STAGE OLYMPIQUE DE SAINT-CHÉRON

du 28 octobre au 1er novembre 2024

Avant-propos

Le stage olympique de Saint-Chéron s'est déroulé au centre Morogues Saulty et a été organisé par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler 40 élèves de collège et lycée, de passionnés de mathématiques.
Nous tenons à remercier Atout Groupes pour leur excellent accueil.

Table des matières

I. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Calculus (Clémentine)

Cours

Manipulations algébriques

Distributivité :

- $a(b + c) = ab + ac$
- $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Identités remarquables :

- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Egalités :

- $a = b$ si et seulement si $a - b = 0$
- $a = b$ si et seulement si $a + c = b + c$

Pour $c \neq 0$:

- $a = b$ si et seulement si $ac = bc$
- $a = b$ si et seulement si $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Inégalités :

- $a \geqslant b$ si et seulement si $a + c \geqslant b + c$
- Si $a \geqslant b$ et $c \geqslant 0$, alors $ac \geqslant bc$
- Si $a \geqslant b$ et $c > 0$, alors $\frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{c}$
- Si $a \geqslant b$ et $c \leqslant 0$, alors $ac \leqslant bc$
- Si $a \geqslant b$ et $c < 0$, alors $\frac{a}{c} \leqslant \frac{b}{c}$

Carré :

- Un carré est toujours positif.
- Si $0 < a < b$, alors $0 < a^2 < b^2$.
- Si $a < b < 0$, alors $0 < b^2 < a^2$.

Inverses de nombres non nuls :

- Si $0 < a \leqslant b$, alors $0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$
- Si $a \leqslant b < 0$, alors $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0$

Preuves

Ssi, implications, négations :

On dit qu'une proposition A *implique* une proposition B quand le fait que A soit vraie nous permet de dire que B est vraie : si A, alors B.

Exemple 1.
"Alice a tué Bob" implique "Bob est mort".

Un ssi, c'est un "si" dans les deux sens. Quand on a une proposition A est vraie si et seulement si une proposition B est vraie, cela veut dire que A est vraie si B est vraie et que B est vraie si A est vraie.

Exemple 2.
"Bob est mort" n'implique pas forcément "Alice a tué Bob".

On peut aussi dire que c'est une implication dans les deux sens (cela revient au même). Un ssi revient à faire une double-implication : A ssi B revient à dire A implique B et B implique A.
D'ailleurs, une méthode couramment utilisée pour faire une preuve de ssi et de prouver la double-implication dans les deux sens indépendemment.

Il peut être utile, lors de l'utilisation des ssi de ce genre, de savoir manipuler les négations : la négation d'une proposition est le contraire de la proposition. Si A est vraie, la négation de A n'est pas vraie. Si A n'est pas vraie, la négation de A est vraie.

Pour prouver qu'une proposition A implique une proposition B, on peut montrer que la négation de B implique la négation de A.

Exemple 3.
La négation de "Bob est mort" est "Bob n'est pas mort".
Si "Bob n'est pas mort", alors "Alice n'a pas tué Bob", ce qui est la négation de "Alice a tué Bob". Donc "Alice a tué Bob" implique "Bob est mort".

Exemple 4.
La négation de : "pour tout $x > 0$, $x^2 + 2x > 0$" est "il existe $x > 0$, $x^2 + 2x \leqslant 0$".

Absurde

Le principe de raisonnement par l'absurde est de faire une hypothèse et, par une suite d'implications, aboutir à une contradiction (à quelque chose de faux). Ceci montrera que l'hypothèse que l'on a faite au début était fausse.

Exemple 5.
Infinité de nombres premiers, irrationalité de $\sqrt{2}$.

Trouver le plus petit/grand entier k tel que...

Dans les exercices, il arrive que des problèmes demandent de trouver le plus petit/grand entier k qui vérifie une proposition donnée.
Dans ce genre d'exercice, pour prouver qu'un entier k est bien celui que l'on cherche, il y a deux étapes :

— prouver que l'entier que l'on a trouvé vérifie en effet notre proposition.

— tous les entiers inférieurs ne vérifient pas notre proposition.

Exemple 6.
Trouver le plus petit entier k tel que $2k+3$ soit multiple de 7.
Deux étapes pour montrer que le plus petit entier est 2 :
-$2 \cdot 2 + 3 = 7$ est multiple de 7
-3 et 5 ($k = 0$ ou 1) ne sont pas multiples de 7.

Ces deux étapes sont indispensables pour répondre à la question, on le voit assez clairement dans l'exemple ci-dessus : si on montre seulement que 0 ne vérifie pas la proposition, cela ne veut pas dire que 1 est le plus petit entier qui vérifie la proposition, car 1 ne vérifie pas la proposition ; si on montre que 9 vérifie la proposition, cela ne veut pas dire que c'est le plus petit entier qui vérifie la proposition, car 2 vérifie la proposition.

Exercices

Exercice 1
Factoriser : $A = 1 + a + b + ab$, $B = ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a$, $C = x^4 + 1$.

Exercice 2
Soient a, b, c, d quatre réels tels que $a < b < c < d$. On pose $x = (a+b)(c+d)$, $y = (a+c)(b+d)$ et $z = (a+d)(b+c)$. Comparer les nombres x, y et z.

Exercice 3
Soient a, b, c trois nombres positifs tels que $a^2 = b^2 + c^2$.
Simplifier l'écriture de $A = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$.

Exercice 4
Simplifier l'écriture de

$$X = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{1}{b+c-a} \times \frac{b^2 + c^2 - (b-c)^2}{a+b+c}$$

en précisant les conditions portant sur a, b, c pour que X existe.

Exercice 5
Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Exercice 6
Un groupe de n amis prend r photos distinctes (deux photos n'ont pas exactement les mêmes personnes) qui contiennent au moins une personne. Trouver le plus grand r tel que chaque personne apparaisse au plus une fois.

Exercice 7
Montrer que pour $n \geqslant 2$ un entier, $4n^2 - 1$ n'est pas premier.

Exercice 8
Les nombres x, y et z satisfont les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} x + y + 3z \geqslant 13 \\ x + 2y \geqslant 4 \\ x \geqslant 1 \end{cases}$$

Quelle est la valeur maximale de $x + y + z$?

Exercice 9
a) Montrer que pour tous nombres réels a et b strictement positifs (inégalité arithmético-géométrique) :

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

b) On considère trois nombres positifs tels que, pour chaque paire de nombres choisie, la différence entre la somme de ces deux nombres choisis et le nombre restant soit positive. Montrer que le produit de ces trois différences est inférieur au produit des trois nombres.

Exercice 10
Montrer que pour tous $x > 0$:

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2$$

Exercice 11
Soient a, b, c, d quatre réels strictement positifs tels que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Montrer que :

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Exercice 12
Soient a, b, c trois réels strictement positifs tels que $a \geqslant b \geqslant c$. Montrer que :

$$\frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} \geqslant 3a - 4b + c$$

Exercice 13
Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, ..., 31$ en utilisant k couleurs.

Solutions :

Solution de l'exercice 1

$$A = 1 + a + b + ab = 1 + b + a(1+b) = (a+1)(b+1).$$

$$\begin{array}{rcl} B & = & ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a \\ & = & a(b^2-c^2)+a^2(c-b)+bc^2-b^c \\ & = & a(b+c)(b-c)-a^2(b-c)-bc(b-c) \\ & = & (b-c)(a(b+c)-a^2-bc) \\ & = & (b-c)(ab+ac-a^2-bc) \\ & = & (b-c)(a(c-a)+b(a-c)) \\ & = & (b-c)(a-b)(a-c). \end{array}$$

Pour C, on remarque que $(x^2+1)^2 = C+2x^2$, on a donc :

$$C = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+1-\sqrt{2}x)(x^2+1+\sqrt{2}x) = (x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Solution de l'exercice 2
On s'intéresse à $x-y$:

$$\begin{array}{rcl} x-y & = & (a+b)(c+d)-(a+c)(b+d) \\ & = & ac+ad+bc+bd-ab-ad-bc-cd \\ & = & ac+bd-ab-cd \\ & = & a(c-b)+d(b-c) \\ & = & (a-d)(c-b) \end{array}$$

Or : $a-d<0$ et $c-b>0$ donc $x-y<0$ donc $x<y$.

On s'intéresse à $y-z$:

$$\begin{array}{rcl} y-z & = & (a+c)(b+d)-(a+d)(b+c) \\ & = & ab+ad+bc+cd-ab-ac-bd-cd \\ & = & ad+bc-ac-bd \\ & = & a(d-c)+b(c-d) \\ & = & (d-c)(a-b). \end{array}$$

Or : $a-b<0$ et $d-c>0$ donc $y-z<0$ donc $y<z$. Ainsi : $x<y<z$.

Solution de l'exercice 3

$$\begin{array}{rcl} A & = & \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)} \\ & = & \sqrt{(b^2+c^2-a^2+2bc)(a+b-c)(a-b+c)} \\ & = & \sqrt{2bc(a^2-c^2-b^2+2bc)} \\ & = & \sqrt{4(bc)^2} \\ & = & 2bc. \end{array}$$

Solution de l'exercice 4
On commence par s'intéresser aux conditions sur a,b,c pour que X existe.
Pour cela, il faut et suffit que les dénominateurs soient non nuls, c'est-à-dire :
$b\neq 0$, $c\neq 0$, $a+b+c\neq 0$ et $b+c-a\neq 0$.

$$\begin{aligned}
X &= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \frac{1}{b+c-a} \times \frac{b^2+c^2-(b-c)^2}{a+b+c} \\
&= \frac{((b+c)^2-a^2)(b^2+c^2-b^2-c^2+2bc)}{2bc(b+c-a)(a+b+c)} \\
&= \frac{(b+c-a)(b+c+a)(2bc)}{2bc(b+c-a)(a+b+c)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5
Supposons, par l'absurde, que $\frac{1}{3}$ soit un nombre décimal. Alors il existe a un entier et b un entier naturel tel que :

$$\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$$

Donc $10^b = 3a$. Or 10^b n'est pas divisible par 3, c'est absurde. Donc $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Solution de l'exercice 6
Analyse : On montre que $r \leqslant n$. Par l'absurde, si $r > n$. On peut utiliser le principe des tiroirs, les photos sont les chausettes et les personnes sont les tiroirs. Une chausette-photo va dans le tiroir d'une personne qui apparait dans sa photo. Il y a au moins un tiroir où l'on met deux chaussettes, car il y a plus de chaussettes que e tiroirs. Ainsi, une personne apparaitra sur au moins deux photos. Absurde !
Construction : Pour $r = n$ on prend une photo par personne. $r = n$ est donc le maximum recherché.

Solution de l'exercice 7
$4n^2 - 1 = (2n-1)(2n+1)$
$2n+1 \geqslant 5$ donc $2n-1 < 4n^2-1$. Or $2n-1 > 1$. Donc $4n^2-1$ a au moins un diviseur autre que lui-même et 1, il n'est donc pas premier.

Solution de l'exercice 8
En additionnant les trois inégalités on obtient :

$$3x + 3y + 3z \geqslant 18.$$

Donc $x + y + z \geqslant 6$.

Solution de l'exercice 9
a)

$$\begin{aligned}
& (a-b)^2 \geqslant 0 \\
\implies\ & a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \\
\implies\ & a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab \\
\implies\ & (a+b)^2 \geqslant 4ab \\
\implies\ & a + b \geqslant 2\sqrt{ab}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Il est aussi possible de calculer : $(\frac{a+b}{2})^2 - ab$.

b) Posons : $x = a+b-c$, $y = a+c-b$ et $z = b+c-a$. Alors, x, y, z sont trois nombres positifs. De plus :

$$a = \frac{x+y}{2}, b = \frac{x+z}{2}, c = \frac{y+z}{2}$$

Comparer le produit des trois différences et le produit des nombres a, b et c revient à comparer les produits xyz et $\frac{x+y}{2} \times \frac{y+z}{2} \times \frac{z+x}{2}$.
Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ d'après le (a).
On en déduit que :

$$\sqrt{xy} \times \sqrt{yz} \times \sqrt{zw} \leqslant \frac{x+y}{2} \times \frac{y+z}{2} \times \frac{z+x}{2}$$

Donc $(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leqslant abc$.

Solution de l'exercice 10

$$\begin{aligned} & (x-1)^2 \geqslant 0 \\ \Longrightarrow\ & x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \\ \Longrightarrow\ & x^2 + 1 \geqslant 2x \\ \Longrightarrow\ & x + \tfrac{1}{x} \geqslant 2. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11
Soient $a, b, c, d > 0$, on suppose que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, donc $ad < bc$, donc $bc - ad > 0$.

$$\frac{a+b}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{b(a+c) - a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{bc - ad}{b(b+d)} > 0$$

Donc

$$\frac{a+c}{b+d} > \frac{a}{b}$$

De même,

$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{cb - ad}{d(b+d)} > 0$$

Donc

$$\frac{c}{d} > \frac{a+c}{b+d}$$

D'où

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

Solution de l'exercice 12
Soient $a, b, c > 0$ tels que $a \geqslant b \geqslant c$.

$$\begin{aligned} \frac{a^2-b^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a} + \frac{a^2-c^2}{b} &= \left(\frac{a+b}{c}\right)(a-b) + \left(\frac{c+b}{a}\right)(c-b) + \left(\frac{a+c}{b}\right)(a-c) \\ &\geqslant 2(a-b) + 2(c-b) + (a-c) = 3a - 4b + c \end{aligned}$$

Car $a+b \geqslant 2c$ puique $a \geqslant b \geqslant c$.
De même, $c+b \leqslant 2a$ mais en multipliant par $(c-b) \leqslant 0$, on change le signe de l'égalité :

$0 \geqslant (\frac{c+b}{a})(c-b) \geqslant 2(c-b)$.
Enfin, $a+c \geqslant b$ puisque $c > 0$.

Solution de l'exercice 13
Analyse : On montre que $k \geqslant 4$. On considère les nombres $2, 4, 8$ et 16. 2 divise les 3 autres donc 2 n'est de la couleur d'aucun des autres. De même, 4 divise 8 et 16 il n'a donc la couleur d'aucun des autres. Et 8 divise 16 ils ont donc chacun une couleur différente. On a bien $k \geqslant 4$.
Construction : On colorie les nombres de 2 à 3 en rouge, de 4 à 7 en bleu, de 8 à 15 en vert et de 16 à 31 en jaune. On peut vérifier que la construction marche (C'est parce que pour m divise n et $m \neq n$, on a que $n \geqslant 2m$.)

2 Principe des tiroirs (Ysaline)

Cours

Théorème 1 (Lemme des tiroirs)**.**
Si $n+1$ chaussettes sont dans n tiroirs, alors deux chaussettes sont dans le même tiroir.

Généralisation : Si n chaussettes sont dans k tiroirs, alors au moins $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ chaussettes sont dans le même tiroir.

Exercices

Exercice 1
Si 46 élèves tentent de rentrer dans 9 salles de cours. Montrer qu'au moins 6 élèves sont dans la même salle.

Exercice 2
Soit 3 nombres entiers, montrer qu'il y en a deux qui sont de la même parité.

Exercice 3
Combien d'élèves faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (on considère aussi le 29 février)

Exercice 4
Des personnes sont dans une pièce. Montrer que deux personnes ont le même nombre d'amis (la relation d'amitié est réciproque).

Exercice 5
Estimer le nombre minimal de personnes pour lesquelles on peut être sûr qu'ils ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête en Australie.

Exercice 6
Soit 8 nombres, montrer que l'on peut en trouver deux tels que 7 divise leur différence.

Exercice 7
On place des $-1, 0, 1$ sur une grille 3×3. On regarde les sommes sur chacune des lignes, chacune des colonnes et chacune des diagonales. Montrer que deux de ces sommes sont égales.

Exercice 8
Soit un carré de côté 2. On place au hasard 5 points dans le carré. Montrer que l'on peut trouver deux points qui sont distants d'au plus $\sqrt{2}$.

Exercice 9
Soit un triangle d'aire égale à 1 et 9 points à l'intérieur de celui-ci. Montrer que l'on peut en trouver trois qui déterminent un triangle d'aire inférieure à $\frac{1}{4}$.

Exercice 10
On colorie le plan de deux couleurs différentes, montrer qu'il existe deux points de la même couleur à un mètre de distance.

Exercice 11
Sur un tableau sont écrits 20 nombres distincts entre 1 et 64. Sur un autre tableau sont écrites toutes les différences (non nulles, sinon ça n'a pas d'intérêt) qu'on puisse calculer avec ces nombres. Montrer qu'un nombre est écrit quatre fois sur ce deuxième tableau.

Exercice 12
(analogie avec le problème des huit dames) Combien de fous au maximum on peut disposer sur un échiquier sans qu'aucun d'eux ne soit en prise (en ne tenant pas compte de leurs couleurs) ?

Exercice 13
On place 6 points dans un rectangle 4×3. Montrez qu'on peut en trouver deux à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.

Exercice 14
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, ..., 20\}$ pour être sûr que cette sélection inclue deux entiers a et b tels que $a - b = 2$?

Exercice 15
Montrer que le produit de cinq nombres entiers strictement positifs consécutifs ne peut pas être le carré d'un nombre entier.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Les élèves sont les chaussettes, les salles sont les tiroirs. On a $46 = 5\times9+1$. D'après le principe des tiroirs généralisé, il y a au moins $\lceil\frac{46}{9}\rceil = 6$ élèves dans une salle.

On peut aussi voir ça de la façon suivante : si on avait 45 élèves à répartir dans 9 salles, on pourrait se débrouiller pour avoir exactement 5 élèves par salle. En rajoutant un 46[e] élève, on doit donc forcément le mettre dans une salle avec déjà 5 élèves (car toutes les salles ont 5 élèves). D'où le résultat.

Solution de l'exercice 2
Un nombre est soit pair, soit impair. Il y a donc que 2 tiroirs. Ainsi parmi 3 nombres, 2 sont de la même parité.

Solution de l'exercice 3
Les élèves sont les chaussettes, les dates d'anniversaire sont les tiroirs.

D'après le principe des tiroirs généralisé, avec $733 = 2 \times 366 + 1$ élèves, il y a un jour avec au moins 3 anniversaires.

Par ailleurs, si on a un nombre d'élèves plus petit que 733, on pourra s'arranger pour mettre au plus deux personnes par date d'anniversaire puisque $732 = 2\times 366$. Attention cette partie de la solution est importante, ce n'est pas assez de dire que 733 marche, il faut aussi montrer que c'est le plus petit en montrant que les nombres plus petits ne marchent pas !

Solution de l'exercice 4
Soit n le nombre de personnes. Une personne a entre 0 et $n-1$ amis (il ne peut être ami avec lui-même). De plus il ne peut y avoir une personne qui ne possède aucun ami et une personne qui en possède $n-1$. Donc il y au plus $n-1$ valeurs pour le nombre d'amis. Par le principe des tiroirs, deux personnes ont le même nombre d'amis.

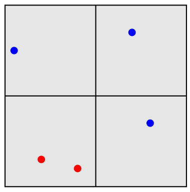
Solution de l'exercice 5
Il est certain qu'au moins quatre personnes en Australie ont exactement le même nombre de cheveux sur leur tête. En effet il est raisonnable de supposer que personne n'a plus de 6 000 000 cheveux sur la tête (une tête normale a environ 100 000 cheveux). Or l'Australie compte plus de 24 000 000 habitants. Si nous associons à chaque nombre de cheveux sur une tête un tiroir, et si nous plaçons chaque Australien dans le tiroir correspondant à son nombre de cheveux sur la tête, alors d'après le principe des tiroirs, comme il y a quatre fois plus d'Australiens que de tiroirs, on peut affirmer qu'il existe au moins quatre Australiens ayant le même nombre de cheveux.

Solution de l'exercice 6
Regardons les restes de la division par n des $n+1$ nombres. Ces restes prennent des valeurs entre 0 et $n-1$, soit n valeurs distinctes. On possède donc deux nombres ayant le même reste. Soit a, b ces deux nombres.

