Principe des tiroirs

Maena Quemener

Animath

1er février 2025

Idée du principe des tiroirs

- Si on a 10 chaussettes et 5 tiroirs, alors on aura forcément des tiroirs avec plusieurs chaussettes.
- Plus fort, besoin de combien de chaussettes au minimum pour pouvoir affirmer ça ?

Idée du principe des tiroirs

- Avec 11 chaussettes et 5 tiroirs, on peut dire qu'il existe un tiroir contenant _ chaussettes.

Idée du principe des tiroirs

- Avec 11 chaussettes et 5 tiroirs, on peut dire qu'il existe un tiroir contenant _ chaussettes.

Réponse : 3

Enoncé

Théorème

Si $n+1$ éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient au moins 2 éléments.

Démonstration.

Par l'absurde, si tous les ensembles contiennent 0 ou 1 élément, alors le nombre d'éléments est inférieur ou égal à n. □

Exemples

- Parmi 3 personnes, il y en a toujours 2 du même sexe.
- Parmi 13 personnes, il y en a toujours 2 qui sont nés le même mois.

Exercices

Exercice Combien de personnes faut-il au minimum pour que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Exercices

Exercice Combien de personnes faut-il au minimum pour que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Solution de l'exercice Il y a 366 jours différents dans l'année. On cherche deux personnes qui aient leur anniversaire le même jour. Ainsi ici, les tiroirs sont les jours et les chaussettes sont les personnes. Il faut donc 367 personnes.

Exercices

Exercice Baptiste veut attraper une paire de chaussettes dans le noir. Il a 6 chaussettes rouges, 13 bleues et 8 blanches. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'en avoir 2 de même couleur ?

Exercices

Exercice Baptiste veut attraper une paire de chaussettes dans le noir. Il a 6 chaussettes rouges, 13 bleues et 8 blanches. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'en avoir 2 de même couleur ?

Solution de l'exercice Ici, les tiroirs sont les couleurs, il faut donc 4 chaussettes.

Principe des tiroirs généralisé

Théorème

Si $nk + r$ éléments, avec $r < n$, doivent être rangé dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble avec $k + 1$ éléments.

Démonstration : Pareil que pour le cas simple, mais en considérant cette fois-ci par l'absurde que chaque ensemble peut avoir au plus k éléments.

Principe des tiroirs infini

Théorème

Si une infinité d'éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient une infinité d'éléments.

Exercice

Exercice Une personne a entre 0 et 300000 cheveux sur la tête. L'agglomération de Marseille contient 2000000 habitants. Combien de Marseillais au minimum ont le même nombre de cheveux ?

Piste : Tiroir : nb de cheveux possibles. 300001

↳ On oublie pas 0.

Chaussettes : marseillais : $2\,000\,000$

$nk+r$ chaussettes et n tiroirs $r \neq 0$.

$k+1$ chaussettes dans un tiroir

$2\,000\,000 \,//\, 300\,001 = 6$ $k = 6$ Réponse : $k+1 = 7$.

Exercice

Exercice Une personne a entre 0 et 300000 cheveux sur la tête. L'agglomération de Marseille contient 2000000 habitants. Combien de Marseillais au minimum ont le même nombre de cheveux ?

Solution de l'exercice Les tiroirs sont les cheveux et le chaussettes les Marseillais. On applique le principe des tiroirs généralisé.
On peut écrire : $2000000 = 300001 \times 6 + 199994$. Donc la réponse est 7.

Exercice

Exercice Combien de personnes faut-il pour être sûr que 3 personnes au moins aient leur anniversaire le même jour ? Et 4, 5, ..., n ?

$366 \times n + 1$

↳ $n+1$ personnes anniversaire le même jour.

Exercice

Exercice Combien de personnes faut-il pour être sûr que 3 personnes au moins aient leur anniversaire le même jour ? Et 4, 5, ..., n ?

Solution de l'exercice Il en faut $n \times 366 + 1$.

↳ $n+1$ personnes qui ont leur anniversaire le même jour.

Exercices d'application

Exercice Montrer que $(a-b)(b-c)(c-a)$ est toujours pair pour a, b, c entiers.

Exercice Il y a n équipes de baseball lors d'un match. On suppose que deux équipes données jouent l'un contre l'autre qu'une fois au plus. Montrer qu'il existe deux équipes qui ont joué autant de fois.

Exercice

1. On colorie le plan en blanc et noir. Montrer qu'il existe deux points de même couleur distant d'exactement 1 cm.
2. Montrer qu'il existe une couleur telle qu'on puisse trouver deux points du plan de cette même couleur distants de 1 cm.

Solutions

Exo Mq $(a-b)(b-c)(c-a)$ est toujours pair?

directement des facteurs.

Pour que ce soit pair? Il faut un facteur pair au moins.

a-b pair ou b-c pair ou c-a pair.

