente à $\mathcal{C}_1$ passant par P_1, et la tangente à $\mathcal{C}_2$ passant par Q_2, celles-ci s'intersectent en un point X. On trace la deuxième tangente à $\mathcal{C}_2$ passant par X, celle-ci est tangente à $\mathcal{C}_2$ en un point Q_1. Montrer que (XP_1) est la bissectrice de l'angle $\angle Q_1P_1Q_2$.

Solution de l'exercice 13



Notons O le centre commun aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. Alors on a $\angle OP_1X = \angle OQ_1X = \angle OQ_2X = 90°$, donc les points O, P_1, Q_1, Q_2, X sont cocycliques (sur le cercle de diamètre $[OX]$).
De plus, remarquons que Q_1 et Q_2 sont symétriques par rapport à la droite (OX), donc le triangle XQ_1Q_2 est isocèle en X. On en déduit que

$$\angle Q_1P_1X = \angle Q_1Q_2X = \angle Q_2Q_1X = \angle XP_1Q_2$$

Cela conclut donc l'exercice.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi par les rares élèves qui l'ont tenté. Certains ont même astucieusement repéré un pôle sud !

Exercice 14. Considérons les suites de réels $x_0, x_1, \dots, x_{100}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

— $x_0 = 0$.

— Pour tout entier i entre 1 et 100, on a $1 \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant 2$.

Trouver le plus grand entier $k \leqslant 100$ tel que pour toute telle suite $x_0, \dots, x_{100}$, on ait

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} \leqslant x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{100}.$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Afin de faire apparaître la condition de l'énoncé, on pose pour tout i, $d_i = x_{i+1} - x_i$ qui est entre 1 et 2. Alors pour tout i, on a

$$x_i = d_0 + d_1 + \ldots + d_{i-1}$$

et l'inégalité écrite dans l'énoncé se réécrit

$$0 + d_0 + (d_0 + d_1) + \ldots + (d_0 + d_1 + \ldots + d_{k-2}) \leqslant (d_0 + d_1 + \ldots + d_{k-1}) + (d_0 + d_1 + \ldots + d_k) + \ldots \\ +(d_0 + d_1 + \ldots + d_{99}).$$

C'est-à-dire

$$(k-1)d_0 + (k-2)d_1 + \ldots + 2d_{k-3} + d_{k-2} \leqslant (101-k)d_0 + \ldots + (101-k)d_{k-1} + (100-k)d_k + \ldots + 2d_{98} + d_{99}.$$

Si $i \leqslant k-2$, le coefficient de d_i à gauche est $k-1-i$, celui à droite est $100-k+1$. Celui de gauche est plus grand que celui de droite tant que $k-1-i \geqslant 101-k$, soit $i \leqslant 2k-102$. Si $2k-102$ est négatif, alors tous les coefficients à gauche sont plus petits que ceux de droite et l'inégalité est toujours vérifiée. Sinon, on met les coefficients du côté où ils sont positifs :

$$(2k-102)d_0 + (2k-103)d_1 + \ldots + d_{2k-103} \leqslant d_{2k-101} + 2d_{2k-100} + \ldots + (101-k)d_{k-1} + \ldots + 2d_{98} + d_{99}.$$

Avec k fixé, le côté de gauche est maximal pour $d_0 = d_1 = \ldots = d_{2k-103} = 2$, et celui de droite est minimal pour $d_{2k-101} = d_{2k-100} = \ldots = d_{99} = 1$. Dans ce cas, le côté gauche vaut

$$2((2k-102) + (2k-103) + \ldots + 1) = (2k-101)(2k-102)$$

et le côté droit vaut

$$1+2+\ldots+(100-k)+(101-k)+(100-k)+\ldots+2+1 = (101-k)+(100-k)(101-k) = (101-k)^2.$$

Ainsi, l'énoncé est vrai pour k si et seulement si

$$(2k-101)(2k-102) \leqslant (101-k)^2.$$

Le côté de gauche est compris entre les carrés consécutifs $(2k-102)^2$ et $(2k-101)^2$. Comme le côté droit est un carré, l'inégalité devient

$$(2k-101)^2 \leqslant (101-k)^2$$

$$2k-101 \leqslant 101-k$$

$$3k \leqslant 202$$

$$k \leqslant 67.$$

La valeur maximale de k est donc 67.