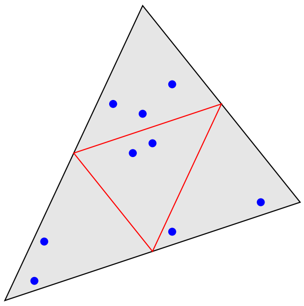
$$a = nk + r, \quad b = nk' + r \quad \Rightarrow \quad a - b = n(k-k')$$

Donc $n|a-b$. Avec $n = 7$, on a le résultat attendu.

Solution de l'exercice 7
Une somme prend des valeurs dans $[\![-3\ ,\ 3]\!]$. Il y a donc 7 possibilités. Or on étudie 8 sommes donc par le principe des tiroirs, deux sommes sont égales.



Solution de l'exercice 8
Découpons notre carré en 4 carrés de côté 1. Comme il y a 5 points, deux sont dans le même carré. Ainsi ils sont distant d'au plus $\sqrt{2}$ (la diagonale du carré).

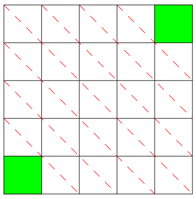
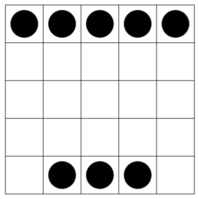


Solution de l'exercice 9
On découpe le triangle en 4 triangles d'aire $\frac{1}{4}$, et d'après le principe des tiroirs généralisé l'un au moins de ces petits triangles contiendra au moins trois points, délimitant une aire inférieure au quart de celle du grand triangle.

Solution de l'exercice 10
On dessine un triangle équilatéral de côté 1. D'après le principe des tiroirs, il y a deux des sommets de ce triangle qui sont de la même couleur, et ils sont bien à un mètre de distance.

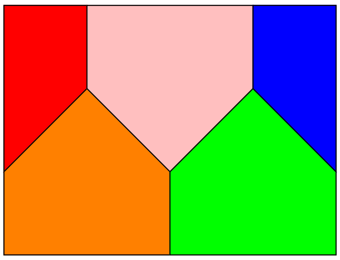
Solution de l'exercice 11
La difficulté de cet exercice consiste à compter le nombre de différences qu'on peut obtenir pour ensuite pouvoir appliquer le principe des tiroirs au bon nombre de chaussettes.
Chaque couple (x, y) avec $x \neq y$ donne lieu à une différence : on a $20 \times 19 = 380$ couples de nombres distincts, donc 380 différences écrites au tableau.
Ces nombres varient entre 63 et -63, ce qui laisse 127 possibilités de valeurs (i.e. tiroirs). Or 0 ne peut pas être écrit au tableau. Ça fait donc 126 valeurs possibles.
On peut appliquer le principe des tiroirs avec 126 tiroirs et 380 chaussettes, puisque $126 \times 3 = 378 < 380$.

Solution de l'exercice 12
On peut montrer en exhibant un exemple bien choisi que la bonne réponse est supérieure ou égale à 14.
Pour montrer qu'elle est également inférieure ou égale à 14, et donc égale à 14, on peut avoir recours au principe des tiroirs.
Pour cela on subdivise astucieusement l'échiquier en 14 groupes de cases de telle sorte que deux fous posés sur deux cases d'un même groupe se menacent forcément : le principe des tiroirs permet alors d'affirmer qu'il est impossible de disposer 15 fous sans qu'au moins deux d'entre eux soient placés dans un même groupe et se menacent mutuellement.

Solution de l'exercice 13
Pour obtenir $\sqrt{5}$ comme dans l'exercice 8, il faut un (triangle) rectangle de côté 1 et 2. Cependant, cela ne suffit pas car le découpage en rectangle en utilise 6, ce qui ne permet pas d'utiliser le principe des tiroirs. On trouve alors ce découpage

On a bien 5 zones, et deux points de la même zone sont à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{5}$.



Solution de l'exercice 14
Considérons les tiroirs de la forme $\{1,3\}$, $\{2,4\}$, $\{5,7\}$, $\{6,8\}$, $\{9,11\}$, $\{10,12\}$, $\{13,15\}$, $\{14,16\}$, $\{17,19\}$, $\{18,20\}$.
En choisissant 11 entiers, par le principe des tiroirs, il en existera deux qui seront dans le même tiroir, et donc de différence 2.
Cette quantité est bien minimale car l'ensemble $\{1,2,5,6,9,10,13,14,17,18\}$ est de taille 10 et ne contient pas de tels entiers a et b.

Solution de l'exercice 15
Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Si l'un des nombres est multiple de p, alors aucun des autres nombres ne l'est (sinon, la différence entre ces deux nombres serait supérieure à 5). Donc ce nombre est multiple de p^2.
On regarde maintenant pour les nombres premiers strictement inférieurs à 5, c'est à dire 2 et 3.
Chacun des 5 nombres appartient à l'une de ces catégories, selon le nombre de facteurs 2 et 3 dans sa décomposition :

1. un carré
2. deux fois un carré
3. trois fois un carré
4. six fois un carré.

Par le principe des tiroirs, une des catégories contient deux nombres. Si ces deux nombres sont dans les catégories 2, 3 ou 4, alors leur différence vaut au moins 6, ce qui n'est pas possible.

Si ces deux nombres sont des carrés, alors ce sont 1 et 4 (les seuls tels que la différence est inférieure à 6), ce qui ne laisse que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, qui n'est pas un carré.

3 Angle tangentiel (Eva)

On commence par définir l'angle tangentiel puis on l'applique aux bissectrices.

Définition 1. (Tangente)
La tangente (d) à un cercle C de centre O en un point P est la droite perpendiculaire à (OP) passant par P. On dit alors que la droite (d) et le cercle C sont tangents.

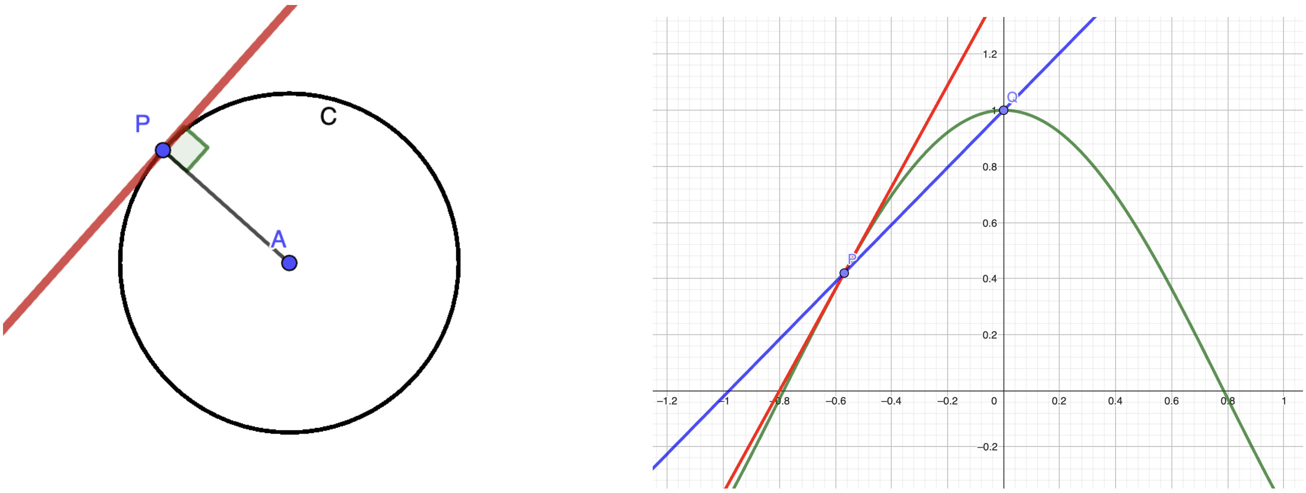


FIGURE 1 – À gauche : Tangente en rouge. À droite : Tangente à une courbe.

Remarque 2. *Pour d'autres courbes que des cercles, on définira la tangente à un point P sur la courbe comme la limite de la droite secante reliant P à un autre point Q de la courbe lorsque Q tend vers P.*

Théorème 3 (Théorème de la Tangente)**.**
Soit Γ un cercle, et trois points distincts A, B et C sur ce cercle. Soit (d) la tangente en B à Γ.
Alors l'angle entre la tangente et $[BC]$ est égal à l'angle $\widehat{BAC}$.

Remarque 4. On en donnera deux :

— *Astuce pour repérer les angles égaux : les angles qui interceptent le même arc ont la même mesure si les points sont sur le même cercle.*

— *Pour se convaincre intuitivement du résultat, le théorème de l'angle inscrit est vrai quelque soit la place du point D sur le cercle, même si $D = B$!*

Démonstration. Voir Figure 3 On pose $\widehat{BAC} = \gamma$, M le milieu de $[AB]$ et O le centre du cercle circonscrit à ACB.
Le triangle OMB est rectangle en M (car OM est la médiatrice de $[AB]$).
De plus, le triangle AOB est isocèle, donc $\widehat{AOM} = \widehat{BOM} = \gamma$ (angle au centre).
Ainsi, dans le triangle MOB, on a :

$$\widehat{MBO} = 180° - 90° - \widehat{MOB} = 90° - \gamma.$$

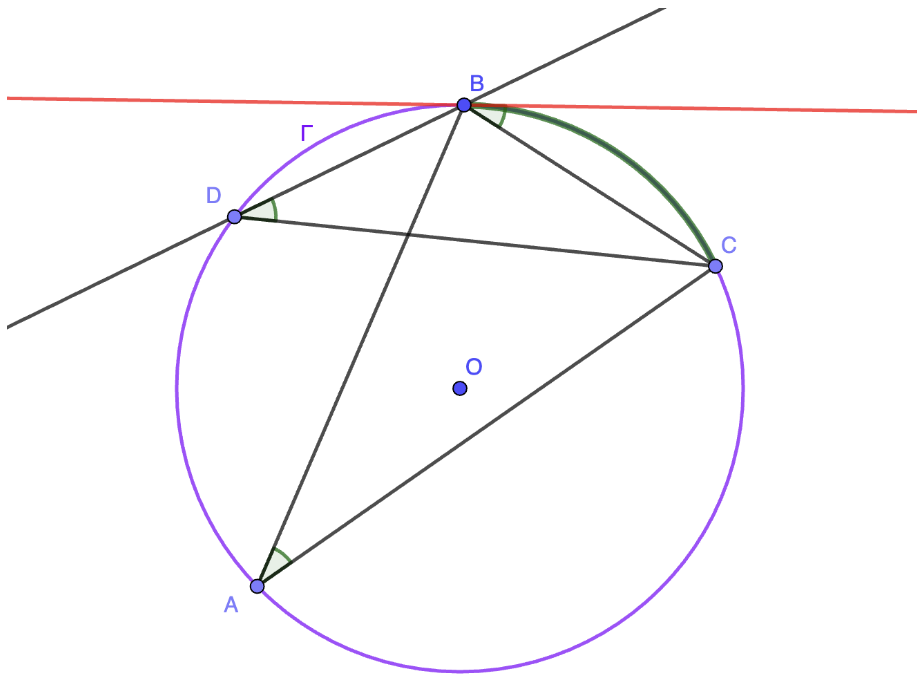


FIGURE 2 – Théorème de la Tangente aussi appelé angle tangentiel

De plus, OB et la tangente à Γ en O sont perpendiculaires d'après la définition de la tangente.

Donc, l'angle entre AB et la tangente D vaut :

$$90° - (90° - \gamma) = \gamma.$$

$\square$

Exercice 1
Soit un triangle ABC et son cercle circonscrit ω. On note D l'intersection entre les tangentes à ω en B et C. On a de plus $\widehat{ABC} = 62°$ et $\widehat{ACB} = 43°$. Trouver la mesure de l'angle $\widehat{BDC}$.

Solution de l'exercice 1
Comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, $\widehat{BAC} = 180 - 62 - 43 = 75°$. D'après le théorème de la tangente, $\widehat{CBD} = \widehat{BCD} = 75$. Donc $\widehat{BDC} = 180 - 75 - 75 = 30°$.

Remarque 6. Il est souvent utile de remarquer que le triangle formé par les points de tangences et l'intersection des tangentes est isocèle (ici le triangle BCD est isocèle en D).

Exercice 2
Soit ABC un triangle. Les tangentes au cercle (ABC) en B et C se coupent en T. La parallèle à (AB) passant par T coupe (AC) au point S. Montrer que $AS = BS$.

Solution de l'exercice 2
L'idée de la preuve est de trouver un cercle pertinent dans la figure. Le cercle qui nous intéresse est le cercle circonscrit aux points B, C, S, et T, que nous allons prouver être cocycliques.

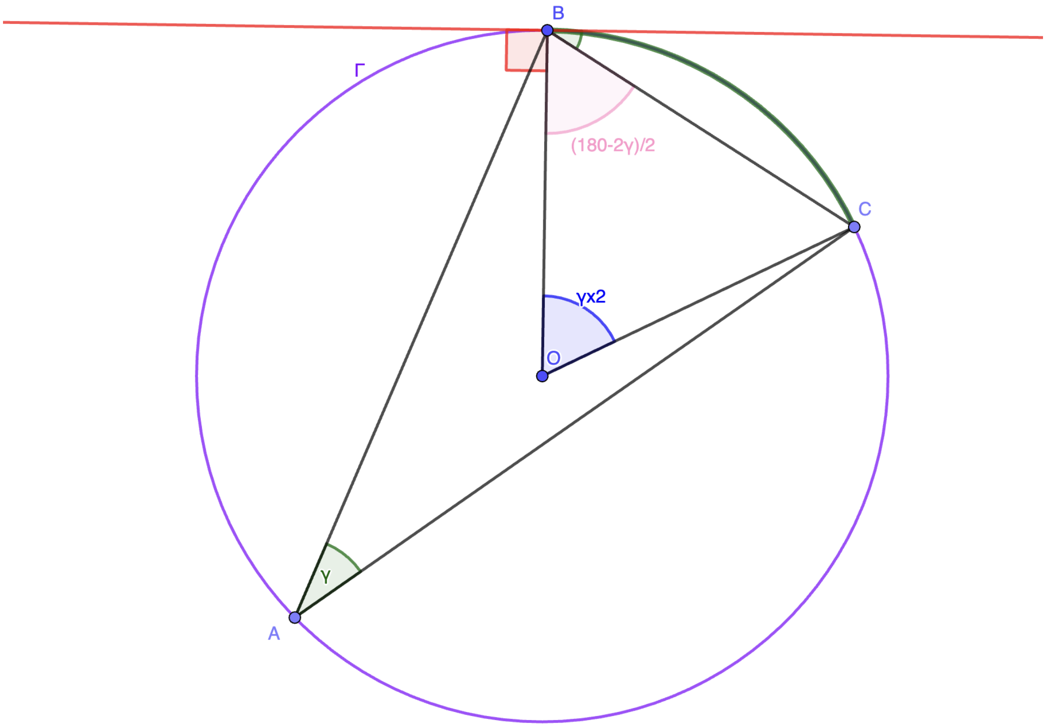


FIGURE 3 – Démonstration du théorème de la tangente.

Commençons par la chasse aux angles. Puisque $TS//AB$, on a $\widehat{STB} = 180° - \widehat{TBA}$. Ensuite, comme (TB) est tangente au cercle (ABC), on a $\widehat{TBC} = \widehat{BAC}$.

Comme A, C, et S sont alignés,

$$\begin{aligned}
\widehat{SCB} &= 180 - \widehat{ACB} \\
&= \widehat{BAC} + \widehat{ABC} \\
&= \widehat{TBC} + \widehat{ABC} \text{ \textit{(d'après le résutat précédent)}} \\
&= \widehat{TBA} \\
&= 180° - \widehat{STB}
\end{aligned}$$

Ce qui implique que les points S, B, C, et T sont cocycliques.

Maintenant, pour montrer que $AS = BS$, il nous suffit de prouver que le triangle ASB est isocèle, c'est-à-dire que $\widehat{SAB} = \widehat{SBA}$.

En utilisant de nouveau la chasse aux angles, nous avons que $\widehat{SAB} = \widehat{TCB}$ par angle tangentiel, et puisque les points S, B, C, et T sont cocycliques, on obtient que $\widehat{TCB} = \widehat{TSB}$ par angle inscrit.

Finalement, puisque $TS//AB$, on conclut que $\widehat{TSB} = \widehat{SBA}$ par angles alterne-interne. Donc $\widehat{SAB} = \widehat{SBA}$, ce qui prouve que $AS = BS$.

Exercice 3

Par un point A d'un cercle de centre O, on mène une tangente à ce cercle et on prend deux

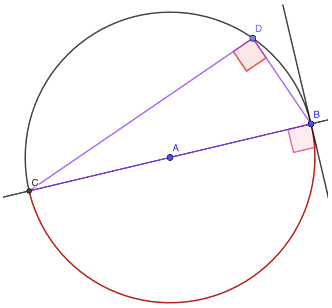


FIGURE 4 – A est le milieu de $[BC]$

Corollaire 5. Tout triangle dont les trois sommets sont sur un cercle dont un diamètre est le plus grand côté de ce triangle est un triangle rectangle.
Cela revient aussi à dire que le centre du cercle circonscrit à un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse du triangle.

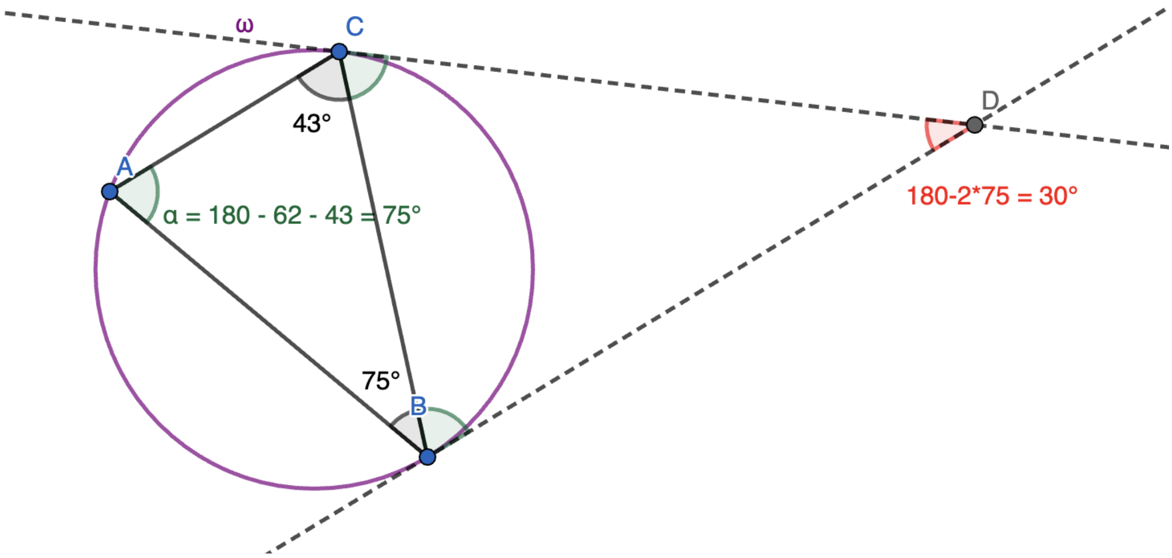


FIGURE 5 – Exercice 1

points B et C sur cette tangente, avec C entre A et B. Depuis B et C, on mène (BD) et (CE) tangentes au cercle. Montrer que $\widehat{BOC} = \widehat{DAE}$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
Soit $\alpha = \widehat{BDE}$ et $\beta = \widehat{CEA}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\alpha = \widehat{DAE}$.

Puisque (CA) et (CE) sont les deux tangentes menées à partir de C, on a $\widehat{EAC} = \widehat{CEA} = \beta$.

