Pot-pourri groupe B : Équations fonctionnelles

15 Mars 2025

Exercice 1 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution :
Analyse : On suppose disposer d'une fonction solution f. En testant avec $y = 0$, on a :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \cdot f(0) = f(x)$.
Il y a alors deux possibilités : soit f est la fonction nulle, soit il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$, auquel cas $f(0) = \dfrac{f(x_0)}{f(x_0)} = 1$.

On suppose maintenant que f n'est pas la fonction nulle :

Soit $x \in \mathbb{R}$. En évaluant avec $(x, 0)$ et $(0, x)$, on trouve que $f(x) = f(-x)$.
Ceci étant vrai quel que soit x, la fonction f est paire.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On a par parité : $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$.
Donc (en évaluant successivement en $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ puis en $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$) :
$f(a) = f\left(\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot f\left(\frac{a}{2}\right) = f(0) = 1$.

Ainsi, si f n'est pas identiquement nulle, on a $f : x \mapsto 1$.

Synthèse : La fonction nulle $x \mapsto 0$ et la fonction constante $x \mapsto 1$ sont bien solutions, car l'on a respectivement $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$.
Il s'agit par conséquent bien des deux seules solutions.

Exercice 2 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$f(f(n)) = n + 1$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Solution :</u>
On compose par f à gauche : $f(f(f(n))) = f(n+1) = f(n) + 1$.

Avec $c = f(0) \in \mathbb{N}$, on montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n + c$.
Alors soit $n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) = f(n+c) = n + 2c = n + 1$. On trouve $2c = 1$.
C'est absurde car on sait que $c \in \mathbb{N}$.
Il n'y a donc pas de solutions.

Exercice 3 :
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

<u>**Solution :**</u>
Analyse : La fonction nulle est solution. Si f est non-identiquement nulle, il existe a tel que $f(a) \neq 0$.
Montrons l'injectivité de f.
Soit $b, c \in \mathbb{R}$. On suppose que $f(b) = f(c)$.

On substitue x par a et y par b et c : $f(a)b = f(f(a)f(b)) = f(f(a)f(c)) = f(a)c$.
Or $f(a) \neq 0$, donc $b = c$.

Avec $y = 1$, $\forall x, f(f(x)f(1)) = f(x)$, par injectivité : $\forall x, f(x)f(1) = x$.
Prendre $x = 1$ donne $f(1) = \pm 1$.

Synthèse :
On vérifie les trois solutions candidates : $x \mapsto x, x \mapsto -x$, et $x \mapsto 0$.
Elles conviennent toutes donc ce sont les seules solutions.

Exercice 4 :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + y) + yf(x) = xy + f(x) + f(f(y))$$

<u>Solution :</u>
Analyse : Avec $x = y = 0$, on a que $f(0) = 0$.
Montrons que si f est solution alors f est injective.
Premièrement, si $f(r) = 0$, on prenant $x = y = r$:

$$f(f(r) + r) + rf(r) = 0 = r^2 + f(r) + f(0) = r^2$$

D'où l'unique racine de f est 0.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$, alors, avec $x = a$, $y = b$:

$$f(f(a) + b) + bf(a) = ab + f(a) + f(f(a))$$

avec $x = y = b$,

$$f(f(a) + b) + bf(a) = b^2 + f(a) + f(f(a))$$

Alors $ab = b^2$, donc soit $a = b \neq 0$, soit $b = 0$.
Or, si $b = 0$, $f(a) = 0$ puis $a = 0$. D'où $a = b$ aussi.

Mais alors, avec $x = 0$, on obtient $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = f(f(y))$, puis par injectivité $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = y$.

Synthèse : $f = \mathrm{Id}$ vérifie bien l'équation, car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a bien

$$f(f(x) + y) + yf(x) = x + y + xy = xy + f(x) + f(f(y)).$$

Exercice 5 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution :
Analyse : On évalue en $x = y = 0$: il vient $f(0)^2 = 0$.
Comme x et y jouent un rôle symétrique dans le membre de droite, on a
$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy)(f(x) + y) = f(xy)(x + f(y))$.
On en déduit : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) \neq 0 \implies f(x) + y = x + f(y)$.

