Comment aborder l'épreuve du tour 2 de la Coupe Animath

1 Conseils généraux concernant les problèmes

Le tour 2 de la coupe Animath est une épreuve dont le but est de sélectionner les prochains participants à l'un des programmes de la Préparation Olympique Française de Mathématiques (stage d'été ou formation à l'année). Il s'agit d'une épreuve sur table, de 3 heures pour les collégiens et de 4 heures pour les lycéens. Pendant l'épreuve, aucun document ou aucun matériel électronique n'est autorisé (en particulier aucune calculatrice).

➢ La spécificité des problèmes de coupe Animath (et plus généralement des problèmes d'Olympiades) est qu'aucune démarche de résolution n'est indiquée aux élèves, qui sont donc invités à prendre toutes les initiatives nécessaires pour modéliser les problèmes et combiner les hypothèses à leur disposition pour proposer une solution argumentée. Ce format se distingue de celui des Olympiades de mathématiques de première où les problèmes sont découpées en plusieurs questions intermédiaires par exemple. Les exercices nécessitent très peu de prérequis (voire le document présentant les prérequis exigés) et leur difficulté tient dans la combinaison astucieuse d'arguments élémentaires, et non dans la connaissance de théorèmes pointus dont les exercices seraient de simples applications. Pour se préparer à la coupe Animath, il est donc inutile d'apprendre des théorèmes issus de nos polycopiés de stage ou de cours, ou de la théorie issue de l'enseignement supérieur.

➢ Bien que le ressenti puisse dépendre des goûts et des forces de chaque élève, les problèmes de chaque sujet sont ordonnés par ordre croissant de difficulté estimée. Les premiers problèmes du sujet sont entièrement résolus par une large majorité d'élèves, alors que les derniers problèmes du sujet sont trouvés par très peu d'élèves. Nous recommandons donc aux élèves de commencer par chercher les premiers problèmes du sujet avant de passer du temps sur les derniers problèmes. Le format du concours est pensé pour valoriser les élèves qui résolvent complètement un petit nombre de problèmes plutôt que les élèves qui n'ont seulement que des idées partielles sur tous les problèmes.

➢ Les problèmes de la coupe Animath admettent tous une solution faisant appel uniquement aux notions et résultats inclus dans la liste des prérequis pour la coupe Animath. Si parfois, il est possible de résoudre certains problèmes à l'aide de notions hors-programme, cela constitue rarement la solution la plus naturelle ou la plus rapide. En ce qui nous concerne, nous conseillons plus que fortement d'aborder les problèmes en invoquant des arguments simples avec lesquels on est à l'aise, car c'est dans cet esprit qu'ont été conçus les problèmes.

➢ Pour mieux appréhender un problème, nous recommandons de commencer par examiner des cas particuliers du problème (parfois appelés aussi "petits cas"). On pourra fixer des valeurs numériques pour certaines variables par exemple. Sans que ces raisonnements soient forcément valorisés à hauteur de points partiels, ils permettent souvent de gagner beaucoup d'intuition sur le problème de départ.

➢ Dans la phase de recherche, nous recommandons de bien étudier les hypothèses du problème, de se demander quel est leur sens et comment les exploiter. Lorsqu'on est bloqué, il peut être bon de relire l'énoncé et de se demander si on a utilisé toutes les hypothèses. Cette attitude sert également à détecter des erreurs de raisonnement dans la phase de relecture : si une hypothèse n'a jamais été utilisée au cours de la démonstration, celle-ci est peut-être erronée.

➢ Dans le cadre des problèmes de géométrie, nous recommandons de faire des figures propres et grandes, dès que cela est possible.

