On commencera par corriger les exercices $1, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 13, 17$ et d'autres s'il reste du temps, concentrez-vous donc sur ceux-là.

Exercices

Exercice 1
Est-ce qu'on a $100 \equiv 1 \pmod 3$? $\pmod 9$? $\pmod{11}$?
Est-ce qu'on a $15 \equiv 37 \pmod 5$? $\pmod{11}$?

Exercice 2
On suppose que n un multiple de 3, quelles sont les valeurs possibles de n modulo 9 ?

Exercice 3
Quelles sont les valeurs possibles de x^3 modulo 9 ?
Est-il possible d'avoir $x^3 + y^3 = z^3 + 4$?

Exercice 4
Quelles sont les valeurs possibles de x^2 modulo 4 ?
En déduire les parités possibles de x, y, z si on a $x^2 + y^2 = z^2$.

Exercice 5
Résoudre l'équation diophantienne $x^2 + y^2 = 206$.

Exercice 6
Montrer que si p et $p^2 + 2$ sont premiers, alors $p^3 + 2$ est premier.

Exercice 7
Pour quelles valeurs de $n \geqslant 2$ le nombre $n^{n-1} + 2n - 3$ est-il premier ?

Exercice 8
(Critères de divisibilité)
Soit n un entier. Montrer que n est divisible par...
1) 3 ou 9 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est.
2) 2 ou 5 si et seulement si son dernier chiffre l'est.
3) 4 si et seulement si ses deux derniers chiffres le sont.
4) En s'inspirant de 1), énoncer un critère de divisibilité par 11 et le démontrer.
123456784 est-il divisible par 11 ?

Exercice 9
Pour chaque question qui suit, indiquer si ce nombre possède un inverse pour ce modulo, et le trouver s'il existe.
a) 1 modulo 15
b) 47 modulo 24
c) 14 modulo 35
d) 12 modulo 17
e) 19 modulo 43

Exercice 10
Soit $p > 3$ un nombre premier, montrer que $p^2 \equiv 1 \pmod{24}$.

Exercice 11
Trouver les solutions entières de l'équation $x^3 - y^3 = 24$.

Exercice 12
Soit p premier. Quels sont les nombres qui sont égaux à leur inverse modulo p ?

Exercice 13
Quels sont les entiers positifs n tels que $\dfrac{9n^2+31}{n^2+7}$ soit entier ?

Exercice 14
Quel est le dernier chiffre de $2018^{2019^{2020}}$?

Exercice 15
Quel est le reste de la division euclidienne de $2018^{2019^{2020}}$ par 11 ?

Toujours des exercices, mais plus durs

Exercice 16
(Démonstration de petit Fermat)

1. Montrer que $(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \pmod p$.
2. En déduire que $a^p \equiv a \pmod p$.

Exercice 17
(Wilson)
On note $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ (prononcé factorielle n). Par exemple, $3! = 6, 6! = 720, 7! = 5040$.
1) Soit p un entier. Montrer que si $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, alors p est premier.
2) Faire l'exercice 15.
3) En regroupant les inversibles par paires, montrer que si p est premier, alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

On a ainsi donné un moyen de savoir avec certitude si un nombre est premier ou pas, sans regarder ses facteurs ! Cependant ce n'est pas très utile pour faire un programme disant si un nombre est premier ou non, puisque le calcul de $(p-1)!$ modulo p est très long.

Exercice 18
Soit n un entier impair, et on suppose que dans sa décomposition en facteurs premiers, les exposants sont toujours 1. Combien de nombres parmi $1, \ldots, n$ sont leurs propres inverses modulo n ?
Indice : commencer par faire l'exercice 15.

Exercice 19
Trouver tous les $p, q > 5$ premiers tels que $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$