Invariants

Rémi – 2 février 2025

Exercices

Exercice 1 Aline a déchiré une feuille de papier en trois parties. Ensuite, elle déchire à nouveau l'une de ces parties en trois parties ; ça lui fait cinq parties en tout. Elle recommence alors, et déchire l'une de ses cinq parties en trois parties, et ainsi de suite. Peut-elle obtenir, à un moment donné, un total de 2020 parties ? de 2023 parties ?

Exercice 2 On écrit les nombres $2, 3, 5, 7, 11$ sur un tableau. En une opération, on peut remplacer deux nombres de même parité par deux copies de leur moyenne arithmétique (c'est-à-dire qu'on remplace x, y par $\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}$). Peut-on obtenir 5 nombres égaux après un certain nombre d'opérations ?

Exercice 3 Peut-on répartir les nombres $1, 2, \ldots, 33$ en 11 groupes de 3 tels que dans chaque groupe, un des trois nombres soit la somme des deux autres ?

Exercice 4 Les entiers de 1 à 2024 sont écrits au tableau. À chaque étape, on en choisit deux qu'on efface et remplace par leur différence. Peut-on se débrouiller pour finir avec un seul nombre égal à 1 à la fin ?

Exercice 5 Théo et Antoine se déplacent sur les points du plan à coordonnées entières. Théo se trouve initialement sur $(42, 42)$ et Antoine sur $(0, 1)$. À chaque tour, ils se déplacent d'une unité verticalement ou horizontalement. Peuvent-ils se retrouver sur la même case ?

Exercice 6 Sur une île déserte vivent 2024 caméléons. Au départ, 924 sont jaunes, 700 sont rouges et 400 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleur différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, il ne se passe rien. Au bout d'un an, tous les caméléons sur l'île sont devenus de la même couleur. Laquelle ?

Exercice 7 On part de 2^{2023} et, plusieurs fois, on retire son dernier chiffre au nombre pour l'ajouter au nombre sans le chiffre des unités. On répète cette opération jusqu'à n'avoir plus que dix chiffres. Prouver que deux d'entre eux sont égaux.

Exercice 8 On vous donne 20 cartes, chacune contenant exactement un chiffre. Chaque chiffre apparaît sur exactement deux cartes. Est-il possible de réarranger les cartes de telle manière à ce que pour chaque chiffre i, il y a exactement i cartes entre les deux cartes qui contiennent i ?

Solutions

Solution de l'exercice 1 Chaque opération d'Aline augmente de deux le nombre de parties dont elle dispose. On dispose donc d'un invariant : la parité du nombre de parties. Plus précisément, elle atteindra n'importe quel nombre impair de parties, mais aucun nombre pair. En particulier, elle n'aura jamais 2020 parties, mais elle finira nécessairement par en avoir 2023 à un moment donné.

Solution de l'exercice 2 On cherche ici une quantité qui ne varie pas. On remarque alors que la somme de tous les nombres écrits au tableau est un invariant. En effet, $x+y=\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}$. Au début, la somme vaut $S=2+3+5+7+11=28$. Supposons qu'après un certain nombre d'étapes, on se retrouve avec cinq nombres entiers égaux, on appelle a ce nombre. On aurait alors $28=S=5a$, soit $a=\frac{28}{5}$ qui n'est pas entier, contradiction.
On en déduit qu'il est impossible de se retrouver avec cinq nombre égaux.

Solution de l'exercice 3 On remarque ici que dans chaque groupe de 3, la somme des nombres est paire. En effet, si trois nombres x, y, z forment un groupe avec $z=x+y$, alors $x+y+z=2(x+y)$. Ainsi, la somme de tous les nombres est paire aussi (on ajoute des termes qui sont tous pairs). Or la somme des nombres vaut $1+2+3+\ldots+32+33=\frac{33\times 34}{2}=33\times 17$, ce qui est impair. Ce n'est donc pas possible de les répartir en groupes comme souhaité.

Solution de l'exercice 4 Considérons S la somme de tous les entiers écrits au tableau. Lorsqu'on choisit deux nombres $a \leq b$ pour les remplacer par $b-a$, la somme devient $S-a-b+(b-a)=S-2a$. La somme n'est donc pas un invariant. En revanche, on retire à S un nombre *pair*, donc la *parité* de la somme est un invariant.
Au début, la somme vaut $S=1+2+3+\ldots+2024=\frac{2024\times 2025}{2}=1012\times 2025$ qui est pair. La somme finale doit donc être paire également. On ne peut donc pas se retrouver avec un seul nombre égal à 1 à la fin (cela donnerait lieu à une somme finale impaire).

Solution de l'exercice 5 On colorie les cases de somme de coordonnées paire en rouge, les autres en bleu (on obtient une sorte de damier). À chaque tour, Théo et Antoine changent de couleur de case. Ils ne sont pas sur la même couleur au début, ils ne le seront donc jamais. En particulier, ils ne seront jamais sur la même case.

Solution de l'exercice 6 Soient J, R, V le nombre de caméléons jaunes, rouges, verts respectivement. Lorsque deux caméléons de couleur différente se rencontrent, disons jaune et vert, J prend la valeur $J-1$, V la valeur $V-1$ et R la valeur $R+2$. En particulier, $J-R, R-V$ et $V-J$ varient de 0 ou ± 3, donc *modulo* 3 ils ne varient pas.
Or au début, $J-R=924-700=224 \equiv 2 \pmod 3$, $R-V=700-400=300 \equiv 0 \pmod 3$ et $V-J=400-924=-524 \equiv 1 \pmod 3$. La seule possibilité pour que deux nombres soient égaux à 0 est que $R=V=0$. Donc la couleur restante est nécessairement jaune.

Remarquons qu'on n'a pas prouvé qu'il était possible que tous les caméléons deviennent jaune, mais on a prouvé que s'ils deviennent tous d'une couleur, c'est nécessairement jaune.

Solution de l'exercice 7 On reconnaît les critères de divisibilité par 3 ou 9 : le nombre ne change pas modulo 3. Or il existe exactement 10 chiffres, donc si les dix chiffres finaux étaient différents, il s'agirait exactement de l'ensemble de tous les chiffres. On devrait donc avoir $2^{2023} = 0 + 1 + 2 + \ldots + 8 + 9 = 0$ modulo 3, impossible car 2^{2023} n'est pas multiple de 3.

Solution de l'exercice 8 Soit p_k la position du premier chiffre k (entre 1 et 20). On sait que les deux chiffres k sont en position p_k et $p_k + k + 1$. La somme des positions vaut donc $1 + 2 + \ldots + 20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$, mais elle vaut également $[p_0 + (p_0 + 0 + 1)] + [p_1 + (p_1 + 1 + 1)] + [p_2 + (p_2 + 2 + 1)] + \ldots + [p_9 + (p_9 + 9 + 1)]$, ce qui vaut $10 + (0 + 1 + \ldots + 9) + 2(p_0 + p_1 + \ldots + p_9)$, d'où $210 = 10 + 45 + 2(p_0 + p_1 + \ldots + p_9)$, mais alors $2(p_0 + p_1 + \ldots + p_9) = 155$, et on a une contradiction sur la parité. Ce n'est donc pas possible de réarranger les cartes de cette manière.