TD Combinatoire groupe C, Invariants et monovariants

2 février 2025

Les exercices sont tirés du livre « Solution d'expert» d'Arthur Engel et du poly du stage d'été 2022.

Exercice 1. Les nombres $1, \cdots, 2n$ sont écrits sur un tableau, à chaque étape, on sélectionne deux nombres que l'on éffface et on écrit leur différence à la place. Montrer qu'à la fin, le dernier nombre restant est impair.

Exercice 2. Autour d'un cercle on place les nombres 1,0,1,0,0,0 dans le sens des aiguilles d'une montre. À chaque étape on peut ajouter $+1$ à deux nombres côte à côte. Est-il possible d'arriver à une situation où tous les nombres sont égaux ?

Exercice 3. On définit les suites suivantes (u_n, v_n) avec $a, b > 0$

$$u_0 = a, \quad v_0 = b, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Trouver la limite de u_n, v_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 4. Dans le parlement de Sikinie, chaque député a au plus trois ennemis. Montrer que l'on peut séparer le parlement en deux sous-parlement tel que chaque député ne soit pas dans le même sous parlement qu'au plus un de ses ennemis.

Exercice 5. On va calculer le pgcd et le ppcm avec l'algorithme suivant

$$x = u = a, \quad y = v = b$$

— Si $x < y$, remplacer y par $y - x$ et v par $u + v$
— Si $y < x$, remplace x par $x - y$ et u par $u + v$
— STOP si $x = y$

Montrer que à la fin $x = y = \text{pgcd}(a, b)$ et $\frac{u+v}{2} = \text{ppcm}(a, b)$

Exercice 6. On supprime le premier chiffre du nombre 7^{1996} et on l'ajoute au nombre restant. On répète l'opération jusqu'à obtenir un nombre à 10 chiffres. Montrer que celui ci a au moins deux chiffres égaux.

Exercice 7. Dans l'espace, on note E l'ensemble de 7 sommets d'un cube. On s'autorise à remplacer dans E un point de E par son symétrique par rapport à un autre point de E. Peut-on enchaîner des transformations de ce type de telle sorte que le sommet du cube non choisi au départ apparaisse dans E ?

Exercice 8. On colorie n points du plan en rouge et n autres en bleu de telle sorte que ces 2n points ne soient pas 3 à 3 alignés. Est-il toujours possible de tracer n segments reliant un point rouge à un point bleu, chaque point étant utilisé une seule fois, de manière à ce que deux segments ainsi tracés ne s'intersectent jamais ?

Exercice 9. Soit a, b des entiers positifs. On applique l'algorithme suivant :
- Si $a > b$ alors $(a, b) \to (a - b, 2b)$
- Si $b \geq a$ alors $(a, b) \to (b - a, 2a)$
- STOP si $a = 0$ ou $b = 0$

Pour quel a, b initial l'algorithme s'arrête-t-il ?

Exercice 10. On écrit un signe $+$ ou $-$ sur chaque case d'un tableau 8×8. Une opération consiste à choisir un carré 3×3 ou 4×4 et inverser les signes présents dedans. Peut-on toujours atteindre un tableau rempli de $+$?.

Exercice 11. Dans chaque case d'un tableau rectangulaire est écrit un entier strictement positif. À chaque étape on peut, soit doubler le nombre de tous les éléments d'une ligne, soit retirer -1 à tous les nombres d'une colonne. Montrer qu'à partir de n'importe quelle configuration initiale, il est possible d'atteindre un tableau avec que des zéros.

Exercice 12. 2009 cartes, ayant chacune un côté bleu et un côté jaune, sont alignées côté bleu sur une table. Deux personnes situées du même côté de la table jouent alors en alternance. Un coup consiste à choisir un bloc de 50 cartes dont la carte la plus à gauche est bleue et à retourner toutes les cartes du bloc. La personne qui ne peut plus jouer perd. Le jeu se termine-t-il forcément ? Si oui, qui a une stratégie gagnante ?