Pot-pourri groupe B : Équations fonctionnelles

15 Mars 2025

Exercice 1 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$f(f(n)) = n + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y.$$

Exercice 4 :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + y) + yf(x) = xy + f(x) + f(f(y)).$$

Exercice 5 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : Équation de Cauchy $\star$ (cours)

- Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

  $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

  pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

- Trouver toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

  $$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

  pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

  Faire de même en supposant que f est continue au lieu de croissante.

Exercice 7 : Équation de Jensen
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
Déterminer ensuite les solutions à cette équation avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, puis continue.

Exercice 8 :
Trouver toutes les fonctions **continues** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(f(x) + y) = x + f(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 : IMOSL 2013 N1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

pour tout couple d'entiers naturels (m, n).

Exercice 10 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous de réels x, y on ait :

$$f(xy - 1) + f(x)f(y) = 2xy - 1.$$

Exercice 11 :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(0) = 0$ et

$$f(x^2 - y^2) = f(x)f(y)$$

pour tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $x > y$.

Exercice 12 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 - f(y)^2) = xf(x) - y^2$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.