# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 6 AVRIL 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

## Exercices Juniors

*Exercice 1.* Erik dispose de $2024$ boules blanches et $2024$ boules noires qu'il répartit dans $4047$ sacs. À la fin, il remarque que chaque sac contient au plus une boule de chaque couleur. Montrer qu'il existe un sac contenant exactement une boule de chaque couleur.

*Exercice 2.* Martin écrit les nombres de $1$ à $30$ au tableau. À chaque opération, il choisit un entier $k \geqslant 2$ et barre $k-1, 2k-1, 3k-1, \ldots$. Combien d'opérations lui faut-il au minimum pour barrer tous les nombres ?

*Exercice 3.* Dans chaque case d'une grille $5 \times 5$, Eva écrit $0, 1$ ou $-1$. On suppose que la somme des nombres de chaque colonne est positive ou nulle, et la somme des nombres de chaque ligne est négative ou nulle. Quel est le plus petit nombre de $0$ qu'il peut y avoir sur la grille ?

*Exercice 4.* Anatole écrit deux nombres réels strictement positifs au tableau. À chaque opération, il ajoute $1$ à l'un des deux nombres et divise l'autre par $2$. Montrer qu'après un certain temps, l'un des deux nombres sera plus petit que $\frac{2025}{2024}$

*Exercice 5.* Dans une classe de $24$ élèves, chaque élève a un fan club constitué d'autres élèves de la classe. On suppose que, pour tout groupe de $3$ élèves de la classe, ils appartiennent tous à un même fan club. Montrer qu'il existe un élève de la classe dont le fan club contient au moins $10$ élèves.

*Exercice 6.* Soit $n$ un entier strictement positif. $n$ élèves participent à une olympiade qui contient $n$ problèmes. Chaque candidat a résolu entre $0$ et $n$ problèmes. On dit qu'un entier $k$ est joli si tout groupe de $k$ élèves a résolu au total $k$ problèmes différents ou plus (c'est-à-dire que chacun de ces $k$ problèmes ou plus a été résolu par au moins un des $k$ candidats). Déterminer tous les ensembles $E$ inclus dans $\{1, \ldots, n\}$ tels que, si tous les entiers de $E$ sont jolis, alors tous les entiers de $\{1, \ldots, n\}$ sont jolis.

*Exercice 7.* Soit $n$ un entier strictement positif, $k$ un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant 2^n$. Serge choisit, en secret, un nombre noté $x$ entre $1$ et $n$ sans le dire à Hugo. Hugo tente de trouver ce nombre de la façon suivante. À chaque tour, Hugo choisit $k$ sous-ensembles de $\{1, \ldots, n\}$ deux à deux distincts puis, pour chaque sous-ensemble $S$ qu'il a choisi, pose la question "L'entier $x$ appartient-il à l'ensemble $S$ ?". Serge choisit une de ces $k$ questions, dit à Hugo quelle question il a choisi et quelle est la réponse à cette question.
Déterminer, en fonction de $n$, les valeurs de $k$ pour lesquelles Hugo peut déterminer avec certitude le nombre de Serge en un nombre fini de tours.

*Exercice 8.* Soit $n, m > 0$ des entiers. On considère une grille $n \times m$ où deux cases sont dites adjacentes si elles partagent un côté. Auguste veut écrire un entier positif sur chaque case afin que :
- les deux nombres écrits sur deux cases adjacentes diffèrent d'au plus $1$
- si un nombre est inférieur ou égal à tous les nombres adjacents, alors il vaut $0$.

De combien de façons peut-il remplir sa grille ?

*Exercice 9.* Soit $n$ un entier vérifiant $n \geqslant 3$. Le gâteau d'anniversaire de Rémi est un $n$-gone régulier. Théo a caché une fève dans le gâteau. Rémi, malicieux comme il l'est, veut trouver la fève. Pour cela, Rémi peut choisir trois points distincts $A, B, C$ qui sont des sommets distincts du $n$-gone, et demander à Théo si la fève est à l'intérieur (bord inclus) du triangle $ABC$. Dès que Théo répond oui, Rémi a gagné. Quel est le nombre minimum de questions, en fonction de $n$, que Rémi doit poser pour être sûr de gagner ?