On s'intéresse alors aux antécédents de 0 par la fonction f.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Si $f(a) = 0$, substituer a à y donne :
$\forall x \in \mathbb{R}, f(ax)x = a^2 f(x) \quad (*)$

On évalue en $x = 1$: $f(a) = 0 = a^2 f(1)$.
Or $a^2 \neq 0$, donc $f(1) = 0$. Puis avec $a = 1$ dans l'égalité $(*)$, on a
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x)x = f(x)$. Si $f(x) \neq 0$, on obtient $x = 1$, or on a vu que $f(1) = 0$, donc f est identiquement nulle.

Ainsi, l'ensemble des antécédents de 0 par f, $f^{-1}(\{0\})$ est soit égal à $\mathbb{R}$, (cas précédent), soit réduit à $\{0\}$.

Si f est non identiquement nulle on a donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, f(x) + y = f(y) + x$.
En posant $c = f(1) - 1$, on a dès lors $\forall x \neq 0, f(x) = x + c$, et de plus $f(0) = 0$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}^*$:
$f(xy)(x + f(y)) = (xy + c)(x + y + c) = x^2 y + xy^2 + c(xy + x + y) + c^2$
et $f(xy)(x + f(y)) = x^2 y + xy^2 + c(x^2 + y^2) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$.

Il faut donc que : $c^2 + (xy + x + y - x^2 - y^2)c = 0$.
On prend $x = y = 2$. Alors, $xy + x + y - x - y = 4 + 2 + 2 - 4 - 4 = 0$.
Donc on obtient $c^2 = 0$ puis $c = 0$.
Les seules solutions possibles sont la fonction nulle et l'identité .

Synthèse :
Si f est la fonction nulle, on a bien $\forall x, y, f(xy)(x + f(y)) = 0 = x^2 f(y) + y^2 f(x)$.
Si $f = \mathrm{Id}$, alors $f(xy)(x + f(y) = x^2 y + xy^2 = x^2 f(y) + y^2 f(x)$.
Conclusion : les deux solutions sont la fonction nulle et l'identité.

Exercice 6 : Équation de Cauchy $\star$ (cours)

- Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

- Trouver toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
Faire de même en supposant que f est continue au lieu de croissante.

<u>**Solution :**</u>
Analyse : On considère une solution $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.
On commence par chercher les valeurs prises par f sur $\mathbb{N}$.
$x = y = 0$ donne $2f(0) = f(0)$, donc $f(0) = 0$.
On pose $a = f(1) \in \mathbb{Q}$, alors $y = 1$ donne $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x+1) = f(x) + a$.

Montrons désormais par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) = an$.
<u>Initialisation :</u> C'est vrai pour 0, car $f(0) = a \cdot 0$.
<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(n) = an$. Alors $f(n+1) = an + a = a(n+1)$.
<u>Conclusion :</u> Par récurrence, on a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = an$.

En prenant $y = -x$, on a $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) + f(-x) = f(0) = 0$, donc f est impaire.
D'où, pour tout $n \in \mathbb{Z}, f(n) = an$.

Soit $q \in \mathbb{Q}$. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(nq) = nf(q)$.

C'est vrai pour 0 et 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $f(nq) = nf(q)$. Alors :
$$f((n+1)q) = f(nq+q) = f(nq) + f(q) = nf(q) + f(q) = (n+1)f(q)$$
On utilise le fait que f est impaire pour généraliser à $n \in \mathbb{Z}$, ce qui conclut.

On va désormais pouvoir conclure.
On considère un rationnel sous la forme $q = \dfrac{p}{r}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On a donc $f(rq) = f(p) = ap$ d'une part, et $f(rq) = rf(q)$ d'autre part.
On divise par $r \neq 0$, il vient : $f(q) = a \cdot \dfrac{p}{r} = a \cdot q$.
Ceci est vrai pour tout $q \in \mathbb{Q}$, d'où l'on a nécessairement $f : x \mapsto ax$, pour un certain $a \in \mathbb{Q}$

Vérification : Soit $a \in \mathbb{Q}$. Si $f : x \mapsto ax$, alors premièrement, on a bien $\forall x \in \mathbb{Q}, f : (x) \in \mathbb{Q}$, car le produit de deux nombres rationnels est rationnel.
De plus, pour $x, y \in \mathbb{Q}$, on a bien $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

Pour passer de l'équation avec $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$, à $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on va utiliser le fait que $\mathbb{Q}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$.

