Coupe Animath de Printemps

4 juin 2025

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1.

Calculer

$$\frac{13}{6}+\frac{7}{10}+\frac{2}{15}$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Solution de l'exercice 1

On calcule comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{13}{6}+\frac{7}{10}+\frac{2}{15} &= \frac{13\cdot 5}{6\cdot 5}+\frac{7\cdot 3}{10\cdot 3}+\frac{2\cdot 2}{15\cdot 2}\\
&= \frac{65}{30}+\frac{21}{30}+\frac{4}{30}\\
&= \frac{65+21+4}{30}\\
&= \frac{90}{30}\\
&= 3
\end{aligned}$$

La réponse est 3.

Commentaire des correcteurs

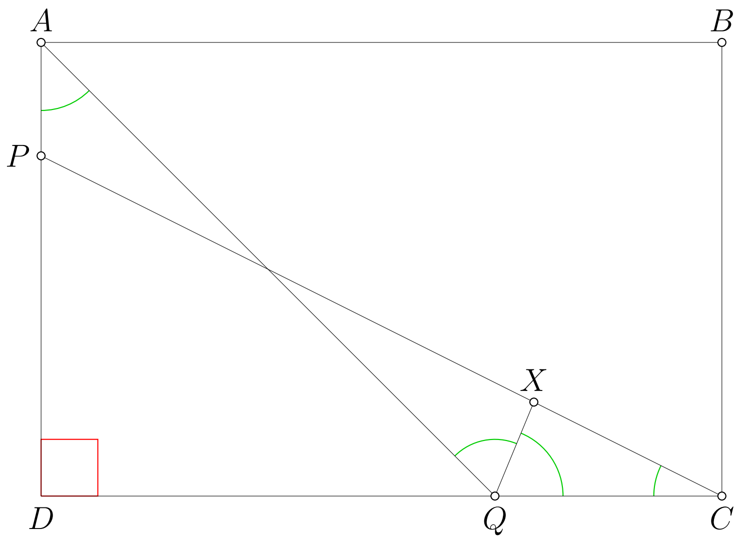
L'exercice est réussi par la grande majorité des élèves. Les quelques copies qui ne sont pas allées au bout sont celles qui n'ont pas réussi à simplifier complètement la fraction, et trouvent $\frac{9}{3}$ ou $\frac{45}{15}$ voire ne simplifient pas du tout et se contentent de garder $\frac{90}{30}$.

Exercice 2.

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB > AD$, soit P le point de la demi-droite $[DA)$ tel que $\widehat{DCP} = 30°$ et soit Q le point du segment $[CD]$ tel que $\widehat{DAQ} = 45°$. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AQC}$ et de la droite (CP).

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PXQ}$.

Solution de l'exercice 2



On procède par chasse aux angles. Dans le triangle ADQ rectangle en D, l'angle $\widehat{DAQ}$ mesure $45°$ donc $\widehat{DQA} = 180 - 90 - 45 = 45°$. L'angle supplémentaire $\widehat{AQC}$ mesure donc $180 - 45 = 135°$. La bissectrice de cet angle le découpe en deux angles égaux, qui mesurent donc tous les deux $\widehat{AQX} = \widehat{XQC} = \dfrac{135}{2} = 67,5°$. Dans le triangle XQC, comme la somme des angles fait $180°$, on a $\widehat{QXC} = 180 - \widehat{XQC} - \widehat{DCP} = 180 - 67,5 - 30 = 82,5°$. Enfin, on peut trouver la valeur de l'angle supplémentaire

$$\boxed{\widehat{PXQ} = 180 - \widehat{QXC} = 180 - 82,5 = 97,5°}$$

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été très bien résolu. On note quelques erreurs notamment sur la définition d'une bissectrice et surtout sur la lecture de l'énoncé : certains ont pris la mauvaise valeur pour l'angle $\widehat{DCP}$. D'autres ne traitent que des cas particuliers tels que prendre $A = P$ ou faire passer la bissectrice de $\widehat{AQC}$ par B. Enfin, certains n'ont pas réalisé que seul l'exercice 1 demande une réponse sans preuve, et qu'il fallait donc démontrer chaque résultat pour obtenir les points de cet exercice.

Exercice 3.

Déterminer tous les réels a et b tels que $a+b \neq 0$, $3a-b \neq 0$ et les deux équations suivantes sont vérifiées :

$$a = \frac{2}{a+b} \text{ et } b = \frac{2}{3a-b}.$$

Solution de l'exercice 3

La solution se découpe en une analyse et une synthèse.

Analyse : Soit a et b deux réels qui satisfont ces équations. On commence par multiplier par les dénominateurs. On obtient

$$\begin{cases} a(a+b) = 2 \\ b(3a-b) = 2 \end{cases} \tag{1}$$

Ce dont on peut déduire que

$$a(a+b) = b(3a-b). \tag{2}$$

Simplifier cette équation nous donne $a^2+ab = 3ab-b^2$ soit $a^2-2ab+b^2 = 0$ ou $(a-b)^2 = 0$ ou encore $a-b=0$, donc $a=b$. En reprenant les premières équations, on trouve $a(a+a) = 2$ soit $a^2 = 1$ donc $a=1$ ou $a=-1$. On trouve donc deux couples de solutions possibles $\boxed{a=1, b=1}$ et $\boxed{a=-1, b=-1}$.

Synthèse : On vérifie que nos couples sont bien solutions. Pour le premier, on a bien $a+b = 2 \neq 0$ et $3a-b = 2 \neq 0$, ainsi que

$$a = 1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{a+b}$$

et

$$b = 1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{3a-b}.$$

Pour le deuxième, on vérifie de même qu'on a bien $a+b = -2 \neq 0$ et $3a-b = -2 \neq 0$, ainsi que

$$a = -1 = \frac{2}{-2} = \frac{2}{a+b}$$

et

$$b = -1 = \frac{2}{-2} = \frac{2}{3a-b}.$$

Solution alternative n°1

On propose une autre manière d'effectuer l'analyse. L'idée est d'utiliser une des deux équations pour exprimer une variable en fonction de l'autre, par exemple b en fonction de a, puis de s'en servir pour éliminer tous les b dans l'autre équation et ainsi obtenir une équation en une seule variable, a, plus facile à résoudre.

La première équation se réécrit

$$a(a+b) = 2$$

Ou encore

$$b = \frac{2}{a} - a$$

On peut alors remplacer les b par $\dfrac{2}{a} - a$ dans la deuxième équation, ce qui donne

$$\frac{2}{a} - a = \frac{2}{3a - \left(\dfrac{2}{a} - a\right)}$$

On peut alors simplifier cette équation. On obtient successivement

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a} - a &= \frac{2a}{3a^2 - 2 + a^2} \\
2 - a^2 &= \frac{2a^2}{4a^2 - 2} \\
(2 - a^2)(4a^2 - 2) &= 2a^2 \\
10a^2 - 4a^4 - 4 &= 2a^2 \\
4a^4 - 8a^2 + 4 &= 0 \\
a^4 - 2a^2 + 1 &= 0 \\
(a^2 - 1)^2 &= 0 \\
a^2 - 1 &= 0 \\
(a - 1)(a + 1) &= 0 \\
a &= \pm 1
\end{aligned}$$

On reprend alors notre expression $b = \dfrac{2}{a} - a$ pour voir que si $a = 1$, alors $b = \dfrac{2}{1} - 1 = 1$ et si $a = -1$, alors $b = \dfrac{2}{-1} - (-1) = -1$.

