PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 6 AVRIL 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Erik dispose de 2024 boules blanches et 2024 boules noires qu'il répartit dans 4047 sacs. À la fin, il remarque que chaque sac contient au plus une boule de chaque couleur. Montrer qu'il existe un sac contenant exactement une boule de chaque couleur.

Solution de l'exercice 1

Il y a 4048 boules dans 4047 sacs, donc par principe des tiroirs, un sac contient au moins 2 boules. Si ce sac en contient au moins 3, comme il y a deux couleurs, alors il en contient deux de même couleur, ce qui est absurde. Ainsi le sac contient 2 boules, qui sont de différentes couleurs, ce qui donne le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup, et souvent bien abordé. Il faut faire attention lorsqu'on utilise le principe des tiroirs : il nous dit qu'il y a un sac avec au moins deux boules, et non pas exactement deux boules comme certains le laissent entendre.

Exercice 2. Martin écrit les nombres de 1 à 30 au tableau. À chaque opération, il choisit un entier $k \geqslant 2$ et barre $k-1, 2k-1, 3k-1, \dots$. Combien d'opérations lui faut-il au minimum pour barrer tous les nombres ?

Solution de l'exercice 2
Lorsque Martin choisit k, il barre le nombre n si celui-ci est de la forme $jk-1$, donc si et seulement si k divise $n+1$. Or les nombres $1, 2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28, 30$ deviennent, lorsqu'on leur ajoute 1 : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31$ qui sont premiers, donc si Martin veut tous les barrer, il doit choisir k valant chacun de ces nombres. Il a donc besoin d'au minimum 11 opérations.
Réciproquement, si Martin effectue ces 11 opérations, on remarque que tout nombre entre 2 et 31 a un facteur premier parmi les 11 cités car celui-ci a un facteur premier entre 2 et 31. Donc tout entier n entre 1 et 30 vérifie que $n+1$ admet un diviseur premier parmi les 11 cités. Ainsi tous les entiers entre 1 et 30 sont effacés lors de ces 11 mouvements : Martin peut tout barrer en 11 mouvements.
On déduit que le nombre minimal de mouvements est 11.
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup traité, mais un nombre anormalement grand d'élèves a perdu des points pour n'avoir pas assez justifié. On attendait ici deux parties : fournir 11 entiers qui permettent d'effacer tous les nombres, puis montrer qu'il faut choisir au moins 11 entier. Certains élèves ont cru pouvoir se dispenser de justifier une des deux parties, et ont donc inéluctablement subi une perte de points évitable. Même si l'une des deux moitiés de l'exercice peut paraître évidente, on attend de chaque élève qu'il rédige au moins une phrase le précisant. Indépendamment, des élèves se sont précipités et ont oublié qu'il fallait également choisir 31, c'est bien dommage...

Exercice 3. Dans chaque case d'une grille 5×5, Eva écrit $0, 1$ ou -1. On suppose que la somme des nombres de chaque colonne est positive ou nulle, et la somme des nombres de chaque ligne est négative ou nulle. Quel est le plus petit nombre de 0 qu'il peut y avoir sur la grille ?

Solution de l'exercice 3

Considérons la somme de tous les entiers écrits. Celle-ci est égale à la somme des 5 sommes des nombres de chaque colonne, donc elle est positive. Mais elle est aussi égale à la somme des 5 sommes des nombres de chaque ligne, donc est négative. En particulier la somme de tous les entiers écrits est nulle, et de plus, la somme des nombres sur chaque colonne est nulle, et la somme des nombres sur chaque ligne est nulle. En particulier, comme la somme sur chaque ligne est nulle, chaque ligne contient 5 nombres de somme paire, donc un des cinq nombres doit forcément être pair. Ainsi chaque ligne contient un nombre égal à 0, donc la grille contient au moins 5 fois le nombre 0.

Réciproquement, la grille suivante contient exactement 5 fois le nombre 0, donc le nombre minimum de 0 est 5.

0	1	1	-1	-1
-1	0	1	1	-1
-1	-1	0	1	1
1	-1	-1	0	1
1	1	-1	-1	0

Commentaire des correcteurs : "Celui qui n'a pas d'objectifs ne risque pas de les atteindre.", disait Sun Tzu. Il était ici en effet nécessaire de comprendre ce qu'il fallait montrer pour ne pas raisonner au hasard : le problème demandait dans un premier temps de montrer qu'il doit y avoir au moins cinq 0 dans la grille, puis de fournir une construction avec cinq 0. Nombreux sont les élèves qui se sont arrêtés après la première partie, négligeant la deuxième qui est pourtant tout aussi importante. En dehors de cela, certains élèves se sont précipités et ont affirmé directement que si la somme des nombres d'une colonne est nulle, elle doit contenir un 0. On attendait ici un raisonnement sur la parité de la somme des nombres par exemple, et il fallait utiliser que chaque colonne contient un nombre impair d'éléments. On rappelle donc qu'il est nécessaire de justifier rigoureusement chaque affirmation.

Exercice 4. Anatole écrit deux nombres réels strictement positifs au tableau. À chaque opération, il ajoute 1 à l'un des deux nombres et divise l'autre par 2. Montrer qu'après un certain temps, l'un des deux nombres sera plus petit que $\frac{2025}{2024}$

Solution de l'exercice 4

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'Anatole puisse effectuer une infinité d'opérations tout en gardant les deux réels écrits supérieurs ou égaux à $\frac{2025}{2024}$. Posons S_0 la somme des deux réels initialement écrits, et pour tout $n \geqslant 1$, posons S_n la somme des réels écrits au bout de n opérations.

Soit $n \geqslant 0$, si après n opérations les nombres écrits sont x et y, quitte à échanger x et y on peut supposer qu'Anatole écrit alors $x/2$ et $y+1$. Ainsi dans ce cas $S_{n+1} = \frac{x}{2} + y + 1$. De plus, comme tous les réels écrit sont toujours supérieurs ou égaux à $\frac{2025}{2024}$, on a $\frac{x}{2} \geqslant \frac{2025}{2024}$.

Regardons ce que vaut la différence $S_{n+1} - S_n$: on a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{x}{2} + y + 1 - (x+y) = 1 - \frac{x}{2} \leqslant 1 - \frac{2025}{2024} = \frac{-1}{2024}.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant 0$, $S_{n+1} - S_n \leqslant \frac{-1}{2024}$. Ceci implique pour tout $N \geqslant 1$ que

$$S_N - S_0 = (S_N - S_{N-1}) + (S_{N-1} - S_{N-2}) + \cdots + (S_1 - S_0) \leqslant \frac{-N}{2024}.$$

Or par hypothèse, les réels écrits sont toujours strictement positifs, donc $\frac{-N}{2024} \geqslant S_N - S_0 \geqslant -S_0$, on a donc $S_0 \geqslant \frac{N}{2024}$ pour tout $N \geqslant 1$, ce qui est absurde en prenant N assez grand.

Ainsi, on a obtenu une contradiction : quels que soient les mouvements d'Anatole, il écrira à un moment un réel inférieur à $\frac{2025}{2024}$.

Commentaire des correcteurs : Une proportion gargantuesque d'élèves a commis la même erreur, sournoise autant qu'évitable. Ces élèves ont trouvé un monovariant (la somme ou le produit des deux nombres) et ont correctement montré qu'il diminue strictement à chaque étape. Mais ils ont alors affirmé de but en blanc que ce monovariant devenait forcément négatif après un certain temps : ça aurait été totalement correct si ce monovariant prenait des valeurs entières, mais ici ce n'était pas le cas ! Un monovariant qui prend des valeurs réelles et qui décroît strictement n'a aucune raison a priori de devenir négatif, comme en témoigne la suite $1 + \frac{1}{n}$. En effet, on peut se rapprocher de plus en plus d'un réel sans jamais devenir inférieur à celui-ci, ce qui n'est pas possible avec des entiers. Ici, il suffisait de montrer que ce monovariant diminue d'au moins une constante (souvent, les élèves ont considéré $\frac{1}{2024}$) à chaque opération. Ainsi, on peut majorer la valeur de ce monovariant après n opérations en général, et montrer qu'il devient négatif après un certain temps. On espère que cet exemple permettra aux élèves de se souvenir de ce principe fondamental qu'ils seront à coup sûr amené à réutiliser à de maintes reprises.

Exercice 5. Dans une classe de 24 élèves, chaque élève a un fan club constitué d'autres élèves de la classe. On suppose que, pour tout groupe de 3 élèves de la classe, ils appartiennent tous à un même fan club. Montrer qu'il existe un élève de la classe dont le fan club contient au moins 10 élèves.

Solution de l'exercice 5

Supposons par l'absurde que chaque élève a un fan-club de taille au plus 9. Dans ce cas, si on fixe un élève A, il y a au plus $\binom{9}{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1} = 84$ ensembles de 3 élèves dont chacun est dans le fanclub de l'élève A.