En ce qui concerne $\widehat{BOC}$, on peut l'écrire comme $\widehat{BOA} - \widehat{COA}$. Or, ABD est isocèle en B, donc la hauteur issue de B est confondue avec la médiatrice de $[AD]$ et comme la médiatrice d'une corde d'un cercle passe par le centre du cercle, donc $(BO) \perp (AD)$. De plus, $(OA) \perp (AC)$ par définition de la tangente. Ainsi, on a $\widehat{BOA} = \widehat{DAC} = \alpha + \beta$, et de même $\widehat{COA} = \beta$ (Si deux triangles rectangles partagent en plus un autre angle en commun, ils ont trois angles égaux).

Finalement, on obtient $\widehat{BOC} = \alpha = \widehat{DAE}$, ce qu'il fallait démontrer.

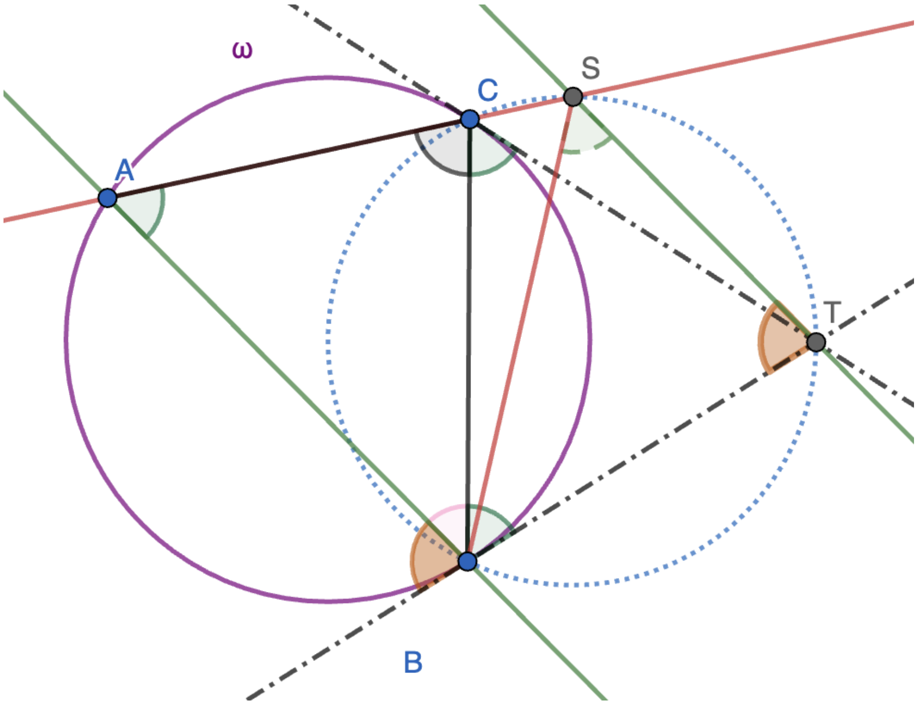


FIGURE 6 – Exercice 2

Bissectrices et tangentes

Définition 7. (Projeté orthogonal)
Le projeté orthogonal d'un point P sur une droite (d) est le point d'intersection de (d) et de la perpendiculaire à (d) passant par P.

Définition 8. (Hauteur d'un triangle)
Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A.

Définition 9. (Bissectrice)
La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui le partage en deux angles adjacents de même mesure.

Définition 10. (Distance d'un point à une droite)
La distance d'un point A à une droite (d) est la plus petite distance entre A et un point D de la droite (d).

Proposition 11. Soit A un point et (d) une droite. Soit H le projeté orthogonal de A sur (d). La distance de A à (d) est égale à AH.

Démonstration.
Pour tout point D de (d), le triangle AHD est rectangle en H, donc $[AD]$ est l'hypoténuse. Or, l'hypoténuse d'un triangle rectangle est son plus long côté. Par conséquent, $AD \geqslant AH$ pour tout D, ce qui signifie que AH est minimale (et que H appartient bien à (d)). Ainsi, la distance de A à (d) est effectivement AH.

□

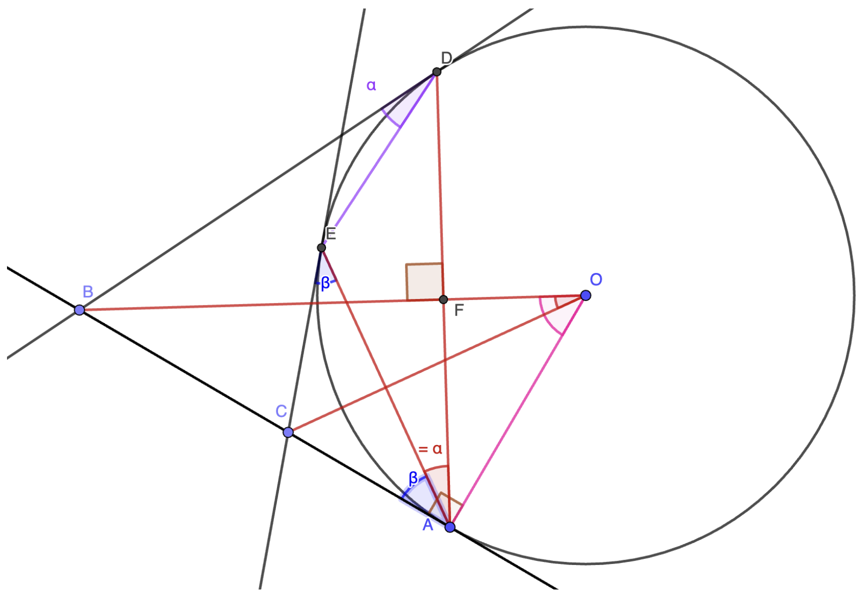


FIGURE 7 – Exercice 3

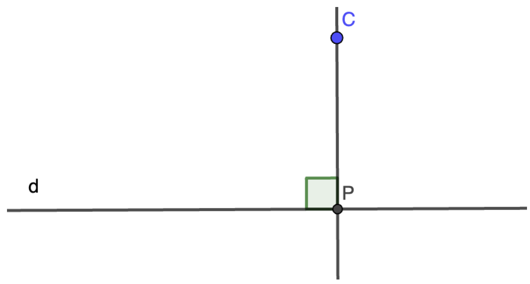


FIGURE 8 – Porjeté orthogonal

Proposition 12. Un point est sur la bissectrice d'un angle si et seulement s'il est équidistant des deux côtés de cet angle.

Démonstration. On procède en montrant les deux implications :

$\Longrightarrow$. **Si un point est sur la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des deux côtés de l'angle.**

Soit O le sommet de l'angle $\widehat{ABC}$ et soit D un point quelconque sur la bissectrice de cet angle. Par définition de la bissectrice, l'angle est divisé en deux angles égaux :

$$\widehat{ABD} = \widehat{DBC}.$$

Considérons la distance de D aux côtés AB et BC (les segments perpendiculaires de D à chaque côté). Puisque D se trouve sur la bissectrice, ces deux angles étant égaux, les triangles $\triangle ADB$ et $\triangle BDC$ sont isométriques (selon le critère d'égalité des triangles ayant un côté et les angles adjacents égaux).

Par conséquent, les distances de D aux côtés AB et BC sont égales. On en conclut que si un point est sur la bissectrice d'un angle, il est équidistant des deux côtés de cet angle.

$\Longleftarrow$. **Si un point est équidistant des deux côtés de l'angle, alors il est sur la bissectrice de l'angle.**

Soit D un point tel que la distance de D aux côtés AB et BC de l'angle $\widehat{ABC}$ soit la même. Considérons les segments perpendiculaires de D aux côtés AB et BC. Puisque ces distances sont égales, les triangles $\triangle ADB$ et $\triangle BDC$ sont encore isométriques (selon le critère de deux côtés égaux et un angle droit commun). On déduit que les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DBC}$ sont égaux.

Cela signifie que le point D se trouve sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, car il divise cet angle en deux angles égaux.

□

Exercice 4
(Test de sélection Junior 2021-2022)

Soit Ω un cercle de diamètre $[BC]$. Soit A un point sur la tangente à Ω en B. Le cercle de centre B et de rayon A recoupe Ω en un point D, de sorte que A et D sont du même côté de $[BC]$. La droite (AD) recoupe Ω en un point E. Montrer que $AE = BE$.

Solution de l'exercice 4
On note $\widehat{BAD} = \alpha$. Comme ADB est isocèle en B, $\widehat{ADB} = \alpha$. Donc $\widehat{ABD} = 180° - 2\alpha$. Par angle tangentiel, $\widehat{DEB} = 180 - 2\alpha$. Donc $\widehat{ABE} = \alpha$.

Cercle inscrit

Théorème 13 (Centre du cercle inscrit - version 1)**.**

Dans un triangle ABC, les bissectrices des trois angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ sont concourantes en un point I. Ce point I est équidistant des côtés (AB), (BC) et (CA).

Démonstration. Soit ABC un triangle, et soit I le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$. D'après la proposition 2.10, I est équidistant des côtés (BC) et (BA) d'une part, et de (CB) et (CA) d'autre part. Ainsi, I est également équidistant de (AC) et (AB). Donc, d'après la proposition 12, I appartient aussi à la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

Les trois bissectrices sont donc concourantes en I. □

Alternative :

Théorème 14 (Centre du cercle inscrit - version 2)**.**
Soit ABC un triangle. Alors, les trois bissectrices issues de A, B et C s'intersectent en un point I, le centre du cercle inscrit au triangle ABC (le cercle à l'intérieur du triangle et tangent aux trois côtés).

Démonstration. – Définissons I comme le point d'intersection de la bissectrice issue de A et de la bissectrice issue de C. Soient I_a, I_b et I_c les points respectifs appartenant à $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, tels que $(II_a) \perp (BC)$, $(II_b) \perp (CA)$ et $(II_c) \perp (AB)$. – On veut d'abord montrer que $II_a = II_b = II_c$, ce qui prouvera que I est le centre du cercle inscrit à ABC, puisque les côtés de ABC seront alors perpendiculaires au rayon du cercle inscrit.

– Comme I est sur la bissectrice issue de A, on a $II_c = II_b$. De même, comme I est sur la bissectrice issue de C, on a $II_b = II_a$.

– Donc, $II_a = II_b = II_c$, ce qu'on voulait démontrer.

– On veut maintenant montrer que I est également sur la bissectrice issue de B, en prouvant que $\widehat{IBI_c} = \widehat{IBI_a}$.

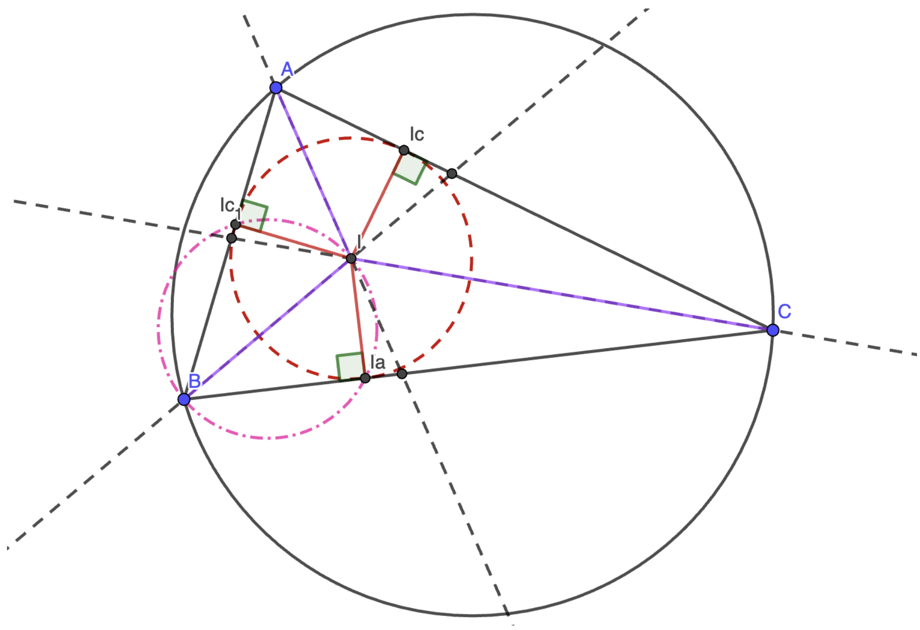


FIGURE 9 – Cercle inscrit

– Par le théorème de l'angle inscrit (version 2), les points I_c, I, I_b et B sont concycliques. Donc, $\widehat{IBI_c} = \widehat{I_aI_cI}$ et $\widehat{I_aBI} = \widehat{I_aI_cI}$.

– Il reste à montrer que $\widehat{I_aI_cI} = \widehat{I_aI_cI}$, ce qui est vrai car I_cI_aI est isocèle en I, puisque $I_cI = I_aI$. □

Théorème 15.
Avec les mêmes notations,
$x = AI_c = AI_b = \frac{AB+AC-BC}{2}$, $y = BI_c = BI_a = \frac{BA+BC-AC}{2}$ et $z = CI_b = CI_a = \frac{CA+CB-AB}{2}$

Démonstration. - On a $AI_c = AI_b$, $BI_c = BI_a$ et $CI_b = CI_a$, car les deux tangentes à un même cercle passant par un même point sont de même longueur. Appelons ces longueurs respectivement x, y et z.

- Soit P le périmètre de ABC. On a alors $AB + BC + CA = P = 2x + 2y + 2z$, et également $AB = x + y$, $BC = y + z$, et $CA = z + x$.

- En divisant P par 2, on obtient :

$$\frac{AB + BC + CA}{2} = x + y + z$$

et en soustrayant BC des deux côtés, on obtient la formule souhaitée :

$$\frac{AB + CA - BC}{2} = x.$$

- En appliquant une démarche similaire, on obtient y et z :

$$y = \frac{BA + BC - AC}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{CA + CB - AB}{2}.$$

□

Exercice 5
Démontrer l'existence des cercles exinscrits. Un cercle exinscrit est tangent aux trois droites qui forment un triangle. Son centre est l'intersection de deux bissectrices extérieures.

On définit une bissectrice extérieure comme la droite qui bissecte l'angle supplémentaire à celui du sommet du triangle.

Solution de l'exercice 5
De la même manière que la preuve du théorème 13

Exercice 6
Soit Γ un cercle, A et B sur le cercle de sorte que $[AB]$ soit un diamètre du cercle. C un autre point sur le cercle. On trace le cercle inscrit au triangle ABC, ses points de tangence sont respectivement A', B' et C' sur les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. Combien vaut l'angle $\widehat{B'C'A'}$?

Solution de l'exercice 6

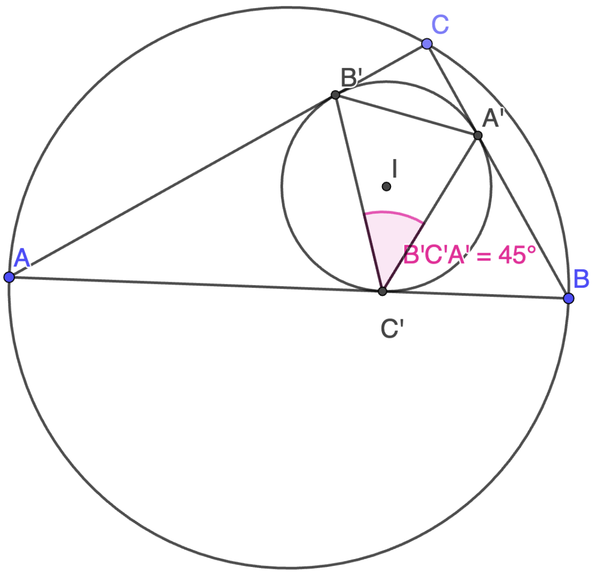


FIGURE 10 – Exercice 6

Il y a plusieurs façons d'arriver au même résultat avec différentes chasses aux angles, en voici une :

D'après le corollaire 5, le triangle ABC est rectangle en C. Donc l'angle $\widehat{ACB} = 90°$. Or les droites $(B'C)$ et (CA') sont tangentes au cercle inscrit, donc le triangle $CB'A'$ est isocèle en C.

Ainsi l'angle $\widehat{CA'B'} = \dfrac{180-90}{2} = 45°$. Enfin, par angle tangentiel, $\widehat{CA'B'} = \widehat{B'CA'} = 45$ degrés.

Exercice 7
Montrer que l'orthocentre du triangle acutangle *(non rectangle dont les trois angles sont aigus)* ABC est le centre du cercle inscrit du triangle formé par les trois pieds des hauteurs (appelé triangle orthique).

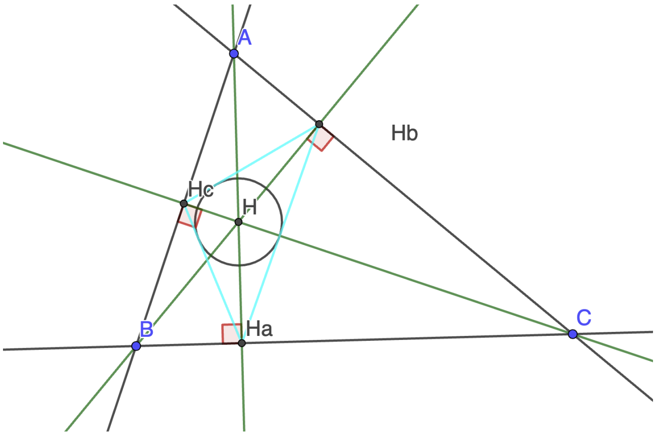


FIGURE 11 – Exercice 7

Solution de l'exercice 7
On va montrer que l'orthocentre H est l'intersection des bissectrices du triangle $H_AH_BH_C$. On a $\widehat{HH_AB} = 90° = \widehat{HH_BB}$, donc les point H, H_C, B et H_A sont cocycliques.

Ainsi par angle inscrit, $\widehat{HH_AB} = \widehat{HBH_C}$. Comme le triangle ABH_B est rectangle en H_B, on a $\widehat{BAH_B} = 90 - \widehat{HH_BB} = 90 - \widehat{HH_AB}$.

De plus, le triangle CH_CA est aussi rectangle en H_C, il vient donc que $\widehat{ACH_C} = \widehat{HH_AB}$.

Les points H, H_B, H_A et C sont aussi cocycliques donc par angle inscrit, $\widehat{ACH_C} = \widehat{HH_AH_B}$.

D'où $\widehat{HH_AB} = \widehat{HH_AH_B}$. Donc H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{H_CH_AH_B}$.

Mutatis mutandis [1], on montre également que H est sur la bissectrice des autres angles du triangle orthique. Donc H est bien le centre du cercle inscrit au triangle orthique.

Voir cette page (archive) pour une autre solution et d'autres propriétés du triangle.

Remarque 16. Si le triangle ABC est rectangle, alors H est confondua avec l'angle droit et le cercle tangent devient un point, c'est un cas dégénéré qu'on ne considère donc pas ici.

Si le triangle ABC n'est pas acutangle, ni rectangle, il a donc un angle obtus, donc l'intersection des hauteurs H est en dehors du triangle, et c'est le centre d'un cercle exinscrit à $H_AH_BH_C$

Exercice 8
(Bonus car pas vraiment de tangente)

Un triangle a des côtés de longueur 3, 4 et 5. Déterminer le rayon du cercle inscrit (cercle intérieur au triangle et tangent aux trois côtés).

Solution de l'exercice 8
Si l'on appelle I le centre du cercle inscrit et r le rayon du cercle inscrit, alors r représente la hauteur de chacun des triangles IAB, IBC et ICA. Par conséquent, l'aire de ces triangles est donnée par :

$$\frac{1}{2}r \times AB, \quad \frac{1}{2}r \times BC, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}r \times CA$$

1. ***Mutatis mutandis*** est une locution latine, signifiant littéralement « ce qui devait être changé ayant été changé » et que l'on pourrait traduire de façon plus actuelle par « une fois effectuées les modifications nécessaires ». Elle permet de surligner l'analogie dans des démonstrations notamment.