Les deux seuls couples possibles sont donc $(a = 1, b = 1)$ et $(a = -1, b = -1)$. On fait la synthèse comme dans la solution précédente

Commentaire des correcteurs

L'exercice est relativement peu réussi pour sa position. Quelques remarques :

- Pas mal d'élèves ont considéré que a et b étaient entier. Il n'y a aucune raison que ça soit vrai, donc traiter le cas des entiers n'était pas utile au sein de ce problème (et ne rapportait d'ailleurs pas de points.
- Certains élèves n'ont trouvé qu'une des deux solutions, ou même aucune. Il est dommage de ne pas tester différentes petites valeur de a et b pour voir les solutions : pour obtenir 1 point, il fallait avoir toutes les solutions.
- Certains élèves ont tenté des arguments du type si $a > 1$ alors $\frac{2}{a} + b$ est trop petit. Cela dépend beaucoup de ce que vaut b, et une telle approche ne pouvait marcher. Notez d'ailleurs que $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ n'implique pas $a < b$: par exemple si $b = -1$ et $a = 2$, la première inégalité est vraie mais pas la seconde.
- Certains élèves ont obtenu une équation comme $a^2 + b^2 = 2ab$, mais n'ont pas eu le réflexe de factoriser. Il est important d'avoir bien en tête les prérequis, qui étaient utile ici.
- Certains élèves ont obtenu $a = b$ et se sont arrêté là. Ok $a = b$, mais cela n'implique pas que tous les couples avec $a = b$ sont solution, d'ailleurs $a = b = 2$ n'est pas solution. Une fois qu'on a une condition, il faut la réinjecter dans le système pour voir ce qu'elle implique.
- Certains élèves ont obtenu $a = b = 1$ ou $a = b = -1$ et ont décrété que c'était les solutions. Comme tout le raisonnement est par implication, il fallait vérifier que ces couples étaient solution. Tous les élèves ne faisant pas ça ont perdu un point : c'est une étape cruciale du raisonnement.

Exercice 4.

Soit a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 cinq entiers positifs distincts. Soit b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5 les mêmes entiers, écrits dans un ordre quelconque (soit le même ordre, soit un autre ordre).

Montrer que le produit

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(a_4 - b_4)(a_5 - b_5)$$

est pair.

Solution de l'exercice 4

On peut raisonner par l'absurde. Supposons que le produit $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)(a_4-b_4)(a_5-b_5)$ soit impair. Alors chacun de ces cinq facteurs a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3, a_4-b_4 et a_5-b_5 sont impairs également. Leur somme est donc la somme de 5 entiers impairs, donc c'est un entier impair. Or leur somme n'est autre que $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+(a_4-b_4)+(a_5-b_5) = (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-(b_1+b_2+b_3+b_4+b_5) = 0$ car les (a_i) et les (b_i) sont les mêmes entiers et ont donc la même somme. On a montré que 0 était impair, ce qui est une contradiction. Le produit initial était donc pair.

Solution alternative n°1

Comme 5 est impair, il ne peut pas y avoir autant de nombres pairs que de nombres impairs parmi a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5. Distinguons deux cas.

Premier cas, s'il y a plus de nombres pairs. Au moins 3 des entiers a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 sont donc pairs. Puisque ce sont les mêmes entiers, au moins 3 des entiers b_1, b_2, b_3, b_4 et b_5 sont aussi pairs. Si on regarde ces au moins 6 entiers, ils ne peuvent pas tous avoir un indice différent, puisqu'il n'y a que 5 indices possibles. Il existe donc un indice i tel que a_i et b_i soient pairs. Mais alors le facteur $(a_i - b_i)$ est pair, et donc tout le produit initial est pair.

Dans le deuxième cas, s'il y a plus de nombres impairs que pairs, on trouve de manière identique un indice i tel que a_i et b_i soient tous les deux impairs. Alors leur différence est paire et on peut conclure de la même manière.

Commentaire des correcteurs

Cet exercice a été plutôt bien résolu dans l'ensemble. Des points partiels ont été attribués à un certain nombre de copies, notamment lorsqu'elles montraient qu'il n'y avait pas le même nombre d'entiers pairs et impairs parmi les a_i.

Parmi les erreurs les plus courantes, nous pouvons citer des confusions concernant la parité des différences, des entiers a_i, ou du produit des différences. En particulier, un produit de nombres impairs est toujours impair, quelle que soit la parité du nombre de facteurs dans le produit, et un produit de nombres entiers est pair si et seulement si l'un des facteurs est pair.

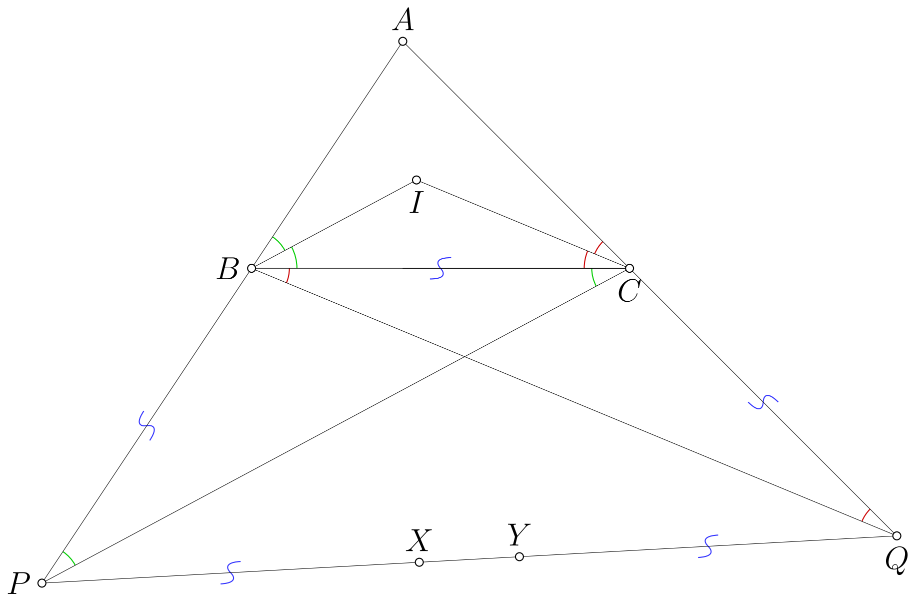
Une autre remarque importante est le fait que certains élèves donnaient un exemple d'appariements de parités entre les a_i et les b_i, qu'ils ont identifié comme étant "le pire cas". Ce raisonnement, bien qu'étant le résultat d'une intuition légitime, ne constitue en aucun cas une preuve rigoureuse. Il était possible de traiter "tous les cas" de façon intelligente, mais il faut alors s'assurer d'avoir bel et bien couvert toutes les possibilités.