➢ Nous encourageons les élèves à retranscrire sur leurs copies de façon claire et argumentée toutes les idées qu'ils ont essayées. Les idées qui permettent d'avancer sur le problème sont valorisées, et certaines idées peuvent parfois rapporter beaucoup de points. Dans cette retranscription, l'élève doit *écrire et non décrire* les idées : par exemple, dans un problème de géométrie, plutôt que de dire "j'ai essayé une chasse aux angles qui n'a pas abouti et j'ai essayé d'appliquer le théorème de Thalès", qui ne rapporte aucun point, il est bien plus intéressant d'écrire explicitement la chasse aux angles effectuée et les égalités de rapports dérivées du théorème de Thalès.

- Le premier problème est un problème où seule la réponse est attendue. Nous recommandons toutefois aux élèves d'indiquer leur démarche sur leur copie, car celle-ci est valorisée en cas d'erreur de calcul.

2 Comment rédiger une solution de coupe Animath

In math Olympiads, crossing threshold from "unsolved" to "solved" sometimes involves stepping over a very thin line.

(Yufei Zhao, Préparateur de la sélection canadienne aux Olympiades Internationales)

Le paragraphe qui suit a pour but de vous aider à dépasser cette différence.

L'architecture de la démonstration d'une affirmation possède trois étapes :

- Hypothèses : énonciation des informations qui nous sont données par l'énoncé ou que l'on a déjà établiées.
- Propriété : invocation d'une propriété vraie en toute généralité.
- Conclusion : application de la propriété générale énoncée aux hypothèses.

Un exemple concret :

- Hypothèses : Le triangle ABC est rectangle en C et $AC = 3$ et $BC = 4$.
- Propriété : D'après le théorème de Pythagore, on a l'égalité suivante vraie pour tout triangle ABC rectangle en C : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
- Conclusion : On conclut que pour notre triangle, $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, de sorte que $AB = 5$.

La succession de ces trois étapes constitue la *démonstration* que le côté AB est de longueur 5. Une preuve d'un problème mathématique est donc l'enchaînement de démonstrations d'affirmations qui découlent les unes des autres.

Dans le cadre de la coupe Animath, et d'une rédaction de manière générale, certaines étapes peuvent être raccourcies. Par exemple, la rédaction suivante est considérée comme tout aussi rigoureuse :

On sait que le triangle ABC est rectangle en C avec $AC = 3$ et $BC = 4$. D'après le théorème de Pythagore, $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, de sorte que $AB = 5$.

La question est de savoir quelle est la juste quantité d'informations qu'il faut écrire. Voici donc quelques conseils des correcteurs :

- La conclusion doit toujours apparaître. Elle permet de délimiter chacune des affirmations de la preuve et de savoir si la démonstration est terminée ou non. Si un élève ne mentionne pas la conclusion dans sa copie dans l'exemple précédent, nous n'avons pas le moyen de savoir s'il a conscience de la portée du résultat qu'il a énoncé.
- L'étape "hypothèse" peut être implicitée si la propriété est énoncée de façon suffisamment claire pour que le correcteur comprenne quelles hypothèses sont utilisées. Par exemple, pour un énoncé présentant un triangle ABC isocèle en A et M le milieu de $[BC]$ et où l'on veut justifier que les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires, on pourra simplement dire "Puisque dans un triangle isocèle, la médiane et la hauteur issue du sommet principal sont confondues, les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires". En revanche, ne citer que les hypothèses et la conclusion ("puisque ABC est isocèle et M est le milieu de $[BC]$, alors (AM) et (BC) sont perpendiculaires") n'est pas suffisant, dans la mesure où cela ne permet pas de distinguer un élève qui voit pourquoi ce résultat est vrai d'un élève qui bluffe en paraphrasant l'énoncé.
- De manière générale, au moment de rédiger, en cas de doute sur la quantité de justifications à apporter, il faut se demander si les justifications écrites sont suffisantes pour convaincre les correcteurs que la preuve et la façon dont interviennent les hypothèses sont comprises.

➢ Nous invitons les élèves à lire les corrigés des précédentes coupes Animath, même s'ils ont trouvé les exercices associés, afin de s'imprégner des attentes en terme de rigueur et de rédaction.