Or il y a en tout $\binom{24}{3} = \frac{24\times23\times22}{6} = 4 \times 23 \times 22$ groupes de 3 élèves. Pour chacun de ces groupes, on sait qu'il existe un élève dont les 3 élèves sont fans : pour chaque groupe on choisit un tel élève qu'on appelle l'idole du groupe. Comme il y a 24 élèves et $4 \times 23 \times 22$ groupes, par principe des tiroirs un élève est l'idole d'au moins $\frac{4\times23\times22}{24} = \frac{23\times11}{3} > 84$ groupes. Or cela contredit le fait qu'il y a au plus 84 ensembles de 3 élèves dont chacun est dans le fanclub de cet élève.

Ainsi, on a obtenu une contradiction : il y a donc bien un élève qui a un fan-club de taille au moins 10, ce qui donne le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs :L'exercice a été bien traité, et une grande partie des copies rendues ont obtenu la note maximale. La plupart suivent une preuve similaire à celle du corrigé, en raisonnant par l'absurde et en dénombrant les triplets. Attention, il fallait faire attention à la formulation pour obtenir tous les points lorsque l'on compte le nombre de triplets d'élèves dans un même fan-club : $24 \times \binom{9}{3}$ est un maximum qui n'est pas forcément atteint (seule l'inégalité est importante ici). On ne peut pas se contenter de supposer qu'il a exactement 9 élèves par fan-club. Néanmoins, une phrase de la forme "Il y a au plus 9 élèves par fan-club donc au plus $24 \times \binom{9}{3}$ triplets de trois élèves dans un même fan-club" suffisait amplement.

Exercice 6. Soit n un entier strictement positif. n élèves participent à une olympiade qui contient n problèmes. Chaque candidat a résolu entre 0 et n problèmes. On dit qu'un entier k est joli si tout groupe de k élèves a résolu au total k problèmes différents ou plus (c'est-à-dire que chacun de ces k problèmes ou plus a été résolu par au moins un des k candidats). Déterminer tous les ensembles E inclus dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que, si tous les entiers de E sont jolis, alors tous les entiers de $\{1, \ldots, n\}$ sont jolis.

Solution de l'exercice 6

Commençons déjà par noter que $E = \{1, \ldots, n\}$ vérifie la propriété de l'énoncé : si tous les éléments de E sont jolis, tous les entiers de $\{1, \ldots, n\}$ le sont aussi.

Montrons que c'est le seul ensemble vérifiant l'énoncé. Soit E' un ensemble vérifiant l'énoncé. Si $E' \neq \{1, \ldots, n\}$, alors il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ n'appartenant pas à E. Essayons alors de construire une situation où tous les entiers sauf k sont jolis.

On regarde la situation où k élèves ont réussi les $k-1$ premiers problèmes, mais pas les autres, et où les $n-k$ autres élèves ont réussi tous les problèmes. Notons que dans ce cas :

— Si $1 \leqslant i < k$, i est joli, car tout élève a résolu au moins $k-1 \geqslant i$ problèmes.

— Si $n \geqslant i > k$, i est joli car tout groupe de i élève contient au moins un des $n-k$ élèves qui a trouvé tous les problèmes, donc en particulier au moins i problèmes.

— Si $i = k$, i n'est pas joli, car le groupe formé des i premiers élèves a uniquement trouvé $k-1$ problèmes différents.

Ainsi tout entier de E' est joli, mais il existe un entier de $\{1, \ldots, n\}$ qui n'est pas joli. Donc E' ne vérifie pas la propriété de l'énoncé. Ainsi si E' vérifie la propriété l'énoncé, $E' = \{1, \ldots, n\}$. Comme celui-ci réciproquement convient, c'est l'unique ensemble vérifiant l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien réussi par ceux qui l'ont traité. Attention à ne pas oublier de dire que l'ensemble $E = \{1, \ldots, n\}$ est bien solution (ce qui est évident, donc il suffit juste de le dire, pas besoin de le prouver, mais c'est un bon réflexe à avoir), et à bien prouver que la configuration exhibée a les propriétés voulues lorsqu'on montre une configuration que montre qu'un ensemble ne vérifie pas l'énoncé.

Exercice 7. Soit n un entier strictement positif, k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant 2^n$. Serge choisit, en secret, un nombre noté x entre 1 et n sans le dire à Hugo. Hugo tente de trouver ce nombre de la façon suivante. À chaque tour, Hugo choisit k sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ deux à deux distincts puis, pour chaque sous-ensemble S qu'il a choisi, pose la question "L'entier x appartient-il à l'ensemble S ?". Serge choisit une de ces k questions, dit à Hugo quelle question il a choisi et quelle est la réponse à cette question.
Déterminer, en fonction de n, les valeurs de k pour lesquelles Hugo peut déterminer avec certitude le nombre de Serge en un nombre fini de tours.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>
Une stratégie assez naturelle pour Hugo est à chaque étape avant de noter les k sous-ensembles et de les donner à Serge est de regarder la liste des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ qui peuvent être l'entier choisi par Serge qu'on appelle suspects, et de donner des sous-ensembles qui si possible ne contiennent ni tous les éléments suspects, ni aucun élément suspect, sinon Serge peut choisir ce sous-ensemble comme question, et n'apporter aucune nouvelle information à Hugo.
Essayons de donner une stratégie plus applicable à Hugo utilisant cette même idée. Chaque fois avant de poser une question, il regarde la liste des éléments encore suspects, en choisit 2 notés x et y, et n'écrit que des ensembles contenant x mais pas y, ou y mais pas x. S'il existe bien k tels ensembles, alors Serge en répondant permettra à Hugo d'éliminer au moins un suspect, et en itérant la stratégie, Hugo pourra éliminer les suspects un par un, jusqu'à n'en avoir plus qu'un, et pourra alors deviner le nombre initialement choisi par Serge.
A quelle condition sur k est-ce que Hugo peut appliquer cette stratégie ? Si on fixe a, b deux entiers différents entre 1 et n, il y a 2^{n-2} ensembles qui contiennent a mais pas b, car il y a $n-2$ entiers entre 1 et n différents de a et b, et pour chacun, on a 2 choix pour former un tel ensemble : ajouter ou non l'entier à l'ensemble. De même il y a 2^{n-2} ensembles qui contiennent b mais pas a, donc en tout 2^{n-1} ensembles qui contiennent soit a soit b mais pas les deux.
Ainsi si $k \leqslant 2^{n-1}$ Hugo peut bel et bien appliquer sa stratégie.
Mais Serge dispose d'une stratégie dès que $k > 2^{n-1}$. En effet, si $k > 2^{n-1}$, alors Hugo devra à chaque fois proposer parmi ses ensembles un ensemble qui ne figure pas parmi les 2^{n-1} contenant 1 ou 2, mais pas les deux en même temps. Hugo proposera donc à chaque fois parmi ses k ensembles un ensemble contenant 1 et 2, ou un ne contenant ni 1 ni 2. Serge n'a qu'à choisir à chaque fois un de ces ensembles, répondre que son entier figure dans l'ensemble si 1 ou 2 sont dedans, et sinon répondre que son entier ne figure pas dans l'ensemble.
Dans ce cas, peu importe le nombre de questions que posera Hugo, 1 et 2 seront des entiers pouvant être l'entier choisi par Serge vu ses réponses, donc Hugo ne pourra pas à coup sûr savoir quel est l'entier de Serge.
Ce raisonnement ne marche bien entendu que si 1 et 2 appartiennent à $\{1, ..., n\}$, donc si $n \geqslant 2$. Pour $n = 1$, Hugo gagne quelle que soit la valeur de k, puisque Serge a forcément choisi 1.
Ainsi, pour $n \geqslant 2$, Hugo peut gagner si et seulement si $1 \leqslant k \leqslant 2^{n-1}$ et pour $n = 1$, il gagne toujours.
<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice est assez peu traité, mais plutôt bien réussi dans l'ensemble. La plupart des élèves pensent bien à montrer non seulement que si $k \leqslant 2^{n-1}$ alors Hugo peut trouver x mais aussi que si $k > 2^{n-1}$ alors Serge peut l'en empêcher : bravo d'y avoir pensé ! Il y a eu plusieurs solutions différentes pour la première partie : une qui consiste à calculer le nombre de sous-ensembles utiles pour Hugo qu'il lui reste, celle du corrigé, et une troisième qui utilise le principe des tiroirs pour montrer qu'avec l'information de $2^{n-1} + 1$ sous-ensembles quelconques Hugo est en mesure de déduire x. Pour la seconde, la plus fréquente est celle du corrigé, quelques rares élèves sont néanmoins parvenus à montrer que le raisonnement mené en première partie était nécessaire et en déduire la seconde partie.

Exercice 8. Soit $n, m > 0$ des entiers. On considère une grille $n \times m$ où deux cases sont dites adjacentes si elles partagent un côté. Auguste veut écrire un entier positif sur chaque case afin que :

— les deux nombres écrits sur deux cases adjacentes diffèrent d'au plus 1

— si un nombre est inférieur ou égal à tous les nombres adjacents, alors il vaut 0.

De combien de façons peut-il remplir sa grille ?