Intuitivement, cela signifie que pour tout nombre réel x, il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire une suite à valeurs rationnelles) telle que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** vers x.
De manière équivalente, la densité de $\mathbb{Q}$ signifie que tout intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$ contient au moins un nombre rationnel. C'est-à-dire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a < b$, $]a, b[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

Définition :
On dit qu'une suite (u_n) à valeurs dans une partie A de $\mathbb{R}$ **converge** vers un réel b lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in]b - \varepsilon, b + \varepsilon[$ ou (de manière équivalente) que $|b - u_n| < \varepsilon$.
Dans ce cas, b est **la limite** de la suite (u_n). Et l'on peut noter $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = b$.
Intuitivement, dire que (u_n) converge vers b revient à dire que plus n est grand, plus la suite se rapproche du réel b.
Exemple : La suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ converge vers 0.

De plus lorsqu'une suite converge, elle ne peut avoir qu'une seule limite.
Attention, en règle générale, une suite ne converge pas forcément, et n'a pas forcément de limite.

Revenons à l'équation fonctionnelle.
Comme dans la question précédente, on montre facilement qu'en notant $a = f(1) \in \mathbb{R}$ (attention, a n'est plus forcément rationnel), alors $\forall q \in \mathbb{Q}, f(q) = aq$.

- On suppose dans un premier temps que f **est croissante**. (donc $a \geq 0$). On veut montrer que dans ce cas $f(x) = ax$ pour un réel x irrationnel.

  Par l'absurde, on suppose $f(x) < ax$, alors, si $a \neq 0$, comme il existe un nombre rationnel $q \in]f(x), ax[$, on obtient que le nombre rationnel $\dfrac{q}{a} < x$, mais $f\left(\dfrac{q}{a}\right) = q > f(x)$, ce qui contredit que f est croissante.

  Si $a = 0$ en prend un rationnel $r < x$ quelconque, et $f(r) = ax = 0 > f(x)$.

  De même, si $f(x) > ax$ et $a \neq 0$, en prenant $q \in]ax, f(x)[$ rationnel, $f\left(\dfrac{q}{a}\right) = q < f(x)$ mais $\dfrac{q}{a} > x$, ce qui est absurde.
  Et si $a = 0$, pour $r > x$ rationnel, $f(r) = 0 < f(x)$.

  <u>Conclusion :</u> si f est croissante, on a bien $f : x \mapsto ax$ pour un certain réel $a \geq 0$. Réciproquement, cette fonction est bien solution.

  Idem si l'on avait supposé f décroissante, on aurait le même résultat mais avec un réel $a \leq 0$.

- Si l'on suppose désormais que f est continue.

  Définition :

  On considère une partie D non-vide de $\mathbb{R}$, et un réel $b \in D$. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite continue en b si pour toute suite (u_n) à valeur dans D qui converge vers b, la suite $f(u_n)$ converge vers $f(b)$.

  La fonction est dite **continue** si elle est continue en b pour tout $b \in D$.

Soit $x \in \mathbb{R}$ irrationnel, on veut montrer que $f(x) = ax$. On considère une suite $(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x (qui existe par densité de $\mathbb{Q}$. Alors la suite de terme général $f(q_n) = aq_n$ converge vers ax. Par continuité de f en x, on sait que $(f(q_n))$ converge vers $f(x)$.

Enfin par unicité de la limite, on déduit que $f(x) = ax$.

Réciproquement, toutes les fonctions de la forme $f : x \mapsto ax$ pour $a \in \mathbb{R}$ sont bien continues et vérifient : $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Remarque :
On a vu que pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, lorsque l'on connaît les valeurs qu'elle prend sur une partie D dense de $\mathbb{R}$ (en l'occurrence $\mathbb{Q}$), alors on peut facilement trouver les valeurs des autres réels sous certaines hypothèses (continuité, monotonie...)
Attention en revanche, ce n'est pas nécessairement le cas sans ces hypothèses.
En l'occurrence, il existe des fonctions solutions de l'équation de Cauchy sur $\mathbb{R}$ mais qui ne sont pas de la forme $x \mapsto ax$.
Celles-ci sont en revanche très dures à construire et presque impossible à expliciter, car (on peut montrer) qu'elles sont nécessairement discontinues en tout point $x \in \mathbb{R}$, et même non-bornées au voisinage de tout point $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 : Équation de Jensen
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
Déterminer ensuite les solutions à cette équation avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, puis continue.

