PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 17 MAI 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit $a, b, c, d \geqslant 0$ et $(a+c)(a+d)(b+c)(b+d) = 25$. Montrer que

$$a+b+c+d \geqslant 2\sqrt{5}.$$

Exercice 2. Trouver tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que $3^a + 3^b + 3^c$ soit un carré parfait.

Exercice 3. Le triangle ABC est tel que $\angle BCA = 90°$. La bissectrice de l'angle $\angle CAB$ intersecte le côtés BC en un point P et la bissectrice de l'angle $\angle ABC$ intersecte le côté AC en Q. Si M et N sont les projetés orthogonaux de P et Q sur le côté AB, trouver la valeur de l'angle $\angle MCN$.

Exercice 4. Soit (m, n) une paire d'entiers strictement positifs. Clémentina a planté dans son jardin m rangées de n pissenlits en forme de tableau $m \times n$. Maintenant, Emile et Baptiste décident de jouer un jeu avec une tondeuse qu'ils viennent de trouver. Chacun à leurs tour, et en commençant par Emile, ils rasent entièrement une rangée de pissenlits alignés verticalement ou horizontalement (ils doivent alors toujours raser au moins un pissenlit). Le vainqueur est celui qui rase le dernier pissenlit. Déterminer pour quelles paires d'entiers (m, n) Emile peut s'assurer de gagner si il joue de manière optimale.

Exercice 5. Trouver le plus petit entier positif $n \geqslant 2$ pour lequel il existe un entier strictement positif m tel que mn divise $m^{2025} + n^{2025} + n$.

Exercice 6. Soit a, b, c des nombres réels tels que

$$\begin{cases} a^2 + a = b^2 \\ b^2 + b = c^2 \\ c^2 + c = a^2 \end{cases}$$

Montrer que soit $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, soit $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$.

Exercice 7. On place des points A, B, C, D et E sur un cercle γ dans cet ordre de telle sorte que $\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD = 45°$. Montrer que

$$AB^2 + CE^2 = BE^2 + CD^2.$$

Exercice 8. Considérons les suites de réels $x_0, x_1, \ldots, x_{100}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

— $x_0 = 0$.

— Pour tout entier i entre 1 et 100, on a $1 \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant 2$.

Trouver le plus grand entier $k \leqslant 100$ tel que pour toute telle suite $x_0, \ldots, x_{100}$, on ait

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} \leqslant x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{100}.$$

Exercice 9. On dit qu'un rectangle de côtés de longueur a et b se *plonge* dans un rectangle de côtés de longueurs c et d si ($a \leqslant c$ et $b \leqslant d$) ou bien ($a \leqslant d$ et $b \leqslant c$). Par exemple, le rectangle de côtés 1 et 5 se plonge dans un autre rectangle de côtés 1 et 5, mais également dans un rectangle de côtés 6 et 2. Supposons que l'on dispose d'un ensemble E composés de 2025 rectangles ayant tous des côtés de longueur un nombre entier compris entre 1 et 2024 inclus. Montrer qu'il y a 3 rectangles A, B et C dans E de telle sorte que A se plonge dans B, et que B se plonge dans C.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle, on note Ω le cercle circonscrit au triangle ABC. On choisit un point P sur la tangente à Ω passant par A. Le point P a pour projetés orthogonaux S et T sur la droite (AB) et (AC) respectivement. Montrer que la droite (ST) est perpendiculaire à la droite (BC).

Exercice 11. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout nombre premier p on ait :

$$p \mid (f(a) - f(b)) \implies p \mid (a - b)$$

Exercice 12. Soit a, b, c des nombres réels tels que

$$\begin{cases} a^2 + a = b^2 \\ b^2 + b = c^2 \\ c^2 + c = a^2 \end{cases}$$

Montrer que soit $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, soit $(a - b)(b - c)(c - a) = 1$.

Exercice 13. Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles concentriques, avec $\mathcal{C}_1$ à l'intérieur de $\mathcal{C}_2$. Soient P_1, P_2 deux points sur $\mathcal{C}_1$ qui ne sont pas diamétralement opposés. La demi-droite $[P_1P_2)$ coupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en un point Q_2. On trace la tangente à $\mathcal{C}_1$ passant par P_1, et la tangente à $\mathcal{C}_2$ passant par Q_2, celles-ci s'intersectent en un point X. On trace la deuxième tangente à $\mathcal{C}_2$ passant par X, celle-ci est tangente à $\mathcal{C}_2$ en un point Q_1. Montrer que (XP_1) est la bissectrice de l'angle $\angle Q_1P_1Q_2$.

Exercice 14. Considérons les suites de réels $x_0, x_1, \ldots, x_{100}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

— $x_0 = 0$.

— Pour tout entier i entre 1 et 100, on a $1 \leqslant x_i - x_{i-1} \leqslant 2$.

Trouver le plus grand entier $k \leqslant 100$ tel que pour toute telle suite $x_0, \ldots, x_{100}$, on ait

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{k-1} \leqslant x_k + x_{k+1} + \ldots + x_{100}.$$

Exercice 15. On dit qu'un rectangle de côtés de longueur a et b se *plonge* dans un rectangle de côtés de longueurs c et d si ($a \leqslant c$ et $b \leqslant d$) ou bien ($a \leqslant d$ et $b \leqslant c$). Par exemple, le rectangle de côtés 1 et 5 se plonge dans un autre rectangle de côtés 1 et 5, mais également dans un rectangle de côtés 6 et 2. Supposons que l'on dispose d'un ensemble E composés de 2025 rectangles ayant tous des côtés de longueur un nombre entier compris entre 1 et 2024 inclus. Montrer qu'il y a 3 rectangles A, B et C dans E de telle sorte que A se plonge dans B, et que B se plonge dans C.

Exercice 16. Trouver tous les entiers $n > 1$ tels que si $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ sont les diviseurs de n, alors les nombres

$$d_2 - d_1, d_3 - d_2, \ldots, d_k - d_{k-1}$$

forment une suite géométrique lorsqu'ils sont disposés dans un certain ordre.
On dit qu'une suite $u_1, u_2, \ldots, u_k$ *est géométrique s'il existe un réel* q *tel que pour tout* $1 \leqslant i < k$*, on ait* $u_{i+1} = qu_k$.

Exercice 17. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On suppose au'il existe un point P à l'intérieur du $2n$-gone cyclique et convexe $A_1 \dots A_{2n}$ de telle sorte que

$$\angle PA_1A_2 = \angle PA_2A_3 = \dots = \angle PA_{2n}A_1.$$

Montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} |A_{2i-1}A_{2i}| = \prod_{i=1}^{n} |A_{2i}A_{2i+1}|,$$

où $A_{2n+1} = A_1$.

Exercice 18. Soit $n \geqslant 1$ un entier. On considère un jeu de cartes de $4n$ cartes, chacune ayant une couleur (trèfle, carreau, coeur, pique), et une valeur (un entier de 1 à n), de manière à ce qu'il y ait exactement une carte ayant une couleur et valeur données. On dispose les cartes dans un rectangle $4 \times n$ (n colonnes, 4 lignes), de manière à ce que deux cartes adjacentes ont soit la même valeur, soit la même couleur.
Trouver les entiers $n \geqslant 1$ tels que dans toute telle disposition des cartes, toutes les cartes d'une même ligne aient nécessairement la même couleur.