Solution de l'exercice 8

En essayant de construire des configurations vérifiant l'énoncé, on peut remarquer qu'une fois les cases avec un 0 choisies, il y a une unique façon d'attribuer un numéro à chaque case pour avoir une configuration vérifiant l'énoncé. Montrons cela rigoureusement.

Montrons d'abord que si on fixe un ensemble de cases S non vide, il existe une manière de remplir la grille de sorte à ce que l'ensemble des cases sur lesquelles 0 est écrit est exactement S.

En effet, pour chaque case c, on peut regarder tous les chemins de cases allant d'une case de S à c, et parmi tous ces chemins, il en existe un ou plusieurs de taille minimale qu'on note $\ell_S(c)$. On écrit alors sur la case c la quantité $\ell_S(c)$. Vérifions que cette numérotation est en accord avec les contraintes de l'énoncé.

— Les cases sur lesquels il est écrit 0 sont exactement les cases de S par construction.

— Soit c une case telle que $\ell_S(c) > 0$, alors il existe un chemin $c_0, , \ldots, c_{\ell_S(c)}$ entre cases voisines tel que $c_0 \in S$ et $c_{\ell_S(c)} = c$. Notons que $\ell_S(c_{\ell_S(c)-1}) \leqslant \ell_S(c) - 1$, car le chemin précédent induit un chemin de longueur $\ell_S(c) - 1$ allant d'une case dans S à $\ell_S(c_{\ell_S(c)-1})$. De plus, si $c_{\ell_S(c)-1}$ était à distance strictement inférieure à $\ell_S(c) - 1$ d'une case de S, comme c est un voisin de cette case, celui-ci serait à distance strictement inférieure à $\ell_S(c)$ d'une case de S, ce qui est absurde. Ainsi $\ell_S(c_{\ell_S(c)-1}) = \ell_S(c) - 1$, et comme cette case est voisine de c, le numéro de c n'est pas inférieur ou égal à celui de toutes les cases adjacentes.

— Soit c et c' deux cases voisines, on suppose que $\ell_S(c) \leqslant \ell_S(c')$, alors comme il existe un chemin d'une case de S à c de longueur $\ell_S(c)$, il en existe un allant jusqu'à c' de longueur $\ell_S(c)+1$, donc $\ell_S(c) \leqslant \ell_S(c') \leqslant \ell_S(c) + 1$. En particulier, dans tous les cas $|\ell_S(c) - \ell_S(c')| \leqslant 1$.

Ainsi la numérotation vérifie bien les contraintes de l'énoncé.

Maintenant, montrons que si on fixe un ensemble de cases S non vide, toute numérotation vérifiant les contraintes de l'énoncé et telle que l'ensemble des cases sur lesquelles 0 est écrit est exactement S est en fait la numérotation donnée par ℓ_S.

Pour cela, on montre par récurrence forte sur k que si on considère une telle numérotation, alors les cases numérotées c sont exactement celles qui vérifient $\ell_S(c) = k$.

L'initialisation pour $k = 0$ est immédiate. Pour l'hérédité, soit k un entier positif, supposons l'hypothèse vraie pour tout rang dans $\{0, \ldots, k\}$, montrons que les cases numérotées $k + 1$ sont exactement celles avec $\ell_S(c) = k+1$. Soit c une case numérotée $k+1$, comme elle n'est pas numérotée 0 une de ses cases voisines a un numéro strictement inférieur. Or comme les numéros de deux cases voisines diffèrent d'au plus 1, la case numérotée $k+1$ a une voisine numérotée k, donc à distance au plus k d'une case de C par hypothèse de récurrence. Ainsi c est à distance au plus $k + 1$ d'une case de c, donc $\ell_S(c) \leqslant k + 1$. Or si on avait $\ell_S(c) \leqslant k$, la case c aurait pour numéro $\ell_S(c)$ par hypothèse de récurrence ce qui est absurde. Ainsi $\ell_S(c) = k + 1$: si une case est numérotée $k + 1$, alors elle vérifie $\ell_S(c) = k + 1$.

Soit c une case vérifiant $\ell_S(c) = k + 1$, montrons qu'elle est numérotée $k + 1$, ce qui conclura la récurrence. Comme $\ell_S(c) > 0$, c possède une case voisine c' qui vérifie $\ell_S(c') = \ell_S(c) - 1$ (on l'a prouvé dans le deuxième point de l'énumération ci-dessus). Ainsi c a une voisine numérotée k. Donc c a un numéro valant au plus $k + 1$. Si ce numéro valait au plus k, on aurait par hypothèse de récurrence $\ell_S(c) \leqslant k$ ce qui est absurde. Ainsi la case est bien numérotée $k + 1$, ce qui conclut la récurrence.

Ainsi, si on fixe un ensemble de cases S non vide, il existe une unique manière de remplir la grille de sorte à ce que l'ensemble des cases sur lesquelles 0 est écrit est exactement S. De plus, ces numérotations

des cases sont deux à deux distinctes, car chacune a un ensemble S différent de cases contenant un 0. Il n'existe pas de numérotation sans aucun 0 (la case contenant le minimum de la grille est forcément un 0), donc on a bien autant de numérotation que de choix d'un ensemble de cases non vides S.
Or pour S, comme il y a mn cases, il y a $2^{mn}-1$ possibilités (on retire le cas où S est vide), donc il y a $2^{nm}-1$ numérotations possibles.
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été assez peu traité, mais la plupart des copies rendues étaient correctes. Il est important de penser à justifier chaque affirmation, certains élèves s'étant montrés beaucoup trop paresseux dans leur description de la construction. Comme souvent en combinatoire, certains résultats semblent immédiats dans ce problème, mais sont loins de l'être, et il est ainsi d'autant plus important d'être précis et rigoureux dans la rédaction. Par ailleurs, il était possible de conjecturer et vérifier sa formule sur des petits cas, il est donc dommage de voir des copies supposément complètes avec une formule erronée.

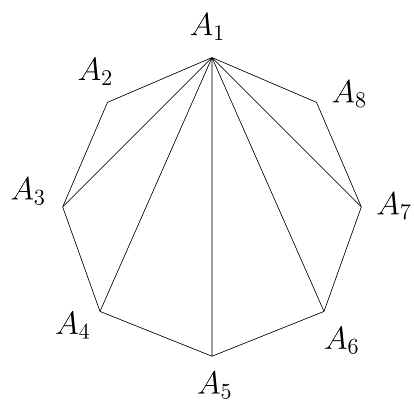
Exercice 9. Soit n un entier vérifiant $n \geqslant 3$. Le gâteau d'anniversaire de Rémi est un n-gone régulier. Théo a caché une fève dans le gâteau. Rémi, malicieux comme il l'est, veut trouver la fève. Pour cela, Rémi peut choisir trois points distincts A, B, C qui sont des sommets distincts du n-gone, et demander à Théo si la fève est à l'intérieur (bord inclus) du triangle ABC. Dès que Théo répond oui, Rémi a gagné. Quel est le nombre minimum de questions, en fonction de n, que Rémi doit poser pour être sûr de gagner ?

Solution de l'exercice 9

Notons $A_1, \ldots, A_n$ les extrémités du n-gone dans l'ordre trigonométrique. Rémi peut utiliser la stratégie suivante : il demande au fur et à mesure les triangles suivants :

$$A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, \ldots, A_1A_{n-1}A_n.$$

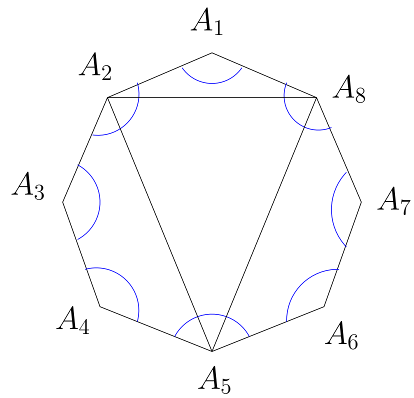
En utilisant ces $n-2$ triangles qui recouvrent le n-gone, il peut être sûr au bout de $n-2$ questions d'avoir obtenu une réponse Oui, et donc d'avoir gagné.



On pourrait alors penser qu'il faut forcément $n-2$ questions car tout pavage d'un polygone avec des triangles (aussi appelé triangulation) contient $n-2$ triangles. En fait, ceci est à priori faux, car Rémi pourrait proposer des triangles se superposant un petit peu avec d'autres triangles et espérer en utiliser moins pour recouvrir le n-gone.