Commentaire des correcteurs : Le problème était très calculatoire et n'a été traité que pas une poignée d'élèves, avec un succès mitigé.

Exercice 15. On dit qu'un rectangle de côtés de longueur a et b se *plonge* dans un rectangle de côtés de longueurs c et d si ($a \leqslant c$ et $b \leqslant d$) ou bien ($a \leqslant d$ et $b \leqslant c$). Par exemple, le rectangle de côtés 1 et 5 se plonge dans un autre rectangle de côtés 1 et 5, mais également dans un rectangle de côtés 6 et 2. Supposons que l'on dispose d'un ensemble E composés de 2025 rectangles ayant tous des côtés de longueur un nombre entier compris entre 1 et 2024 inclus. Montrer qu'il y a 3 rectangles A, B et C dans E de telle sorte que A se plonge dans B, et que B se plonge dans C.

Solution de l'exercice 15 On montre le résultat suivant par récurrence sur $n \geqslant 1$: Soit E un ensemble de $2n+1$ rectangles ayant tous des côtés de longueur un nombre entier compris entre 1 et $2n$ inclus. Alors il y a trois rectangles A, B, C dans E tels que A se plonge dans B et B se plonge dans C.
Lorsque $n = 1$, les rectangles de côtés inférieurs ou égaux à 2 peuvent avoir des dimensions 1×1, 1×2 ou 2×2. Ils se plongent les uns dans les autres, donc si on choisit $2+1 = 3$ rectangles de ces dimensions, on peut les ordonner en A, B, C de manière à ce que A se plonge dans B et B se plonge dans C.
Supposons maintenant le résultat vrai pour n et mmontrons le pour $n+1$. Soit alors E un ensemble de $2n+3$ rectangles dont les côtés sont des entiers entre 1 et $2n+2$. Considérons tous les rectangles de E dont les côtés sont de longueur entre 2 et $2n+1$. En soustrayant 1 à chaque côté, on obtient un ensemble E' de rectangles de côtés entre 1 et $2n$. Alors si E' contient au moins $2n+1$ rectangles, par hypothèse de récurrence, on trouve trois rectangles A', B', C' dans E' tels que A' se plonge dans B' et B' se plonge dans C'. Si A, B, C sont les trois rectangles correspondants dans E, alors A se plonge dans B et B se plonge dans C comme voulu.
Si E' contient au plus $2n$ éléments, alors il y a au moins 3 rectangles dans E ayant un côté de longueur 1 ou $2n+2$. Mais remarquons que tous ses rectangles se plongent les uns dans les autres, comme le montre le diagramme suivant (où il faut lire "$\rightarrow$" comme "se plonge dans") :

$$\begin{aligned} 1 \times 1 \rightarrow 2 \times 1 \rightarrow \ldots \rightarrow (2n+1) \times 1 \rightarrow (2n+2) \times 1 \rightarrow (2n+2) \times 2 \rightarrow \ldots \\ \rightarrow (2n+2) \times (2n+1) \rightarrow (2n+2) \times (2n+2) \end{aligned}$$

donc si A, B, C sont trois rectangles ayant chacun un côté de longueur 1 ou $2n+2$, on peut les réordonner de manière à ce que le premier se plonge dans le deuxième et que le deuxième se plonge dans le troisième. Ainsi, dans tous les cas, on a bien trouvé trois rectangles A, B, C dans E, tels que A se plonge dans B et B se plonge dans C, ce qui conclut la récurrence.
On conclut alors l'exercice avec le cas $n = 1012$ qui donne $2n = 2024$ et $2n+1 = 2025$.

Remarque : Remarquons que l'énoncé est faux si E est un ensemble de taille $n+1$ de rectangles de côtés entre 1 et n si n est impair : en effet, si E est composé de deux rectangles de dimensions $i \times (n-i+1)$ pour chaque $1 \leqslant i \leqslant \frac{n+1}{2}$, alors E contient $n+1$ rectangles mais les seuls rectangles qui se plongent les uns dans les autres sont ceux de même dimension, donc on ne peut qu'en trouver deux.

Commentaire des correcteurs : Le problème est relativement bien réussi pour sa position, et avec des preuves très diverses. Ceci dit, beaucoup d'élèves ne prennent pas soin de justifier leurs différentes affirmations. Ce qui mène à des erreurs qui peuvent être plus ou moins grave, et potentiellement endommager la totalité de la solution.