Exercice 5.

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La droite parallèle à (BI) passant par C coupe la droite (AB) en P et la droite parallèle à (CI) passant par B coupe la droite (AC) en Q. Le segment $[PQ]$ coupe le cercle de centre P passant par B en X et le cercle de centre Q passant par C en Y.

Montrer que $PY = QX$.

Solution de l'exercice 5



On commence par remarquer que I étant le centre du cercle inscrit à ABC, la droite (BI) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$. Alors le parallélisme $(BI)//(CP)$ nous permet d'obtenir les égalités d'angles suivantes (en vert sur la figure) :

$$\widehat{BCP} = \widehat{IBC} = \widehat{ABI} = \widehat{BPC}$$

Donc le triangle BCP est isocèle en B. On montre de même que BCQ est isocèle en Q. Alors, on a les égalités de longueurs $BP = BC = CQ$. D'après les définitions de X et Y, PX est un rayon du cercle donc $PX = PB = CQ = QY$. Enfin, pour passer de $PX = QY$ à $PY = QX$ il suffit de remarquer que $PX + XQ = PQ = PY + YQ$ donc $PY = PQ - QY = PQ - PX = QX$.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été résolu entièrement par une quarantaine d'élèves. Nombreux sont les élèves qui ont réussi à se ramener à montrer que $PB = QC$ ou ont extrait des premières égalités d'angles à partir des hypothèses de parallélismes, ce qui permettait d'obtenir une partie des points.

Les erreurs principales des élèves n'ayant pas fourni de solutions correctes sont soit d'avoir pensé que (PQ) et (BC) sont parallèles (ce qui n'est pas vrai dans le cas général), soit d'avoir confondu les propriétés du point I avec celles d'un autre point remarquable du triangle.

Enfin, nous rappelons l'importance de justifier chaque étape, en l'absence de quoi de nombreux points étaient perdus.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$ un entier. Rémi a choisi $2n+1$ points alignés et deux à deux distincts tels que toutes les distances entre deux de ces points sont des nombres entiers. Elsa se rend compte que peu importe le point qu'elle choisit parmi les $2n+1$ points, lorsqu'elle calcule la somme des $2n$ distances de ce point aux $2n$ autres points, elle obtient un entier pair.

Montrer que toutes les distances entre deux de ces points sont des entiers pairs.

Solution de l'exercice 6

On munit la droite d'une abscisse, ce qui permet d'attribuer à chacun des $2n+1$ points un nombre. Puisque toutes les distances sont entières, si on place l'origine sur un des points, toutes les abscisses sont entières. Notons a_i l'abscisse du i-ième point. Alors la distance entre les i-ième et le j-ième point est $|a_i - a_j|$. L'énoncé nous dit donc que pour tout i, l'entier $|a_i - a_1| + |a_i - a_2| + \ldots + |a_i - a_{i-1}| + |a_i - a_{i+1}| + \ldots |a_i - a_{2n+1}|$ est pair. Mais on peut remarquer que $|a_i - a_j|$ et $a_i - a_j$ ont la même parité, et que donc $|a_i - a_1| + |a_i - a_2| + \ldots + |a_i - a_{i-1}| + |a_i - a_{i+1}| + \ldots |a_i - a_{2n+1}|$ a la même parité que $(a_i - a_1) + (a_i - a_2) + \ldots + (a_i - a_{i-1}) + (a_i - a_{i+1}) + \ldots (a_i - a_{2n+1})$. En notant $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1}$, on obtient donc que pour tout i, l'entier $(2n+1)a_i - S$ est pair (pour le calcul, on peut faire apparaître le terme $a_i - a_i$ qui est nul). Cela signifie que S a la même parité que $(2n+1)a_i$, mais qui a lui-même la même parité que a_i. Chacun des a_i a donc la même parité que S, donc ils ont tous la même parité. Par conséquent, chaque distance $|a_i - a_j|$ est donc paire.

Solution alternative n°1

Numérotons les points dans l'ordre où ils sont sur la droite et comparons deux points adjacents, disons le i-ième et le $i+1$-ième. Soit d la distance entre ces deux points. La différence entre la somme des distances au i-ième point moins la somme des distances au $i+1$-ième est un entier pair (parce que différence de deux entiers pairs). Dans cette différence de sommes de distances, on peut ignorer la distance de i à $i+1$, qui s'annule avec la distance de $i+1$ à i. Les autres distances peuvent être regroupées en paires ayant une extrémité commune autre que i et $i+1$, de sorte que cette différence de sommes de distances est aussi égal à la somme pour chacun des autres points de la différence entre leur distance au i-ième et au $i+1$-ième, différence de distance qui vaut toujours plus ou moins d ; la différence est négative pour les points $1, 2, 3, \ldots, i-1$ plus proches de i que de $i+1$ et positive pour $i+2, i+3, \ldots 2n+1$. La différence des sommes des distances au i-ième et au $i+1$-ième point vaut donc $-(i-1)d + (2n+1-(i+1))d$, qui est donc un entier pair. On en déduit $2dn - 2id + d$ est pair, donc d est pair.

On a montré que la distance entre deux points adjacents sur la droite est paire, la distance entre deux points plus éloignés sera une somme de distances entre deux points adjacents, donc une somme d'entiers pairs, donc sera paire.

Commentaire des correcteurs

Cet exercice a été assez peu résolu, mais les élèves ayant trouvé une solution ont souvent obtenu la note de 7/7.

Certains élèves ont voulu raisonner par récurrence sur le nombre de points. Il était en effet possible de montrer que les deux premières distances entre points consécutifs sont toujours des entiers pairs, et les éliminer ensuite dans le raisonnement puisque leurs contributions aux sommes de distances seront toujours un entier pair.

Cependant, il n'était pas possible de supposer dans l'hérédité que toutes les distances entre les $2n+1$ premiers points (lorsque nous en rajoutons deux) sont des entiers pairs, puisque l'hypothèse de l'exercice appliquée à $2n+3$ points dépend de **toutes** les distances, y compris les deux dernières.

Exercice 7.

Sur un tableau sont écrits 2025 nombres entiers strictement positifs, non nécessairement distincts. Quels que soient les 2023 nombres que l'on choisit parmi ces 2025 nombres, chacun des deux nombres restants divise la somme des nombres choisis.

Combien y a-t-il, au maximum, de nombres différents écrits au tableau ?

Solution de l'exercice 7

Le problème demande un maximum, la solution se divise donc forcément en deux parties.