La somme de ces aires vaut donc :

$$r \times \frac{1}{2}(AB + BC + CA) = r \times p$$

en appelant p le demi-périmètre, défini par $p = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$.

Or, la somme de ces trois aires est précisément l'aire S du triangle ABC, quel que soit le point I à l'intérieur du triangle. En utilisant le théorème de Pythagore, comme $3^2 + 4^2 = 5^2$, nous confirmons que ce triangle est rectangle.

Ainsi, son aire est :

$$S = \frac{1}{2}(3 \times 4) = 6$$

et son demi-périmètre est :

$$p = \frac{1}{2}(3 + 4 + 5) = 6$$

On en déduit alors que le rayon de son cercle inscrit vaut :

$$r = \frac{S}{p} = \frac{6}{6} = 1$$

Exercice 9

Soit A, B, C et D 4 points cocycliques tel que le quadrilatère formé par les 4 points est inscriptible. On note E, F, G et H dans cet ordre les points de tangence montrer que (FH) et (EG) (les diagonales) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 9

Voir la vidéo de correction sur la chaîne YouTube de la POFM : Entraînement à la chasse aux angles (tangents) [Geo-AB-13]

Exercice 10

(Pour les plus rapides, utilise des homothéties - *issu d'un ancien poly POFM de stage Junior*)

Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$. Soit P le point d'intersection des deux tangentes extérieures communes aux deux cercles, notées t_1 et t_2.

Les points O et S sont respectivement les points d'intersection de t_1 avec Γ_1 et Γ_2, et les points M et G sont ceux d'intersection de t_2 avec Γ_1 et Γ_2.

Montrez que le quadrilatère $OMGS$ est circonscriptible, c'est-à-dire qu'il existe un cercle C à l'intérieur de $OMGS$ tel que les côtés de $OMGS$ soient tangents à C.

Solution de l'exercice 10

La solution présentée n'est qu'un fil conducteur de la solution complète, il manque certaines étapes intermédiaires.

— Soit b la bissectrice de $\angle OPM$. b coupe Γ_1 en A et B, et Γ_2 en C et S (avec P, A et B dans le même ordre que P, C et D). De plus, b coupe le segment $[OM]$ en R, et $[SG]$ en T. Soit I_1 le centre de Γ_1.

— Puisque t_1 et t_2 sont des tangentes à Γ_1 et Γ_2, alors $PO = PM$ et $PS = PG$. On a donc deux triangles isocèles avec le même angle au sommet, ce qui implique que $(OM) \parallel (SG)$.

— Il existe alors une homothétie de centre P qui envoie O sur S, M sur G, A sur C, B sur D, et R sur T. Le rapport de cette homothétie est donné par $\frac{PA}{PB} = \frac{PR}{PT} = \ldots$.

— De plus, la tangente en A à Γ_1, notée d_1, est parallèle à la droite (OM), et la tangente en B à Γ_1, notée d_2, est parallèle à $[SG]$. En effet, b étant l'axe de symétrie de la figure, le triangle formé par (PO), (PM) et d_1 est isocèle en P avec un angle au sommet P identique à celui de OPM. De même, le triangle formé par (PO), (PM) et d_2 est aussi isocèle en P avec un angle au sommet P identique à celui de SPG.

— Or, $\frac{PA}{PB} = \frac{PR}{PT}$ équivaut à $\frac{PA}{PR} = \frac{PB}{PT}$, ce qui implique qu'il existe une homothétie de centre P qui envoie A sur R, d_1 sur (OM), B sur T, et d_2 sur (SG), avec un rapport donné par $\frac{PA}{PR} = \frac{PB}{PT} = \ldots$.

— Cette dernière homothétie envoie également O sur un point de la droite PO et M sur un point de la droite PM. Elle envoie ainsi le cercle Γ_1 sur un autre cercle Γ qui est tangent à (PO), (PM), tangent en R à (OM) et tangent en T à (SG).

— Par conséquent, le quadrilatère $OMGS$ est bien circonscriptible.

4 Triangles semblables (Vincent)

Ce cours est intégralement tiré du cours qu'ont donné Clémentine Pialoux et Rémi Lesbats à Valbonne en 2024.

Cours

Définition 1.
On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont *semblables* lorsqu'ils sont proportionnels l'un à l'autre, c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel $k > 0$ tel que

$$k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \ ;$$

autrement dit, quitte à augmenter la taille de l'un, en le faisant tourner, en le déplaçant ou en le retournant, on peut le superposer avec l'autre. Cela se note : $ABC \sim A'B'C'$.

Attention : Quand on parle de triangles semblables, l'ordre des sommets est important. Ainsi, en général, ABC n'est *pas* semblable à BAC.

Théorème 2. Les énoncés suivants sont équivalents :

— Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

— Les trois égalités $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ et $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$ sont valides.

— Deux des égalités $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ et $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$ sont valides.

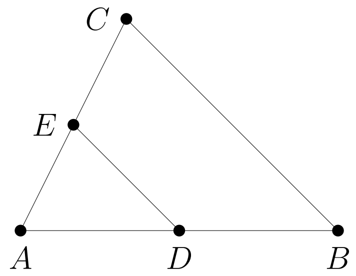
— On a $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'}$, et l'une des égalités $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ ou $\widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$ est valide.

Exercices

Seuls les exercices 1 à 3 ont été résolus durant la séance ; on en donne donc des solutions possibles. On pourra trouver dans le cours de Clémentine Pialoux et Rémi Lesbats, en pages 133 à 138 du polycopié du stage Olympique de Valbonne 2024, des solutions aux autres exercices.

Exercice 1 (Droite des milieux)
Soit ABC un triangle, D le milieu de $[AB]$, et E le milieu de $[AC]$. Démontrer que (BC) est parallèle à (DE).

Solution de l'exercice 1
Puisque $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$ et $AB/AD = 2 = AC/AE$, les triangles ABC et ADE sont semblables. On en déduit que $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$, ce qui signifie que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

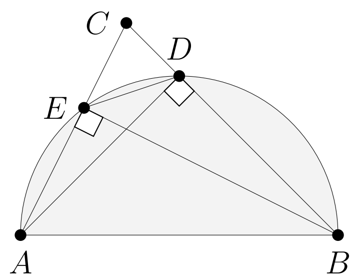


Exercice 2
Soit ABC un triangle. Soit D le pied de la hauteur issue de A, et E le pied de la hauteur issue de B. Démontrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Solution de l'exercice 2
Puisque $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90°$, les points D et E appartiennent au cercle de diamètre $[AB]$. Ainsi, les quatre points A, B, D et E sont cocycliques, donc

$$\widehat{DEC} = 180° - \widehat{AED} = \widehat{DBA} = \widehat{CBA}$$

et, de même, $\widehat{EDC} = \widehat{BCA}$. Les triangles ABC et CDE sont donc bien semblables.

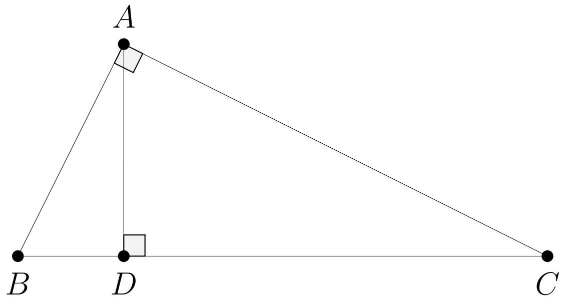


Exercice 3 (Théorème de Pythagore)
Soit ABC un triangle rectangle en A. Démontrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Solution de l'exercice 3
Soit D le pied de la hauteur issue de A. Puisque $\widehat{BCA} = \widehat{ACD}$ et $\widehat{CAB} = 90° = \widehat{CDA} = 90°$,

les triangles BCA et ACD sont semblables. De même, BCA et BAD sont semblables. On en déduit que $BD/BA = AD/AC = AB/BC$ et $AD/BA = AC/BC = CD/CA$, de sorte que

$$AB^2 + AC^2 = BD \times BC + BC \times CD = BC(BD + CD) = BC^2.$$



Exercice 4 (Puissance d'un point)
Soit A, B, C, D des points disposés dans cet ordre sur un cercle. On suppose que les droites (AB) et (CD) se coupent en un point P, et que les droites (AC) et (BD) se coupent en un point Q. Démontrer que $PA \times PB = PC \times PD$ et que $QA \times QC = QB \times QD$.

Exercice 5 (Puissance d'un point, le retour)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que les droites (AB) et (CD) se coupent en un point P, et que les droites (AC) et (BD) se coupent en un point Q. Démontrer que $PA \times PB = PC \times PD$ si et seulement si $QA \times QC = QB \times QD$.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un parallélogramme, et M un point de $[AC]$. Soit E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$, et F le projeté orthogonal de M sur $[AD]$. Démontrer que $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{AD}{AB}$.

Exercice 7 (Théorème de Ptolémée)
Soit A, B, C, D des points disposés dans cet ordre sur un cercle. Démontrer que $AC \times BD = AB \times DC + AD \times BC$.

Exercice 8
Soit $ABCD$ un losange, E un point situé sur $[AB$, et F un point situé sur $[AD]$. On suppose que (BD) et (CF) se coupent un en point L, que (BD) et (CE) se coupent en un point K, que (CD) et (EL) se coupent en un point P, et que (BC) et (FK) se coupent en un point Q. Démontrer que $CP = CQ$.

Exercice 9
Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2, qui se coupent en deux points X et Y. Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y. On note B le point d'intersection de (AY) avec Ω_2, autre que Y lui-même. Démontrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

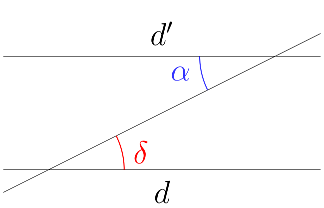
II. Groupe B

1 Révision de chasse aux angles (Martin)

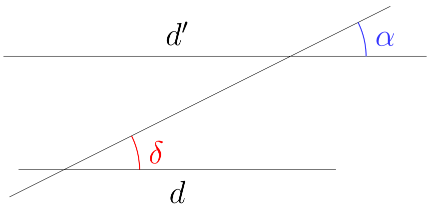
Rappels

Rappelons quelques utilisations de la chasse aux angles :

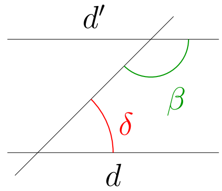
- **Montrer que deux droites sont parallèles :** on utilise pour cela l'équivalence entre droites parallèles et égalité d'angles alternes/internes ou d'angles correspondants :



$\delta = \alpha \Leftrightarrow d \,||\, d'$

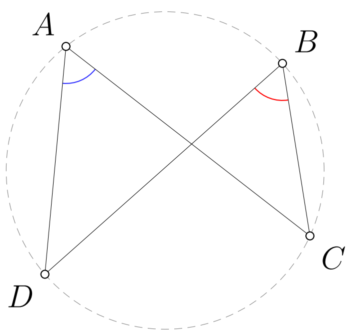


$\delta = \alpha \Leftrightarrow d \,||\, d'$

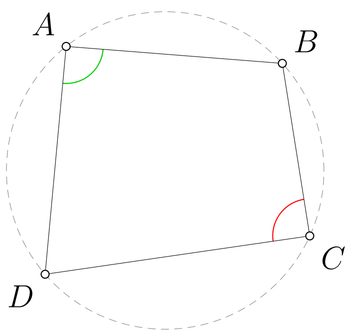


$\delta = 180° - \beta \Leftrightarrow d \,||\, d'$

- **Montrer que quatre points sont cocycliques :** Il s'agit d'exploiter la réciproque du théorème de l'angle inscrit, sous ses deux formes :



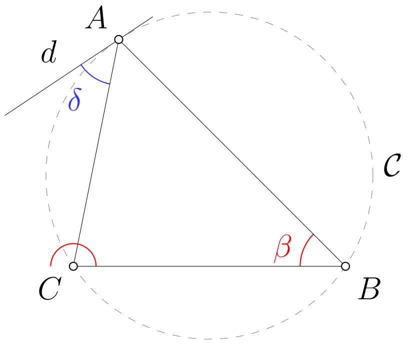
$\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$
$\Leftrightarrow$ A,B,C et D cocycliques



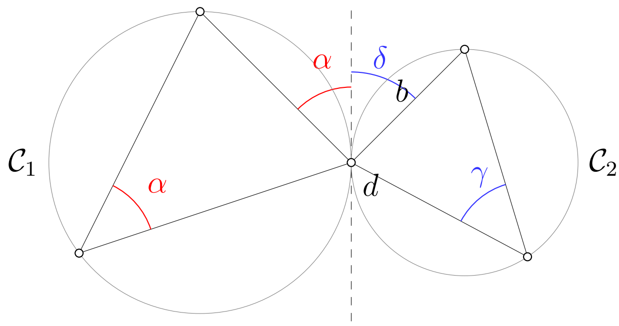
$\widehat{DAB} = 180° - \widehat{DCB}$
$\Leftrightarrow$ A,B,C et D cocycliques

Une remarque très importante est que souvent, obtenir que quatre points sont cocycliques fournit immédiatement plusieurs nouvelles égalités d'angles. Ainsi, si vous avez montré que A, B, C et D sont cocycliques grâce à l'égalité d'angles de la configuration de gauche, vous obtenez également l'égalité d'angle de la figure de droite (ou réciproquement). Obtenir une égalité à partir de l'autre est souvent une étape des exercices.

- **Montrer qu'une droite et un cercle sont tangents :** Il s'agit une fois de plus d'exploiter la réciproque du théorème de l'angle inscrit, mais dans le cas tangentiel cette fois-ci (figure de gauche).



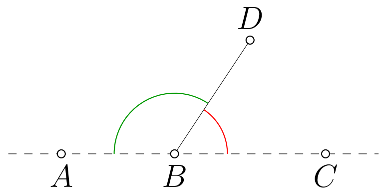
$\beta = \delta \Leftrightarrow$ d tangente à $\mathcal{C}$ en A



$\gamma = \delta \Rightarrow \mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ tangents en X

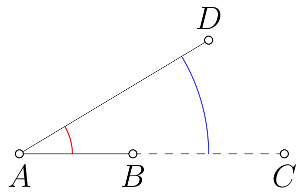
Lorsque l'on souhaite montrer que deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont tangents en un point X, la méthode canonique consiste à introduire la tangente d à $\mathcal{C}_1$ en X et à montrer que d est tangente à $\mathcal{C}_2$ en X, via l'angle tangentiel (figure de droite).

- **Montrer que trois points sont alignés :** Il s'agit là d'une astuce un peu plus élaborée. La méthode naïve pour montrer que trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre est d'utiliser les autres points de la figure pour montrer que $\widehat{ABC} = 180°$ (figure de gauche). On attire votre attention sur une autre façon, plus astucieuse, d'utiliser les autres points de la figure (figure de droite) :



$\widehat{CBD} = 180° - \widehat{DBA}$

$\Leftrightarrow$ A,B,C et D alignés



$\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$

$\Leftrightarrow$ A,B,C et D alignés

On pourra ensuite traiter les exercices suivants :

Exercices

Exercice 1

(Test de sélection Junior 2021-2022) Soit ω un cercle de diamètre $[BC]$. Soit A un point sur la tangente à ω en B. Le cercle de centre B et de rayon A recoupe ω en un point D, de sorte que A et D sont du même côté de $[BC]$. La droite (AD) recoupe ω en un point E. Montrer que $AE = BE$.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Exercice 3
(Pan African Maths Olympiad 2016 P1) Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points M et N. Une tangente commune touche $\mathcal{C}_1$ en P et $\mathcal{C}_2$ en Q, de sorte que la droite est plus proche de N que de M. La droite (PN) recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en R.

Montrer que la droite (MQ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMR}$.

Exercice 4
(Envoi Pot Pourri 2019-2020 P4) Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. La hauteur issue de A recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point D. La hauteur issue de B recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point E. La droite (ED) coupe les côtés $[AC]$ et $[BC]$ respectivement en les points P et Q. Montrer que les points P, Q, B et A sont cocycliques.

Exercice 5
(Test de sélection junior 2021-2022) Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit D un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (AD) et (BD) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1 et B_1. Le cercle circonscrit au triangle B_1DA recoupe la droite (AC) au point P. Le cercle circonscrit au triangle A_1BD recoupe la droite (BC) au point Q.

Démontrer que le quadrilatère $CPDQ$ est un parallélogramme.

Exercice 6
Soit ABC un triangle non isocèle en A et Ω son cercle circonscrit. La tangente au cercle Ω au point A coupe la droite (BC) au point P. Soit D le point du segment $[BC]$ tel que $PA = PD$. Montrer que $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, H_B le pied de la hauteur issue du sommet B et H_C le pied de la hauteur issue du sommet C. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que la droite (MH_B) est tangente au cercle circonscrit au triangle AH_BH_C.

Exercice 8
(Envoi Pot Pourri 2019-2020 P13) Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. La perpendiculaire à la droite (AD) passant par le point B recoupe le cercle circonscrit au triangle ADB en un point E. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les points A, O et E sont alignés.

Exercice 9
(JBMO SL 2022 G1) Soit $ABCDE$ un pentagone inscrit dans un cercle et dans lequel $BC = DE$ et les droites (AB) et (DE) sont parallèles. On note X, Y et Z les milieux des segments $[BD], [CE]$ et $[AE]$. Montrer que la droite (AE) est tangente au cercle circonscrit au triangle XYZ.

Exercice 10
(JBMO 2024 P2) Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$. Le cercle $A-$exinscrit est tangent aux droites (AB), (AC) et (BC) aux points D, E et F respectivement. On note J le centre du cercle $A-$exinscrit. Soit P un point sur le segment $[BC]$. Le cercle circonscrit aux triangles BDP et CEP se recoupent au point Q. La perpendiculaire à (FJ) passant par A coupe (FJ) en R.

Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

(Le cercle $A-$exinscrit est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C.)

Exercice 11
(JBMO 2016 P1) Soit $ABCD$ un trapèze (avec $(AB > CD$ et (AB) et (CD) parallèles). On suppose que le trapèze possède un cercle inscrit de centre I. Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent à la droite (AB) en M et à (AC) en N. Montrer que le point I appartient à la droite (MN).

Solutions

Exercice 1
(Test de sélection Junior 2021-2022) Soit ω un cercle de diamètre $[BC]$. Soit A un point sur la tangente à ω en B. Le cercle de centre B et de rayon A recoupe ω en un point D, de sorte que A et D sont du même côté de $[BC]$. La droite (AD) recoupe ω en un point E. Montrer que $AE = BE$. Soit $ABCD$ un rectangle. Soit ω le demi-cercle de diamètre $[BC]$, de sorte que le point A et le demi-cercle ω sont situés du même côté par rapport au segment $[BC]$. Le cercle de centre B et de rayon AB recoupe le demi-cercle ω au point E. La droite (AE) recoupe le demi-cercle ω au point F. Montrer que $AF = BF$.

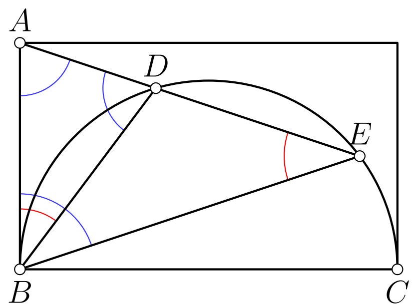
Solution de l'exercice 1
Tout d'abord, l'énoncé nous indique que $BA = BD$, de sorte que le triangle ABD est isocèle en B. En outre, puisque (AB) est tangente à ω, on sait que

$$\widehat{DBA} = \widehat{DEB} = \widehat{ADB}.$$

Il vient

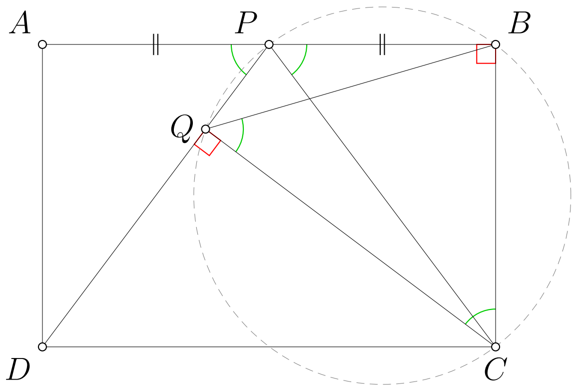
$$\widehat{ABE} = 180° - \widehat{AEB} - \widehat{EAB} = 180° - \widehat{ABD} - \widehat{BAD} = \widehat{ADB} = \widehat{EAB}.$$

Le triangle ABE est donc bien isocèle.