Exercice 16. Trouver tous les entiers $n > 1$ tels que si $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ sont les diviseurs de n, alors les nombres

$$d_2 - d_1, d_3 - d_2, \ldots, d_k - d_{k-1}$$

forment une suite géométrique lorsqu'ils sont disposés dans un certain ordre.
On dit qu'une suite $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *est géométrique s'il existe un réel* q *tel que pour tout* $1 \leqslant i < k$*, on ait* $u_{i+1} = qu_k$.

Solution de l'exercice 16 Commençons par remarquer que si n est premier, le seul terme de la suite est $n-1$, et c'est donc une suite géométrique. On suppose par la suite que l'on ne considère que le cas où n n'est pas premier, c'est-à-dire que la suite possède au moins deux termes.
Soit n un nombre comme dans l'énoncé, et soit q la raison de la suite géométrique. Quitte à inverser l'ordre de la suite géométrique et à remplacer q par q^{-1}, on supposera que la suite géométrique est croissante, c'est-à-dire que $q \geqslant 1$.
Remarquons que si l'on prend les deux premiers termes de la suite géométrique, q est leur quotient, et donc comme ces termes sont entiers, q est nécessairement rationnel.
Soit p le nombre premier minimal divisant n. On sait alors que $p = d_2$ et que $d_{k-1} = \frac{n}{p}$. Mais on a $k \geqslant 3$ car n n'est pas premier, donc $d_2 - d_1 = p - 1$ et $d_k - d_{k-1} = n - \frac{n}{p}$ sont deux termes de la suite. Remarquons que

$$d_k - d_{k-1} = \frac{n}{p}(p-1) = \frac{n}{p}(d_2 - d_1)$$

et donc, comme $\frac{n}{p} > 1$, le terme $d_k - d_{k-1}$ vient après le terme $d_2 - d_1$ dans la suite géométrique (car on l'a supposée croissante), et alors il existe un entier $t \geqslant 1$ tel que

$$q^t = \frac{d_k - d_{k-1}}{d_2 - d_1} = \frac{n}{p}$$

Mais alors q^t est un entier naturel. Comme q est rationnel, la seule possibilité est que q est en fait entier lui-même. Notons qu'on a alors $n = pq^t$. Supposons à présent que n aie un deuxième diviseur premier $r > p$. On sait que r doit diviser $\frac{n}{p} = q^t$, et donc r divise q. Mais r ne peut pas diviser $d_2 - d_1 = p - 1$ (car $r > p$), donc la seule possibilité est que ce terme soit le terme initial de la suite géométrique, et tous les autres sont alors divisibles par q, donc notamment par r. Mais alors

$$r \mid (d_3 - d_2) + (d_4 - d_3) + \ldots + (d_k - d_{k-1}) = n - p = p\left(\frac{n}{p} - 1\right).$$

C'est absurde car r ne divise ni p, ni $\frac{n}{p} - 1$ (car r divise $\frac{n}{p}$). Ainsi, n ne peut pas avoir de deuxième facteur premier, et n est forcément une puissance du nombre premier p.
Réciproquement, supposons n de la forme $n = p^t$ pour un certain nombre premier p et entier $t \geqslant 1$. Alors les diviseurs de n sont les $d_i = p^{i-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant t+1$, et on a donc pour tout i, $d_{i+1} - d_i = p^{i-1}(p-1)$ qui est bien une suite géométrique (dans le bon ordre).
Les solutions de l'énoncé sont donc précisément les puissances de nombres premiers.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été peu cherché mais globalement bien réussi.

Exercice 17. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On suppose qu'il existe un point P à l'intérieur du $2n$-gone cyclique et convexe $A_1 \ldots A_{2n}$ de telle sorte que