Première partie : montrer qu'il y a au plus 2 nombres différents au tableau

Notons S la somme des 2025 nombres au tableau. Alors pour tout choix de a et b deux nombres au tableau, on sait que $a \mid S - a - b$, donc $a \mid S - b$. Donc si on suppose par l'absurde pouvoir prendre 3 nombres $a > b > c$ écrits au tableau, on sait que a divise $S - b$ et $S - c$, donc il divise $b - c$. Or $a > b - c > 0$, ce qui contredit $a \mid b - c$, donc il n'existe pas trois nombres distincts au tableau.

Deuxième partie : il peut y avoir deux nombres différents au tableau.

Il suffit de donner une construction et de vérifier qu'elle fonctionne. Il peut y avoir au tableau écrit 2024 fois le nombre 1 et une fois le nombre 2023. Alors quand on prend 2023 de ces nombres, soit on prend le nombre 2023, auquel cas les nombres restants sont des 1, donc ils divisent la somme, soit on ne le prend pas, auquel cas la somme vaut 2023 puisqu'on a pris que des 1, et elle est divisible par 1 et par 2023, les deux nombres qui n'ont pas été pris.

Commentaire des correcteurs

L'exercice était difficile et très peu d'élèves sont parvenus à le résoudre entièrement.

De nombreux élèves ont suivi leur première intuition, en essayant de montrer que la solution était 1, ce qui a mené à beaucoup d'erreurs de logique et de raisonnement. Par exemple, certains élèves donnent un exemple avec 2 nombres distincts qui ne fonctionne pas, et en déduisent que la réponse est 1, ce qui est faux.

On cherche uniquement à trouver un exemple avec 2 nombres distincts qui convient, et à montrer qu'il ne peut pas y en avoir strictement plus que 2. Il est conseillé de chercher plus longtemps des exemples afin de ne pas suivre une fausse piste.

De plus, il est important de justifier les exemples que l'on donne. Certains élèves n'ont obtenu qu'une partie des points attribués pour la construction car ils n'avaient pas justifiée qu'elle satisfaisait toutes les conditions de l'énoncé, ce qui est dommage.

Exercices lycéens

Exercice 8.

Calculer

$$\sqrt{\sqrt{27}\cdot\sqrt{75}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{54}}$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Solution de l'exercice 8

On calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{27}\cdot\sqrt{75}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{54}} &= \sqrt{\sqrt{27\cdot 75}+\sqrt{3\cdot 8\cdot 54}} && (1)\\
&= \sqrt{\sqrt{9\cdot 3\cdot 3\cdot 25}+\sqrt{3\cdot 2\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 9}} && (2)\\
&= \sqrt{\sqrt{9}\cdot\sqrt{3\cdot 3}\cdot\sqrt{25}+\sqrt{3\cdot 3}\cdot\sqrt{2\cdot 2}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}} && (3)\\
&= \sqrt{3\cdot 3\cdot 5+3\cdot 2\cdot 2\cdot 3} && (4)\\
&= \sqrt{3\cdot 3\cdot(5+2\cdot 2)} && (5)\\
&= \sqrt{3\cdot 3}\cdot\sqrt{5+4} && (6)\\
&= 3\cdot 3 && (7)\\
&= 9 && (8)
\end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs

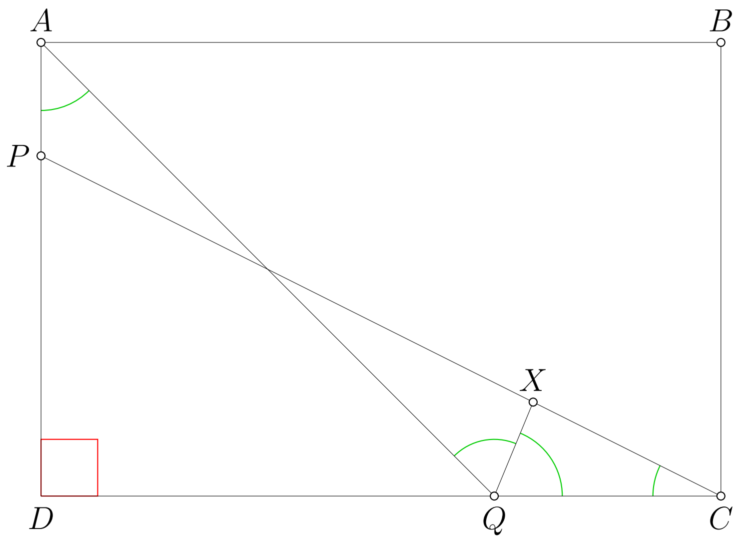
L'exercice a été résolu par une grande majorité des élèves. Les élèves ayant mis le détail de leurs calculs ont presque tous obtenu des points partiels, même si la réponse finale était incorrecte. La plupart des erreurs provenaient de signes $+$ qui se transformaient en signes $\times$ pendant les calculs.

Exercice 9.

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB > AD$, soit P le point de la demi-droite $[DA)$ tel que $\widehat{DCP} = 30°$ et soit Q le point du segment $[CD]$ tel que $\widehat{DAQ} = 45°$. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{AQC}$ et de la droite (CP).

Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{PXQ}$.

Solution de l'exercice 9



On procède par chasse aux angles. Dans le triangle ADQ rectangle en D, l'angle $\widehat{DAQ}$ mesure $45°$ donc $\widehat{DQA} = 180 - 90 - 45 = 45°$. L'angle supplémentaire $\widehat{AQC}$ mesure donc $180 - 45 = 135°$. La bissectrice de cet angle le découpe en deux angles égaux, qui mesurent donc tous les deux $\widehat{AQX} = \widehat{XQC} = \frac{135}{2} = 67,5°$. Dans le triangle XQC, comme la somme des angles fait $180°$, on a $\widehat{QXC} = 180 - \widehat{XQC} - \widehat{DCP} = 180 - 67,5 - 30 = 82,5°$. Enfin, on peut trouver la valeur de l'angle supplémentaire

$$\boxed{\widehat{PXQ} = 180 - \widehat{QXC} = 180 - 82,5 = 97,5°}$$

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été très bien réussi dans l'ensemble. Les seules erreurs notables ont été des erreurs de lecture de l'énoncé, notamment au niveau de la definition de X ou de la mesure de l'angle $\widehat{PCD}$.

On regrette également un nombre d'erreurs de calcul non négligeable, et on rappelle donc l'importance de bien se relire pour éviter ces inattentions.

Exercice 10.

Dans une pièce, certaines personnes sont amies. Une personne n'est jamais amie avec elle-même, et si une personne A est amie avec une personne B, alors la personne B est amie avec A. On remarque que "l'ennemi de mon ami est mon ami", autrement dit pour tout choix de trois personnes distinctes A, B et C dans la pièce, si A et B sont amies et B et C ne sont pas amies, alors A et C sont amies. Chaque personne dans la pièce a 4 amis.

Combien au maximum peut-il y avoir de personnes dans la pièce ?

Solution de l'exercice 10

Montrons qu'il y a au maximum 8 personnes dans la pièce.