Exercice 2
Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Solution de l'exercice 2



Puisque $\widehat{PQC} = 90° = 180° - 90° = 180° - \widehat{PBC}$, les points Q, P, B et C sont cocycliques. Il vient que $\widehat{CQB} = \widehat{CPB}$.

Les points B et C sont les symétriques respectifs des points A et D par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. On déduit que $\widehat{CPB} = \widehat{DPA}$.

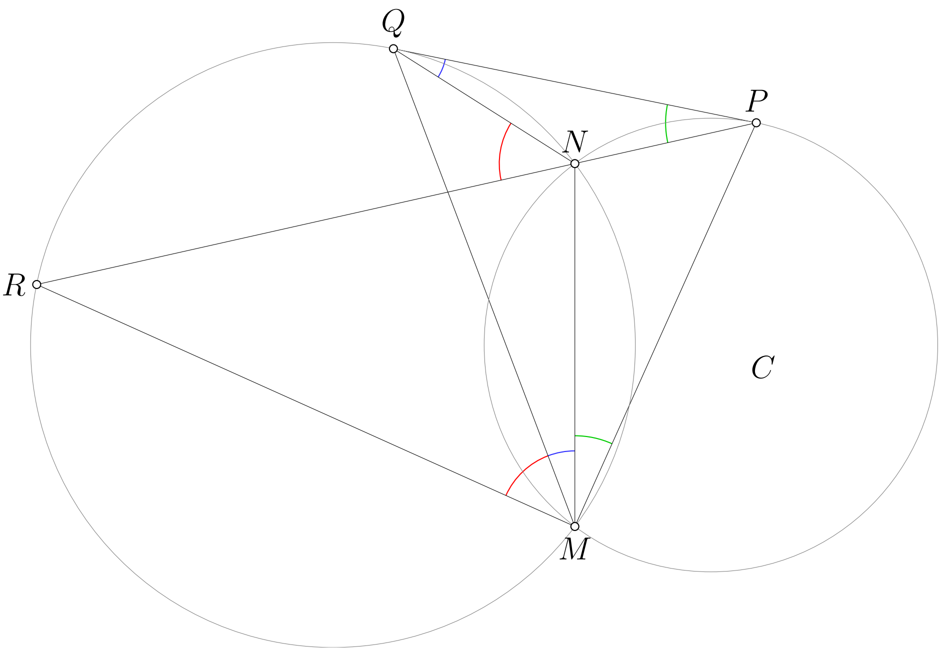
Les points Q, P, B et C sont cocycliques, donc $\widehat{DPA} = 180° - \widehat{QPB} = \widehat{QCB}$. On a donc finalement $\widehat{QCB} = \widehat{BQC}$ et le triangle BQC est isocèle en B.

Exercice 3

(Pan African Maths Olympiad 2016 P1) Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en deux points M et N. Une tangente commune touche $\mathcal{C}_1$ en P et $\mathcal{C}_2$ en Q, de sorte que la droite est plus proche de N que de M. La droite (PN) recoupe le cercle $\mathcal{C}_2$ en R.

Montrer que la droite (MQ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PMR}$.

Solution de l'exercice 3



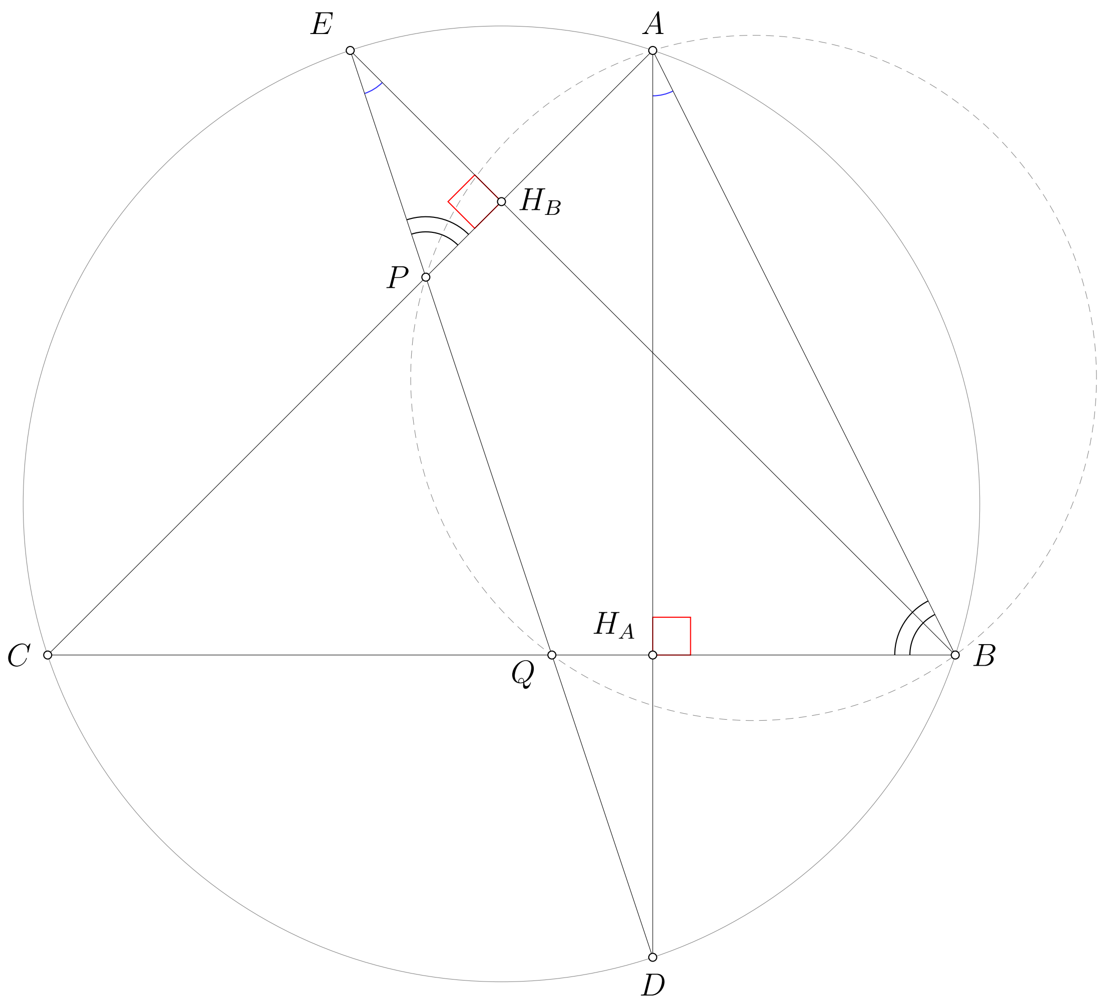
D'après le théorème de l'angle tangentiel, on a les égalités $\widehat{QPN} = \widehat{NMP}$ et $\widehat{NQP} = \widehat{NMQ}$. On déduit, avec le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_2$,

$$\widehat{RMQ} = \widehat{RNQ} = 180° - \widehat{QNP} = \widehat{QPN} + \widehat{NQP} = \widehat{NMP} + \widehat{NMQ} = \widehat{QMP},$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 4
(Envoi Pot Pourri 2019-2020 P4) Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. La hauteur issue de A recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point D. La hauteur issue de B recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en un point E. La droite (ED) coupe les côtés $[AC]$ et $[BC]$ respectivement en les points P et Q. Montrer que les points P, Q, B et A sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Puisque l'on connaît déjà l'angle $\widehat{PBA}$, il semble raisonnable d'essayer de montrer que $\widehat{QPA} = 180° - \widehat{QBA}$.

Or, $180° - \widehat{QPA} = \widehat{EPA}$, on essaye donc de montrer que $\widehat{EPA} = \widehat{QBA}$. Notons H_B le pied de la hauteur issue du sommet B et H_A le pied de la hauteur issue du sommet A. Avec le théorème de l'angle inscrit dans le cercle circonscrit au triangle ABC, on trouve

$$\widehat{EPA} = 90^\circ - \widehat{PEH_B} = 90^\circ - \widehat{DEB} = 90^\circ - \widehat{DAB} = 90^\circ - \widehat{H_A AB} = \widehat{ABQ},$$

ce qui est l'égalité voulue.

Exercice 5
(Test de sélection junior 2021-2022) Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit D un point situé à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (AD) et (BD) recoupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1 et B_1. Le cercle circonscrit au triangle B_1DA recoupe la droite (AC) au point P. Le cercle circonscrit au triangle A_1BD recoupe la droite (BC) au point Q.

Démontrer que le quadrilatère $CPDQ$ est un parallélogramme.

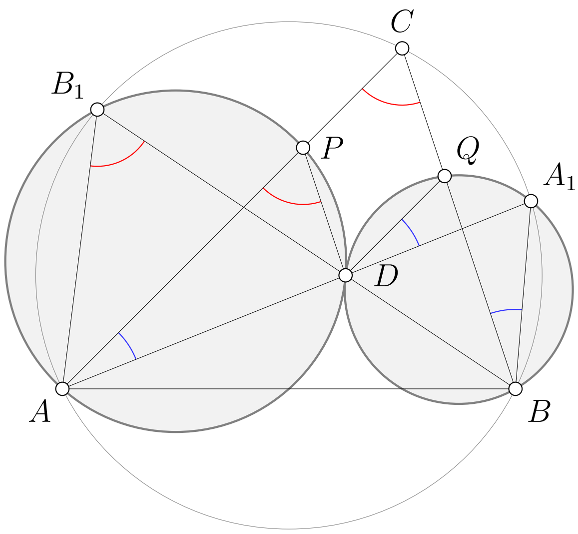
Solution de l'exercice 5
Le théorème de l'angle inscrit dans les cercles circonscrits aux quadrilatères DBA_1Q et $(ABA_1C$ indique que

$$\widehat{QDA_1} = \widehat{QBA_1} = \widehat{CBA_1} = \widehat{CAA_1},$$

ce qui signifie que les droites (QD) et (AC) sont parallèles l'une à l'autre. On démontre de même que

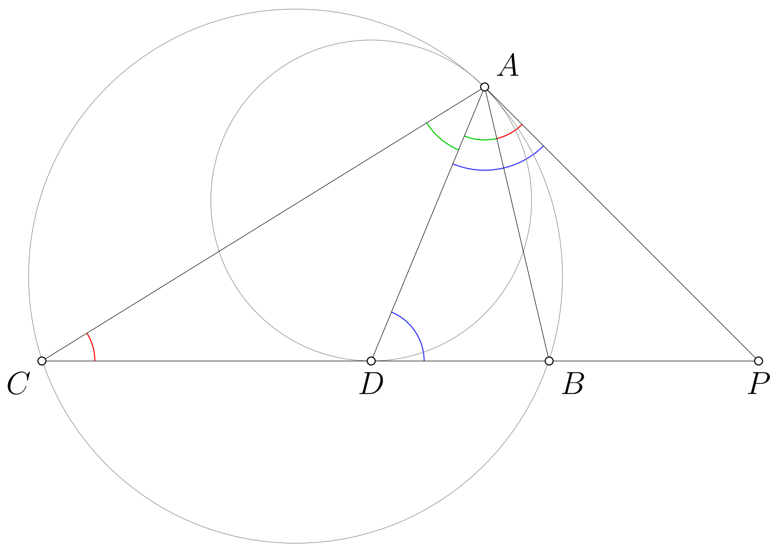
$$\widehat{APD} = \widehat{AB_1D} = \widehat{AB_1B} = \widehat{ACB},$$

ce qui signifie que les droites (PD) et (BC) sont parallèles l'une à l'autre. Le quadrilatère $CPDQ$ est donc un parallélogramme.



Exercice 6
Soit ABC un triangle non isocèle en A et Ω son cercle circonscrit. La tangente au cercle Ω au point A coupe la droite (BC) au point P. Soit D le point du segment $[BC]$ tel que $PA = PD$. Montrer que $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.

Solution de l'exercice 6



On suppose quitte à échanger B et C que $AB < AC$, si bien qu'on est dans la configuration ci-dessus. Puisque le triangle APD est isocèle en P, $\widehat{PDA} = \widehat{PAD}$. Puisque la somme des angles du triangle ADC vaut $180°$, on a $\widehat{PDA} = 180° - \widehat{ADC} = \widehat{DAC} + \widehat{DCA}$.

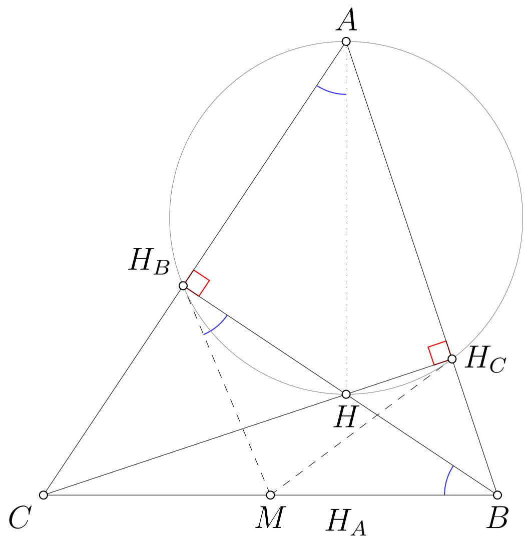
Par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{DCA} = \widehat{BCA} = \widehat{XAB}$, on déduit que

$$\widehat{DAC} = \widehat{PDA} - \widehat{PAB} = \widehat{PAD} - \widehat{PAB} = \widehat{BAD},$$

comme voulu.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, H_B le pied de la hauteur issue du sommet B et H_C le pied de la hauteur issue du sommet C. Soit M le milieu de $[BC]$. Montrer que la droite (MH_B) est tangente au cercle circonscrit au triangle AH_BH_C.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>



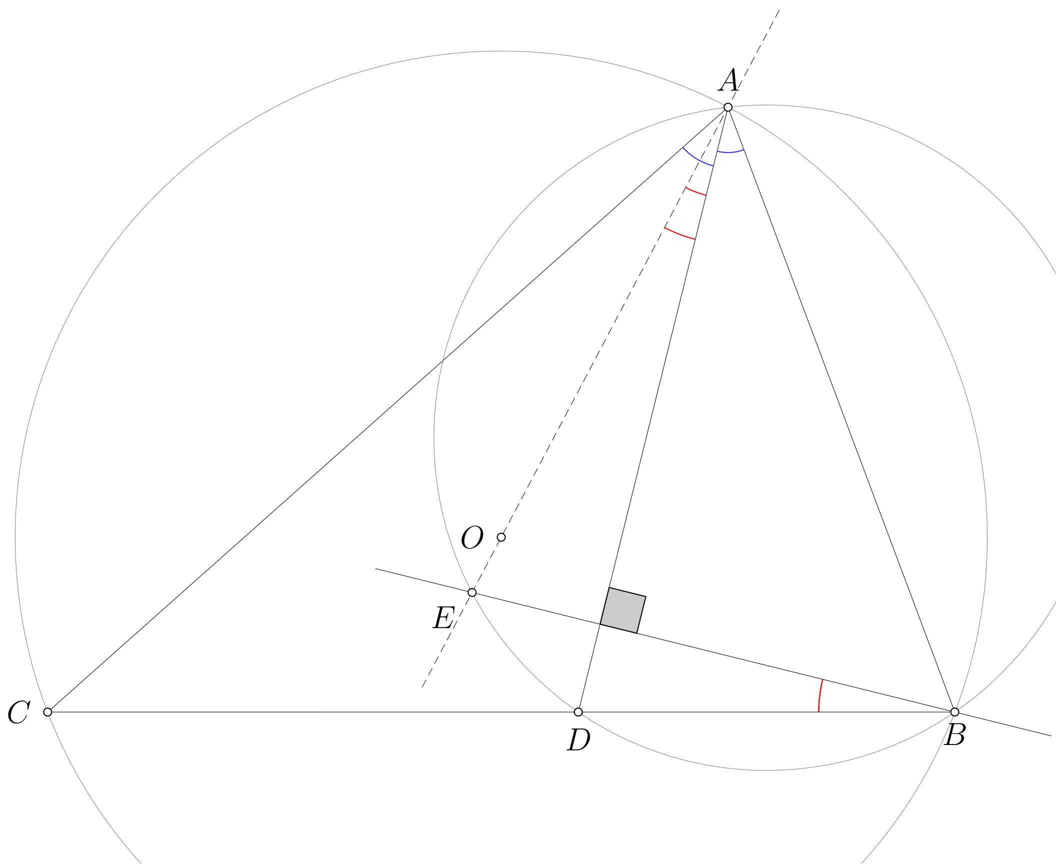
Soit H le point d'intersection des hauteurs issues de B et C. Puisque $\widehat{AH_BH} = 90° = 180° - \widehat{AH_CH}$, le point H appartient au cercle circonscrit au triangle AH_BH_C. De la même façon, puisque $\widehat{CH_BB} = 90° = \widehat{CH_CB}$, les points C, H_C, H_B et B sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[BC]$, qui est donc de centre M. On déduit notamment que le triangle MH_BB est isocèle en M. Ainsi,

$$\widehat{MH_BH} = \widehat{MH_BB} = \widehat{MBH_B} = 90° - \widehat{BCA} = \widehat{HAC} = \widehat{HAH_B}.$$

Ceci prouve bien que la droite (H_BM) est tangente au cercle circonscrit au triangle AH_BH_C. De la même façon, on prouve qu'il en est de même pour la droite (MH_C).

Exercice 8
(Envoi Pot Pourri 2019-2020 P13) Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. La perpendiculaire à la droite (AD) passant par le point B recoupe le cercle circonscrit au triangle ADB en un point E. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les points A, O et E sont alignés.

Solution de l'exercice 8



Pour montrer que les points E, O et A sont alignés, on va montrer l'égalité $\widehat{OAB} = \widehat{EAB}$.

D'une part, d'après le théorème de l'angle au centre et puisque le triangle AOB est isocèle en O, on a

$$\widehat{OAB} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{AOB}) = 90° - \widehat{ACB}.$$

D'autre part, puisque D est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{CAB}$,

$$\widehat{EAB} = \widehat{EAD} + \widehat{DAB} = \widehat{EBD} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90° - \widehat{BDA} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

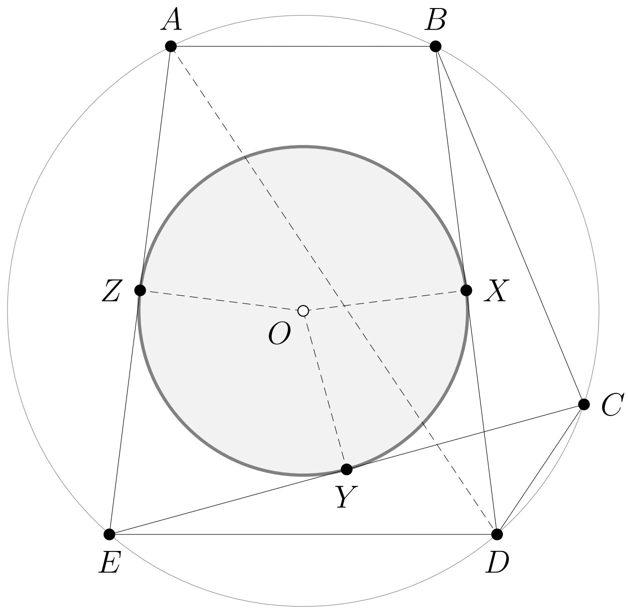
Or la somme des angles du triangle ADC fait $180°$ donc $\widehat{BDA} = \widehat{DCA} + \widehat{DAC} = \widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Ainsi

$$90° - \widehat{BDA} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90° - (\widehat{ACB} + \frac{1}{2}\widehat{BAC}) + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90° - \widehat{ACB}$$

et on trouve bien que $\widehat{OAB} = 90° - \widehat{ACB} = \widehat{EAB}$ donc les points A, O et E sont alignés.