Pour avoir une différence paire il faut 2 nombres de même parité → ici a,b,c = 3 nombres.

pair / impair = 2 tiroirs.

il existe deux nombres qui ont la même parité.

Solutions

$n \geq 2$.

Exo n équipes de baseball. Une équipe peut faire 0 match.

Chaussettes : équipes.

Tiroirs : nb de matchs possibles.

Une équipe peut jouer $0, 1, 2, \dots, n-1$ matchs.

n tiroirs.

Mince ! On a n chaussettes !

Soit une équipe a fait 0 match : $0, 1, \dots, n-2$ matchs possibles ✓

Aucune équipe a fait 0 match : $1, \dots, n-1$ matchs possibles.

✓

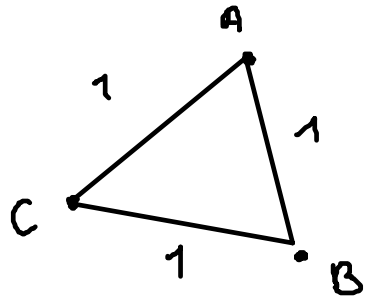
Solutions

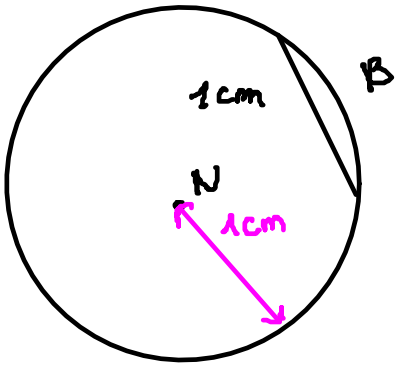
Exo 1) Il existe 2 points à distance 1 cm de même couleur.

But Choisir 3 points → 2 de la même couleur.

↳ 2 à 2 ils soient toujours à distance 1 cm.

Schéma





→ Deux points de la même couleur.

2) Idem, on prend un triangle de côté 1 cm.

On a deux sommets de la même couleur

→ Donc il existe bien une couleur qui admet deux points à distance 1 cm.

Exercices

Exercice On prend cinq points distincts du plan à coordonnées entières. Montrer qu'il en existe deux tel que le milieu du segment les reliant soient à coordonnées entières.

Exercice On prend 10 entiers distincts. Montrer qu'il en existe deux tels que leur différence soit divisible par 7.

Solutions

Exo 5 points → on en a deux dont le milieu du segment est à coordonnées entières.

Chaussettes: A priori les points.

A quelle condition les coordonnées du milieu sont entières ?

(x_1, y_1) (x_2, y_2) $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2} \right)$

$\frac{x_1+x_2}{2} \in \mathbb{N}$? ssi x_1+x_2 est pair. On veut $\in \mathbb{N}$ (être entier).

Idem pour y_1+y_2. Je veux $\boxed{x_1 \equiv x_2 [2]}$ et $y_2 \equiv y_2 [2]$. même parité

x : 2 choix, y : 2 choix $= 2 \times 2$ couples de parité possible.

5 points donc deux points qui ont la même parité pour x et y.

Solutions

Exo **Chaussettes** sont les nombres.

$7 \mid a-b$?

Si a et b ont la même congruence mod 7.

$a \equiv k \ [7]$ $\quad$ $b \equiv k \ [7]$

$a-b \equiv k-k \equiv 0 \ [7]$.

Si on a 2 nb qui ont la ⁂ congruence, alors leur diff est divisible par 7.

Tiroirs les congruences mod 7.

$\rightarrow$ $0, 1, \dots, 6$ = 7 tiroirs possibles.

10 chaussettes donc 2 dans le même tiroir

$\longrightarrow$ $a-b \equiv 0 \ [7]$.

Rem Il suffit d'avoir 8 nombres à choisir.

Exercices

Exercice

1. 4 points sont sur un cercle. Montrer qu'il existe un demi-cercle (bords compris) qui contient 3 de ces points.
2. 5 points sont sur une sphère. Montrer qu'il existe une demi-sphère (bords compris) qui contient 4 de ces points.

Exercice Montrer que pour tout entier $n > 0$, il existe un multiple non-nul de n d'au plus n chiffres tous égaux à 0 ou 1.

Indice S'inspirer des exos d'avant → comment on obtenait des nombres dont on était sûr qu'ils étaient divisibles par n?

Solutions

De manière générale en combinatoire, on évite au max les preuves avec les mains (faire des énumérations de cas interminables avec des arguments du type "forcément").

Exo Chaussettes : points Tiroirs : demi-cercle.

Comment formaliser les arguments ?

Eviter Choisir une "pire configuration" de points.

1) Mathématiquement : comment définir une pire configuration ?
2) Comment prouver qu'une configuration est la pire ?