Partie 1 : Il y a au plus 8 personnes dans la pièce

Supposons par l'absurde qu'il y en a au moins 9. Prenons une personne dans la pièce, que nous nommerons Albéric. Cette personne a 4 amis, que nous nommerons Balthazar, Cassandre, Dagobert et Elvire. Il y a donc au moins 4 personnes qui ne sont pas amies avec Albéric, on en choisit 4 que l'on nomme Françoise, Gertrude, Hugues et Isidore. Mais alors Françoise est l'ennemi d'Albéric, qui est l'ami de Balthazar, donc Françoise est amie avec Balthazar. De même, Gertrude, Hugues et Isidore sont ennemis d'amis de Balthazar, donc sont amis avec Balthazar. Ainsi, Balthazar est ami avec Albéric, Françoise, Gertrude, Hugues et Isidore, et a donc au moins 5 amis, contradiction.

Il y a au plus 8 personnes dans la pièce.

Partie 2 : Il peut y avoir 8 personnes dans la pièce.

Séparons 8 personnes de la pièce en deux groupes de 4, et créons des liens d'amitié entre deux personnes si et seulement si elles sont dans des groupes différents. Pour vérifier que cela fonctionne, on remarque que si A et B sont amies et B et C ne sont pas amies, alors A et B sont dans des groupes différents et B et C sont dans le même groupe, donc A et C sont dans des groupes différents et sont donc amis.

Commentaire des correcteurs

Un grand nombre d'élèves a traité cet exercice, mais il est dommage que seule une proportion réduite des copies ait obtenu la note de 7/7. Les élèves sont en effet nombreux à avoir été victimes d'écueils évitables.

- ▷ De nombreux élèves ont mal compris l'énoncé. Il est important de bien relire l'énoncé pour être sûr de ne pas partir avec des hypothèses fausses.
- ▷ Certains élèves ont remarqué, à juste titre, qu'il existait une construction avec 5 ou 6 élèves et qu'il n'y en avait pas avec 7 élèves. Ils ont alors affirmé abusivement que 6 était le nombre maximal d'élèves possibles. Conclusion hâtive, car le fait qu'il ne puisse pas y avoir 7 élèves exactement ne prouve pas qu'il ne peut pas y en avoir 8 ou plus ! Il est important d'être rigoureux dans l'analyse, il ne s'agit en effet pas de montrer qu'une valeur est impossible, mais que toutes les valeurs supérieures au maximum sont impossibles.
- ▷ Certains élèves ont tenté de justifier un procédé de construction optimale : par exemple en disant on prend un élève A, ses amis B, C, D, E, et on suppose qu'ils ne sont pas amis car c'est le plus optimal, on peut leur rajouter 3 amis, ce qui fait cinq personnes, mais on ne peut pas en rajouter de neuvième. Cet argument est complètement faux : aucune raison que le plus optimal soit que B, C, D, E ne soient pas amis, ni même qu'on ne puisse rajouter des amis de B qui ne soient pas amis de C, D, E, ou même des personnes qui ne sont pas amies avec A et sont quelconques.
- ▷ Pour rebondir sur le point précédent, ce n'est pas parce qu'on ne peut pas rajouter d'élèves à une construction que celle-ci est optimale. En effet, on pourrait très bien imaginer une construction avec plus d'élèves qui n'est pas obtenue par la première construction en lui ajoutant des

élèves. Il était ainsi nécessaire de distinguer les deux parties de la preuve : fournir une construction, et prouver indépendamment son optimalité.

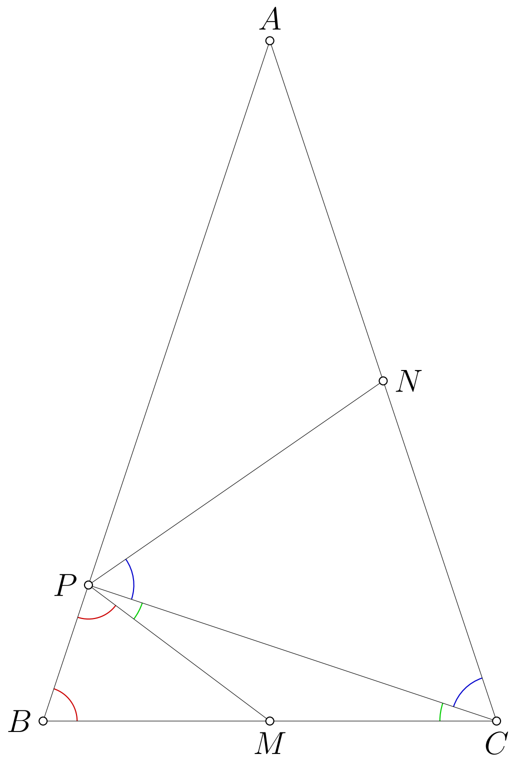
- ▷ De plus, une proportion écrasante d'élèves a donné une construction avec 8 élèves, en général correcte, et a affirmé qu'elle convenait sans justifier plus avant. C'était pourtant une étape nécessaire, il n'était en effet pas du tout immédiat que la construction fournie convenait ! Cette erreur est d'autant plus répandue parmi les élèves étant parvenus à la conclusion que cette construction était la seule possible, aux symétries près : l'unicité d'une solution n'implique en rien sa validité !

Exercice 11.

Soit ABC un triangle isocèle en A. Soient M et N les milieux des segments $[BC]$ et $[AC]$ respectivement, et soit P le pied de la hauteur issue de C dans ABC.

Montrer que $[PM)$ est la bissectrice de $\widehat{NPB}$.

Solution de l'exercice 11



On remarque que M est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle BPC, donc $MB = MP = MC$ et on a les égalités d'angles $\widehat{MBP} = \widehat{MPB}$ et $\widehat{MCP} = \widehat{MPC}$. De même, N est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle APC, donc $NP = NC$ et $\widehat{NPC} = \widehat{NCP}$.

Alors on peut calculer

$$\begin{array}{rcl} \widehat{MPN} & = & \widehat{MPC} + \widehat{CPN} \\ & = & \widehat{MCP} + \widehat{PCN} \\ & = & \widehat{MCN} \\ & = & \widehat{BCA} \\ & = & \widehat{CBA} \text{ car } ABC \text{ est isocèle en } A \\ & = & \widehat{MBP} \\ & = & \widehat{MPB} \end{array}$$

Donc $[PM)$ est la bissectrice de $\widehat{NPB}$.

Commentaire des correcteurs

Le problème est très bien résolu, et beaucoup de solutions ont été trouvées. Pour avancer, il était crucial d'exploiter les hypothèses sur les différents points P, M et N et notamment de pouvoir les relier entre eux, le plus souvent grâce aux propriétés des triangles rectangles.

Pour établir les divers liens entre ces points, notamment par des égalités de longueurs, des justifications étaient de mise, et leur absence a été fortement pénalisée.