Exercice 9
(JBMO SL 2022 G1) Soit $ABCDE$ un pentagone inscrit dans un cercle et dans lequel $BC = DE$ et les droites (AB) et (DE) sont parallèles. On note X, Y et Z les milieux des segments $[BD], [CE]$ et $[AE]$. Montrer que la droite (AE) est tangente au cercle circonscrit au triangle XYZ.

Solution de l'exercice 9



Puisque les droites (AB) et (DE) sont parallèles, le quadrilatère $ABDE$ est un trapèze inscrit dans un cercle, il s'agit donc d'un trapèze isocèle. Les points X et Z sont donc symétriques par rapport à la médiatrice commune aux segments $[AB]$ et $[DE]$, ce qui implique que les droites $(XZ), (AB)$ et (DE) sont parallèles. De la même façon, les droites $(YX), (BE)$ et (CD) sont parallèles.

Nous allons montrer que $\widehat{ZYX} = \widehat{XZA}$. Puisque les points Y et Z sont les milieux respectifs de $[AE]$ et $[CE]$, on a

$$\widehat{ZYE} = \widehat{ACE} = \widehat{ABE}.$$

D'autre part,

$$\widehat{XYC} = \widehat{CEB} = \widehat{EBD},$$

où la dernieré égalité vient du fait que $BCDE$ est un trapèze isocèle. Ainsi,

$$\widehat{ZYX} = 180° - \widehat{XYC} - \widehat{ZYE} = 180° - \widehat{ABE} - \widehat{EBD} = 180° - \widehat{ABD} = \widehat{DEA} = \widehat{XZA},$$

ce qui est l'égalité voulue.

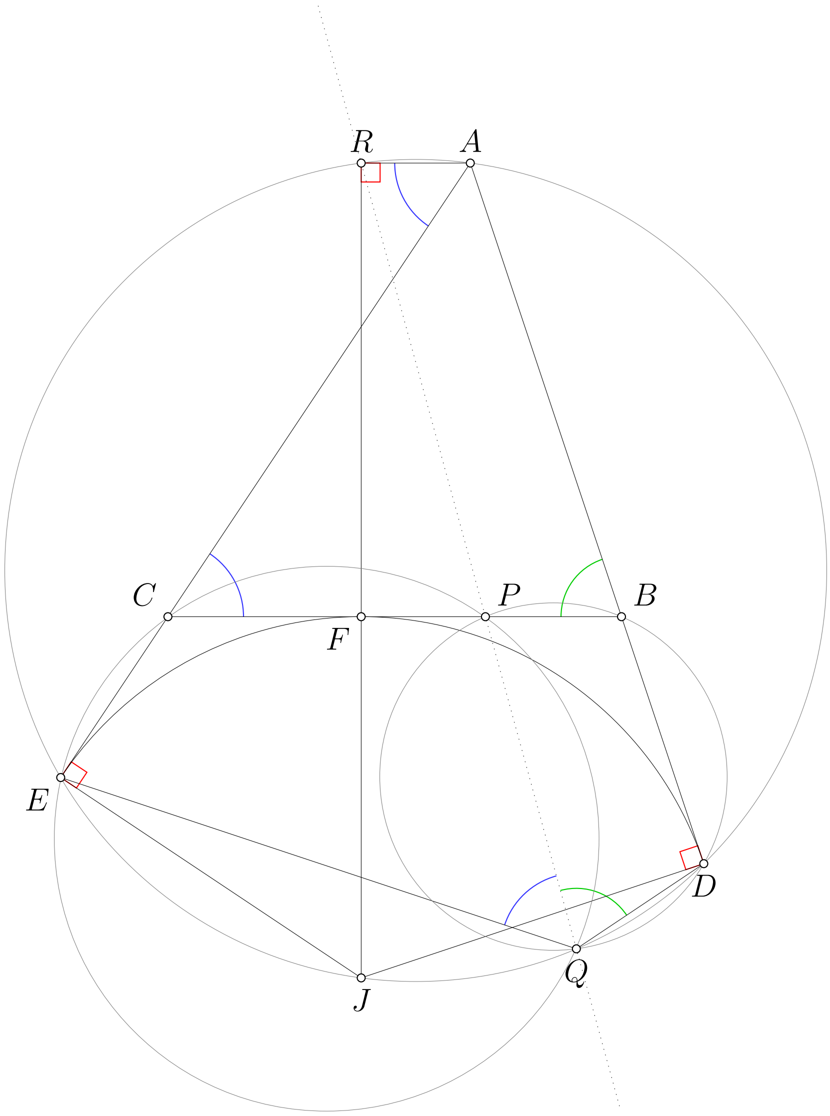
Exercice 10

(JBMO 2024 P2) Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$. Le cercle $A-$exinscrit est tangent aux droites (AB), (AC) et (BC) aux points D, E et F respectivement. On note J le centre du cercle $A-$exinscrit. Soit P un point sur le segment $[BC]$. Le cercle circonscrit aux triangles BDP et CEP se recoupent au point Q. La perpendiculaire à (FJ) passant par A coupe (FJ) en R.

Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

(Le cercle $A-$exinscrit est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C.)

Solution de l'exercice 10



Les points R, D et E sont tous les trois sur le cercle de diamètre $[AJ]$ par leur définition. En traçant ce cercle, on observe que le point Q s'y trouve également. On commence par le démontrer. Pour cela, il suffit de montrer que $\widehat{DQE} = 180° - \widehat{DAE}$. Or, en utilisant le théorème de l'angle inscrit pour les quadrilatères $PBDQ$ et $CPQE$, on a

$$\widehat{DQE} = \widehat{DQP} + \widehat{PQE} = \widehat{PBA} + \widehat{PCA} = 180° - \widehat{BAC} = 180° - \widehat{DAE}.$$

Le point Q est donc sur le cercle circonscrit au triangle AED, c'est-à-dire le cercle de diamètre $[AJ]$. On déduit immédiatemment que $\widehat{RQJ} = \widehat{RAJ}$. Il suffit donc de montrer que $\widehat{PQJ} = \widehat{RAJ}$. Or, à nouveau par le théorème de l'angle inscrit,

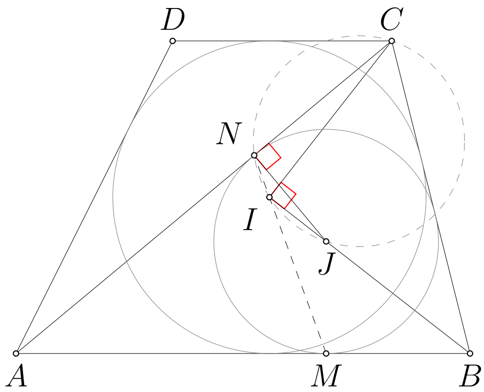
$$\widehat{PQJ} = \widehat{PQE} + \widehat{EQJ} = \widehat{PCA} + \widehat{EAJ} = \widehat{RAC} + \widehat{CAJ} = \widehat{RAJ},$$

ce qui est l'égalité voulue.

Exercice 11

(JBMO 2016 P1) Soit $ABCD$ un trapèze (avec $(AB > CD$ et (AB) et (CD) parallèles). On suppose que le trapèze possède un cercle inscrit de centre I. Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent à la droite (AB) en M et à (AC) en N. Montrer que le point I appartient à la droite (MN).

Solution de l'exercice 11



Soit J le centre du cercle inscrit au triangle ABC. On va montrer que $\widehat{MNJ} = \widehat{INJ}$. Notons que les points I, J et B sont tous les trois sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ donc sont alignés.

D'une part, puisque $widehat AMJ = 90° = 180° - \widehat{ANJ}$ les points A, N, J et M sont cocycliques donc $\widehat{MNJ} = \widehat{MAJ} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$.

Comme la droite (CI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DCB}$, $\widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{DCB}$. De même $\widehat{IBC} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. Enfin, les droites (AB) et (CD) sont parallèles donc $\widehat{DCB} + \widehat{ABC} = 180°$. On déduit

$$\widehat{JIC} = \widehat{BIC} = 180° - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180° - \frac{1}{2}\left(\widehat{DCB} + \widehat{ABC}\right) = 90°.$$

Or $\widehat{JNC} = 90°$ donc les points J, I, N et C sont cocycliques et $\widehat{INJ} = \widehat{ICJ}$. Mais

$$\widehat{ICJ} = \widehat{ICB} - \widehat{BCJ} = \frac{1}{2}\widehat{DCB} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{DCA}.$$

Comme les droites (CD) et (AB) sont parallèles, $\widehat{DCA} = \widehat{BAC}$.

Finalement

$$\widehat{MNJ} = \frac{1}{2}\widehat{CAB} = \widehat{INJ}$$

donc les points M, I et N sont alignés.

2 Pôle Sud et triangles semblables (Arthur)

Pôle Sud

Exercice 1
Soit $BCDE$ un carré et soit O son centre. Soit A un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle ABC est rectangle en A. Montrer que le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, I le point d'intersection de ses bissectrices, S le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec la droite (AI). Montrer que les points B, I et C sont sur un même cercle de centre S.

Exercice 3
Soit ABC un triangle. On note P le point d'intersection de la bissectrice issue de A et de la médiatrice du segment $[BC]$. Soit X et Y les projetés orthogonaux de P sur (AB) et (AC) respectivement. On appelle Z le point d'intersection des droites (XY) et (BC). Montrer que $BZ = ZC$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, I le point d'intersection de ses bissectrices, et B' et C' les projetés orthogonaux de I sur (AC) et (AB) respectivement. On note M_A et M_B les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AC]$. Montrer que les droites (M_AM_B), (BI) et $(C'B')$ sont concourantes.

Exercice 5
(BXMO 2011) Soit ABC un triangle soit I le centre de son cercle inscrit. Les bissectrices (AI), (BI) et (CI) coupent les côtés opposés en D, E et F respectivement. a médiatrice du segment $[AD]$ coupe les droites (BI) et (CI) en M et N respectivement. Montrer que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Exercice 6
(JBMO 2010) Soit ABC un triangle et soit L le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et soit K le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. La médiatrice du segment $[BK]$ coupe la droite (AL) en un point M. La parallèle à la droite (KM) passant par le point L coupe la droite (BK) au point N. Montrer que $LN = NA$.

Triangles Semblables

Exercice 7
Soit un triangle ABC rectangle en B. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en D. Sur le segment $[AD]$ on place le point E tel que $AE = AB$. La perpendiculaire à (AD) en E coupe (AC) en F. Montrer que les triangles ABD et AEF sont égaux.

Exercice 8
Soit ABC un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $AH^2 = HB \times HC$, $AB^2 = BH \times BC$ et $AC^2 = CH \times BC$.

Exercice 9

Deux cercle Γ et Γ' de centres O et O' et de rayons r et r' se coupent en A et B. Trois droites d_1, d_2 et d_3 passent par A. d_1 recoupe Γ en M_1 et Γ' en M_1'. d_2 recoupe Γ en M_2 et Γ' en M_2'. d_3 recoupe Γ en M_3 et Γ' en M_3'.

Montrer que $M_1M_2M_3$ et $M_1'M_2'M_3'$ sont des triangles semblables.

(Bonus plus difficile : Montrer que le rapport de taille entre les deux triangles est $\frac{r}{r'}$.)

Exercice 10

Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point du segment $[AC]$. Soit E le projeté orthogonal de M sur le segment $[AB]$ et F le projeté orthogonal sur le segment $[AD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$

Exercice 11

Soit un triangle ABC. On appelle D le point de la demi-droite $[AC)$, à l'exterieur du segment $[AC]$, vérifiant $CD = AB$. Les médiatrices de $[BD]$ et $[AC]$ se coupent en O. Soit M un point du segment $[AB]$. On appelle N le le point de la demi-droite $[AC)$, à l'exterieur du segment $[AC]$, vérifiant $CN = AM$. Montrer que la médiatrice de $[MN]$ passe par O.

Exercice 12

(Grèce MO 2019) Soit ABC un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit et D le milieu de l'arc AB ne contenant pas C. Soit E le point d'intersection des droites (AD) et (BC). Le cercle circonscrit au triangle BDE recoupe la droite (AB) au point Z. Le cercle circonscrit au triangle ADZ recoupe la droite (AC) au point H. Montrer qe $BE = AH$.

Exercice 13

(Ptolémée) $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans un cercle, les points étant placés dans cet ordre. Montrer que $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$. (Indication : On construit le point E sur $[BD]$ tel que $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$.)

Exercice 14

Soit $ABCD$ un trapèze avec $(AD)//(BC)$, M l'intersection de ses diagonales et P un point de $[BC]$ tel que $\widehat{APM} = \widehat{DPM}$. Montrer que la distance de B à (DP) est égale à la distance de C à (AP).

Solutions des Exercices

Solution de l'exercice 1

Puisque $\widehat{BAC} = 90° = \widehat{BOC}$, les points B, A, C et O sont cocycliques. Puisque le triangle BOC est isocèle en O, le point O est sur la médiatrice du segment $[BC]$, il s'agit donc du pôle Sud du point A dans le triangle ABC. Le point O appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution de l'exercice 2

Soit X un point du cercle de centre S passant par B et C (comme $SB = SC$) tel que le triangle BCX soit acutangle. On souhaite alors montrer $\widehat{BIC} = 180° - \widehat{BXC}$ ce qui conclura par angles opposés. Par angle au centre celà revient à montrer $\widehat{BIC} = 180° - \dfrac{\widehat{BSC}}{2}$. Or $\widehat{BIC} =$

$180° - (\widehat{IBC} + \widehat{BAC}) = 180° - (90° - \frac{\widehat{BAC}}{2}) = 90° + \widehat{BAS} = 90° + \widehat{BCS} = 90° + (90° - \frac{\widehat{BSC}}{2}) = 180° - \frac{\widehat{BSC}}{2}$ ce qu'il fallait démontrer.
(Parler rapidement des angles orientés, autres pôles,
B, I, C, I_A cocycliques centre S (cercle antartique)
I_C, B, C et I_B cocycliques centre N (cercle artique))

Solution de l'exercice 3
P est le pôle sud de ABC et on a $\widehat{PBC} = \widehat{PAC} = \widehat{BAP} = \widehat{BCP}$. Aussi les angles $\widehat{AXP}$ et $\widehat{AYP}$ sont droits et alors supplémentaires, donc $XAYP$ est cyclique et P est une nouvelle fois le pôle sud d'où $\widehat{PXY} = \widehat{PAY} = \widehat{XAP} = \widehat{XYP}$. On obtient alors $\widehat{ZXP} = \widehat{ZBP}$ et $\widehat{ZYP} = \widehat{ZCP}$, donc les quadrilatères $BZPX$ et $CYZP$ sont cycliques. Par angles opposés : $\widehat{BZP} = 180° - \widehat{BXP} = 180° - 90° = 90°$. Donc Z est sur la mediatrice de $[BC]$ ce qui montre $BZ = ZC$.

Solution de l'exercice 4
Soit X l'intersection de (BI) et (M_AM_B). Par le théorème du milieu $(AB)//(M_AM_B)$ d'où par angles alternes internes $\widehat{ABX} = \widehat{BXM_A}$ et comme (BI) est une bissectrice alors $\widehat{XBM_A} = \widehat{BXM_A}$ donc le triangle BM_AX est isocèle en M_A. Il suit que B, X et C sont sur un même cercle de centre M_A et donc par angle au centre $\widehat{IXC} = \widehat{BXC} = 90°$. Or $\widehat{IB'C} = 90°$ donc le quadrilatère $IB'XC$ est cyclique par angles inscrits.
On note α, β et γ les angles du triangle ABC. Par angles opposés $AB'IC'$ est cyclique donc I est le pôle sud de $AB'C'$ et donc $\widehat{IB'C'} = \frac{\alpha}{2}$. Or

$$\widehat{IB'X} = 180° - \frac{\gamma}{2} - \widehat{XCB'} + \left(-\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = 180° - \left(90° - \frac{\beta}{2}\right) + \frac{\gamma}{2} = 180° - \frac{\alpha}{2}$$

Donc $\widehat{C'B'X} = 180°$, ce qui montre.

Solution de l'exercice 5
Des bissectrices et des médiatrices s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. Le point M est en effet par définition le pôle sud du point B dans le triangle BAD donc le quadrilatère $BAMD$ est cyclique. De même, le quadrilatère $CAND$ est cyclique. Il vient

$$\widehat{MAN} = \widehat{MAD} + \widehat{DAN} = \widehat{MBD} + \widehat{NCD} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 180° - \widehat{BIC} = 180° - \widehat{MIN}$$

ce qui montre bien que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6
Des bissectrices et des médiatrices qui s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. En effet, le point M est le pôle Sud du point A dans le triangle KBA par hypothèse donc le quadrilatère $MKAB$ est cyclique. On a alors

$$\widehat{NLA} = \widehat{KMA} = \widehat{KBA} = \widehat{NBA}$$

donc le quadrilatère $NLBA$ est cyclique. Puisque le point N est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{LBA}$ et du cercle circonscrit au triangle LBA, le point N est le pôle Sud du sommet B dans le triangle LBA. Il appartient donc à la médiatrice du segment $[AL]$. Ainsi $NL = LA$.

Solution de l'exercice 7
(Exercice d'application)

Solution de l'exercice 8
(Exercice d'application)

Solution de l'exercice 9
Deux angles du triangles sont égaux par angles inscrits (et opposés par le sommet A) et les deux derniers sont égaux par angles opposés (et opposés par le sommet A)
Pour le Bonus : Introduire M diametralement opposé à M_1, et M' le point différent de A que (MA) recoupe sur le deuxième cercle. On par angles droits que $M'M_1'$ est aussi un diametre, et on a donc que le rapport entre les triangles AMM_1 et $AM'M_1'$ (qui sont semblables) est le rapport entre les diametres. Enfin le rapport entre les triangles AMM_1 et $AM'M_1'$ est le rapport entre AM_1 et AM_1' donc entre les deux triangles voulus.

Solution de l'exercice 10
Puisque $\widehat{AEM} = 90° = 180 - \widehat{AFM}$, les points A, E, M et F sont cocycliques. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a donc que $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ et $\widehat{MEF} = \widehat{MAF} = \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$. Les triangles MFE et BAC sont donc semblables.
Dans le parallélogramme $ABCD$, $CD = AB$ donc on déduit l'égalité de rapport

$$\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$$

Solution de l'exercice 11
Puisque $OA = OC$, $OB = OD$ et $AB = CD$ alors les triangles OAB et OCD sont semblables. (et même égaux !) Il suit $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$. Or $OA = OC$ et $AM = CN$, donc les triangles OAM et OCN sont égaux. Donc $OM = ON$ ce qui montre.

Solution de l'exercice 12
En utilisant le théorème de l'angle inscrit dans les cercles circonscrits aux triangles DBE et ADH, on a

$$\widehat{BED} = 180° - \widehat{DZB} = \widehat{DZA} = \widehat{DHA}$$

et

$$\widehat{DBE} = 180° - \widehat{DBC} = \widehat{DAH}.$$

Ainsi les triangles DAH et DBE sont semblables. Puisque D est le milieu de l'arc AB, on a également $DB = DA$, donc les triangles sont en fait isométriques. On a donc bien $BE = AH$.

Solution de l'exercice 13
$\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$ et par angle inscrit $\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$ donc BEA et CDA sont semblables. Donc $AC \times BE = AB \times CD$
De même AED et ABC sont semblables. Donc $AC \times DE = AD \times CB$.
En sommant les deux égalités, on trouve l'égalité demandée.