<u>**Solution :**</u>
Analyse : On va en fait simplement se ramener à l'équation de Cauchy et utiliser l'exercice précédent pour conclure.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. En regarde respectivement avec $x = a, y = b$ et $x = a + b, y = 0$:

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a+b)+f(0)}{2}$$

D'où, $f(a+b) = f(a) + f(b) - f(0)$.
On note $c = f(0)$. On pose $g : x \mapsto f(x) - c$.
On trouve que $\forall a, b \in \mathbb{R}$ (ou bien $\forall a, b \in \mathbb{Q}$),

$$g(a+b) = f(a+b) - c = f(a) + f(b) - 2c = g(a) + g(b)$$

Ainsi, la fonction g est solution de l'équation de Cauchy.

Conclusion :
Si l'on cherche les solutions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, alors toutes les solutions sont de la forme $f : x \mapsto ax + c$, avec $a, c \in \mathbb{Q}$, et réciproquement toutes ces fonctions sont bien solutions (et à valeurs rationnelles).

Si l'on suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec f croissante, f est nécessairement de la forme $f : x \mapsto ax + c$, où $a, c \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$.
Réciproquement, ces fonctions conviennent (et sont croissantes).

Enfin si f est continue, on a de même $f : x \mapsto ax + c$, $a, c \in \mathbb{R}$.
Ces fonctions sont toutes solutions et l'on peut montrer facilement qu'elles sont également continues.

Exercice 8 :
Trouver toutes les fonctions **continues** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(f(x) + y) = x + f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution :
Analyse : Supposons que $f(0) \neq 0$. En remplaçant x par 0, on trouve $f(y + f(0)) = f(y)$ donc f est $f(0)$-périodique.
Or une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est bornée.
f est donc bornée sur $[0, f(0)]$ (ou $[f(0), 0]$ selon le signe de $f(0)$).
Comme f est périodique de période $f(0)$, f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Ceci est absurde car, en remplaçant y par 0, on a $f(f(x)) = x + f(0)$ et le membre de droite n'est pas borné.

Donc $f(0) = 0$. On en déduit que $f(f(x)) = x$. D'où f est bijective.
En substituant x par $f(z)$, on a donc $f(z + y) = f(f(f(z)) + y) = f(z) + f(y)$.

Par conséquent, f **est solution de l'équation de Cauchy**, et puisque f est continue, $f(x) = a \cdot x$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ par théorie.
Comme $f(f(x)) = x$, il faut que $a \in \{\pm 1\}$.
Synthèse : Réciproquement, $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont bien solutions.

Exercice 9 : IMOSL 2013 N1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

pour tout couple d'entiers naturels (m, n).

Solution :
Analyse : On note $c = f(1)$. En posant $m = 1$ et $n = p - c$ pour $p \in \mathbb{P}_{>c}$ (un nombre premier strictement plus grand que c), on obtient $1 + f(p - c) \mid f(1) + p - c = p$.
Puisque $1 + f(p - c) > 1$, cela implique que $1 + f(p - c)$ est l'unique autre diviseur de p : p lui-même.

Posons maintenant $m = p - c$ et fixons n. On a $(p - c)^2 + f(n) \mid (p - c)(p - 1) + n$.
Or, pour p suffisamment grand, on a

$$\frac{1}{2}((p - c)(p - 1) + n) < (p - c)^2 + f(n)$$

et donc $(p - c)^2 + f(n) = (p - c)(p - 1) + n$.
Cette égalité tenant pour une infinité de p, on a égalité entre les polynômes : $c + 1 = 2c$ et $n + c = f(n) + c^2$ soit $c = 1$ et $f(n) = n$.

Synthèse : Réciproquement, $f(n) = n$ est bien solution. En bref, $n \mapsto n$ est l'unique solution.

Exercice 10 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous de réels x, y on ait :

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1$$

<u>**Solution :**</u>
Analyse : Supposons que f soit une solution de l'équation. On pose $x = 0$ ce qui donne

$$f(-1) + f(x)f(0) = -1$$

Si $f(0) \neq 0$, on peut diviser et donc f est constante. C'est absurde car aucune fonction constante n'est solution. Donc $f(0) = 0$ ce qui donne $f(-1) = -1$
Pour $x \neq 0$ on pose $y = \dfrac{1}{x}$ ce qui donne

$$f(0) + f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{1}{x} - 1 \iff f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

En particulier avec $x = 1$, on obtient $\boxed{f(1)^2 = 1}$.
L'idée maintenant est de forcer une factorisation, pour cela, on voudrait que $xy - 1 = y \iff y = \dfrac{1}{x-1}$. Pour $x \neq 1$, on a donc

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right)(1 + f(x)) = \frac{2x}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