Enfin, les correcteurs ont été surpris par la méconnaissance des élèves des propriétés des droites remarquables d'un triangle isocèle. En particulier, la hauteur, la bissectrice et la médiane issues des sommets à la base du triangle **ne sont pas** nécessairement confondues. Ceci a conduit beaucoup d'élèves à un raisonnement faux dès le départ.

Exercice 12.

Déterminer tous les entiers positifs $n \geq 2$ pour lesquels il existe des entiers positifs $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que les deux ensembles

$$\{a_1, a_2, ..., a_n\} \text{ et } \{a_1 + a_2, a_2 + a_3, ..., a_n + a_1\}$$

contiennent n entiers consécutifs chacun.

Solution de l'exercice 12

L'énoncé demande de trouver tous les entiers n satisfaisant une propriété, une réponse complète comporte donc nécessairement une analyse et une synthèse.

Analyse : Soit n un entier satisfaisant la propriété et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de tels entiers. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. *La somme de n entiers consécutifs vaut $\dfrac{n(n+1)}{2} + kn$ pour un certain entier k.*

Démonstration. On note k l'entier qui précède le plus petit des entiers consécutifs considérés. Alors la somme considérée est

$$\begin{aligned}(k+1) + (k+2) + \ldots + (k+n) &= (1 + 2 + 3 + \ldots n) + kn \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + kn\end{aligned}$$

$\square$

On peut appliquer ce lemme à chacun des deux ensembles qui contiennent n entiers consécutifs. Le lemme nous dit qu'il existe deux entiers k et l tels que

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n(n+1)}{2} + kn$$

et

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_n + a_1) = \frac{n(n+1)}{2} + ln.$$

Mais on remarque que

$$(a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_n + a_1) = 2\big(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\big)$$

Donc

$$\frac{n(n+1)}{2} + ln = 2\left(\frac{n(n+1)}{2} + kn\right) \tag{1}$$

Ce qui se réécrit

$$\frac{n(n+1)}{2} = (l - 2k)n$$

Ou encore

$$\frac{n+1}{2} = l - 2k$$

$$n = 2(l - 2k) - 1$$

Donc n est impair.

Synthèse : Soit $n = 2m + 1$ un entier impair. Construisons des entiers $a_1, a_2, \ldots a_n$ adéquats. On pose

$$\begin{cases} a_{2i-1} = i \\ a_{2i} = m + 1 + i \end{cases}$$

Par exemple pour $n = 7$, on a $m = 3$ et la suite $a_1, a_2 \dots a_7$ est $1, 5, 2, 6, 3, 7, 4$

Alors la somme de deux termes consécutifs vaut

$$\begin{cases} a_{2i-1} + a_{2i} = m + 1 + 2i \\ a_{2i} + a_{2i+1} = m + 2 + 2i \\ a_n + a_1 = m + 2 \end{cases}$$

On obtient donc chaque entier entre $m + 2$ et $m + n + 1 = 3m + 2$ une fois et une seule.

Les n qui satisfont cette propriété sont donc exactement les entiers impairs.

Commentaire des correcteurs

L'exercice était difficile et a été assez mal réussi par rapport à sa place dans le sujet.

De nombreux élèves ont cru que les entiers $a_1, \dots, a_n$ était rangés par ordre croissant, ou bien ont supposé, à tort, pouvoir les ordonner sans perte de généralité. Cela simplifiait considérablement le problème en éliminant la quasi-totalité des solutions possibles. Rappelons que, comme le montrent les solutions exhibées par le corrigé, un ensemble ne dépend pas de l'ordre de ses éléments alors que l'opération faite sur les a_i, elle, dépend bien de la façon dont on a numéroté ces entiers. À titre d'exemple prenons $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$ et $a'_1 = 1, a'_2 = 3, a'_3 = 2, a'_4 = 4$: les ensembles $\{1, 2, 3, 4\}$ et $\{1, 3, 2, 4\}$ sont les mêmes mais si on effectue les sommes décrites par l'énoncé, on obtient $\{3, 5, 7, 5\}$ et $\{4, 5, 6, 5\}$, deux ensembles différents.

Quand cette erreur a été évitée, l'idée de regarder les sommes des éléments (ou bien leur moyenne, ce qui est équivalent) a souvent été introduite. Les copies ont bien compris que la somme du deuxième ensemble était le double de celle du premier ensemble. Celles qui ont ensuite pensé à effectuer à nouveau le calcul du lemme sur ce second ensemble réussissent souvent à conclure la partie analyse. La synthèse était d'une difficulté équivalente à l'analyse sur ce problème, ce qui explique pourquoi un certain nombre de copies n'ont pas réussi à montrer que tous les entiers impairs sont bien solutions.

Quelques élèves perdent malheureusement des points en ne justifiant pas pourquoi leur construction générale dans le cas n impair respecte bien les conditions de l'énoncé.

Exercice 13.

Sur un tableau sont écrits 2025 nombres entiers strictement positifs, non nécessairement distincts. Quels que soient les 2023 nombres que l'on choisit parmi ces 2025 nombres, chacun des deux nombres restants divise la somme des nombres choisis.

Combien y a-t-il, au maximum, de nombres différents écrits au tableau ?

Solution de l'exercice 13

Le problème demande un maximum, la solution se divise donc forcément en deux parties.

Première partie : montrer qu'il y a au plus 2 nombres différents au tableau

Notons S la somme des 2025 nombres au tableau. Alors pour tout choix de a et b deux nombres au tableau, on sait que $a \mid S - a - b$, donc $a \mid S - b$. Donc si on suppose par l'absurde pouvoir prendre 3 nombres $a > b > c$ écrits au tableau, on sait que a divise $S - b$ et $S - c$, donc il divise $b - c$. Or $a > b - c > 0$, ce qui contredit $a \mid b - c$, donc il n'existe pas trois nombres distincts au tableau.

Deuxième partie : il peut y avoir deux nombres différents au tableau.

Il suffit de donner une construction et de vérifier qu'elle fonctionne. Il peut y avoir au tableau écrit 2024 fois le nombre 1 et une fois le nombre 2023. Alors quand on prend 2023 de ces nombres, soit on prend le nombre 2023, auquel cas les nombres restants sont des 1, donc ils divisent la somme, soit on ne le prend pas, auquel cas la somme vaut 2023 puisqu'on a pris que des 1, et elle est divisible par 1 et par 2023, les deux nombres qui n'ont pas été pris.

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été abordé seulement par une petite moitié des élèves. Peu d'entre eux ont su obtenir tous les points, mais beaucoup ont avancé plus ou moins substantiellement. Dans ce type d'exercice, il est important de travailler sur de nombreux exemples afin de se forger une intuition fiable : par exemple, ici, essayer des exemples avec 3 ou 4 nombres au tableau permettait déjà d'avoir une bonne idée de la réponse.

