

EQUATIONS FONCTIONNELLES EN ARITHMÉTIQUE

Martin Rakovsky

Les équations fonctionnelles en théorie des nombres rassemblent le meilleur des deux monde : les raisonnements arithmétiques (divisibilité, étude des nombres premiers) sont utilisés pour enrichir les astuces de substitutions/étude de fonction propres aux équations fonctionnelles.

On distingue principalement trois types d'équations fonctionnelles en théorie des nombres :

- Les équations fonctionnelles faisant intervenir uniquement le caractère discret de \mathbb{N} . Malheureusement, ces EF sont des faux-amis : il n'y a pratiquement pas d'arithmétique, le caractère entier des fonctions sert à simplifier certaines équations algébriques, à transformer des inégalités strictes $x > y$ en inégalités larges $x \geq y + 1$ ou encore que si $a^2 + b^2 \leq C$, alors a et b prennent un nombre fini de valeurs possibles. Ce genre d'EF est généralement assez prévisible, souvent parce que dans ce cas l'EF donnée en énoncé ressemble "trop" à une EF classique.
- Les équations fonctionnelles ne faisant intervenir que des substitutions et de la divisibilité (et les arguments de taille qui vont avec). Ces EF sont souvent présentées sous la forme $LHS \mid RHS$.
- Les équations fonctionnelles qui font intervenir plus d'arithmétique, et notamment l'étude des nombres premiers. Elles peuvent prendre toutes les formes, y compris les formes du type 2. Donc essayez les idées qui répondent aux deux types.

Nous allons nous occuper dans ce TD d'EF principalement issues du troisième type. Pour des EF du deuxième type, on pensera à regarder le IMO SL 2013 N1 et le Balkan MO 2017 P3. Pour le présent TD, mes conseils sont les suivants :

- Utiliser les arguments de divisibilité habituels : encadrer une expression par deux multiples de n , un carré par deux carrés consécutifs, montrer qu'une différence est divisible par des entiers arbitrairement grands...
- Chercher les valeurs du type $f(p), f(pq), f(p^2), f(pn)$. Substituer un entier naturel par un nombre premier va souvent simplifier l'équation/apporter plus d'infos.
- Dans le cas d'une EF sous la forme $RHS \mid LHS$, ne pas juste chercher à simplifier le RHS. On peut être tenter de s'arranger pour que le RHS soit un nombre très simple. Mais en réalité, travailler pour que le RHS soit divisible par une expression simple suffit amplement. Par exemple, si on a une relation du type $m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$, substituer m par $f(n)$ permet d'obtenir $f(n) \mid RHS \mid LHS$ et donc $f(n) \mid n$.
- Toujours dans le cas d'un EF sous la forme $RHS \mid LHS$, on peut chercher à rendre le LHS simple, une puissance de p par exemple. Un argument en particulier à avoir sous le coude : si vous avez obtenu $f(p)$ pour tout p , alors le fait que $p \mid n^{p-1} - 1$ peut vous permettre de relier p à n , pour peu que l'EF fasse intervenir de la divisibilité.
- Toujours (et encore) dans le cas d'un EF sous la forme $RHS \mid LHS$, une fois que vous avez obtenu la valeur de f pour une infinité de valeurs, essayez de transformer la divisibilité en $LHS \mid f(a) - a$ avec a fixé et le LHS qui peut prendre une infinité de valeurs.
- Une stratégie se calquant sur plusieurs problèmes où f serait l'identité est d'étudier les diviseurs de $f(n+1) - f(n)$. Si on obtient une contradiction, cela donne $f(n+1) - f(n) = \pm 1$. Merci à Thomas Budzinski qui m'a montré cette technique.
- Dans le cas d'équations fonctionnelles très difficiles, ne pas hésiter à déployer l'artillerie lourde des boîtes noires. Les théorèmes suivants ont déjà vu une EF s'en servir : Dirichlet, LTE, Zsigmondy ou encore "un entier qui est un carré mod p pour tout p est un carré parfait".

Pour d'autres équations fonctionnelles arithmétiques, je vous renvoie à l'excellent cours de Thomas Budzinski donné au groupe D du stage d'été de Valbonne 2022.

Exercices

Problème 1. (Canada MO 2017) Soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une fonction telle que pour tout entier $n \geq 1$, $f(f(n))$ soit égal au nombre de diviseurs positifs de n . Montrer que si p est un nombre premier, alors $f(p)$ est aussi un nombre premier.

Problème 2. (TST Suisse 201?, P1) Trouver toutes les fonctions de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} telles que $f(p) > 0$ pour tout nombre premier p et pour tout p premier et x entier,

$$p \mid (f(x) + f(p))^{f(p)} - x.$$

Problème 3. (USA TSTST 2022, P4) Soit f une fonction de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* telle que, pour tout couple d'entiers strictement positifs m et n , exactement un seul des entiers

$$f(m+1), \dots, f(m+f(n))$$

est divisible par n . Montrer que $f(n) = n$ pour une infinité d'entiers n .

Problème 4. (Balkan MO SL 2020 N3) Soit $k \geq 2$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que ; pour tous entiers strictements positif x_1, \dots, x_k , on ait

$$x_1! + \dots + x_k! \mid f(x_1)! + \dots + f(x_k)!$$

Problème 5. (IMO SL 2019 N4) Soit C un entier naturel non nul. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous les entiers a et b de somme $a + b \geq C$, l'entier $a + f(b)$ divise $a^2 + bf(a)$.

Problème 6. (EGMO 2022 P2) Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que pour tous entiers a et b , on a

1. $f(ab) = f(a)f(b)$
2. Au moins deux des entiers $f(a)$, $f(b)$ et $f(a+b)$ sont égaux.

Problème 7. (IMO SL 2020 N5) Trouver les fonctions $f : \mathbb{N}_{\geq 1} \mapsto \mathbb{N}_{\geq 0}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour tous les entiers $x \geq 1$ et $y \geq 1$;
2. il existe une infinité d'entiers $n \geq 1$ tels que l'égalité $f(k) = f(n-k)$ est vraie pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$.

On note $\mathbb{N}_{\geq 0}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 0, et $\mathbb{N}_{\geq 1}$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 1.

Problème 8. (EMC 2021 P3 senior) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que

$$x^2 - y^2 + 2y(f(x) + f(y))$$

est un carré parfait pour tous $x, y > 0$.

Problème 9. (IMO SL 2008 N5) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que

- (i) $d(f(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{N}$.
- (ii) $f(xy)$ divise $(x-1)y^{xy-1}f(x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{N}$.

Problème 10. (SL ELMO 2014/N8) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telles que :

- (i) Les entiers $f(1), f(2), \dots$ sont premiers entre dans leur ensemble.
- (ii) Il existe $N \geq 1$ tel que pour tout $n \geq N$, $f(n) \neq 1$ et pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$f(a)^n \mid f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}.$$