Il s'avère qu'il faut bel et bien $n-2$ questions, mais pour des raisons différentes de celles évoquées. Prouvons cela :

Anatole dessine n cercles centrés en $A_1, \ldots, A_n$ et de même rayon r, en prenant r assez petit pour que les cercles soient 2 à 2 disjoints, et qu'aucun cercle ne touche une diagonale du carré ne partant pas de son centre. Ensuite Anatole efface chaque bout de cercle hors du polygone : en chaque sommet, si on note θ l'angle en radian du polygone en ce sommet, il reste un arc de cercle d'angle θ, donc d'aire $\frac{\theta}{2}r^2$. Ainsi l'aire totale des disques vaut $\frac{\pi(n-2)r^2}{2}$ car la somme des angles du n gone vaut $(n-2)\pi$. Chaque triangle dont les trois sommets sont des sommets du plygone ne rencontre alors les trois cercles correspondants que sur un secteur angulaire de rayon r et d'angle chacun des angles du triangle. Il recouvre donc une



aire valant $\frac{\pi}{2}r^2$. Il faut donc au moins $\frac{\frac{\pi(n-2)r^2}{2}}{\frac{\pi}{2}r^2} = n-2$ triangles pour recouvrir tous les arcs de cercle et donc être sûr de pouvoir trouver la fève.
NB : ici le fait que le n-gone est régulier est une hypothèse un peu forte : la même preuve fonctionne si on suppose le n-gone convexe.
Commentaire des correcteurs : De nombreux élèves ont traité l'exercice, et nombreux sont ceux à avoir succombé au même piège... Il était en effet tentant de faire une récurrence, mais il fallait considérer la bonne hypothèse de récurrence, sans quoi on se retrouvait avec des triangles dont les sommets étaient en dehors du polygone sur lesquels l'hypothèse de récurrence ne pouvait être appliquée. Les élèves ayant suivi le schéma de preuve du corrigé sont quant à eux arivés à bon port sans rencontrer d'écueil notable. Il fallait cela dit penser à préciser qu'on considérait des sections d'angles suffisamment petites pour "isoler" les sommets, ce que certains élèves n'ont pas pensé à faire. La morale de cette histoire est qu'en combinatoire, il faut être très précis dans ses affirmations, car une solution erronée ou imprécise est vite arrivée...

Exercices Seniors

Exercice 10. Erik dispose de 2024 boules blanches et 2024 boules noires qu'il répartit dans 4047 sacs. À la fin, il remarque que chaque sac contient au plus une boule de chaque couleur. Montrer qu'il existe un sac contenant exactement une boule de chaque couleur.

Solution de l'exercice 10
Il y a 4048 boules dans 4047 sacs, donc par principe des tiroirs, un sac contient au moins 2 boules. Si ce sac en contient au moins 3, comme il y a deux couleurs, alors il en contient deux de même couleur, ce qui est absurde. Ainsi le sac contient 2 boules, qui sont de différentes couleurs, ce qui donne le résultat voulu.
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien traité, et aucune perte de points n'est d'ailleurs à déplorer. L'argument était direct, on peut donc simplement regretter que quelques élèves se soit emmêlés les pinceaux dans leur argument, mais l'essentiel est qu'ils soient retombés sur leurs pieds. Une simple remarque : le principe des tiroirs n'affirme pas qu'il y a un sac avec exactement deux boules, mais seulement qu'il existe un sac avec au moins deux boules. Il fallait utiliser l'autre condition pour montrer que ce sac contenait précisément 2 boules.

Exercice 11. Anatole écrit deux nombres réels strictement positifs au tableau. À chaque opération, il ajoute 1 à l'un des deux nombres et divise l'autre par 2. Montrer qu'après un certain temps, l'un des deux nombres sera plus petit que $\frac{2025}{2024}$

Solution de l'exercice 11

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'Anatole puisse effectuer une infinité d'opérations tout en gardant les deux réels écrits supérieurs ou égaux à $\frac{2025}{2024}$. Posons S_0 la somme des deux réels initialement écrits, et pour tout $n \geqslant 1$ posons S_n la somme des réels écrits au bout de n opérations.
Soit $n \geqslant 0$, si après n opérations les nombres écrits sont x, y, quitte à échanger x et y on peut supposer qu'Anatole écrit alors $x/2$ et $y+1$. Ainsi dans ce cas $S_{n+1} = x/2+y+1$. De plus, comme tous les réels écrits sont toujours supérieurs ou égaux à $\frac{2025}{2024}$, on a $x/2 \geqslant \frac{2025}{2024}$.
Regardons ce que vaut la différence $S_{n+1} - S_n$: on a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{x}{2} + y + 1 - (x+y) = 1 - \frac{x}{2} \geqslant 1 - \frac{2025}{2024} = \frac{-1}{2024}.$$

Ainsi pour tout $n \geqslant 0$, $S_{n+1} - S_n \leqslant \frac{-1}{2024}$. Ceci implique pour tout $N \geqslant 1$ que

$$S_N - S_0 = (S_N - S_{N-1}) + (S_{N-1} - S_{N-2}) + \cdots + (S_1 - S_0) \leqslant \frac{-N}{2024}.$$

Or par hypothèse, les réels écrits sont toujours strictement positifs, donc $\frac{-N}{2024} \geqslant S_N - S_0 \geqslant -S_0$, on a donc $S_0 \geqslant \frac{N}{2024}$ pour tout $N \geqslant 1$, ce qui est absurde en prenant N assez grand.
Ainsi, on a obtenu une contradiction : quels que soient les mouvements d'Anatole, il écrira à un moment un réel inférieur à $\frac{2025}{2024}$.
Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien traité et résolu. Il fallait ici faire attention à distinguer les deux opérations possibles quand on supposait des conditions sur a et b, ce que les élèves ont su faire correctement. Certains élèves se sont cependant engouffrés dans un écueil : ils ont trouvé une quantité qui décroît strictement et ont affirmé sans autre forme de procès qu'elle devient négative après un nombre suffisant d'opérations. Mais c'est faux en général, comme en témoigne la suite $1 + \frac{1}{n}$, qui décroît sans jamais passer en dessous de 1 ! Il fallait ici penser à montrer que cette quantité décroît d'une constante au moins à chaque opération, ce qui permet de conclure l'exercice.

Exercice 12. Soit n un entier strictement positif. n élèves participent à une olympiade qui contient n problèmes. Chaque candidat a résolu entre 0 et n problèmes. On dit qu'un entier k est joli si tout groupe de k élèves a résolu au total k problèmes différents ou plus (c'est-à-dire que chacun de ces k problèmes ou plus a été résolu par au moins un des k candidats). Déterminer tous les ensembles E inclus dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que, si tous les entiers de E sont jolis, alors tous les entiers de $\{1, \ldots, n\}$ sont jolis.

Solution de l'exercice 12

Commençons déjà par noter que $E = \{1, \ldots, n\}$ vérifie la propriété de l'énoncé : si tous les éléments de E sont jolis, tous les entiers de $\{1, \ldots, n\}$ le sont aussi.

Montrons que c'est le seul ensemble vérifiant l'énoncé. Soit E' un ensemble vérifiant l'énoncé. Si $E' \neq \{1, \ldots, n\}$, alors il existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ n'appartenant pas à E. Essayons alors de construire une situation où tous les entiers sauf k sont jolis.

On regarde la situation où k élèves ont réussi les $k-1$ premiers problèmes, mais pas les autres, et où les $n-k$ autres élèves ont réussi tous les problèmes. Notons que dans ce cas :

— Si $1 \leqslant i < k$, i est joli, car tout élève a résolu au moins $k - 1 \geqslant i$ problèmes.

— Si $n \geqslant i > k$, i est joli car tout groupe de i élève contient au moins un des $n-k$ élèves qui a trouvé tous les problèmes, donc en particulier au moins i problèmes.

— Si $i = k$, i n'est pas joli, car le groupe formé des i premiers élèves a uniquement trouvé $k-1$ problèmes différents.

Ainsi tout entier de E' est joli, mais il existe un entier de $\{1, \ldots, n\}$ qui n'est pas joli. Donc E' ne vérifie pas la propriété de l'énoncé. Ainsi si E' vérifie la propriété l'énoncé, $E' = \{1, \ldots, n\}$. Comme celui-ci réciproquement convient, c'est l'unique ensemble vérifiant l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été peu abordé (seulement 15 copies), nous ne pouvons que vous encourager à chercher, et nous envoyer vos exercices des envois : c'est un bon moyen de s'entrainer. Les copies sont quasiment toutes très bien, mais attention à ne pas oublier de petits points : mentionner que $E = \{1, \ldots, n\}$ est bien solution, montrer que dans une configuration proposée, tous les nombres différents de k sont jolis et que le nombre k ne l'est pas.

Exercice 13. Soit n un entier strictement positif. Anatole pose des lutins sur les cases d'une grille $n \times n$ (avec au plus un lutin par case). Il remarque ensuite qu'il n'y a jamais deux lutins sur deux cases se touchant par un coin, mais pas par un côté. Combien a-t-il posé de lutins, au maximum ?

Solution de l'exercice 13

Montrons qu'Anatole peut placer au maximum $\frac{n^2}{2}$ lutins si n est pair, et $\frac{n(n+1)}{2}$ si n est impair.

Déjà, s'il met un lutin sur toutes les cases des colonnes de numéro impair (en numérotant les colonnes de 1 à n), on vérifie aisément que deux lutins ne s'attaquent jamais et qu'on obtient bien les bornes proposées.

Pour prouver l'optimalité de cette construction, traitons deux cas selon la parité de n.

— Cas 1 : n est pair

On remarque que chaque carré 2×2 contient au maximum deux lutins. On peut aisément paver le grand carré par $\frac{n^2}{4}$ carrés 2×2, ce qui donne directement la borne voulue.