Si la coupe Animath, par son format, valorise beaucoup plus la qualité des idées que la qualité de leur présentation, on maintient que ce qui est valorisé, ce sont les idées exprimées de façon claires, argumentées et rigoureuses. Des affirmations ou des conjectures, même correctes, ne rapportent pas de points à elles seules.

3 Quelques erreurs classiques

Mentionnons ici quelques erreurs croisées à chaque édition et quelques outils pour s'en prémunir.

3.1 Sous-estimer la difficulté d'une étape.

Si vous écrivez "forcément" dans votre rédaction, c'est qu'il manque forcément un argument.

(Rémi Lesbats, Préparateur de la sélection française aux Olympiades Internationales)

Dans les problèmes de combinatoire de la coupe Animath, une erreur courante, source de beaucoup de déception chez les participants, est de penser qu'une étape de la démonstration est évidente et n'appelle pas de justification.

Prenons l'exemple suivant (exercice 4/11 de la coupe Animath d'Automne 2023) :

Un groupe de 20 *nains sortant de la mine s'assoit autour d'une table ronde pour compter les pépites d'or que chacun a minées. Ils font les constats suivants :*

— *La différence du nombre de pépites de deux nains voisins est toujours* 2 *ou* 3.

— *Tous les nains ont miné un nombre de pépites différent.*

Quelle est la plus grande différence de pépites possible entre le nain qui a trouvé le plus de pépites et celui qui en a trouvé le moins ?

Une erreur très courante a été d'affirmer que les deux nains réalisant la plus grande différence de pépites sont *forcément* diamétralement opposés sur le cercle. Cette affirmation est bien correcte dans le cadre où la différence réalisée est maximale et elle est très intuitive. Toutefois, si l'on entreprend de justifier cette affirmation, on se rend compte qu'elle est loin d'être évidente.

Nous recommandons aux élèves de veiller à ce que toutes les affirmations qu'ils considérent comment évidentes le sont effectivement qu'ils sont capables de les justifier. Les correcteurs ont remarqué que, empiriquement, les affirmations intuitives mais difficiles à justifier sont souvent passées en force par les élèves en étant accompagnées d'adverbes superflus tels que "forcément" ou "évidemment".

3.2 Ne pas savoir traiter un problème d'optimisation

Beaucoup de problèmes de la coupe Animath (et de combinatoire en général) demandent de trouver le plus **grand** ou le plus **petit** entier k vérifiant une certaine propriété $\mathcal{P}$.

Imaginons que l'on souhaite trouver le plus petit entier k vérifiant une propriété $\mathcal{P}$. Le problème est alors divisé en trois parties :

1) Deviner la réponse, cela se fait souvent en traitant des petits cas, ou en tatônnant sur l'une des deux parties qui suivent.
2) **L'analyse :** dans cette partie, on veut montrer que si ℓ vérifie $\mathcal{P}$, alors $\ell \geqslant k$.
3) **La construction :** dans cette partie, on donne une configuration explicite permettant de montrer que k vérifie lui aussi la propriété $\mathcal{P}$.

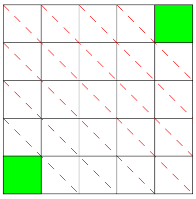
Les parties 2 et 3 sont essentielles à la preuve. Sans la partie 2, on a seulement montré que k vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Sans la partie 3, on a seulement montré que k est plus petit que le plus petit entier vérifiant $\mathcal{P}$.

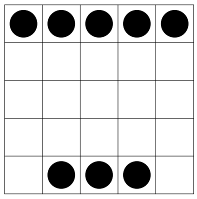
Un tel raisonnement est appelé un raisonnement *par analyse-synthèse.*

Voyons cette théorie à l'aide de l'exemple suivant :

Exercice. Sur un échiquier 2023×2023, un fou est une pièce qui peut se déplacer uniquement en diagonale et d'autant de cases que voulu. On dit qu'un fou peut en *attaquer* un autre si, en un seul coup, il peut se déplacer vers la case surlaquelle se trouve le deuxième fou. Quel est, le nombre maximum de fous que l'on peut placer sur l'échiquier de telles sorte que deux fous quelconques ne s'attaquent jamais ?