Solution de l'exercice 14
Soit U le projeté orthogonal de B sur (PD) et V le projeté orthogonal de C sur (AP). Le but est de montrer que $BU = CV$. Introduisons de plus X et Y, les projetés orthogonaux de M sur (DP) et (AP) respectivement.

Comme

$$\widehat{PXM} = \widehat{PYM} = 90^\circ$$

et

$$\widehat{YPM} = \widehat{XPM}$$

et que les triangles PXM et PYM partagent le côté $[PM]$, ces derniers sont isométriques, d'où $MX = MY$. Il en découle que nous avons gagné si on réussit à montrer que

$$\frac{MX}{BU} = \frac{MY}{CV}$$

Comme les droites (MX) et (BU) sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallélèles. Donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{DM}{DB} = \frac{MX}{BU}$$

De même,

$$\frac{AM}{AC} = \frac{MY}{CV}$$

Et on a

$$\frac{AM}{AC} = \frac{DM}{DC}$$

car $(AD) \parallel (BC)$, ce qui conclut.

3 Inégalités (Antoine)

Ce cours était un TD de révision des inégalités classiques IAG/Cauchy-Schwarz/Mauvais Élèves, il n'y a donc pas eu de cours. Vous pouvez trouver un cours sur ces inégalités de base sur le site de la POFM ou sur Mathraining par exemple.

Voici la partie TD donc :

Exercice 1
Soit x réel non nul. Quand a-t-on $x + \frac{1}{x} \geq 2$?

Exercice 2
Pour $a, b \geq 0$, montrer que $8(a^4 + b^4) \geq (a+b)^4$.

Exercice 3
Soient a, b, c des réels positifs tels que $abc = 2$. Montrer que

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(b^2a + c^2b + a^2c) \geq 36.$$

Exercice 4
Soient a, b, c des réels positifs.
Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, puis que $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

Exercice 5
Montrer que si $a, b, c > 0$, alors

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a\sqrt{b^2+c^2} + c\sqrt{a^2+b^2}$$

Exercice 6
Montrer que l'inégalité arithmético-quadratique est encore vraie quand on ne suppose plus les a_i positifs.

Exercice 7
(Nesbitt) Soient a, b, c des réels positifs, montrer du plus de façons possible que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Exercice 8
Soient a, b, c des réels positifs.
Montrer d'au moins deux façons différentes que $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq 9$.

Exercice 9
Montrer que pour $a, b, c, d > 0$, on a

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$$

Exercice 10
Soient x, a, b réels. Montrer que $a\cos(x)+b\sin(x) \leq \sqrt{a^2+b^2}$

Exercice 11
Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2+b^2+c^2 = 1$. Montrer que $2a+5b+9c \leq \sqrt{110}$.
Quand a-t-on égalité ?

Exercice 12
Soient a, b, c des réels positifs, montrer que

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq a+b+c.$$

Exercice 13
Soient $x, y > 1$. Montrer que

$$\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geq 8.$$

Exercice 14
Soient a, b, c des réels positifs, montrer que

$$\frac{a}{2c+a}+\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c} \geq 1$$

Exercice 15
Soient $a, b, c > 0$ tels que $a^2+b^2+c^2 = 3$, montrer que

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$$

Exercice 16
Soient $x, y, z \geq 0$ des réels non tous nuls. Montrer que

$$\frac{2x^2-x+y+z}{x+y^2+z^2}+\frac{2z^2-z+x+y}{z+x^2+y^2}+\frac{2y^2-y+z+x}{y+z^2+x^2} \geq 3.$$

Quand y a-t-il égalité ?
Note : l'exercice donné en TD n'était pas le bon, les fractions étaient inversées et rendaient l'exercice moins vrai...

Exercice 17
Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 8$. Montrer que

$$\frac{ab+4}{a+2} + \frac{bc+4}{b+2} + \frac{ca+4}{c+2} \geq 6.$$

Solution de l'exercice 1
On a $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{1}{x}(x-1)^2$, donc si $x > 0$, l'inégalité est bien vérifiée, et sinon $x + \frac{1}{x} - 2 < 0$, et l'inégalité est fausse.
On a donc $x + \frac{1}{x} \geq 2$ exactement quand $x > 0$.

Solution de l'exercice 2
Problème issu de Mathraining.

Solution de l'exercice 3
On applique l'IAG aux deux facteurs : $a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc = 6$ et $b^2a + c^2b + a^2c \geq 3abc = 6$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 4
Par IAG, on a $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$, $\frac{b^2+c^2}{2} \geq bc$ et $\frac{c^2+a^2}{2} \geq ac$. On obtient le résultat en sommant ces trois inégalités.
Pour la deuxième partie, on a $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$ avec la partie précédente.

Solution de l'exercice 5
Par IAG, on a $\frac{a^2+(b^2+c^2)}{2} \geq a\sqrt{b^2+c^2}$, et de même $\frac{(a^2+b^2)+c^2}{2} \geq c\sqrt{b^2+a^2}$. On obtient le résultat en sommant les inégalités.

Solution de l'exercice 6
L'inégalité étant symétrique, on suppose spdg $a \geq b \geq c$, on a également $\dfrac{1}{b+c} \geq \dfrac{1}{c+a} \geq \dfrac{1}{a+b}$. Le réarrangement nous donne alors

$$\begin{aligned} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b} \text{ et} \\ \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &\geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b} \end{aligned}$$

On obtient le résultat en sommant puis en divisant par 2.
Autre méthode avec les mauvais élèves : on a

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ab+ca} + \frac{b^2}{ab+cb} + \frac{c^2}{ca+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$$

d'après l'exercice 4.

Solution de l'exercice 7
Cauchy-Schwarz nous donne directement $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geq (1+1+1)^2 = 9$.
Autre solution : Par IAH, on a

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \frac{a+b+c}{3},$$

et l'inégalité s'en déduit.

Solution de l'exercice 8
Il suffit d'appliquer Cauchy-Schwarz à $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $(1, 1, \ldots 1)$.

Solution de l'exercice 9
L'inégalité des mauvais élèves nous donne directement

$$\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{2^2}{c}+\frac{4^2}{d} \geq \frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}$$

Solution de l'exercice 10
Problème issu de Mathraining.

Solution de l'exercice 11
Par Cauchy-Schwarz, on a

$$(2a+5b+9c)^2 \leq (2^2+5^2+9^2)(a^2+b^2+c^2) = 110,$$

d'où l'inégalité. Le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz est obtenu quand il existe r tel que $a = 2r, b = 5r, c = 9r$, et en reprenant la condition $a^2+b^2+c^2 = 1$, on trouve $r = \frac{1}{\sqrt{110}}$.

Solution de l'exercice 12
L'inégalité étant symétrique, on suppose que $a \geq b \geq c$. Comme $a^2 \geq b^2 \geq c^2$ et $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c}$, on a par réarrangement que

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq \frac{a^2}{a}+\frac{b^2}{b}+\frac{c^2}{c} = a+b+c.$$

Il était aussi possible d'utiliser l'inégalité des mauvais élèves, de la manière qu'on pense.

Solution de l'exercice 13
Par mauvais élèves, on a $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geq \frac{(x+y)^2}{x+y-2}$. Si on note $z = x+y$, on cherche à montrer que si $z > 2$, on a $\frac{z^2}{z-2} \geq 8 \iff z^2 \geq 8(z-2) \iff (z-4)^2 \geq 0$ qui est toujours vraie, d'où le résultat.
Autre solution : on suppose spdg que $x \geq y$, alors par réarrangement on a $\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1} \geq \frac{x^2}{x-1}+\frac{y^2}{y-1}$. La preuve de $\frac{z^2}{z-1} \geq 4$ est similaire à la preuve précédente.

Solution de l'exercice 14
On a par mauvais élèves

$$\frac{a}{2c+a}+\frac{b}{2a+b}+\frac{c}{2b+c} = \frac{a^2}{2ca+a^2}+\frac{b^2}{2ab+b^2}+\frac{c^2}{2cb+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 1$$

Solution de l'exercice 15
Par mauvais élèves puis par l'exercice 4, on a

$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geq \frac{9}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{9}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{3}{2}.$$

Solution de l'exercice 16
En posant $A = 2x^2 - x + y + z$ et cycliquement pour B et C, l'inégalité revient à

$$\frac{A}{B+C} + \frac{B}{A+C} + \frac{C}{A+B} \geq \frac{3}{2},$$

mais c'est à présent juste Nesbitt !
Ah non oups nos nombres sont pas forcément positifs. Bon, en fait on a quand même que $a+b, b+c, c+a$ sont positifs, donc la preuve par réordonnement marche encore. Si on sait pas ce que c'est le réordonnement, on peut aussi ajouter 1 à chaque fraction, pour obtenir

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{9}{2(a+b+c)}\right) = \frac{9}{2}$$

par mauvais élèves, où toutes les quantités qu'on a écrites sont bien positives.

Solution de l'exercice 17
En réécrivant $ab = \frac{8}{c}$, l'inégalité se réécrit

$$4\left(\frac{c+2}{c(a+2)} + \frac{a+2}{a(b+2)} + \frac{b+2}{a(c+2)}\right) \geq 6,$$

ce qui est à présent une conséquence de l'IAG.

4 Puissance d'un point et axe radical (Théo)

Exercice 1
Soit C_1 et C_2 deux cercles se coupant en P, Q. Soit Z un point de (PQ). Une tangente issue de Z au cercle C_1 est tangente à C_1 en X. Une droite passant par Z coupe C_2 en A et B. Montrer que (ZX) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABX

Exercice 2
Soit C_1 et C_2 deux cercles se coupant en P, Q. Soit Z un point de (PQ). Une tangente issue de Z au cercle C_1 est tangente à C_1 en X. Une tangente issue de Z au cercle C_2 est tangente à C_2 en Y. Montrer que $ZX = ZY$.

Exercice 3
Soient k_1 et k_2 deux cercles s'intersectant en deux points distincts A et B. Une tangente t commune aux deux cercles touche le cercle k_1 en un point C et le cercle k_2 en un point D. Soit M le point d'intersection de la droite (AB) avec la tangente t. Montrer que M est le milieu du segment $[CD]$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[AC]$. Le cercle tangent au segment $[BC]$ en B et passant par M coupe (AB) en P. Soit B' le symétrique de B par rapport à M. Montrer que $BB' \times BM = BA \times BP$.

Exercice 5
On considère K et L deux points d'un cercle Γ de centre O. Soit A un point de la droite (KL) hors du cercle. On note P et Q les points de contact des tangentes à Γ issue de A. Soit M le milieu de $[PQ]$. Montrer que les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{MLO}$ sont égaux.

Exercice 6
Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. On note D le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC, puis E le milieu du segment $[AD]$, et ω le cercle de diamètre $[AD]$. Ensuite, soit X le point d'intersection entre ω et la droite (BE), tel que B et X soient situés de part et d'autre de la droite (AD). De même, soit Y le point d'intersection entre ω et la droite (CE), tel que C et Y soient situés de part et d'autre de la droite (AD). Enfin, on suppose qu'il existe un point Z, autre que D, appartenant à la droite (AD) et aux deux cercles circonscrits à BDX et à CDY. Démontrer que $AB = AC$.

Exercice 7
Soit Γ un cercle, P un point à l'extérieur du cercle. Les tangentes au cercle Γ passant par P sont tangentes au cercle en A et B. Soit M le milieu du segment $[BP]$ et C le point d'intersection de la droite (AM) et du cercle Γ. Soit D la deuxième intersection de la droite (PC) et du cercle Γ. Montrer que (AD) et (BP) sont parallèles.

Exercice 8
Soit ABC un triange acutangle (pas d'angle droit ni obtus) inscrit dans un cercle k. La tangente au cercle k en A coupe (BC) en P. Soit M le milieu de AP et R la seconde intersection de k avec BM. Soit S la seconde intersection de (PR) avec k. Montrer que (AP) et (CS) sont parallèles.

Exercice 9
Soit ABC un triangle acutangle. La hauteur issue de B dans ABC intersecte le cercle de diamètre $[AC]$ en K et L, et la hauteur issue de C dans ABC intersecte le cercle de diamètre $[AB]$ en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Exercice 10
Soit ABC un triangle non isocèle en A, Γ_1 un cercle passant par les points B et C et dont le centre O se trouve sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Soit Γ_2 un cercle passant par les points O et A. On note P et Q les points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2. Soit X le point d'intersection des droites (PQ) et (AO). Montrer que le point X appartient au segment $[BC]$.

Solution de l'exercice 1

On veut montrer que (ZX) est tangente au cercle circonscrit à ABX. Par puissance d'un point, il suffit de montrer que $ZX^2 = ZA \times ZB$.
Or (ZX) est tangente au cercle C_1,donc la puissance de Z par rapport à C_1 vaut ZX^2.
La puissance de Z par rapport à C_2 vaut $ZA \times ZB$
Or Z est sur le droite (PQ) il est donc sur l'axe radical des deux cercles. En particulier, sa puissance par rapport à chacun des cercles est égale, donc $ZA \times ZB = ZX^2$ ce qui conclut.

.

Solution de l'exercice 2

Z appartient à (PQ) qui est l'axe radical des deux cercles, donc il a la même puissance par rapport aux deux cercles.
Par rapport à C_1,la puissance de Z vaut ZX^2
Par rapport à C_2,la puissance de Z vaut ZY^2
Donc $ZX^2 = ZY^2$ donc $ZX = ZY$

Solution de l'exercice 3

En appliquant l'exercice 2 à $Z = M$, on obtient que $MC = MD$ donc M est le milieu de $[CD]$ car M, C, D alignés.

Solution de l'exercice 4

La condition de l'énoncé revient à montrer par puissance d'un point que A, M, B', P sont cocycliques car B, M, B' sont alignés par définition de B', et B, A, P aussi.
Par angle tangent $\widehat{MBC} = \widehat{MPB} = \widehat{MPA}$
Par symétrie $\widehat{MBC} = \widehat{MB'A}$
Donc A, B', M, P sont cocycliques ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5

Il suffit de prouver que K, L, M, O sont cocycliques.
Notons que A, M, O sont alignés. En effet, $OP = OQ$ car P, Q sont sur le cercle de centre O, $MP = MQ$ et $AP = AQ$ car par puissance d'un point : $AP^2 = AQ^2$.
Ainsi les points O, M, A sont alignés et forment la médiatrice de $[PQ]$

Il suffit donc de montrer que $AM \times AO = AL \times AK$. Or $AL \times AK = AQ^2 = AP^2$ par puissance d'un point. Nous allons donc prouver que $AM \times AO = AP^2$

Pour cela il suffit de montrer que (AP) est tangente au cercle circonscrit à OMP. Or $\widehat{OMP} = 90$ car (OM) est la médiatrice de $[PQ]$. Donc le centre du cercle circonscrit à OMP est sur $[OP]$. Comme $\widehat{APO} = 90$ par tangence, (AP) est perpendiculaire à (OP) qui est un diamètre, donc tangente au cercle circonscrit, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6

L'hypothèse que Z existe est un peu pénible, en fait celle-ci est équivalente au fait que l'axe radical des cercles circonscrits à BDX et CDY soit (AD).

En particulier, E est sur l'axe radical, donc il a la même puissance par rapport aux deux cercles. On a donc $EB \times EX = EY \times EC$. Or E est le centre de ω, donc $EX = EY$. Ainsi on a $EB = EC$.

Ainsi E est sur la médiatrice de $[EC]$. Comme (AD) est perpendiculaire à (BC) et passe par E, c'est la médiatrice de $[BC]$, donc $AB = AC$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7

On utilise la puissance d'un point pour M : on a $MA \times MC = MB^2$. Or $MB = MP$, donc $MP^2 = MA \times MC$. Donc (MP) est tangente au cercle circonscrit à CAP.

On en déduit que $\widehat{CPM} = \widehat{PAC}$, et comme (PA) est tangente à Γ, que $\widehat{PAC} = \widehat{ADC}$. Ainsi $\widehat{BPD} = \widehat{CPM} = \widehat{ADC} = \widehat{ADP}$, donc (AD) et (BP) sont parallèles.

Solution de l'exercice 8

On utilise la puissance d'un point pour M, on a $MA^2 = MR \times MB$, donc $MP^2 = MR \times MB$. Donc (MP) est tangente au cercle circonscrit à BMP. En particulier $\widehat{APS} = \widehat{PR} = \widehat{RBP} = \widehat{RBC}$. Or par angle inscrit, $\widehat{RBC} = \widehat{RSC} = \widehat{PSC}$. Donc $\widehat{PSC} = \widehat{APS}$, donc (AP) et (SC) sont parallèles.

Solution de l'exercice 9

On note D, E, F les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B, C dans ABC. Notons que comme $\widehat{BDA} = \widehat{BEA} = 90$, le cercle de diamètre $[BA]$ passe par B, D, E, A. De même le cercle de diamètre $[CA]$ passe par C, D, F, A. Ainsi l'axe radical aux deux cercles est (DA).

Or H appartient à (DA), donc à la même puissance par rapport aux deux cercles. Comme H appartient à (KL) et (MN), on a $HK \times HL = HM \times HN$, donc K, L, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 10

Notons que O est sur la médiatrice de $[BC]$ et la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Comme ABC n'est pas isocèle en A, O est le pôle Sud de ABC issu de A. Ainsi les points A, B, C, O sont cocycliques, appelons Γ_3 ce cercle.

Comme la droite (PQ) est l'axe radical de Γ_1 et Γ_2, X a la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2. Comme (AO) est l'axe radical de Γ_2 et Γ_3, X a la même puissance par rapport à Γ_2 et Γ_3.

Ainsi X a la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_3. Il se trouve donc sur l'axe radical commun aux deux : la droite (BC) ce qui conclut.

5 Récurrence (Paul)

Il arrive souvent que l'on souhaite démontrer qu'une certaine proposition est vraie pour tout entier naturel. Il est alors possible d'utiliser le *principe de récurrence*. Il s'énonce comme suit :

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant d'un entier naturel n. Si on a a la fois :

1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
2. $\forall m \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(m) \implies \mathcal{P}(m+1)$

Alors pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

En effet, puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie, la 2e condition nous indique que $\mathcal{P}(1)$ est également vraie, puis que comme $\mathcal{P}(1)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(2)$ est vraie, etc...

On peut faire une analogie avec un escalier : si je sais que je peux monter sur la première marche (que $\mathcal{P}(0)$ est vraie), et que depuis n'importe quelle marche, je peux toujours monter sur la suivante (que si $\mathcal{P}(m)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(m+1)$ est également vraie), alors je sais que je peux arriver sur n'importe quelle marche de l'escalier.

Une bonne manière de voir les choses est que si on peut toujours ramener le problème à un cas plus petit, on a gagné !

Remarque 1.
Il est également possible de démarrer l'initialisation à un entier autre que 0, soit parce que la propriété n'a pas de sens pour $n = 0$, soit parce qu'elle n'est pas vraie. Il arrive souvent que l'on commence par 1 ou 2, voire un entier beaucoup plus grand !

Attention ! : Pour rédiger correctement un raisonnement par récurrence, il est essentiel d'effectuer et de mettre en valeur les trois étapes clés : l'initialisation (montrer que la proposition est vraie dans un cas de base), l'hérédité (montrer que si la proposition est vraie pour un entier quelconque, alors elle est vraie pour le suivant) et la conclusion.

Exemple 2.
Si on oublie d'initialiser, on peut rapidement "démontrer" une propriété fausse. Par exemple, prenons la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$(10)^n + (-1)^n$ est divisible par 11". Elle n'est clairement pas vérifiée pour $n = 1$, puisque 11 ne divise pas 9. Il s'avère qu'elle n'est en fait vérifiée pour aucun entier naturel !
Pourtant, si on suppose qu'elle est vraie au rang n, on peut montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$: si $11 \mid 10^n + (-1)^n$, alors

$$11 \mid 10(10^n + (-1)^n) = 10^{n+1} + 10(-1)^n$$

ou encore

$$11 \mid 10^{n+1} + 10(-1)^n - 11(-1)^n = 10^{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Ce qui conclut l'hérédité !