Parmi les écueils récurrents, on notera comme d'habitude que les exercices qui demandent de trouver un maximum ou un minimum doivent toujours se rédiger en 2 parties : d'une part montrer qu'on ne pouvait pas avoir plus de 2 nombres distincts au tableau, d'autre part donner un exemple dans lequel on a effectivement 2 nombres distincts. Chacune de ces parties a son importance et ne doit pas être négligée : ainsi, la construction devait être soigneusement justifiée car il y avait plusieurs conditions à vérifier. Donner une construction correcte sans justification ne rapportait qu'une partie des points attribués à cette partie, ce qui est dommage.

Exercice 14. Soit n un entier vérifiant $n \geqslant 2$. On dit que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont *n-permutants* si chaque élément de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ est égal à exactement un élément parmi $\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor, \ldots, \lfloor x_n \rfloor$.

Déterminer, en fonction de n, la valeur maximale et la valeur minimale que peut prendre la somme

$$\lfloor x_2 - x_1 \rfloor + \lfloor x_3 - x_2 \rfloor + \lfloor x_4 - x_3 \rfloor + \ldots + \lfloor x_n - x_{n-1} \rfloor$$

lorsque les réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont *n-permutants.*

Ici, $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Solution de l'exercice 14

Commençons par écrire quelques inégalités sur les parties entières. On a

$$x_i - 1 < \lfloor x_i \rfloor \leq x_i$$

$$x_{i+1} - x_i - 1 < \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \leq x_{i+1} - x_i$$

Donc en combinant ces inégalités, on obtient

$$\lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor - 2 < \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor < \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor + 1$$

Mais comme ces sont des inégalités strictes entre des entiers, on peut réécrire la même chose en

$$\lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor - 1 \leq \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \leq \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor$$

Autrement dit,

$$\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor = \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor - u_i$$

Où u_i vaut soit 0, soit 1. La somme qui nous intéresse se réécrit donc

$$\big(\lfloor x_2 \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor - u_1 \big) + \big(\lfloor x_3 \rfloor - \lfloor 2 \rfloor - u_2 \big) + \ldots + \big(\lfloor x_n \rfloor - \lfloor x_{n-1} \rfloor - u_{n-1} \big) = \lfloor x_n \rfloor - \lfloor x_1 \rfloor - (u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1})$$

Pour la maximiser, on peut indépendamment maximiser $\lfloor x_n \rfloor$, minimiser $\lfloor x_1 \rfloor$ et s'assurer que chacun des u_i a sa valeur minimale, 0. En effet, une manière d'atteindre tous ces optimums simultanément est de poser $x_i = i$. On vérifie que les (x_i) sont n-permutants, que comme chaque x_i est entier, chaque u_i est bien nul, que $\lfloor x_n \rfloor = n$ a sa valeur maximale possible et que $\lfloor x_1 \rfloor = 1$ a sa valeur minimale possible. La somme recherchée vaut alors $\boxed{n-1}$ qui est le maximum de cette somme.

Pour la minimiser, on va chercher similairement à optimiser chacun des termes de cette réécriture indépendamment. On cherche donc un ensemble n-permutant tel que $\lfloor x_n \rfloor = 1$, $\lfloor x_1 \rfloor = n$ et tel que chaque u_i vaille 1. Pour que u_i vaille 1, il suffit que la partie fractionnaire de x_i soit strictement plus grande que celle de x_{i+1}. En effet, dans ce cas, en notant $\{x_i\}$ cette partie fractionnaire, on a

$$\begin{aligned} \lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor &= \lfloor \lfloor x_{i+1} \rfloor + \{x_{i+1}\} - \lfloor x_i \rfloor - \{x_i\} \rfloor \\ &= \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor + \lfloor \{x_{i+1}\} - \{x_i\} \rfloor \\ &= \lfloor x_{i+1} \rfloor - \lfloor x_i \rfloor - 1 \end{aligned}$$

Donc $u_i = 1$.

Pour que tous les u_i vaillent 1, il suffit donc que la suite des $\{u_i\}$ soit strictement décroissante. On se rappelle des contraintes $\lfloor x_1 \rfloor = n$ et $\lfloor x_n \rfloor = 1$ pour proposer l'ensemble n-permutant suivant :

$$x_i = n + 1 - i + \frac{n-i}{n}$$

Alors $\lfloor x_i \rfloor = n + 1 - i$ donc l'ensemble est bien n-permutant et les autres contraintes sont bien satisfaites, donc on a trouvé une configuration qui minimise la somme. Son minimum est donc $1 - n - (1 + 1 + \ldots + 1)$ soit $\boxed{-2n+2}$.

Commentaire des correcteurs

Le problème a été peu abordé dans l'ensemble, et assez peu résolu dans son entièreté. Beaucoup d'élèves ont remarqué le télescopage entre les différences, le tout était alors d'être capable de comparer la somme de l'énoncé à $x_n - x_1$. Beaucoup d'élèves n'ont pas réussi à fournir une justification convaincante ou se sont embrouillés dans leurs inégalités.

Parmi les erreurs récurrentes :

- Beaucoup d'élèves se sont d'emblée placés dans le cas où la suite (x_i) est croissante, et il n'y a pas de raison que cela soit le cas. D'autres ont pensé qu'on avait toujours $\lfloor x_{i+1} - x_i \rfloor \leqslant 1$.
- Beaucoup d'élèves ont pensé que $\lfloor x \rfloor \geqslant 0$ quel que soit x, ce qui les conduit à trouver que la somme est toujours positive.
- Une des raisons pour lesquelles les inégalités étaient mal justifiées est que les élèves ont cherché à décrire leur raisonnement plutôt qu'à l'effectuer : des inégalités comparant les quantitées en jeu valent mieux qu'un long paragraphe d'explications avec les mains.
- Quelques élèves ont oublié ou ont bâclé la construction d'une suite minimisante/maximisante. On attendait un calcul justifiant que la construction fonctionne, dans le cas où cela n'était pas évident. Un tel calcul aurait permis à quelques élèves de voir que leur construction n'était en fait pas valide.

Enfin, afin d'anticiper les éventuelles réclamations, nous précisons que donner la bonne réponse ne rapportait pas de points si le raisonnement accompagné est absent ou incorrect. De même, donner une construction du maximum ne rapportait pas de points.

Exercice 15.

Martin place des espions dans certaines cases d'une grille 2025×2025 (qui contient 2025^2 cases). Aurélien choisit alors un carré 1025×1025 dans la grille, composé de 1025^2 cases, et dit à Martin quels espions sont dans le carré qu'il a choisi.

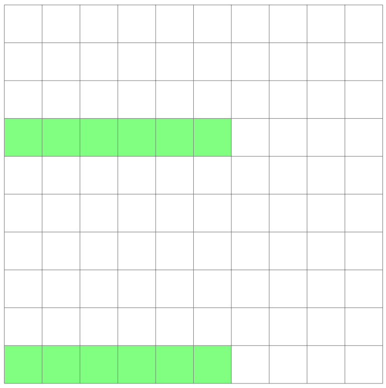
Combien d'espions au minimum Martin doit-il placer pour être sûr de pouvoir déterminer le carré choisi par Aurélien ?