## Exercices Seniors

*Exercice 10.* Erik dispose de $2024$ boules blanches et $2024$ boules noires qu'il répartit dans $4047$ sacs. À la fin, il remarque que chaque sac contient au plus une boule de chaque couleur. Montrer qu'il existe un sac contenant exactement une boule de chaque couleur.

*Exercice 11.* Anatole écrit deux nombres réels strictement positifs au tableau. À chaque opération, il ajoute $1$ à l'un des deux nombres et divise l'autre par $2$. Montrer qu'après un certain temps, l'un des deux nombres sera plus petit que $\frac{2025}{2024}$

*Exercice 12.* Soit $n$ un entier strictement positif. $n$ élèves participent à une olympiade qui contient $n$ problèmes. Chaque candidat a résolu entre $0$ et $n$ problèmes. On dit qu'un entier $k$ est joli si tout groupe de $k$ élèves a résolu au total $k$ problèmes différents ou plus (c'est-à-dire que chacun de ces $k$ problèmes ou plus a été résolu par au moins un des $k$ candidats). Déterminer tous les ensembles $E$ inclus dans $\{1, \dots, n\}$ tels que, si tous les entiers de $E$ sont jolis, alors tous les entiers de $\{1, \dots, n\}$ sont jolis.

*Exercice 13.* Soit $n$ un entier strictement positif. Anatole pose des lutins sur les cases d'une grille $n \times n$ (avec au plus un lutin par case). Il remarque ensuite qu'il n'y a jamais deux lutins sur deux cases se touchant par un coin, mais pas par un côté. Combien a-t-il posé de lutins, au maximum ?

*Exercice 14.* Le gâteau d'anniversaire de Rémi est un $n$-gone convexe. Théo donne plusieurs coups de couteau dans le gâteau (un coup est un segment qui relie deux sommets du $n$-gone non adjacents). On dit qu'un coup de couteau est bien fait s'il intersecte exactement un autre coup de couteau en dehors d'un sommet du $n$-gone. Combien de coups bien faits Théo a-t-il pu faire, au maximum (Théo n'étant pas parfait, il peut bien entendu aussi donner des coups mal faits) ?

*Exercice 15.* Erik et Aurélien jouent à un jeu sur un réseau triangulaire infini, composé de traingles équilatéraux. À chaque tour, Erik place un lutin sur deux sommets voisins. Aurélien retire ensuite n'importe lequel des lutins préalablement placé. Quel est le plus grand $k$ pour lequel Erik peut s'assurer que, à au moins un instant dans la partie, la grille contienne $k$ sommets consécutifs alignés avec un lutin ?

*Exercice 16.* Soit $n$ un entier vérifiant $n \geqslant 3$. Le gâteau d'anniversaire de Rémi est un $n$-gone régulier. Théo a caché une fève dans le gâteau. Rémi, malicieux comme il l'est, veut trouver la fève. Pour cela, Rémi peut choisir trois points distincts $A, B, C$ qui sont des sommets distincts du $n$-gone, et demander à Théo si la fève est à l'intérieur (bord inclus) du triangle $ABC$. Dès que Théo répond oui, Rémi a gagné. Quel est le nombre minimum de questions, en fonction de $n$, que Rémi doit poser pour être sûr de gagner ?

*Exercice 17.* Oscar est un dresseur professionnel de singe. Il a disposé $n$ tiges de bambou, de tailles toutes différentes en ligne. Le singe peut obéir à deux ordres :

— Droite ! : Le singe saute sur le bambou à droite de sa position actuelle le plus proche dont la hauteur est supérieure à la hauteur du bambou sur lequel se trouve actuellement le singe.

— Gauche ! : Le singe saute sur le bambou à gauche de sa position actuelle le plus proche dont la hauteur est supérieure à la hauteur du bambou sur lequel se trouve actuellement le singe.

Oscar se vante du talent de son singe : pour toute paire de bambous, il peut aller du plus petit des deux au plus grand des deux en au plus $k$ opérations. Déterminer, en fonction de $k$, la plus grande valeur de $n$ pour lequel cette situation est possible.

*Exercice 18.* Soit $n \geqslant 1$. On considère une grille $n \times n$. Aline place des champignons sur certaines cases (avec au plus un champignon par case). On dit qu'une case est méchante s'il y a un nombre pair de cases avec un champignon avec lesquelles elle partage un côté. En fonction de $n$, existe-t-il un placement des champignons tel qu'il existe une unique case méchante ?