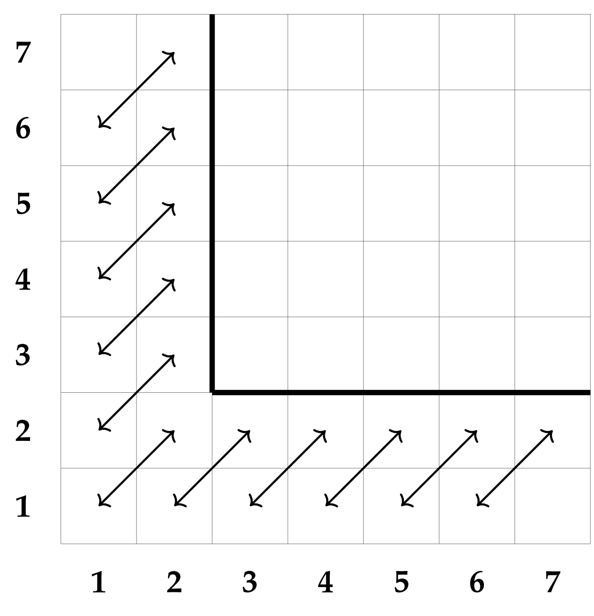
— Cas 2 : n est impair

On va procéder par récurrence sur n. Si $n = 1$, on peut clairement mettre un seul lutin, ce qui correspond à la borne proposée.

Supposons maintenant le résultat vrai pour $n-2$ et montrons qu'il est vrai également pour n.

Numérotons les colonnes de 1 à n en partant de la gauche, et de même pour les lignes en partant du bas. La case (i, j) est alors à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

On remarque alors que pour tout i entre 1 et $n-1$ inclus, parmi les cases $(i, 1)$ et $(i+1, 2)$, au plus une contient un lutin. De même pour les cases $(1, i)$ et $(2, i+1)$. On a ainsi formé $2n-3$ paires de cases, chaque paire contenant un lutin au maximum. Si on rajoute les cases $(1, n)$ et $(n, 1)$, on obtient qu'il y a au plus $2n-1$ lutins sur les deux premières colonnes ou les deux premières lignes. Sur le carré $(n-2) \times (n-2)$ obtenu en retirant ces deux lignes et deux colonnes, on sait qu'il y a au plus $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ lutins par hypothèse de récurrence. Ainsi, il y a au maximum $\frac{(n-2)(n-1)}{2} + (2n-1) = \frac{n(n+1)}{2}$ lutins dans le grand carré, ce qui cobnclut la récurrence.



Deux cases reliées par une flèche ne peuvent pas contenir un lutin chacune

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été globalement bien réussi par les élèves ayant rendu une copie. Tous ont bien compris que celui-ci se décomposait en deux parties, fournir une construction puis montrer que celle-ci est optimale. Toutes les copies ont réussi la première partie, la deuxième étant nettement plus ardue. Certains élèves ont affirmé et cru montrer des résultats erronés dans le cas où n

est impair. On rappelle donc qu'il est important de vérifier ses affirmations sur des petits cas pour se convaincre de leur véracité. De plus, on rappelle l'importance de fournir un nombre adéquat de figures propres, car là où les élèves ont parfois du mal à expliquer leurs arguments à l'écrit, une figure ne peut qu'améliorer la clarté de la copie.

Exercice 14. Le gâteau d'anniversaire de Rémi est un n-gone convexe. Théo donne plusieurs coups de couteau dans le gâteau (un coup est un segment qui relie deux sommets du n-gone non adjacents). On dit qu'un coup de couteau est bien fait s'il intersecte exactement un autre coup de couteau en dehors d'un sommet du n-gone. Combien de coups bien faits Théo a-t-il pu faire, au maximum (Théo n'étant pas parfait, il peut bien entendu aussi donner des coups mal faits) ?

Solution de l'exercice 14
Montrons par récurrence que la réponse est $n-3$ si n est impair, et $n-2$ si n est pair.
Les cas de base $n = 2, 3, 4$ sont immédiats.

Supposons avoir montré l'énoncé pour tout $k < n$, montrons-le pour n. On commence par fournir une construction. Numérotons $A_1, ..., A_n$ les sommets du n-gone.

Si n est impair, on peut faire les coupes A_1A_3, A_1A_4, ...A_1A_{n-1} ainsi que A_2A_n. On remarque que les $n-3$ premières coupes sont bien faites, car elles intersectent seulement la coupe A_2A_n, donc on peut faire $n-3$ bonnes coupes.
Si n est pair, on peut faire les coupes entre les sommets A_iA_j, pour tous i, j tels que $i + j = n$ ($\frac{n}{2} - 1$ coupes) ou $i + j = n + 2$ ($\frac{n}{2} - 1$ coupes), ce qui fait bien au total $n - 2$ coupes. On remarque deux plus que toutes les coupes sont bien faites. En effet, si $i+j = n$, A_iA_j intersecte $A_{i+1}A_{j+1}$, et si $i+j = n+2$, A_iA_j intersecte $A_{i-1}A_{j-1}$. On vérifie aisément que ce sont les seules intersections.

Montrons maintenant que cette borne est optimale. Pour cela, on distingue deux cas :

— Premier cas : deux coupes bien faites ne s'intersectent jamais en dehors s'un sommet
  Dans ce cas, on peut compléter les coupes bien faites par d'autres coupes pour obtenir une triangulation du n-gone. Comme une triangulation contient $n-3$ coupes, on a fait au plus $n-3$ coupes bien faites.
— Deuxième cas : il existe deux coupes bien faites s'intersectant
  Supposons que les coupes A_kA_l et A_mA_n s'intersectent. Les quatres points séparent le polygone en quatre ensemble de sommets, contenant a, b, c, d sommets, avec $a + b + c + d = n - 4$. Comme les coupes A_kA_l et A_mA_n sont bien faites, aucune autre coupe ne les intersecte donc aucune coupe ne relie deux sommets de deux zones différentes.
  Ainsi, on peut considérer quatre polygones contenant respectivement $a + 2$, $b + 2$, $c + 2$, $d + 2$ sommets, et répéter le problème dans chacun de ces polygones. Ces polygones contiennent au maximum a, b, c, d coupes bien faites respectivement, donc on a au total $a+b+c+d+2 = n-2$ coupes bien faites au maximum.
  Si n est impair, on sait de plus qu'un nombre parmi a, b, c, d est impair, ce qui diminue de 1 la borne et donne bien $n-3$.

Commentaire des correcteurs : Plutôt difficile pour sa position, cet exercice a été peu traité et la moitié des copies avait une solution complète. Il était ici nécessaire de faire une récurrence sur le nombre de côtés du polygone, et on rappelle donc qu'il est essentiel de bien définir l'hypothèse de récurrence, surtout dans un cas comme celui-ci où elle est géométrique. Cela permet de savoir exactement quoi montrer dans la récurrence. Par exemple, ici, on considère un polygone dont l'intérieur est vide : il faut donc éviter, en appliquant l'hypothèse de récurrence, de se ramener à un plus petit polygone qui peut être traversé par une diagonale du grand polygone. La plupart des élèves ont su faire ceci correctement, ce dont on les félicite. Il est d'ailleurs important de savoir que toute triangulation d'un n-gone contient $n-3$ diagonales (lemme utile ici), et il n'est pas nécessaire de redémontrer cette propriété. Il est aussi important de faire des dessins pour montrer les constructions, qui sont beaucoup plus faciles à comprendre (et engendrent moins de risque de se tromper que des formules).

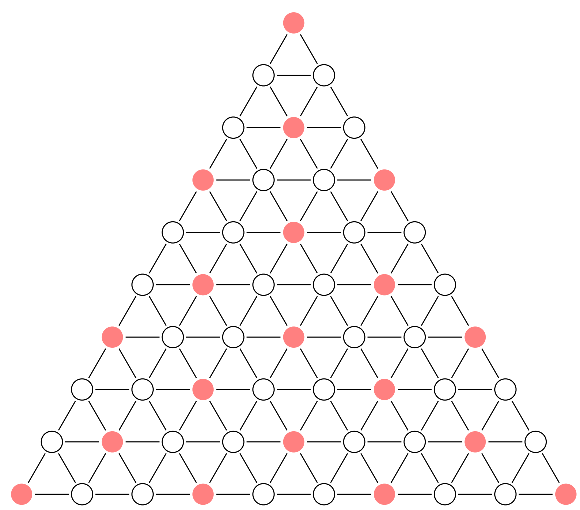
Exercice 15. Erik et Aurélien jouent à un jeu sur un réseau triangulaire infini, composé de traingles équilatéraux. À chaque tour, Erik place un lutin sur deux sommets voisins. Aurélien retire ensuite n'importe lequel des lutins préalablement placé. Quel est le plus grand k pour lequel Erik peut s'assurer que, à au moins un instant dans la partie, la grille contienne k sommets consécutifs alignés avec un lutin ?