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>

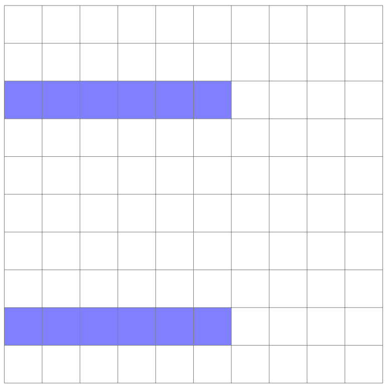
L'énoncé nous demande un nombre minimum, toute solution complète comporte nécessairement deux parties, une où l'on montre qu'il faut au moins 2000 espions, et une deuxième partie qui présente une construction où 2000 espions suffisent.

Première partie : Il faut au moins 2000 espions.

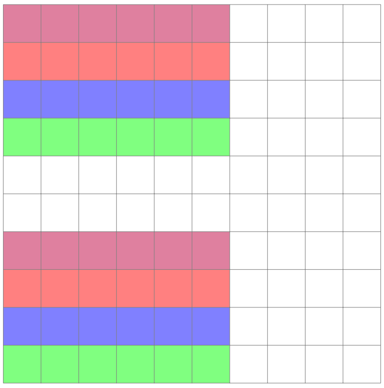
Considérons un placement des espions qui permette à Martin de trouver à coup sûr la position du carré. Notamment Martin peut différencier un carré placé tout en bas à gauche d'un carré placé juste au-dessus. Martin a donc placé un espion dans une des cases coloriées en vert, puisque ce sont les seules où ces deux carrés diffèrent. Pour les dessins, les grilles sont tracées en remplaçant 2025 par 10 et 1025 par 6.



On peut également translater les deux carrés d'une rangée vers le haut. Pour les différencier, Martin a dû placer un espion dans une des cases bleues.

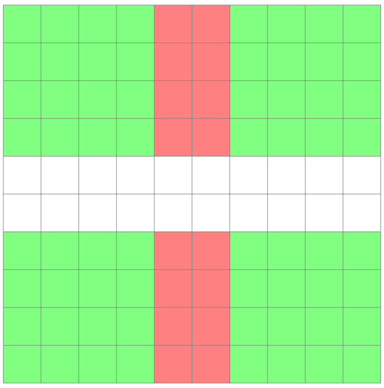


En continuant ainsi, on trouve que Martin a dû placer au moins un espion dans chacun des zones colorées ci-dessous, soit un total d'au moins 1000 espions.



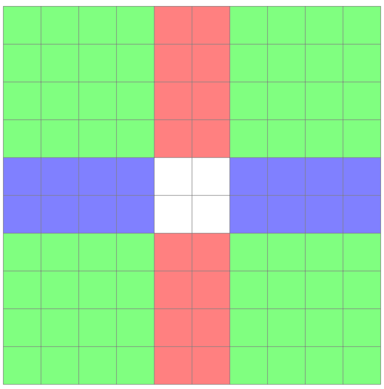
On remarque que pour cet argument, les 25 lignes centrales sont totalement inutilisées, ce sera important plus tard.

Améliorons l'argument. Il faut aussi pouvoir distinguer le carré en bas à droite du carré situé juste au-dessus. Cette nouvelle zone ne peut pas être simplement rajoutée aux zones existantes puisqu'elle chevauche partiellement la zone verte. Cependant, cela signifie que soit un espion est placé à l'intersection des deux zones, dans les 25 colonnes centrales, soit un espion est placé de chaque côté, soit un total d'au moins 2 espions. Autrement dit, si on décide que les espions dans les colonnes centrales comptent doubles, il y a au moins 2 espions au total sur les lignes concernées par ces carrés, la ligne tout en bas et la ligne 1025 lignes au-dessus. Comme précédemment, on peut répéter cet argument. On trouve ainsi qu'avec le coloriage suivant



Si on note r le nombre d'espions dans la zone rouge, v le nombre d'espions dans la zone verte, on a $2r + v \geq 2 \cdot 1000$ puisque pour 1000 paires de lignes, il faut au moins soit 2 espions verts, soit un espion rouge.

On peut recommencer tout ce raisonnement en échangeant lignes et colonnes, et en notant également b le nombre d'espions dans la zone bleue,

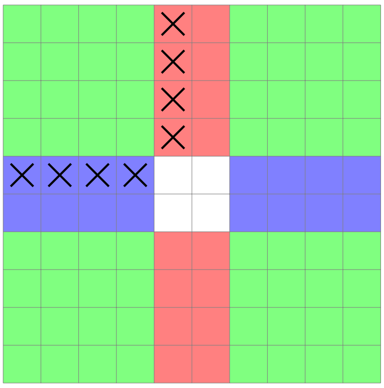


On a de même l'inéquation $2b + v \geq 2000$. En sommant les deux inéquations qu'on a, on obtient $2r + v + 2b + v \geq 2000 + 2000$ soit $r + b + v \geq 2000$, ce qui signifie qu'il y a au moins 2000 espions au total sur la grille.

Deuxième partie : Construction où 2000 espions suffisent.

Une construction possible consiste à placer 1000 espions dans la zone rouge du haut, un sur chaque ligne, et 1000 espions dans la zone bleue de droite, un sur chaque colonne. Alors, comme chaque carré contient les colonnes centrales où sont les cases rouges, les espions rouges vont permettre de déterminer exactement la hauteur où est placé le carré, indépendamment de sa position horizontale, et les espions bleus vont permettre de déterminer sa position horizontale indépendamment de sa hauteur, puisque quelle que soit sa hauteur, tout carré sera forcément sur les lignes centrales (qui contiennent les cases bleues).

Exemple où les espions sont notés par des croix.



Commentaire des correcteurs

L'exercice n'a été réussi intégralement que par une petite dizaine d'élèves. Quelques remarques :

- Ne pas hésiter à traiter les petits cas, c'est-à-dire remplacer les nombres 2025 et 1025 par des nombres plus petits, par exemple 5 et 3. En testant plusieurs petits cas, cela permettait d'avoir une intuition de la bonne valeur.
- Connaître le nombre d'espions n'est pas du tout la même chose que connaître l'ensemble des espions sur le carré. Partir en ne regardant que le nombre n'est pas une bonne idée.
- Certains ont trouvé une construction avec 2000 espions vérifiant l'énoncé, mais n'ont pas voulu faire une preuve que cette construction permettait de retrouver le carré initial. Ceci coûtait malheureusement le point attribué pour la construction et la preuve que celle-ci fonctionnerait.
- Certains procédaient au départ comme dans le corrigé pour trouver 1000 espions. Mais il faut bien expliquer pourquoi ces espions étaient distincts, pourquoi un même espion ne pouvait pas remplir deux rôles simultanément.
- Certains élèves n'ont pas vu la subtilité entre les espions sur une zone centrale (en rouge et bleu) et les autres espions. C'était pourtant le coeur de la preuve et nécessitait une grande minutie.