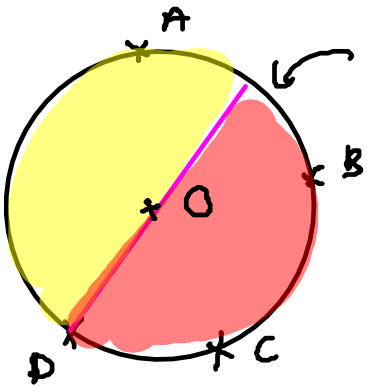
⟶ Rare d'avoir tous les points.

On cherche un argument qui ne dépend pas d'une configuration donnée.

Prob 4 points et 2 tiroirs. On trace un diamètre qui passe par 1 des points ⟶ il appartient aux deux demi-cercles.

Solutions

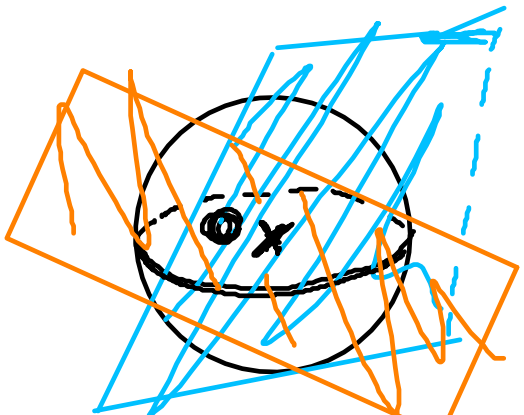
Suite



2 demi-cercles qui contiennent chacun 2. Il reste 3 points à dispatcher.

Remarque.

- Une droite est définie par 2 points.
  Un diamètre défini par le centre + 1 autre point.
- Une sphère → il faut couper avec un plan qui passe par le centre.
  Un plan est défini par 3 points (non alignés).
  → il reste deux points à choisir pour couper en demi-sphère.



→ Choisir un plan qui passe par le centre + 2 points.
2 points qui sont dans les 2 demi-sphères. Il reste 3 points.

Exercices

Exercice Soit un ensemble de valeurs $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ tel que chaque valeur de 1 à n soit prise exactement une fois par chaque a_i. Prouver que si n est impair, alors $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\ldots(a_n - n)$ est pair.

Exercice Je commence avec un carré, que je coupe le long d'une ligne droite et j'obtiens deux pièces. Je répète l'opération. Montrer qu'il existe un moment où 100 pièces auront le même nombre de sommets.

Solutions

Exo Soit $n \in \mathbb{N}$. Mq il existe un nombre à n chiffres au plus qui ne sont que des 0 et 1 qui est un multiple de n.

$n = 2$ 01 ~~00~~ 10 11 ⟶ Je peux construire un nombre qui va obligatoirement être divisible par 10?

↳ Si on trop facile.

1, 10, 11

↳ 2 | 10. ⟶ Facile on connaît l'expression.

$n = 3$ 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111

moins évident. qu'est-ce qu'on peut dire plus généralement?

7 nb mais que 3 congruences possibles.

Donc au moins 2 qui ont la même congruence.

a, b. $3 \mid a - b$. Sauf que $10 - 1 = 9$ problème.

Solutions

On veut construire un nombre multiple de n composé que de 1 ou de 0.

Ensemble de nombres tq $a-b$ soit toujours composé que de 1 ou 0.

Précision Si $a \equiv 0 [3]$ d'office on a un nombre c'est bon.

Mais sinon ?

↳ On veut trouver deux nombres tq la différence

↳ congrus au même k

ne comporte que des 0 et 1 ?

n nombres.

1, 11, 111, ..., 11...11

n

n congruences possibles.

pour tout

$\forall a,b$ de cette forme, $a-b = 11\ldots10\ldots0$

Si on a un $1\ldots1 \equiv 0 [n]$ c'est bon.

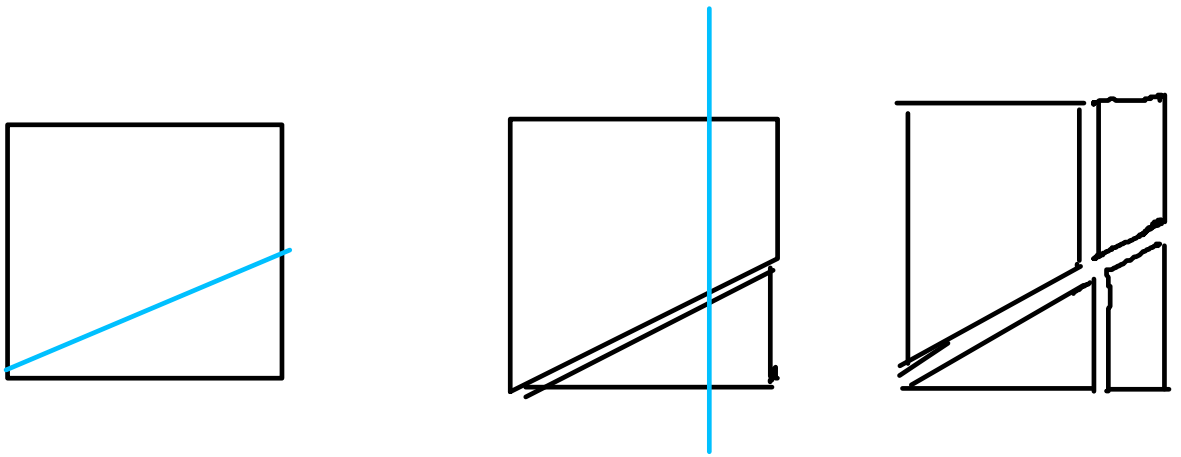
Sinon $1\ldots1 \equiv k[n]$ $1\ldots1 \equiv k[n]$