Solution.





Posons $n = 2023$.

Analyse : Considérons les diagonales parallèles à la diagonale principale reliant la coins supérieur gauche au coin inférieur droit, comme sur la figure de gauche. Chacune de ces diagonales ne peut contenir plus d'un fou, sans quoi on aurait deux fous qui pourraient s'attaquer mutuellement. De plus, au plus une seule des deux cases vertes contient un fou. Puisqu'il y a $n + n - 1 - 2 = 2n - 3$ diagonales rouges, l'échiquier contient au plus $2n - 2$ fous.

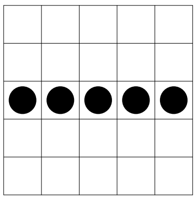
Construction : Réciproquement, en plaçant les fous comme sur le figure de droite, c'est-à-dire en occupant toutes les cases de la première rangée et toutes les cases sauf les coins de la dernière rangée, on trouve bien une configuration à $2n - 2$ fous où deux fous ne s'attaquent jamais.

Le maximum est donc $2n - 2 = 4044$.

Voici l'erreur principale relative à cet exercice se trouve dans le raisonnement suivant :

Considérons la configuration de la figure de droite. Celle-ci contient $2n - 2$ fous, et on constate qu'on ne peut pas rajouter de fous. Ainsi, il n'est pas possible d'avoir plus de $2n - 2$ fous sur l'échiquier, c'est donc le plus grand entier.

Ce raisonnement ne constitue pas une preuve. Ce n'est pas parce qu'on ne peut pas rajouter de fous à la configuration proposée qu'il n'existe pas une configuration complètement différente et comportant plus de fous. D'ailleurs, on ne peut pas rajouter de fous à la configuration ci-dessous :



Pourtant, comme on l'a vu, il existe des configurations possédant plus de n fous.

Ainsi, même si la borne est correcte et si l'affirmation est correcte, la preuve proposée est fausse et ne rapportera pas beaucoup de points. L'erreur sous-jacente est de confondre *maximum local* et *global.* Bien souvent, cette erreur s'accompagne de formulations telles que "le pire cas" ou "le meilleur cas" dans les preuves, qui sont des formulations auxquelles les élèves auraient bien du mal à donner un sens mathématique. On prendra donc garde à ne pas chercher à mélanger les deux parties dans son raisonnement.

4 Réclamations

Le processus de réclamation sert à garantir l'équité et à réparer les possibles erreurs de correction.

Statistiquement, les erreurs de correction sont rares et très peu des réclamations que nous recevons sont vraiment légitimes.

Ce processus est extrêmement chornophage pour nos bénévoles, puisque les copies sur lesquelles portent la réclamation sont alors relues par au moins deux correcteurs. Avant de faire votre réclamation :

➢ Lisez le commentaire que vous a adressé le correcteur. Celui-ci rend compte des bonnes idées que vous avez eues et pointe les parties non justifiées ou les erreurs de raisonnement.

➢ Lisez le corrigé de l'exercice. Celui-ci rend compte autant que possible des différentes approches. Comparez votre raisonnement avec le raisonnement du corrigé pour comprendre vos erreurs ou les idées qu'il vous restait à avoir.

➢ Lisez le commentaire global de l'exercice. Celui-ci détaille notamment les raisonnements infructueux des élèves et explique pourquoi ces raisonnements ne peuvent pas aboutir.

Si après cela, vous ne comprenez toujours pas votre note et si vous pensez que votre copie a souffert d'une erreur de correction, alors seulement vous pouvez porter réclamation en indiquant clairement ce qui vous porte à croire que vous n'avez pas obtenu la note que vous méritiez.

Nous nous réservons le droit de ne pas traiter les réclamations ne suivant pas ces critères.