

# Combinatoire groupe B : Principe de Dirichlet

1<sup>er</sup> Février 2025

## Exercice 1 :

Dans le collège de Rémi, il y a 367 élèves inscrits. Rémi affirme alors qu'au moins deux collégiens ont la même date d'anniversaire, montrer que Rémi a raison.

Combien d'élèves faudrait-il au minimum dans le collège pour que Rémi soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (N. B : les années peuvent être bissextiles.)

## Exercice 2 :

Dans une salle de classe, il y a 7 rangées de 10 places. Un groupe de 50 stagiaires Animath y a cours le matin et l'après-midi. Montrer qu'il existe deux personnes ayant été assises dans la même rangée aussi bien le matin que l'après-midi.

## Exercice 3 :

15 stagiaires ont mangé 100 gaufres au total. Prouver qu'au moins deux de ces stagiaires ont mangé le même nombre de gaufres.

## Exercice 4 :

Soit  $n + 1$  entiers  $a_0, \dots, a_n$ . Montrez qu'il en existe deux tel que  $a_i - a_j$  soit divisible par  $n$ .

## Exercice 5 :

Pierre colorie le plan de deux couleurs différentes, montrer qu'il existe deux points de la même couleur à exactement un mètre de distance.

## Exercice 6 :

Trouver le plus petit entier  $n \geq 3$  tel que tout ensemble de  $n$  nombres entiers distincts possède trois éléments distincts dont la somme est divisible par 3.

## Exercice 7 :

On considère  $S$  une partie de l'ensemble des parties de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , telle que deux éléments de  $S$  ne soient jamais disjoints.

- Montrer que  $S$  est de cardinal au plus  $2^{n-1}$ .
- Montrer que cette borne est atteinte.

## Exercice 8 :

Combien d'entiers au minimum Axel doit-il sélectionner dans l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 24\}$  pour être sûr que parmi ceux-ci il ait deux entiers  $a$  et  $b$  tels que  $a - b = 2$  ?

## Exercice 9 :

Matthieu écrit sur un tableau 20 nombres distincts entre 1 et 64. Marie écrit sur un autre tableau toutes les différences qu'on puisse calculer avec ces nombres. Montrer qu'au moins un nombre a été écrit quatre fois par Marie.

**Exercice 10 :**

Léo choisit un ensemble de  $N + 1$  entiers parmi  $\llbracket 1, 2N \rrbracket$ . Montrer que, parmi les nombres choisis, il en existe deux qui sont premiers entre eux.

**Exercice 11 :**

Christophe choisit dix entiers naturels distincts deux à deux et à 2 chiffres (en base 10). Montrer que parmi eux, il peut trouver deux sous-ensembles disjoints de même somme.

**Exercice 12 :**

Il y a 25 élèves dans une classe. Parmi 3 quelconques d'entre eux, il y en a toujours au moins deux qui sont amis (la relation d'amitié étant réciproque). Montrer qu'il existe un élève ayant au moins 12 amis.

**Exercice 13 :**

On considère six points du plan, trois d'entre eux n'étant jamais alignés. Philippe colorie en rouge ou en bleu tous les segments reliant entre eux deux des six points. Montrer qu'il existe un triangle monochrome.

**Exercice 14 :**

Raphaël place 6 points à l'intérieur d'un rectangle de dimension  $4 \times 3$ . Montrer qu'elle peut en trouver deux dont la distance est inférieure ou égale à  $\sqrt{5}$ .

**Exercice 15 :**

Aurélien organise un test. Ce test est constitué de trois problèmes et chacun de ces problèmes est noté de 0 à 7, la note étant toujours un entier.

- a) On suppose que 64 élèves participent au test. Montrer qu'Aurélien peut trouver un élève A et un élève B tels que A a eu des notes supérieures ou égales à celles de B à chacun des trois problèmes.
- b) On suppose simplement que 49 élèves participent au test. Montrer qu'Aurélien peut encore trouver un élève A et un élève B tels que A a eu des notes supérieures ou égales à celles de B à chacun des trois problèmes

**Exercice 16 :**

Ernest place un point  $P$  à l'intérieur d'un polygone convexe à  $2n$  sommets, et il trace toutes les droites passant par  $P$  et par un sommet du polygone.

Montrer que l'un des côtés du polygone n'est intersecté par aucune de ces droites.

**Exercice 17 :**

Youssef place 2024 points rouges sur un cercle bleu de sorte à le diviser en 2024 arcs dont les longueurs décrivent tous les entiers de l'ensemble  $\{1, \dots, 2024\}$  dans un ordre aléatoire.

Montrer que Youssef peut trouver deux cordes perpendiculaires du cercle dont les extrémités sont des points rouges.