PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 3 : ARITHMÉTIQUE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 FÉVRIER

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2n+4$ divise $6n+26$.

Exercice 2. Trouver le plus grand entier strictement positif d tel que pour tout entier positif a, on ait $d \mid a^7 - a$.

Exercice 3. Trouver tous les entiers strictement positifs x, y, z tels que :

$$x! + y^2 + 1 = z!.$$

Exercice 4. Trouver tous les triplets de nombres premiers (p, q, r) tels que $p^q + p^r$ soit un carré parfait.

Exercice 5. Pour deux entiers strictement positifs quelconques a et b, on définit l'opération

$$a \star b = \frac{a-b}{\operatorname{pgcd}(a,b)}.$$

Trouver tous les entiers strictement positifs n tels que pour tout entier strictement positif $m < n$, le nombre $n \star m$ est premier avec n.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 5$ un entier impair, Alice et Bob jouent au jeu suivant : Ils sélectionnent chacun leur tour, en commençant par Alice, un entier entre 1 et $n-1$ qui n'a pas déjà été pris à un tour précédent. On note A l'ensemble des entiers choisis par Alice et B l'ensemble de ceux choisis par Bob. Après cela, Alice donne deux entiers distincts $x_1, x_2 \in A$ à Bob, qui choisit ensuite deux entiers distincts $y_1, y_2 \in B$. Bob gagne si et seulement si :

$$\big(x_1 x_2 (x_1 - y_1)(x_2 - y_2)\big)^{\frac{n-1}{2}} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Pour quels n Bob a-t-il une stratégie gagnante ?

Exercice 7. Soient $a_1, a_2, \ldots a_{2025}$ des entiers avec $a_1 = 2^{2024} + 1$ et tels que pour tout $n \leqslant 2024$, a_{n+1} soit le plus grand facteur premier de $a_n^2 - 1$. Combien vaut $a_{2024} + a_{2025}$?

Exercice 8. Soit n un entier strictement positif tel que $n^5 + n^3 + 2n^2 + 2n + 2$ soit le cube d'un entier. Montrer que $2n^2 + n + 2$ n'est pas le cube d'un entier.

Exercice 9. Soient a et b deux entiers strictement positifs. On suppose qu'il existe une infinité de paires (m, n) d'entiers strictement positifs tels que $m^2 + an + b$ et $n^2 + am + b$ sont tous deux des carrés parfaits. Montrer que a divise $2b$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Trouver le plus grand entier strictement positif d tel que pour tout entier positif a, on ait $d \mid a^7 - a$.

Exercice 11. Trouver tous les entiers strictement positifs x, y, z tels que :

$$x! + y^2 + 1 = z!.$$

Exercice 12. Soit a, b deux entiers strictement positifs. Martin donne à chacun des $n > 1$ élèves du stage de Valbonne un rectangle de dimension $a \times b$. Chaque élève découpe ensuite son rectangle en plusieurs petits carrés identiques de côté entier (leur taille peut changer selon l'élève). Martin récupère ensuite tous les petits carrés et se rend compte qu'il y en a un nombre premier. Montrer que $a = b$.

Exercice 13. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite infinie d'entiers telle que :

— Pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a_{mn} = a_m a_n$.

— Il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_1, \ldots, a_n$ soit une permutation de $1, \ldots, n$.

Montrer que $a_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 14. Trouver tous les entiers strictement positifs n, m tels que nm divise $(2^{2^n} + 1)(2^{2^m} + 1)$.

Exercice 15. Alice découvre un entier $N > 1$ écrit au tableau, puis chaque jour elle efface l'entier x sur le tableau et le remplace par $\sqrt[3]{x}$ si ce nombre est entier, par $2x + 1$ sinon. Montrer que si Alice vit suffisamment longtemps, elle finira par écrire un entier supérieur à 2025^{2025}.

Exercice 16. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout couple (a, b) d'entiers strictement positifs $f(a)f(a + b) - ab$ soit un carré parfait.

Exercice 17. Un entier naturel est dit *descendant* si son écriture en base 10, $\overline{a_k a_{k-1} \cdots a_0}$, vérifie $a_k \geqslant a_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant a_0$. Un polynôme à coefficients réels P est dit *entier* si $P(n)$ est entier pour tout entier n, et *descendant-entier* si $P(n)$ est entier pour tout entier *descendant* n. Est-ce que tout polynôme *descendant-entier* est aussi *entier* ?

Exercice 18. Soit p un nombre premier tel que $\frac{p-1}{2}$ soit aussi premier, et soient a, b, c trois entiers non divisibles par p. Démontrer que le nombre d'entiers strictement positifs n tels que $n < p$ et p divise $a^n + b^n + c^n$ est inférieur strictement à $\sqrt{2p} + 1$.