Pour utiliser l'égalité précédente, on multiplie par $f(x-1)$ ce qui donne
$f(x) + 1 = \dfrac{x+1}{x-1} f(x-1)$
On pose maintenant $y = 1$ ce qui donne

$$f(x-1) + f(x)f(1) = 2x - 1$$

On réinjecte l'expression de $f(x-1)$ obtenue.

$$(f(x)+1)\frac{x-1}{1+x} + f(x)f(1) = 2x - 1$$

Cela donne donc pour $x \neq 1$.

$$f(x) = \frac{(2x - 1 + 2x^2 - x) - (x-1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x - 1 + f(1)(x+1)}$$
$$\iff f(x) = \frac{2x^2}{x - 1 + f(1)(x+1)}$$

On rappelle que $f(1)^2 = 1$.
Si $f(1) = -1$ on a $f(x) = -x^2$ pour tout $x \neq 1$.
Si $f(1) = +1$ on a $f(x) = x$ pour tout $x \neq 1$.

Synthèse : Si $f : x \mapsto x$ on a

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = xy - 1 + xy = 2xy - 1$$

Si $f : x \mapsto -x^2$, on a

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = -(x^2y^2 - 2xy + 1) - x^2y^2 = -2xy - 1$$

Donc les seules solutions sont, $x \mapsto x$ ainsi que $x \mapsto -x^2$.

Exercice 11 :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(0) = 0$ et

$$f(x^2 - y^2) = f(x)f(y)$$

pour tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $x > y$.

Solution :
Analyse : Soit f une éventuelle solution. On pose $y = 0$ et on trouve pour $x \geq 1$ que $f(x^2) = 0$.
Ensuite on pose $x \geq 1$ et $y = x - 1$: on trouve $f(2x - 1) = f(x)f(x - 1)$.

Comme $f(1) = 0$, par récurrence forte on a que $f(2k + 1) = 0$ pour tout entier k.
En effet, on a déjà $f(1) = f(1^2) = 0$.
Soit maintenant k un entier positif impair vérifiant $k \geq 1$. On suppose que $f(2x + 1) = 0$ pour tout entier x strictement inférieur à k.
On a $f(2k + 1) = f(k)f(k + 1)$. Or $0 \leq k < k + 1 < 2k + 1$ donc comme soit $k + 1$ soit k est impair et strictement inférieur à $2k + 1$, on en déduit que $f(2k + 1) = 0$, ce qui conclut l'hérédité.

Ensuite on pose $x \geq 2$ et $y = x - 2$, il vient que $f(4x - 4) = f(x)f(x - 2)$. Là encore, par récurrence forte $f(4k) = 0$.
En effet, $f(0) = 0$ ce qui donne l'initialisation. Soit $k \geq 1$ tel que $f(4l) = 0$ pour tout entier l vérifiant $0 \leq l < k$. On a que $f(4k) = f(4(k + 1) - 1) = f(k + 1)f(k - 1)$.
Si k est pair, $k + 1$ est impair donc $f(k + 1) = 0$ donc $f(4k) = 0$ ce qui conclut.
Sinon $k + 1$ et $k - 1$ sont deux nombres pairs distants de 2, donc un des deux est divisibles par 4, et strictement inférieur à $4k$, donc $f(k + 1) = 0$ ou $f(k - 1) = 0$ ce qui conclut.

Enfin, il reste le cas de entiers congrus à 2 modulo 4. Mais nous savons qu'une différence de deux carrés n'est jamais congrue à 2 modulo 4 (car les carrés valent 0 ou 1 modulo 4), donc le membre de gauche est toujours nul.
Il vient donc que pour tout $x > y$ on a

$$0 = f(x)f(y)$$

Ainsi il serait absurde que deux entiers aient des images non nulles.
Nous en déduisons que f est est nulle partout, sauf éventuellement en un entier $x_0 = 4l + 2$ pour laquelle elle vaut un entier positif k.

Synthèse : soit f une telle fonction.
Notons d'abord que comme une différence de deux carrés n'est jamais congrue à 2 modulo 4, $x^2 - y^2$ ne peut jamais valoir x_0, donc $f(x^2 - y^2) = 0$ si $x > y$ sont deux entiers positifs.
De plus, comme $x > y$, on ne peut avoir à la fois $x = x_0$ et $y = x_0$, donc forcément soit $f(x) = 0$ soit $f(y) = 0$.
On a alors bien $f(x^2 - y^2) = 0 = f(x)f(y)$ donc f est bien solution.