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>

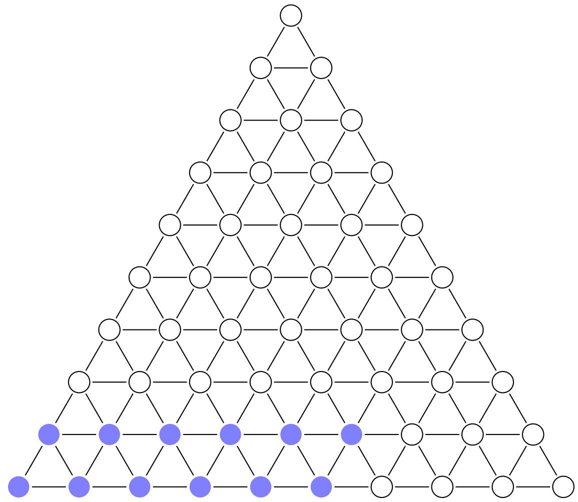
Montrons que la réponse est 5.

Prenons un point O du réseau, et $\vec{i}, \vec{j}$ deux vecteurs reliant O à deux points du réseau qui lui sont adjacents et formant un angle de $60°$ entre eux. Chaque point P du réseau s'écrit d'une unique façon comme $\vec{OP} = a\vec{i} + b\vec{j}$, avec a et b entiers. Soit alors (a, b) les coordonnées de P.

Montrons qu'Aurélien peut se débrouiller pour qu'Erik n'aligne jamais plus de 5 lutins. On va dire que les sommets de coordonnées (i, j), avec $i - j$ multiple de 3, sont gentils. On remarque que deux sommets gentils ne sont jamais adjacents. Aurélien peut alors s'assurer qu'à la fin de son tour, il n'y ait aucun lutin sur un sommet gentil (Erik peut en rajouter au plus un à son tour, et Aurélien peut alors le retirer). Ainsi, à la fin du tour d'Erik, il y a au plus un lutin sur un sommet gentil. Or, parmi 6 sommets consécutifs alignés, il y en a toujours deux gentils donc Erik ne peut pas aligner 6 lutins sur des sommets consécutifs si Aurélien joue de cette façon.



Montrons maintenant qu'Erik peut aligner 5 lutins sur des sommets consécutifs. Soit L_1 l'ensemble des sommets de coordonnées (i, j) avec $i = 0$ et $0 \leqslant j \leqslant 5$. On définit de même L_2 l'ensemble des sommets de coordonnées (i, j) avec $i = 1$ et $0 \leqslant j \leqslant 5$. Erik peut appliquer la stratégie suivante : à chaque tour, tant que c'est possible, il met un lutin sur deux sommets adjacents de $L_1 \cup L_2$.



À chaque tour, le nombre de lutins sur les sommets de $L_1 \cup L_2$ augmente de 1 donc, après un nombre fini de coups, cette stratégie prendra fin. Il n'y a alors plus de paire de sommets adjacents sans lutin dans $L_1 \cup L_2$.
On peut maintenant partitionner $L_1 \cup L_2$ en quatre triangles équilatéraux, chacun contenant trois sommets deux à deux adjacents. Chaque triangle contient au plus 1 sommet sans lutin, donc il y a au plus quatre sommets sans lutin dans $L_1 \cup L_2$. On distingue alors trois cas.

— Si L_1 contient un seul sommet sans lutin, alors Erik peut choisir ce sommet et un sommet extérieur à $L_1 \cup L_2$. Il aura alors réussi à avoir 6 lutins consécutifs alignés sur L_1.
— SI L_2 contient un seul sommet sans lutin, on fait de même.
— Si L_1 et L_2 ont au moins deux sommets sans lutins, alors ils en ont même exactement deux chacun. Si $(0,0)$ ou $(0,5)$ n'a pas de lutin, alors parmi les cinq autres sommets de L_1 il y en a un seul sans lutin et on fait de même que dans le premier cas. De même si $(1,0)$ ou $(1,5)$ n'a pas de lutin. Ainsi, les sommets sans lutins sont parmi les 4 sommets centraux de L_1 et L_2. On observe alors aisément qu'il y en a deux adjacents, ce qui est absurde et conclut.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Une dizaine d'élèves ont rendu une copie, mais plus de la moitié d'entre eux a compris incorrectement l'énoncé : Aurélien n'est pas obligé de retirer un lutin parmi les deux qu'Erik vient de placer, il peut retirer le lutin de son choix ! C'est très dommage de voir ainsi tant d'élèves admettre une hypothèse que l'énoncé ne laisse nullement supposer... On rappelle qu'il est essentiel de lire plusieurs fois l'énoncé pour s'assurer de sa bonne compréhension, d'autant plus que l'énoncé insistait ici sur le fait qu'Aurélien pouvait retirer n'importe quel lutin... Mis à part ce point, tous les élèves ont correctement traité leur énoncé, et ont su mettre un nombre adéquat de figures (et ce malgré la difficulté de tracer un réseau triangulaire sur une feuille quadrillée), ce dont on ne peut que les féliciter.

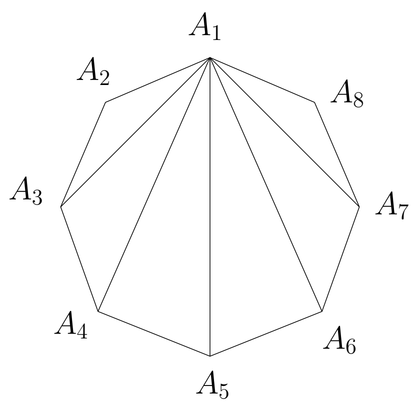
Exercice 16. Soit n un entier vérifiant $n \geqslant 3$. Le gâteau d'anniversaire de Rémi est un n-gone régulier. Théo a caché une fève dans le gâteau. Rémi, malicieux comme il l'est, veut trouver la fève. Pour cela, Rémi peut choisir trois points distincts A, B, C qui sont des sommets distincts du n-gone, et demander à Théo si la fève est à l'intérieur (bord inclus) du triangle ABC. Dès que Théo répond oui, Rémi a gagné. Quel est le nombre minimum de questions, en fonction de n, que Rémi doit poser pour être sûr de gagner ?

Solution de l'exercice 16

Notons $A_1, \ldots, A_n$ les extrémités du n-gone dans l'ordre trigonométrique. Rémi peut utiliser la stratégie suivante : il demande au fur et à mesure les triangles suivants :

$$A_1A_2A_3, A_1A_3A_4, \ldots, A_1A_{n-1}A_n.$$

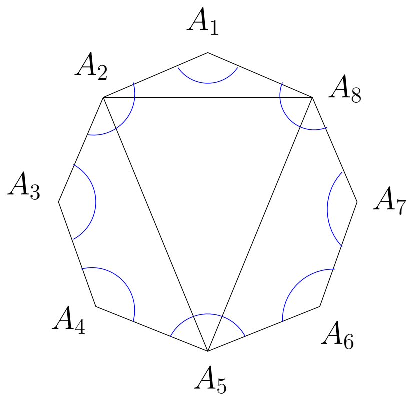
En utilisant ces $n-2$ triangles qui recouvrent le n-gone, il peut être sûr au bout de $n-2$ questions d'avoir obtenu une réponse Oui, et donc d'avoir gagné.



On pourrait alors penser qu'il faut forcément $n-2$ questions car tout pavage d'un polygone avec des triangles (aussi appelé triangulation) contient $n-2$ triangles. En fait, ceci est à priori faux, car Rémi pourrait proposer des triangles se superposant un petit peu avec d'autres triangles et espérer en utiliser moins pour recouvrir le n-gone.

Il s'avère qu'il faut bel et bien $n-2$ questions, mais pour des raisons différentes de celles évoquées. Prouvons cela :

Anatole dessine n cercles centrés en $A_1, \ldots, A_n$ et de même rayon r, en prenant r assez petit pour que les cercles soient 2 à 2 disjoints, et qu'aucun cercle ne touche une diagonale du carré ne partant pas de son centre. Ensuite Anatole efface chaque bout de cercle hors du polygone : en chaque sommet, si on note θ l'angle en radian du polygone en ce sommet, il reste un arc de cercle d'angle θ, donc d'aire $\frac{\theta}{2}r^2$. Ainsi l'aire totale des disques vaut $\frac{\pi(n-2)r^2}{2}$ car la somme des angles du n gone vaut $(n-2)\pi$. Chaque triangle dont les trois sommets sont des sommets du plygone ne rencontre alors les trois cercles correspondants que sur un secteur angulaire de rayon r et d'angle chacun des angles du triangle. Il recouvre donc une



aire valant $\frac{\pi}{2}r^2$. Il faut donc au moins $\frac{\frac{\pi(n-2)r^2}{2}}{\frac{\pi}{2}r^2} = n-2$ triangles pour recouvrir tous les arcs de cercle et donc être sûr de pouvoir trouver la fève.
NB : ici le fait que le n-gone est régulier est une hypothèse un peu forte : la même preuve fonctionne si on suppose le n-gone convexe.
<u>Commentaire des correcteurs :</u> De nombreux élèves ont traité l'exercice, et nombreux sont ceux à avoir succombé au même piège... Il était en effet tentant de faire une récurrence, mais il fallait considérer la bonne hypothèse de récurrence, sans quoi on se retrouvait avec des triangles dont les sommets étaient en dehors du polygone sur lesquels l'hypothèse de récurrence ne pouvait être appliquée. Les élèves ayant suivi le schéma de preuve du corrigé sont quant à eux arrivés à bon port sans rencontrer d'écueil notable. La morale de cette histoire est qu'en combinatoire, il faut être très précis dans ses affirmations, car une solution erronée est vite arrivée...

