Arithmétique groupe C : Théorème d'Euler-Fermat

4 Janvier 2025

Exercice 1
Déterminer le reste de la division euclidienne par 7 de $S = \sum_{k=1}^{10} 10^{10^k}$.

Exercice 2
Trouver les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que 7 divise $n^n - 3$.

Exercice 3
Soit n un entier impair, montrer que $n \mid 2^{n!} - 1$.

Exercice 4
Déterminer le reste de la division de $N = 2025^{2027^{2029}}$ par 43.

Exercice 5
À quelle condition un entier $n \in \mathbb{N}$ possède-t-il un multiple qui ne s'écrit qu'avec des 1 ?

Exercice 6
Soient A la somme des chiffres de 4444^{4444} et B la somme des chiffres de A.
Déterminer la somme des chiffres de B.

Exercice 7
Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \mid 2^{u_{n+1}} - 1.$$

Exercice 8
Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe n tel que p divise : $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Exercice 9
Trouver tous les couples d'entiers (a, n) tels que n divise $(a + 1)^n - a^n$.

Exercice 10
Trouver tous les entiers $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $2^m - 3^n = 1$.

Exercice 11
Soit p un nombre premier et $q \geq 1$ premier avec p.
Pour tout $n > 0$, on note t_n l'ordre de q modulo p^n.
Montrer que la suite $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ est constante à partir d'un certain rang.

Exercice 12
Trouver tous les triplets $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $2^a + 3^b = 5^c$

1. Dans le cas où $a = b = c$.
2. Dans le cas où b est impair.
3. Dans le cas général.