Exercice 12 :
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 - f(y)^2) = xf(x) - y^2$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

<u>**Solution :**</u>
Analyse : Soit f une solution. Avec $x = 0$, on obtient : $\forall y \in \mathbb{R} : f(-f(y)^2) = -y^2 \quad (*)$
Soit $t \in \mathbb{R}$: par $(*)$ avec $y = -f(t)^2$, on a : $f(-f(-f(t)^2)^2) = -(-f(t)^2)^2 = -f(t)^4$,
Or $f\left(- f(-f(t)^2)^2 \right) = f(-(-t^2)^2) = f(-t^4)$.
Finalement :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : -f(t)^4 = f(-t^4)} \quad (1)$$

Alors $f(0)^4 = -f(0)$, donc $\underline{f(0) \in \{-1, 0\}}$
∘ Si $f(0) = -1$, on a, avec $y = 0 : \forall x \in \mathbb{R}, f(x^2 - 1) = xf(x)$
Alors, $x = 0$ donne $f(-1) = 0$, mais $x = -1$ donne $f(0) = -f(-1)$ c'est-à-dire $f(-1) = 1$. Absurde.
Donc $f(0) = 0$.
$y = 0$ donne alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = xf(x)} \quad (2)$$

Montrons que $f(y) = 0 \implies y = 0 \quad (i)$.

Soit $(x, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(y_0) = 0$. $xf(x) - y_0^2 = f(x^2 - f(y_0)^2) = f(x^2) = xf(x)$, donc $y_0^2 = 0$, puis $y_0 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}^* : xf(x) = f(x) = f((-x)^2) = -xf(-x)$ donc $f(x) = -f(-x)$, d'où f est impaire.
Alors (1) devient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} : f(t)^4 = f(t^4)}$$

Soit $t \in \mathbb{R}^*$ avec (2) : $f(t^4) = f((t^2)^2) = t^2 f(t^2) = t^2 \cdot (tf(t)) = t^3 \cdot f(t) = f(t)^4$

Or d'après (i), comme $t \neq 0, f(t) \neq 0$, donc $f(t)^3 = t^3$, d'où $f(t) = \sqrt[3]{t^3} = t$.
<u>L'unique solution éventuelle est donc la fonction identité.</u>

Vérification : Si $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$: Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a bien : $f(x^2 - f(y)^2) = x^2 - y^2 = xf(x) - y^2$.
$\boxed{\text{L'unique solution est } \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}.}$

Exercice 13 :
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution :
Analyse : Soit $P(x, y)$ la proposition:

$$f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y))$$

$$P(x, x): \quad 0 \leq (x + f(x))(x - f(x)) \iff x^2 \geq f(x)^2 \implies |f(x)| \leq |x|$$

En particulier, $f(0) = 0$, donc:

$$\begin{cases} P(x, 0): & f(x^2) \leq xf(x) \\ P(0, y): & f(y^2) \geq yf(y) \end{cases}$$

Donc $f(x^2) = xf(x)$, on peut alors réécrire:

$$P(x, y): \quad f(x^2) - f(y^2) \leq (f(x) + y)(x - f(y)) \iff xf(x) - yf(y) \leq xf(x) - yf(y) + xy - f(x)f(y)$$

$$\iff xy \geq f(x)f(y)$$

Si il existe $x > 0$ et $y < 0$ tels que $f(x)$ et $f(y)$ sont de même signe, alors l'inégalité n'est pas respectée. Donc f garde le même signe sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$ (et ces signes sont opposés). Or si f est solution, alors $-f$ aussi (car $P(x, y)$ devient $P(y, x)$), on peut donc supposer $f(x) \geq 0$ pour $x \geq 0$ et $f(x) \leq 0$ pour $x \leq 0$ spdg. On a alors, pour x positif:

$$P(x, -x): \quad -x^2 \geq f(x)f(-x) \iff x^2 \leq f(x) \cdot (-f(-x))$$

Or d'après ce qu'on a vu au départ $f(x) \leq x$ et $-f(-x) \leq x$, donc on a égalité et $f(x) = x$ et $f(-x) = -x$ pour tout x. Finalement les seules solutions possibles sont donc $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

Synthèse : Si $f : x \mapsto x$:

$$f(x^2 - y^2) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) = (f(x) + y)(x - f(y))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En particulier, l'inégalité est vérifiée.
De même, si $f : x \mapsto -x$:

$$f(x^2 - y^2) = y^2 - x^2 = (-x + y)(x + y) = (f(x) + y)(x - f(y))$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. L'inégalité est encore vérifiée.