Exercice 17. Oscar est un dresseur professionnel de singe. Il a disposé n tiges de bambou, de tailles toutes différentes en ligne. Le singe peut obéir à deux ordres :

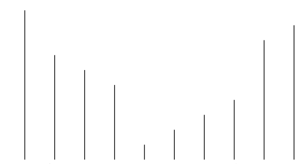
— Droite ! : Le singe saute sur le bambou à droite de sa position actuelle le plus proche dont la hauteur est supérieure à la hauteur du bambou sur lequel se trouve actuellement le singe.

— Gauche ! : Le singe saute sur le bambou à gauche de sa position actuelle le plus proche dont la hauteur est supérieure à la hauteur du bambou sur lequel se trouve actuellement le singe.

Oscar se vante du talent de son singe : pour toute paire de bambous, il peut aller du plus petit des deux au plus grand des deux en au plus k opérations. Déterminer, en fonction de k, la plus grande valeur de n pour lequel cette situation est possible.

Solution de l'exercice 17

Montrons que la valeur maximale de n est $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Déjà un exemple de bambous avec $n = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ est donné de la façon suivante : on met des bambous de taille $1, 2, \dots, k+1$, on note B_{k+1} l'ensemble de ces bambous, puis à gauche de 1, on met dans cet ordre les bambous de taille $k+1+k, k+1+k-1, \dots, k+1+1$ (et on note l'ensemble B_k), puis tout à droite $(k+1)+k+1, \dots, (k+1)+k+(k-1)$ qui forme E_{k-1}, etc, jusqu'à à la fin où on met le bambou de taille $(k+1)+k+\dots+1$ qui forme E_1. Un exemple ci-dessous est donné pour $k=3$.



Montrons qu'un singe peut aller de n'importe quel bambou b à n'importe quel bambou b' plus grand en au plus k sauts. Notons i l'indice tel que $b \in B_i$ et $j \leqslant i$, celui tel que $b' \in B_j$. Si $j = i$, alors le singe a besoin d'au plus $i - 1 \leqslant k$ mouvements. Si $j \neq i$, en $i - j$ mouvement, le singe peut se déplacer sur les plus bas bambous de $B_{i-1}, \dots, B_j$, et ensuite il a besoin d'au plus $j - 1$ sauts pour rejoindre n'importe quel bambou de B_j, donc en tout au plus $i - j + j - 1 \leqslant i - 1 \leqslant k$ mouvements.

Montrons désormais que toute configuration de bambous vérifiant la propriété de l'énoncé a au plus $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ bambous. Donnons nous une telle configuration de bambous, quitte à renuméroter les hauteurs de manière croissante, on peut supposer que les tiges ont hauteur $1, 2, \dots, n$. Montrons que comme depuis 1 on peut accéder à tous les bambous, celui-ci a, à sa droite et à sa gauche, des bambous rangés par ordre croissant.

Pour cela, fixons un bambou b de hauteur i à gauche du bambou de hauteur 1, et montrons qu'au moment où un singe accède à ce bambou, ou à un bambou plus à gauche, alors il accède à un bambou de hauteur au moins i. En effet, si celui-ci accède au bambou b, il accède a un bambou de hauteur au moins i, sinon comme il vient de la Gauche, cela signifie qu'il était sur un bambou de taille strictement supérieur à i (sinon il serait allé sur b). Ainsi comme tout bambou plus à gauche de b est accessible, tout bambou à gauche de b a une taille strictement plus grande que i, d'où le résultat.

Désormais, définissons nos ensembles $E_{k+1}, \dots, E_0$ de la façon suivante :

— E_{k+1} contient $1, 2$ et tous les numéros consécutifs situés du même côté que 2 de 1.

— Pour tout $i \geqslant 1$, si $E_{k+1}, \dots, E_{i+1}$ sont construits, E_i contient le minimum m des sommets présents dans aucun des E_j déjà construits, $m+1$ et tous les numéros consécutifs de $m+1$ situés du même côté que $m+1$ de 1. Si tous les éléments sont dans $E_{k+1}, \dots, E_{i+1}$, alors E_i est vide.

— E_0 est l'ensemble des sommets restants.

Notons que par construction, si on part du bambou de taille 1 et qu'on va sur la gauche, le i tel que le bambou appartient à E_i décroît (idem en partant sur la droite). De plus, tous les E_i sauf éventuellement le dernier non vide contiennent au moins 2 éléments, les E_i contiennent soit uniquement des éléments du même côté de 1, soit un élément d'un côté, et le reste de l'autre, que le plus petit élément de E_{i-1} s'il existe est du côté opposé au plus grand élément de E_i. En particulier, de ceci on obtient que quand on saute depuis un élément de E_i, soit on aboutit dans E_i, soit dans E_{i-1} soit dans E_{i-2} : en effet, si en sautant on sort de E_i, alors on obtient le plus petit élément pas encore sélectionné de la branche de gauche ou droite, qui est donc soit dans E_{i-1}, soit dans E_{i-2}.

Désormais, on montre le résultat suivant.

Lemme : Pour tout $i \in \{1, \ldots, k+1\}$, il faut au moins $k+1-i$ saut pour aller de E_{k+1} au minimum de E_i, $k+2-i$ pour aller à un autre sommet de E_i.

On prouve cela par récurrence forte descendante sur i.

Initialisation : pour $i = k+1$ le résultat est clair.

Hérédité : Soit $j \in \{1, \ldots, k+1\}$ supposons l'hypothèse vraie pour tout $i \in \{j, \ldots, k+1\}$, et montrons l'hypothèse au rang $j-1$. Regardons un chemin de sauts pour aller de 1 au minimum de E_{j-1}. Si celui-ci passe par E_j, le chemin pour aller jusqu'à E_j prend au moins $k+1-j$ sauts, donc au total il prend $k+1-j+1 = k+1-(j-1)$ saut ce qui conclut. Sinon, d'après les remarques précédentes, avant d'être au minimum de E_{j-1}, il doit être en E_{j+1}. S'il n'était pas au minimum de E_{j+1}, alors par récurrence il aurait fait au moins $k+2-(j+1)+1 = k+1-(j-1)$ mouvements. Sinon il était au minimum de E_{j+1}, montrons qu'il y a alors une contradiction : admettons que le minimum de E_{j+1} est à gauche de 1. Si le reste de E_{j+1} est aussi à gauche (resp. à droite), alors le singe doit avoir sauté à droite (resp. à gauche), là où est le minimum de E_j. Ainsi pour aller de E_{k+1} au minimum de E_{j-1}, il faut $k+1-(j-1)$ mouvements au moins.

Pour un chemin qui va à un autre sommet de E_{j-1}, si celui-ci passe par le minimum de E_{j-1}, il prend au moins $k+1-(j-1) = k+2-(j-1)$ sauts. Sinon, cela signifie que E_{j-1} est réparti sur les deux côtés, et que pour accéder à E_{j-1} sans passer par le minimum, il faut être sur le maximum de E_j, ce qui requiert donc $k+2-j+1 = k+2-(j-1)$ sauts, ce qui conclut la récurrence.

Maintenant montrons que pour tout $j \geqslant 1$, E_j contient au plus j éléments. Regardons combien de mouvements sont nécessaires pour accéder au maximum de E_j. On voit bien que tout chemin menant au maximum de E_j passe soit par le minimum de E_j et passe par tous les autres sommets de E_j, soit éventuellement si E_j est formé d'éléments des deux côtés de 1 par le deuxième plus petit élément de E_j et passe par tous les éléments supérieurs de E_j. Ainsi dans le premier cas il faut au moins $k+1-j+|E_j|-1$ sauts, dans le second $k+2-j+|E_j|-2$, donc $k-j+|E_j|$ mouvements au minimum. Ainsi $|E_j| \leqslant j$ ce qui clôt la récurrence.

En particulier, comme E_1 a taille au plus 1, cela signifie qu'il n'y a plus d'élément à mettre dans E_1 au moment de l'algorithme, donc E_0 est vide. Ainsi il y a au plus

$$|E_{k+1}| + \cdots + |E_1| \leqslant (k+1) + \cdots + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

bambous, ce qui conclut.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice a été réussi par un seul élève. Comme beaucoup de constructions étaient optimales, il était difficile de faire un raisonnement couvrant tous les cas. Tester un peu plus les petits cas permet d'éviter de croire qu'un seul exemple est optimal, et voir comment couvrir tous les cas.

