TD Double Comptage

Antoine Derimay

Exercice 1
Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Exercice 2
A Valbonne, $n > 0$ problèmes sont accrochés à un mur. On remarque que chacun des m stagiaires a résolu au moins $n/2$ problèmes. Montrer qu'un problème a été résolu par au moins $m/2$ élèves.

Exercice 3
Montrer que
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Exercice 4
Montrer que
$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{n} = \binom{n+r+1}{n+1}.$$

Exercice 5
Une permutation de $\{1, ..., n\}$ est tirée au hasard. Combien a-t-elle de points fixes en moyenne ?

Exercice 6
Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et qu'un élève a toujours exactement l professeurs. Déterminer une relation entre m, n, k, l.

Exercice 7
Montrer que
$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} = \sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}.$$

Exercice 8
Montrer que, pour $0 \leqslant p \leqslant n$,
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = 2^{n-p}\binom{n}{p}$$

Exercice 9
Considérons un graphe non-orienté G. Soit p_2 le nombre de parcours orientés de longueur 2

(c'est-à-dire de 2 arêtes) dans G (à noter que parcourir une arête dans un sens et puis dans l'autre est un tel parcours), p_1 le nombre de parcours orientés de longueur 1 dans G et n le nombre de sommets de G. Par exemple, si G est un triangle, on a $p_2 = 12$, $p_1 = 6$ et $n = 3$. Montrer que

$$n \cdot p_2 \geqslant p_1^2.$$

Exercice 10
Autour d'une table ronde sont placée 11 chaises de façon régulière et devant chaque chaise il y a une carte avec le nom d'un des membres du comité des JBMO. Chacune des 11 cartes possède un nom différent. Au début de leur réunion les membres du comité se rendent compte qu'ils se sont tous assis devant une carte qui n'était pas la leur. Est-il possible de tourner la table de façon à ce qu'au moins 2 personnes se retrouvent devant leur propre carte ?

Exercice 11
Soit n un entier strictement positif. Soit S un ensemble de n points tels que trois points distincts quelconques de S ne sont pas alignés. Montrer qu'il y a au plus $\frac{2n(n-1)}{3}$ triangles d'aire 1 formés de trois points distincts dans S.

Exercice 12
Soit n et k deux entiers naturels. Soit S un ensemble de n points du plan tels que trois points distincts quelconque de S ne sont pas alignés, et pour tout P dans S, il existe un cercle de centre P qui contient au moins k points de S. Montrer que $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

Exercice 13
Soient $A_1, \ldots, A_n$ des sous-ensembles à r éléments d'un ensemble X, tels que $|A_i \cap A_j| \leqslant k$ pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Montrez que :

$$|X| \geqslant \frac{nr^2}{r + (n-1)k}.$$