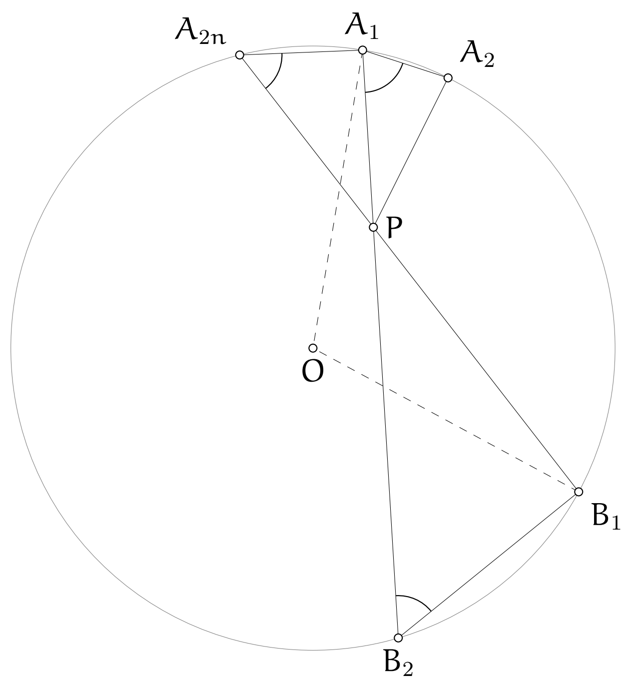
$$\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \ldots = \angle PA_{2n}A_1.$$

Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} |A_{2i-1}A_{2i}| = \prod_{i=1}^{n} |A_{2i}A_{2i+1}|,$$

où $A_{2n+1} = A_1$.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u>



On note Ω le cercle circonscrit au n-gone $A_1 \ldots A_{2n}$. On note également O le centre du cercle Ω. On note $\gamma = \angle PA_1A_2$.

Notons B_{i+1} le point de Ω qui est sur la droite (PA_i) et qui est différent de A_i. On a donc, d'après le théorème de l'angle au centre

$$\angle B_1OA_1 = 2\angle B_1A_{2n}A_1 = 2\angle PA_{i-1}A_i = 2\gamma.$$

De la même manière, $\angle B_iOA_i = 2\gamma$. Cela implique que le polygone $B_1 \ldots B_{2n}$ est une rotation du polygone $A_1 \ldots A_{2n}$ depuis O et d'angle 2γ. On peut maintenant utiliser le fait que $B_iB_{i+1} = A_iA_{i+1}$ et que le triangle PB_iB_{i+1} est semblable au triangle $PA_{i+2}A_{i+1}$. En effet, on obtient alors que

$$\frac{B_{2i-1}B_{2i}}{A_{2i-2}A_{2i-1}} = \frac{PB_{2i}}{PA_{2i-2}} = \frac{PB_{2i-1}}{PA_{2i-1}}.$$

On «symétrise »pour finalement obtenir

$$\frac{B_{2i-1}B_{2i}}{A_{2i-2}A_{2i-1}} = \sqrt{\frac{PB_{2i}}{PA_{2i-2}} \times \frac{PB_{2i-1}}{PA_{2i-1}}}.$$

Ou encore

$$\frac{A_{2i-1}A_{2i}}{A_{2i-2}A_{2i-1}} = \sqrt{\frac{PB_{2i}}{PA_{2i-2}} \times \frac{PB_{2i-1}}{PA_{2i-1}}}.$$

En multipliant toutes ces identités pour $i = 1, \dots, n$. On obtient

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{A_{2i-1}A_{2i}}{A_{2i-2}A_{2i-1}} = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{PB_{2i}}{PA_{2i-2}} \times \frac{PB_{2i-1}}{PA_{2i-1}}} = \sqrt{\prod_{i=1}^{2n} \frac{PB_i}{PA_i}}.$$

On symétrise une fois de plus pour obtenir

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{A_{2i-1}A_{2i}}{A_{2i-2}A_{2i-1}} = \sqrt{\prod_{i=1}^{2n} \frac{PA_i}{PB_i}}.$$

Ce qui implique que ce dernier produit est égale à son inverse, il vaut donc 1 et on obtient l'identité recherchée.

Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a été cherché (et résolu) que par un élève, qui a adopté la même solution que le corrigé.

Exercice 18. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère un jeu de cartes de $4n$ cartes, chacune ayant une couleur (trèfle, carreau, cœur, pique), et une valeur (un entier de 1 à n), de manière à ce qu'il y ait exactement une carte ayant une couleur et valeur données. On dispose les cartes dans un rectangle $4 \times n$ (n colonnes, 4 lignes), de manière à ce que deux cartes adjacentes ont soit la même valeur, soit la même couleur.
Trouver les entiers $n \geqslant 1$ tels que dans toute telle disposition des cartes, toutes les cartes d'une même ligne aient nécessairement la même couleur.

