

PETITES SHORTLIST DE COMBINATOIRE

Martin Rakovsky

1 Conseils

Devant un problème de combinatoire, il faut s'attendre à tout (et parfois à rien...). Les gestes d'hygiène consistent donc à tester des petits cas et surtout à essayer des choses simples : majorer/minorer naïvement (on y reviendra), examiner le plus petit/grand élément d'un ensemble fini, tenter une récurrence...

Dans les exercices que 2-3-4, une idée commune revient : L'énoncé va partir d'un ensemble fini de nombres, les répartir et attribuer à chaque groupe une certaine quantité. Ce procédé a pour effet de mélanger/séparer les nombres les uns des autres. La difficulté consiste alors à être capable de *partir des quantités données pour revenir aux nombres de départ*. Une façon pour faire cela est d'utiliser le caractère distinct des nombres, ce qui permet de remplacer leur somme par la somme des plus petits/grands entiers par exemple. Essayez !

2 Exercices

Problème 1. (BXMO 2023) Déterminer tous les entiers $k \geq 1$ ayant la propriété suivante : étant données k différentes couleurs, quel que soit le coloriage des entiers relatifs avec k couleurs, il existe 2023 entiers $a_1 < \dots < a_{2023}$ de même couleur et tels que $a_2 - a_1, \dots, a_{2023} - a_{2022}$ sont des puissances de 2.

Problème 2. (IMO SL 2012 C2) Soit $n \geq 1$. Déterminer le plus grand nombre de paires d'entiers de $\{1, \dots, n\}$ deux à deux disjointes et donc les sommes sont deux à deux distinctes et inférieures à n .

Problème 3. (BXMO 2015) Une progression arithmétique est un ensemble de la forme $\{a, a+d, \dots, a+kd\}$ avec $k \geq 2$. L'entier d est appelé raison de la suite.

Étant donnée une partition de $\{1, \dots, 3n\}$ en progression arithmétique (pas forcément de même taille), on note S la somme des raisons des progressions arithmétiques. Quelle est la plus grande valeur que peut prendre S ?

Problème 4. (IMO SL 2016 C2) Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels qu'on peut placer les diviseurs strictement positifs de n dans les cases d'un rectangle de sorte que

- Chaque case contient exactement un diviseur et chaque diviseur apparaît exactement une fois.
- Les sommes de chaque ligne sont égales.
- Les sommes de chaque colonne sont égales.

Problème 5. (IMO SL 2020 C1) Soit $(F_k)_{k \geq 0}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_{k+2} = F_k + F_{k+1}$ pour tout entier $k \geq 0$. Soit ensuite $n \geq 1$ un entier. Démontrer qu'il existe exactement F_{n+1} façons d'ordonner les nombres $1, 2, \dots, n$ de manière à obtenir un n -uplet $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tel que

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \dots \leq na_n.$$

Problème 6. (IMO SL 2021 C2) Soit m et n deux entiers tels que $m > n \geq 3$. Morgane a disposé m jetons en cercle, et s'apprête à les peindre en utilisant n couleurs distinctes. Elle souhaite que, parmi $n+1$ jetons consécutifs, il y ait toujours au moins un jeton de chacune des n couleurs. Si elle peut y parvenir, on dira que l'entier m est n -coloriable.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 3$, il n'existe qu'un nombre fini *non nul* d'entiers m qui ne sont pas n -coloriables, et trouver le plus grand entier m qui ne soit pas n -coloriable.