méthode probabiliste E

Mano Etilé

February 2025

0.1 Méthode Probabiliste

On va ici utiliser diverses propriétés des probabilités pour introduire une méthode puissante de résolution d'exercice, la méthode probabiliste.

0.1.1 Méthode

On dispose d'un ensemble E, et on veut montrer l'existence d'un x élément de E tel que x vérifie une propriété B. On va tirer au hasard un élément de E. La répartition de probabilité n'a pas à être uniforme (en langage plus formelle, On prend X une variable aléatoire sur E, qui suit une loi préalablement choisie).

On s'intéresse à $P(B(x))$ (où $B(x)$ désigne "x vérifie B). Si on arrive à démontrer que $P(B(x)) > 0$, alors on a gagné, x existe bel et bien.

Ainsi, une méthode probable nous amène à un résultat certain. On note que c'est essentiellement une manière de montrer des existences.

Un premier exemple est le suivant :

Montrer qu'il est possible de colorier les entiers de 1 à 2021 en 4 couleur de manière à ne jamais avoir de progression arithmétique monochrome de longueur 11

On colorie nos entiers aléatoirement. La probabilité p_a que pour un entier a au hasard dans $[|1;2021|]$, et un entier n fixé les entiers $a, a+n, ..., a+10n$ tous de la même couleur est (par indépendance du coloriage de chaque entier) $\frac{1}{4^{10}}$

Soit p la probabilité qu'on ai une progression arithmétique monochrome de longueur 11.

On a : $p \leq \displaystyle\sum_{s=1}^{2021} p_s \lfloor \frac{2021-a}{11} \rfloor$ (la partie entière compte le nombre de valeur que n peut prendre.)

ainsi, $p \leq \frac{1}{4^10 \cdot 11} \displaystyle\sum_{s=1}^{2021} 2021 - s = \frac{2021 \cdot 2022}{2^{21} \cdot 11} < 1$

Donc, comme $p < 1$, au moins un coloriage ne fournit aucune progression arithmétique monochrome de longueur 11, d'où la conclusion.

0.1.2 Utilisation de l'Espérance

Un type d'utilisation classique est le suivant. Supposons que nous voulions montrer une propriété de type extrémale : disons, sans perte de généralités, il existe $x \in E$ tel que $F(x) > 0$. On va alors plutôt montrer que $E(F(x)) > 0$. Cela semble anodin, mais est en réalité très puissant, car nous disposons alors de toutes les propriétés de linéarité de l'Espérance, tel que celle pour la somme de variables aléatoires etc...

Prenons l'exemple suivant (**Théorème de Caro-Wei**) :

Soit G un graphe. Montrer qu'il existe I un sous-ensemble de sommets de G indépendants (deux sommets de I ne peuvent pas avoir d'arête qui les relie) tel que $|I| \geq \sum\limits_{x\in G} \dfrac{1}{1+d(x)}$

On tire au hasard un ensemble indépendant I, comme ceci : On tire les sommets du graphe 1 par 1, et à chaque étape, on met le sommet dans I si et seulement si I restera indépendant après l'ajout. Sinon, on le met à la poubelle. Calculons l'espérance de $|I|$:

$E(|I|) = \sum\limits_{x\in G} P(x \in I)$ par linéarité de l'espérance.

Or, $P(x \in I) = \frac{1}{1+d(x)}$. En effet, le sommet x a été mis dans I si et seulement si il à été choisi avant tout ses voisins.

Ainsi, $E(|I|) = \sum\limits_{x\in G} \dfrac{1}{1+d(x)}$, d'où il existe I tel que $|I| \geq \sum\limits_{x\in G} \dfrac{1}{1+d(x)}$.

Remarque : On notera que ici, la probabilité de prendre un sommet n'est pas uniforme. Dans les exercices plus complexes, il est parfois intéressant de donner une distribution de probabilité non-uniforme.

0.1.3 Exercices

****Exercice 1 :** Soit k un entier non-nul. On observe un tournoi entre un certain nombre de joueurs, chaque paire s'affrontant une fois. On dit que le tournoi est k-indécis si, pour tout ensemble A de k joueurs, un joueur a battu tout ceux de A. Montrer qu'il existe un tournoi (donc une distribution de victoire) k-indécis avec plus de k joueurs dans le tournoi.

****Exercice 2 :** Soit k un entier plus grand que 3, et n un entier plus petit que $2^{\frac{k}{2}}$. On dispose du graphe complet K_n à n sommets. Montrer que l'on peut colorier les arêtes de K_n en bleu et en rouge de manière à ce que tout sous ensemble de k sommets ne soit pas monochrome.

****Exercice 3 :** Soit un tableau carré de n sur n, dans lequel on a inscris n fois les nombres de 1 à n. Montrer que il y a une ligne où une colonne avec au moins $\sqrt{n}$ nombres distincts.

****Exercice 4 (Théorème d'Erdos-Ko-Rado):** Soit k un entier et n plus grand que $2k$. Soit C un ensemble de sous ensembles de $(1, ..., n)$ tel que deux éléments quelconques de C ait une intersection non-vide. Montrer que $|C| \leq n - 1k - 1$

***__Exercice 5 :__ Une classe contient un certain nombre de filles et un certain nombre de garçons. On sait que chaque garçon est amoureux d'au moins une fille. Montrer que l'on peut choisir un groupe qui contient au moins la moitié des élèves et tel que tout garçon du groupe est amoureux d'un nombre impair de filles du groupe.

***__Exercice 6 :__ Soit S un nombre fini de points du plan, trois points n'étant jamais alignés, $P_1...P_k$ les polygones convexes ayant leur sommets inclus dans S. Soit a_i le nombre d'arêtes de P_i et b_i les points de S exterieur à P_i. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x^{a_i}(1-x)^{b_i} = 1$ pour tout réel x dans $[0;1]$.

****__Exercice 7(Théorème de Szemeredi-Trotter):__ Soit m droites et n points. Le nombre de couples (d_i, p_j) tel que le point p_j est situé sur la droite d_i est appelé I, le nombre d'incidences. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que :
$I \leq C \cdot max\{n, m, (nm)^{\frac{2}{3}}\}$

****__Exercice 8 :__ On dit qu'un ensemble de n droites est en position générale si deux droites de cet ensemble ne sont jamais parallèles et trois droites de cet ensemble ne s'intersectent jamais en un point. Un ensemble de droites en position générale partagent le plan en régions, celles qui ont une aire finie sont appelées les "régions finies". Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout n suffisamment large, pour tout ensemble de n droites en position générale, on peut colorier au moins $c\sqrt{n}$ droites en bleu tel qu'aucune des régions finies n'a son périmètre totalement colorié en bleu.

****__Exercice 9 (lemme de Sperner)__ Soit $A \in P(P([|2n|]))$ où n est un entier strictement positif. On suppose que A est une antichaine (cf Théorie extrémale E). Montrer que $|A| \leq n\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

****__Exercice 10 :__ Soit $x_1, ..., x_n$ des réels, de somme nul, et dont la somme des carrés vaut 1. Pour tout $A \in P([|n|])$, on pose $S_A = \displaystyle\sum_{i \in A} x_i$. Soit $\lambda > 0$. Montrer que il y a au plus $\frac{2^{n-3}}{\lambda^2}$ ensembles A tels que $S_A \geq \lambda$