Solution de l'exercice 18 On va montrer que les n solution de l'énoncé sont précisément les n impairs. Supposons déjà que n soit pair. Alors il existe une disposition des cartes où les lignes ne sont pas unicolores. En effet, on divise le rectangle en quatre rectangles $2 \times \frac{n}{2}$ et on dispose les cartes d'une couleur donnée dans un de ces rectangles, de manière à ce que la configuration des valeurs soit symétrique par rapport aux lignes horizontales et verticales passant par le milieu du rectangle $4 \times n$. Une possibilité pour $n = 10$ est donnée dans la figure ci-dessous.

$6\diamondsuit$	$7\diamondsuit$	$8\diamondsuit$	$9\diamondsuit$	$10\diamondsuit$	$10\clubsuit$	$9\clubsuit$	$8\clubsuit$	$7\clubsuit$	$6\clubsuit$
$1\diamondsuit$	$2\diamondsuit$	$3\diamondsuit$	$4\diamondsuit$	$5\diamondsuit$	$5\clubsuit$	$4\clubsuit$	$3\clubsuit$	$2\clubsuit$	$1\clubsuit$
$1\heartsuit$	$2\heartsuit$	$3\heartsuit$	$4\heartsuit$	$5\heartsuit$	$5\spadesuit$	$4\spadesuit$	$3\spadesuit$	$2\spadesuit$	$1\spadesuit$
$6\heartsuit$	$7\heartsuit$	$8\heartsuit$	$9\heartsuit$	$10\heartsuit$	$10\spadesuit$	$9\spadesuit$	$8\spadesuit$	$7\spadesuit$	$6\spadesuit$

A présent, supposons n impair et considérons une certaine disposition des cartes. L'idée est de d'abord considérer des petits rectangles à l'intérieur du grand afin de trouver des configurations interdites par l'hypothèse de l'énoncé. On fait donc les observations suivantes :

1. Supposons que deux cartes de même couleur (disons $\heartsuit$ sans perte de généralité) soient en diagonale l'une de l'autre, et considérons les deux cartes $*$ comme dans la figure de gauche ci-dessous. Si une de ces cartes n'a pas la couleur $\heartsuit$, elle doit avoir la même valeur que les deux cartes initiales, ce qui est absurde car les deux cartes initiales sont distinctes. Ainsi, les deux cartes $*$ doivent être de couleur $\heartsuit$
2. Considérons un carré 2×2 dans la grille $4 \times n$ et supposons que dans ce carré, il y ait deux cartes de même couleur (disons $\heartsuit$) côte-à-côte dans le carré. Si une des deux autres cartes (notées $*$ dans la figure de droite) est de couleur $\heartsuit$, l'observation précédente nous assure que les quatre cartes sont de couleur $\heartsuit$. Sinon, chaque carte $*$ doit être de même valeur que la carte $\heartsuit$ adjacente, donc les deux cartes $*$ doivent être de valeurs différentes, et donc de la même couleur.

$$\begin{array}{cc} * & \heartsuit \\ \heartsuit & * \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} * & * \\ \heartsuit & \heartsuit \end{array}$$

Ces deux observations nous montrent que dans un carré 2×2, il y a trois possibilités : soit toutes les cartes sont de la même couleur, soit elles sont toutes quatre de couleurs différentes, soit il y en a 2 d'une couleur et 2 d'une autre, et les cartes de même couleur sont adjacentes. Cette remarque montre alors que la disposition des cartes est nécessairement "par blocs", dans le sens où les cartes de même couleur forment des rectangles dans la grille, et tout point adjacent à trois de ces rectangles doit être adjacent à un rectangle de chacune des quatre couleurs.

Ci-dessous, on donne un exemple schématique d'une telle division en blocs. Chaque bloc est composé de plusieurs cartes de même couleur, de façon à ce que lorsque trois blocs se rencontrent, il y ait en fait quatre blocs, chacun de couleur différente. L'exemple ci-dessous montre une répartition des couleurs vérifiant cette règle.