$11\ldots100\ldots0 \equiv 0 [n]$.

Solutions

Exo Quelle est la condition pour être pair? Que dire des faceurs etc?

Exo



Comment une découpe influence sur le nb de sommets?

Que sont mes tiroirs?

Voir les différents cas possibles.

Différents chemins possibles ?

Exercice Théodore veut aller d'un point A à un point D, en passant par un point B et C. De A à B il y a 3 chemins, de B à C il y en a 4 et de C à D il y en a 2.
De combien de manières Théodore peut-il aller de A à D ?

Courses de chevaux

Exercice Il y a 5 chevaux qui participent à une course. Combien y a-t-il d'ordre d'arrivée possible ?

Courses de chevaux

Exercice Il y a 5 chevaux qui participent à une course. Combien y a-t-il d'ordre d'arrivée possible ?

Solution de l'exercice Il y a 5 choix pour la première place, 4 pour la deuxième, etc. Ce qui fait 5! choix possibles.

Podium

Exercice On a maintenant 30 chevaux, et on s'intéresse au podium (3 premières places). Combien y a-t-il de podiums différents ?

Podium

Exercice On a maintenant 30 chevaux, et on s'intéresse au podium (3 premières places). Combien y a-t-il de podiums différents ?

Solution de l'exercice On ne s'intéresse que aux trois premières places. Pour la première place il y a 30 chevaux possibles, pour la deuxième 29 chevaux possibles et pour la troisième 28 chevaux possibles.
Ce qui est $30 \times 29 \times 28$ **podiums différents.**

Formules de dénombrement

- Permutations de n éléments : $n!$.
- Arrangements de k éléments parmi n : $\dfrac{n!}{(n-k)!}$
- Combinaisons de k éléments parmi n : $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Exercices

Exercice Martin va au restaurant tous les soirs et il veut prendre un menu différent à chaque fois. Le restaurant propose 3 entrées, 2 plats principaux et 5 desserts. Combien de jours Martin peut-il venir ?

Exercices

Exercice Il existe une langue composée uniquement de mots de 6 lettres, composés des lettres a et b. Combien de mots comporte cette langue ?

Exercices

Exercice Combien d'anagrammes de "DENOMBREMENT" existe-t-il ?

Exercice Dénombrer les différentes figures de poker possible / On considère un jeu de classique de 52 cartes.

- Combien existe-t-il de mains de 5 cartes avec exactement une reine ?
- Avec au moins une reine ?
- Avec exactement une figure royale ? (une reine ou un roi)
- Avec exactement deux reines ?
- Avec un brelan ? (un full est un brelan mais un carré n'en est pas un)
- Avec un full ?

Solutions

Solutions

Solutions

Solutions

Exercices

Exercice On a n droites dans le plan en position générale (2 droites ne sont jamais parallèles et 3 droites jamais concourantes en un même point). Combien de triangles forment-elles ?

Exercice On a une grille de taille $n \times m$. Une fourmi débute en $(0;0)$ et veut rejoindre la case $(n;m)$, mais elle ne peut aller que vers le haut ou la droite. Combien de chemins peut-elle emprunter ?

Exercice Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$, calculer le nombre de solutions $(a_1, \dots a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ de $a_1 + \cdots + a_k = n$. Calculer le nombre de solutions $(a_1, \dots a_k) \in \mathbb{N}^k$ de $a_1 + \cdots + a_k = n$.

Exercices

Exercice

Démontrer de manière combinatoire que :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Exercice

Démontrer de manière combinatoire :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Solutions

Solutions

Exercices

Exercice On a une grille 3×7 et on peut colorier chaque case en noir ou blanc. Montrer qu'il existe forcément un rectangle qui a ses 4 sommets (des cases de la grille) de la même couleur.

Exercice Montrer que parmi 10 entiers inférieurs à 100, on peut trouver 2 ensembles A et B disjoints et non vides de même somme.

Solutions

Solutions