Exercice 18. Soit $n \geqslant 1$. On considère une grille $n \times n$. Aline place des champignons sur certaines cases (avec au plus un champignon par case). On dit qu'une case est méchante s'il y a un nombre pair de cases avec un champignon avec lesquelles elle partage un côté. En fonction de n, existe-t-il un placement des champignons tel qu'il existe une unique case méchante ?

Solution de l'exercice 18

On va montrer qu'il existe un tel placement de champignons si et seulement si n est impair.

Considérons d'abord le cas où n est impair. Numérotons les lignes et les colonnes de 1 à n en partant de la gauche et du bas. La case (i, j) est à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. Appelons carré intérieur d'ordre k le carré constitué de toutes les cases (i, j) avec $k \leqslant i, j \leqslant n + 1 - k$. On appelle également bordure d'ordre k l'ensemble des cases appartenant au carré d'intérieur d'ordre k mais pas à celui d'ordre $k + 1$.

Numérotons les cases de la bordure d'ordre 1 de 1 à $4(n-1)$ en commençant par la case en bas à droite et en parcourant la bordure dans le sens des aiguilles d'une montre. On place maintenant un champignon sur les cases de numéro $4i + 1$ ou $4i + 2$. On fait de même pour les bordures d'ordre impair, et on ne met pas de champignons sur les cases des bordures d'ordre pair. Vérifions succintement que cette construction convient.

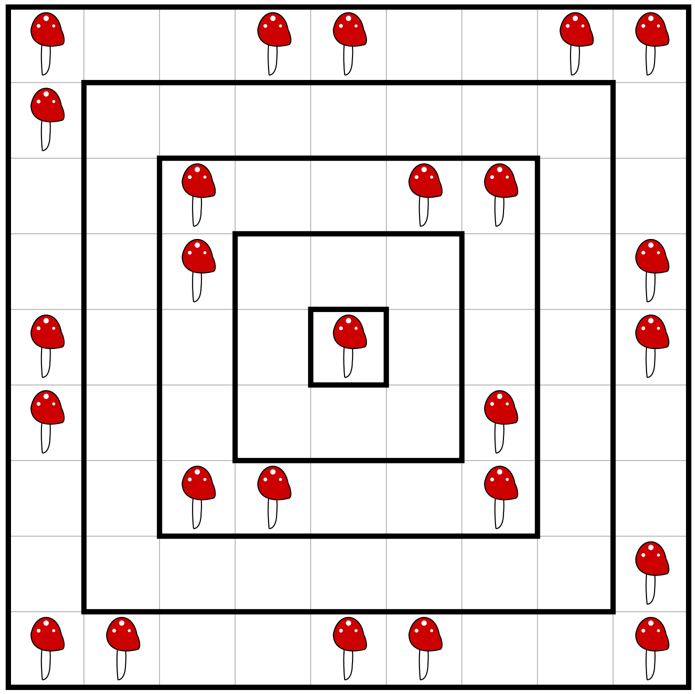
Considérons une case c différente du centre (qui lui est une case méchante), sur la bordure d'ordre d. Soit m son numéro sur cette bordure suivant la numérotation précédente.

Si d est impair, c aura exactement une voisine avec un champignon, sur la même bordure :

- Si $m \equiv 0[4]$, la seule case voisine de c avec un champignon est la case $m+1$ de la même bordure.
- Si $m \equiv 1$, la seule case voisine de c avec un champignon est la case $m + 1$ de la même bordure.
- Si $m \equiv 2$, la seule case voisine de c avec un champignon est la case $m - 1$ de la même bordure.
- Si $m \equiv 3$, la seule case voisine de c avec un champignon est la case $m - 1$ de la même bordure.

Si d est pair, on peut supposer que c est sur le côté droit de la bordure (les autres cas se traitent de manière similaire). On distingue de même les cas modulo 4 :

- Si $m \equiv 0[4]$, la seule case voisine de c avec un champignon est la case numéro $m + 1$ de la bordure d'ordre $d - 1$.
- Si $m \equiv 1$, la seule case voisine de c avec un champignon est la case numéro de $m + 1$ de la bordure d'ordre $d - 1$.
- Si $m \equiv 2$, la seule case voisine de c avec un champignon est la case numéro $m - 1$ de la bordure d'ordre $d + 1$.
- Si $m \equiv 3$, la seule case voisine de c avec un champignon est la case numéro de $m - 1$ de la bordure d'ordre $d + 1$.



une construction pour $n = 9$

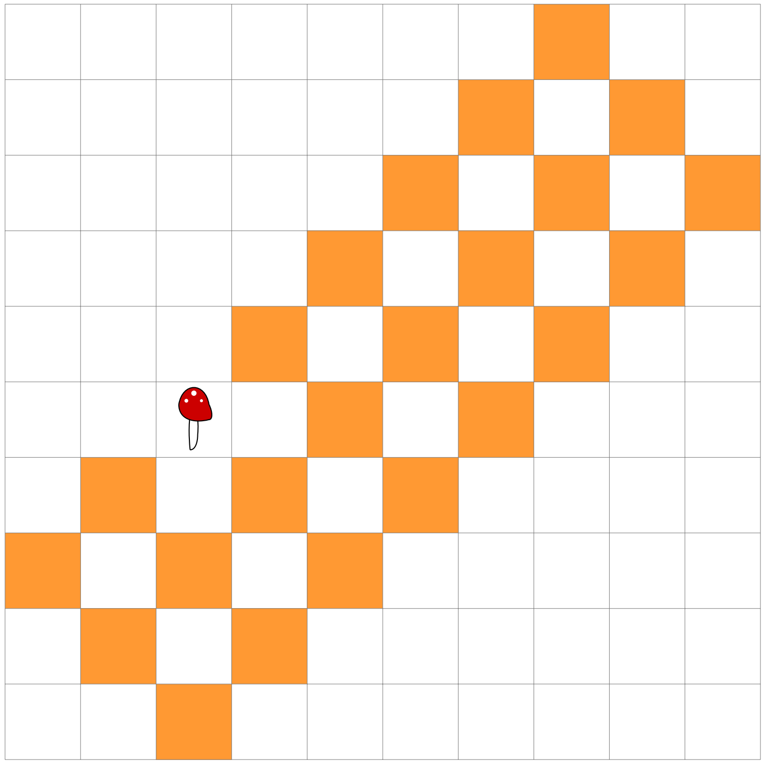
Intéressons-nous maintenant au cas où n est pair.
L'astuce consiste à trouver, pour chaque case c, un ensemble S de cases tel que :

— $c \in S$
— S contient un nombre pair de cases
— Chaque case du carré a un nombre pair de cases de S avec lesquelles elle partage un côté

Supposons par l'absurde qu'on ait alors un placement de champignons avec une unique case a méchante. On considère l'ensemble S associé à a. Comptons le nombre N de paires (c, c') de cases adjacentes telles que $c \in S$ et c' contient un champignon. Déjà, chaque case avec un champignon a un nombre pair de voisines dans S, donc N est pair.
D'un autre côté, chaque case de S a un nombre impair de cases adjacentes avec un champignon, sauf a, et S contient un nombre pair de cases, donc N est impair.
On a ainsi obtenu une contradiction, il ne nous reste plus qu'à trouver cet ensemble S.
Fixons une case c de coordonnées (i, j). Par symétrie, on peut supposer $i \leqslant j \leqslant \frac{n}{2}$. Colorions le carré en damier afin que c soit coloriée en noir. Soit A l'ensemble des cases (a, b) du carré telles que l'une de ces trois conditions soit vérifiée :

1. $b - a = j - i$
2. $a + b = j - i + 2$
3. La case symétrique de (a, b) par rapport au centre du carré vérifie l'une des deux conditions précédentes

On remarque que A détermine le contour d'un rectangle, et que toutes les cases de A sont coloriées en noir. Prenons S comme étant l'ensemble des cases noires à l'intérieur de ce rectangle.



l'ensemble S associé à la case $(3, 5)$

S contient clairement c.
La symétrie par rapport au centre du carré envoie chaque case de S sur une autre. Ainsi, on peut regouper les cases de S par paires, ce qui prouve que S a un nombre pair de cases.
Considérons une case b du carré de coordonnées (u, v). Si b est colorié en noir, elle ne contient aucune voisine dans S car toutes les cases de S sont également coloriées en noir. Sinon, si b se trouve à l'intérieur du rectangle délimité par A, b a clairement ses 4 voisines dans S. Si b se trouve sur la bordure de ce rectangle, elle a 2 voisins dans S. Enfin, si b est à l'extérieur de ce rectangle, elle n'a aucune voisine dans S. Dans tous les cas, b a donc un nombre pair de voisines dans S.
Ainsi, S vérifie toutes les conditions voulues, ce qui conclut.
Commentaire des correcteurs : L'exercice, particulièrement difficile, a été fort peu traité. Les élèves ayant rendu une copie ont, pour la plupart, une solution complète. Cependant, certains élèves n'ont pas justifié soigneusement que leurs constructions étaient correctes, ce qui leur a valu une perte de points facilement évitable. Il était en effet ici nécessaire de décrire et justifier rigoureusement les constructions, qui étaient loin d'être évidentes et parfois particulièrement saugrenues.