$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$

On va à présent utiliser le fait qu'il n'y a que quatre lignes dans notre tableau, car il y a alors très peu d'options pour la répartition des blocs dans une colonne. Considérons une des colonnes du tableau. Elle est divisée en un certain nombre de blocs, chacun consistant en un certain nombre de lignes. On dira par exemple que la répartition est "de type $1-3$" (respectivement "de type $1-2-1$") pour dire que les blocs sont de taille verticale 1 et 3 (respectivement 1, 2 et 1) lorsqu'on les ordonne de haut en bas. Il reste donc à considérer les différents types de répartition des blocs.
On commence par faire la remarque suivante, qui va nous enlever un certain nombre de possibilités. Supposons que l'on ait trois cartes disposées verticalement et de couleurs différentes, comme ci-dessous à gauche et considérons les cartes $1, 2, 3$ comme sur la figure. Remarquons que nécessairement, chacune de ces cartes doit être de la même couleur que la carte à gauche. En effet, supposons le contraire. On sait déjà par la remarque 2 d'avant que si une de ces cartes est de la même couleur que la carte à gauche, alors elles le sont toutes. Sinon, la carte 2 est nécessairement de couleur $\clubsuit$ par la remarque 1, ensuite la carte 3 est nécessairement de couleur $\heartsuit$ et la carte 1 est de couleur $\diamondsuit$. Mais alors toutes les cartes ont la même valeur, et il y a alors deux cartes de couleur $\heartsuit$ avec la même valeur, ce qui est absurde.

$\diamondsuit$	3		$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\spadesuit$	2		$\spadesuit$	$\clubsuit$
$\heartsuit$	1		$\heartsuit$	$\diamondsuit$

Cette remarque nous permet immédiatement d'affirmer que les répartitions de types "2-1-1" et "1-1-2" sont impossibles, puisque les blocs de la première colonne doivent alors s'étendre sur toute la longueur horizontale du rectangle, et il n'y a donc que trois couleurs dans la grille. De plus, si la répartition est de type "1-1-1-1", les blocs doivent aussi s'étendre sur toute la longueur horizontale de la grille. Mais alors chaque ligne ne possède que des cartes de la même couleur, comme voulu.
Il reste à montrer que les répartitions des autres types sont impossibles, et c'est ici que l'on va utiliser le fait que n est impair. Considérons le nombre de couleurs présentes dans la première colonne. Alors les possibilités sont :

— 1 (un seul bloc sur toute la hauteur) : Alors chaque colonne de la grille est unicolore. Mais alors chaque couleur doit apparaître un nombre de fois divisible par 4, ce qui est absurde car n n'est pas divisible par 4.

— 2 (répartitions $1-3$, $3-1$, $2-2$ ou $1-2-1$ avec 2 couleurs) : Supposons par exemple que la première colonne contienne des blocs de couleurs $\heartsuit$ et $\spadesuit$. alors nécessairement, lorsque l'on lit la grille de gauche à droite, les blocs doivent alterner entre des colonnes avec du $\heartsuit$ et du $\spadesuit$ et des colonnes avec du $\clubsuit$ et du $\diamondsuit$. Mais alors le nombre combiné de cases ayant du $\heartsuit$ ou du $\spadesuit$ doit être un multiple de 4, mais ce nombre est $2n$ qui n'est pas divisible par 4, absurde

$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$

— 3 (répartition $1-2-1$ avec trois couleurs) : Supposons sans perte de généralité que les trois couleurs dans la première colonne, lues de haut en bas, soient $\heartsuit$, $\spadesuit$ et $\diamondsuit$. Alors une fois que les limites des blocs sont placées, il n'y a qu'une seule manière de remplir les couleurs des blocs, qui est celle de la figure ci-dessous. Mais alors le nombre de cartes de couleurs $\spadesuit$ est pair, ce qui est en contradiction avec le fait qu'il devrait y en avoir n.

$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$
$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$

Ainsi, on voit que la seule possibilité lorsque n est pair est de placer les cartes dans une répartition $1-1-1-1$ avec des blocs sur toute la longueur du rectangle, et ainsi chaque ligne ne possède que des cartes de la même couleur.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été traité par deux élèves seulement, avec des solutions similaires au corrigé. Il y avait ici de nombreux cas à traiter pour conclure, et il est très dommage que ces élèves aient tous les deux oublié un cas... Il est très important de se relire pour être totalement exhaustif dans les disjonctions de cas, d'autant plus dans des exercices comme celui-ci où les cas ne sont pas évidents à caractériser.