Exemple 3.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Solution : Montrons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}\text{”}$$

Initialisation : $\mathcal{P}(1)$: “$1 = \frac{1(1+1)}{2}$” est bien vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier naturel n. On veut montrer qu'alors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Comme on sait que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on sait que $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $1+2+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\frac{(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : La proposition est intialisée et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Théorème 4 (Récurrence forte)**.**
Soit $P(n)$ une proposition dependant de n un entier naturel. Si les conditions suivantes sont réunies :

1. $P(0)$ est vraie
2. Si $P(0), P(1), P(2), \ldots, P(n)$ sont vraies, alors $P(n+1)$ est vraie

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Démonstration. Notons $Q(n)$: “$\forall k \in [\![0, n]\!], P(k)$ est vraie". Le theoreme de récurrence nous apprend que si $Q(0)$ est vraie et $Q(n) \implies Q(n+1)$, alors $Q(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Les hypothèses de l'enoncé nous apprennent qu'on a bien $P(0)$ vraie donc $Q(0)$ vraie et $Q(n) \implies P(n+1)$, donc $Q(n) \implies Q(n+1)$, donc $Q(n)$ est vraie pour tout entier naturel n, donc $P(n)$ est vraie pout tout entier naturel n. □

Exercice 1
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,

$$1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution de l'exercice 1
Montrons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\text{”}$$

Initialisation : $\mathcal{P}(1)$: “$1 = \frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}$” est bien vraie.
Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On veut montrer qu'alors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Comme on sait que $P(n)$ est vraie, on sait que $1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, donc $1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\frac{n(2n+1)+6(n+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : La proposition est intialisée et héréditaire, donc d'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Exercice 2
Soit x un nombre réel different de 1. Montrer par recurrence l'égalité suivante :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Solution de l'exercice 2
Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$. Montrons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}(n) : "1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Initialisation : $1 = \frac{1-x}{1-x}$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 1 + x + \ldots + x^n + x^{n+1} &= \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} \\ &= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} \\ &= \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x} \end{aligned}$$

Conclusion : La proposition est initialisée et héréditaire donc d'apres le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 + x + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}}$$

Exercice 3
Montrer par récurrence que pour tout entier nautrel non nul n,

$$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Solution de l'exercice 3
On note $\mathcal{H}(n)$ la proposition "$1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$"
Initialisation : $1 = 1^2$, donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) &= n^2 + (2n + 1) \\ &= (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Conclusion : La proposition est initialisée et héréditaire donc d'apres le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2}$$

Exercice 4
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n + \dfrac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$

Solution de l'exercice 4
Montrons par récurrence d'ordre 2

$$P(n) : \text{“}a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}\text{”}$$

Initialisation : $P(0) : a^0 + \dfrac{1}{a^0} = 2 \in \mathbb{Z}$ et $P(1)$ est vraie par hypothese de l'énoncé.
Hérédité : Supposons $P(n)$ et $P(n-1)$ vraies. On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie. On sait que $(a^n + \dfrac{1}{a^n}) \in \mathbb{Z}$ et $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$ donc leur produit est aussi dans $\mathbb{Z}$, soit $(a^n + \dfrac{1}{a^n})(a + \dfrac{1}{a}) = a^{n+1} + a^{n-1} + \dfrac{1}{a^{n-1}} + \dfrac{1}{a^{n+1}} \in \mathbb{Z}$. Or, on suppose egalement $P(n-1)$ vraie, donc $a^{n+1} + a^{n-1} + \dfrac{1}{a^{n-1}} + \dfrac{1}{a^{n+1}} - \left(a^{n-1} + \dfrac{1}{a^{n-1}}\right) = a^{n+1} + \dfrac{1}{a^{n+1}} \in \mathbb{Z}$, donc $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion : La proposition est intialisée et héréditaire, donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}}$$

Exercice 5
On se donne n voitures identiques sur une piste circulaire. Au total, elles ont juste assez d'essence pour faire un tour de piste. Montrer qu'une des voitures peut effectuer un tour complet de la piste en prenant l'essence des voitures qu'elle trouve sur son chemin.

Solution de l'exercice 5
Initialisation : Si on a une seule voiture, c'est évident.
Hérédité : Supposons qu'avec n voitures, on sache faire le tour, et supposons que nous en avons $n+1$ sur la piste. Alors il exite une voiture A qui peut atteindre la suivante B (sinon on ne pourrait pas faire le tour en combinant l'essence des voitures). Mais alors A peut prendre l'essence de B et on a réduit le problème à la situation où A a initialement son essence et celle de B, et où B n'existe plus : on a terminé l'hérédité !
Conclusion : On pourra toujours faire le tour en partant avec l'une des voitures.

Exercice 6
Soit $n > 1$ un entier naturel impair. On a n personnes dans un champ avec des pistolets à eau, tels que les distances en séparant deux soient toujours différentes. Chaque personne tire sur son voisin le plus proche (et le touche). Montrer qu'une personne reste sèche.

Solution de l'exercice 6
On va montrer le résultat par récurrence : pour 3 personnes, les deux à distance minimale se tirent dessus mutuellement, donc le dernier reste sec.
Supposons maintenant le résultat vrai pour n personnes et montrons-le pour $n+2$ personnes. On considère les deux personnes les plus proches A et B : elles vont se tirer dessus mutuellement. Attention cependant, nous ne sommes pas immédiatement ramenés au cas précédent puisque parmi les n autres personnes, certaines tirent peut-être sur A ou B. Dans ce cas, il

reste strictement moins de tirs que de personnes et on a gagné. Dans l'autre, on est effectivement ramenés au cas précédent, donc c'est aussi gagné !

Exercice 7

On se donne n cercles dans le plan. Ils divisent le plan en régions. Montrer que l'on peut colorier le plan avec 2 couleurs de sorte que deux régions partageant une frontière ne soient pas de la même couleur.

Solution de l'exercice 7

Comme attendu, on procède par récurrence. Lorsqu'il n'y a pas de cercle, on peut colorier tout l'espace d'une couleur.

Supposons maintenant le résultat établi pour n cercles. On considère $n+1$ cercles. Oublions un des cercles et colorions le plan en respectant la propriété (ce que l'on peut faire grace à l'hypothèse de récurrence). Maintenant, réintroduisons le $n+1$-ième cercle. On inverse toutes les couleurs à l'intérieur du cercle. Il est alors aisé de vérifier que chaque frontière a deux régions de couleurs différentes de part et d'autre en traitant les frontières intérieures et exterieures au cercle, puis celles créées par le nouveau cercle. On a alors montré le résultat pour $n+1$, ce qui conclut.

Exercice 8

Soit F_n le n-ieme terme de la suite de Fibonacci.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \times F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}$

Pour rappel, la suite de Fibonacci est l'unique suite définie par :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \end{cases}$$

Solution de l'exercice 8

Montrons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{“}F_{n+1} \times F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}\text{”}$$

Initialisation : On a $F_2 \times F_0 - F_1^2 = 2 \times 1 - 1 = (-1)^{1+1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain n. On veut montrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned} F_{n+2} \times F_n - F_{n+1}^2 &= (F_{n+1} + F_n) \times F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}F_n + F_n^2 - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n+1}(F_n - F_{n+1}) + F_n^2 \\ &= -(F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2) \\ &= -(F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2) = (-1) \times (-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (On a bien $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ puisque $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$)

Conclusion : La proposition est initialisee et hereditaire, donc d'après le princpe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, F_{n+1} \times F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^{n+1}}$$

Exercice 9
De combien de manières peut-on paver une grille de taille $2 \times n$ avec des dominos de taille 1×2 (les rotations de la pièce sont autorisées) ?

Solution de l'exercice 9
Notons F_n le nombre de manières de remplir une grille $2 \times n$ avec des dominos 1×2. On a $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$. On remarque maintenant que si on connait F_n et F_{n-1}, alors on connait F_{n+1}. En effet, pour remplir une grille $2 \times (n+1)$, on a deux possibilités : soit on remplit la grille jusqu'a $n-1$, et on rajoute deux dominos horizontaux, soit on remplit la grille jusqu'a n, et on rejoute un domino vertical (on notera bien qu'il ne faut pas compter 2 fois le cas $n-1$, puisque ajouter deux dominos verticaux revient à remplir jusqu'à n, et à completer avec un domino vertical). Donc $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. On retrouve la suite de Fibonacci.

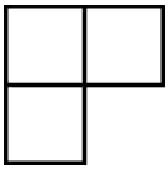
Exercice 10
On se donne $2n$ points dans le plan. On trace au total n^2+1 segments entre ces points. Montrer qu'il y a au moins un ensemble de 3 points reliés 2 à 2.

Solution de l'exercice 10
On procède par contrtaposée : on va montrer par récurrence que tout ensemble de $2n$ points sans triangle possède au plus n^2 segments.
Initialisation : pour $n = 1$ c'est évident.
Hérédité : Considérons $2n+2$ points et des segments les reliant mais tels qu'il n'y ait pas de triangle complet de formé. Soient A et B deux points reliés par un segment. Si on oublie A et B et tous les segments dont l'un des deux est une extrémité, il nous reste $2n$ points reliés par des segments sans triangle, donc par hypothèse de récurrence, on a au plus n^2 segments. Enfin, comme A et B sont reliés, aucun des $2n$ autres points ne peut être relié aux deux, donc en rajoutant A, B et les segments qui les relient au reste des points, on ne peut ajouter que $2n+1$ segments, soit un total de $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ segments maximum (le $+1$ provenant du segment reliant A à B).
Conclusion : Par principe de récurrence, pour tout entier naturel non-nul n, tout ensemble de $2n$ points sans triangle possède au plus n^2 segments. Autrement dit, tout ensemble de $2n$ points avec n^2+1 segments possède au moins un triangle.

Exercice 11
Dans un certain pays, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit par un canal navigable. Montrer qu'un des deux moyens de transport permet de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre.

Solution de l'exercice 11
On procède par récurrence. Si on a deux villes c'est évidemment vrai. Supposons que ce soit vrai pour n villes et considérons $n+1$ villes. On choisit une ville et on la met de coté. On applique l'hypothèse de récurrence sur les n villes restantes : il exsite un moyen de transport (SPDG bateau) permettant de relier toute paire de villes. Si la nouvelle ville est reliée à une des n premières par une voie navigable, on a fini, sinon, l'avion convient : il suffit de passer par la $n+1$-eme ville pour avoir accès à toutes les autres villes par avion.

Exercice 12
Déterminer tous les entiers naturels n pour lesquels il est possible de paver un carré de taille $2^n \times 2^n$ avec le coin inférieur gauche manquant avec des pièces de la forme :



Solution de l'exercice 12
On montre par récurrence que tous les entiers naturels conviennent. En effet, $n = 1$ convient trivialement. Supposons maintenant que l'on sait paver toute grille $2^n \times 2^n$ donc il manque un coin. Alors On peut séparer notre grille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ en quatre grilles de taille $2^n \times 2^n$. Il manque la case en bas a gauche de la grille en bas à guauche, donc par hypothèse de récurrence, on peut la paver. Pour les autres, il suffit d'ajouter la pièce qui chevauche les trois grilles, et on se retrouve à devoir paver 3 grilles auquelles il manque un coin, ce que l'on peut faire par hypothèse de récurrence.

Exercice 13 (EGMO 2017)
Soient 2017 droites dans le plan telles qu'il n'en existe pas trois s'intersectant en un même point. Turbo l'escargot se trouve sur un point n'appartenant qu'à une seule droite. Il se déplace le long des droites de la façon suivante. Il se meut sur une droite donnée jusqu'à ce qu'il arrive à une intersection. À chaque fois qu'il rencontre une intersection, il continue son parcours sur l'autre droite, tournant à gauche ou à droite, alternant son choix à chaque intersection rencontrée. Aucun demi-tour n'est permis. Est-il possible qu'il parcoure un même segment de droite dans deux sens opposés durant son parcours ?

Solution de l'exercice 13
Montrons que c'est impossible.
Les doites séparent l'espace en régions distincts. Montrons par récurrence que l'on peut colorier ces régions en 2 couleurs de telle sorte que deux régions partageant une arete ne soient pas de la meme couleur. Le cas avec aucune droite est trivial. Supposons le résultat vrai pour n droites. En ajoutant une droite, on inverse les couleurs de toutes les régions d'un meme coté de la droite et on a fini.
Sans perte de généralité, supposons donc que Turbo l'escargot démare avec une région de couleur 1 à sa gauche et de couleur 2 à sa droite. A chaque tournant, il converve les couleurs à a droite et à sa gauche, donc il ne pourra jamais revenir sur un meme segment dans les deux sens : il faudrait pour cela inverser les couleurs à sa droite et à sa gauche.

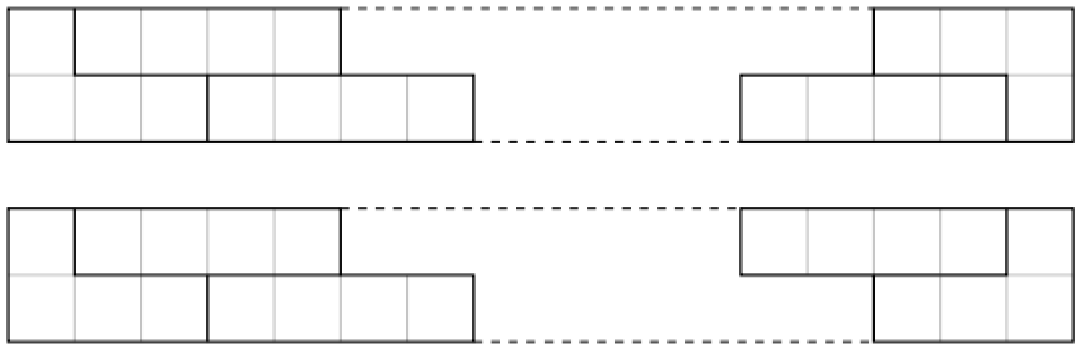
Exercice 14 (Australie 2020)
Un tétromino est une tuile qui peut être formée en collant côte à côte quatre carrés d'une unité de côté. Prouver que le nombre de façons de recouvrir le sol d'une salle de bain de taille $2 \times 2n$ avec n tétrominos est un carré parfait, quel que soit $n \geqslant 1$

Solution de l'exercice 14
On note F_n le n-ième nombre de Fibonacci. On note T_n le nombre de façons de recouvrir le sol en question. Montrons que $T_n = F_n^2$. Il est facile de le vérifier pour de petites valeurs de n. On considère maintenant un rectangle de $2 \times 2n$. Regardons ce qu'il se passe quand on essaye de paver la colonne la plus à gauche :

— Soit elle est remplie avec un carré 2×2, ce qui laisse T_{n-1} possibilités pour paver le rectangle $2 \times 2(n-1)$ restant.

— Soit elle est remplie avec deux barres 1×4, ce qui laisse T_{n-2} possibilités pour paver le rectangle $2 \times 2(n-2)$ restant.

— Soit elle est remplie avec un "L", ce qui donne une des situations ci-dessous (à symétrie près, ce qui multipliera le résultat par 2). Les zones en pointillés sont remplies avec des tétraminos 1×4. Les deux situations représentées apparaissent respectivement lorsque l'on doit remplir un nombre de colonnes multiple de 4 et un nombre de colonnes congru à 2 modulo 4. Sans ces zones, il reste un rectangle de $2 \times 2(n-k)$ à remplir, soit T_{n-k} remplissages possibles pour $n \in \{2, ..., n\}$. Le cas $k = n$ ne laisse aucune colonne donc on utilise la convention $T_0 = 1$.



Ainsi,

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + 2(T_0 + \ldots + T_{n-2})$$

On peut alors montrer que

$$T_n - 2T_{n-1} - 2T_{n-2} + T_{n-3} = 0$$

Il suffit enfin de vérifier que c'est une formule de récurrence vérifiée par F_n^2 :

$$F_n^2 + F_{n-3}^2 = (F_{n-1} + F_{n-2})^2 + (F_{n-1} - F_{n-2})^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2$$

Comme les premiers termes des deux suites correspondent, elles sont donc égales, ce qui conclut.

Exercice 15

Sur une ligne infinie, se trouvent des cailloux, avec un ou plusieurs cailloux par case. Aurélien a deux opérations possibles :

1. Enlever un caillou à la case n et $n+1$ et en mettre un à la case $n+2$.
2. Enlever deux cailloux à la case n, en mette un à la case $n+1$ et un à la case $n-1$.

Montrer qu'il y a toujours un moment au bout duquel Aurélien ne peut plus bouger ses pions.

Solution de l'exercice 15

Montrons par récurrence forte sur le nombre de cailloux que si on a k cailloux, il existe une constante C_k tel que chaque caillou peut bouger au plus C_k fois.

Pour $k = 1$, on a $C_1 = 1$ qui convient.

Supposons le résultat vrai pour tout entier naturel $l < k$, montrons que c'est vrai pour k. Tant que la première opération n'est pas utilisée, à chaque étape la somme des distances entre les cailloux augmente de 2, donc si on effectue $D = 2n\binom{n}{2} \times \max(C_1, \ldots, C_{k-1})$ opérations, il y aura au moins 2 cailloux consécutifs à distance au moins $\max(C_1 \ldots C_{k-1}) + 1$, et l'hypothèse de récurrence nous assure que ces deux groupes ne pourront jamais se rejoindre, et donc par hypothèse de récurrence à nouveau, on ne pourra effectuer que $2 \times \max(C_1, \ldots, C_{k-1})$ opérations de plus, ce qui reste un nombre fini d'opérations. Si on utilise la première opération, le nombre de cailloux diminue de 1, donc l'hypothèse de récurrence nous assure que l'on peut effectuer au plus C_{k-1} étapes. Dans tous les cas, on a majoré le nombre d'opérations.

Exercice 16

L'objectif de cet exercice est de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique, donc on ne la supposera pas connue.

1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$
2. Soient $a, b, c, d > 0$. Montrer que $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$
3. En déduire que $\dfrac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$
4. Conclure pour n variables.

Solution de l'exercice 16

1. Il suffit de remarquer que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geqslant 0$, ce qui en développant donne :
$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$
2. On applique deux fois l'inégalité de la question précédente :
$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}$$
3. On applique le résultat précédent avec $d = \frac{a+b+c}{3}$:
$$\frac{a+b+c}{3} = \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geqslant \sqrt[4]{abc\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}$$
On peut alors diviser par $\sqrt[4]{\frac{a+b+c}{3}}$ puis élever à la puissance $\frac{4}{3}$, et on obtient
$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}}$$
4. On peut maintenant montrer le résultat par récurrence : en itérant le point 2 le résultat est vrai pour toute puissance de 2 et avec le raisonnement du point 3, s'il est vrai pour n, alors il est vrai pour $n-1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien
$$\boxed{\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{ax_1x_2\ldots x_n}}$$

III. Groupe C

1 Equations diophantiennes (Rémi)

Exercices d'échauffement

Exercice 1
Trouver tous les triplets d'entiers positifs (a, b, c) tels que $2^a = 3^b + 6^c$.

Exercice 2
Trouver tous les triplets d'entiers positifs (p, n, m) avec p premier et $p^n + 144 = m^2$.

Exercice 3
Montrer que l'équation $x^2 = y^5 + 7$ n'admet pas de solutions entières.

Exercices de compétitions

Exercice 4
(JBMO 2014, 1) Trouver tous les nombres premiers p, q, r tels que $3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$.

Exercice 5
(JBMO 2023, 1) Trouver tous les couples d'entiers positifs (a, b) tels que $a! + b$ et $b! + a$ soient tous les deux des puissances 5.

Exercice 6
(JBMO 2018, 1) Trouver tous les couples d'entiers (m, n) tels que $m^5 - n^5 = 16mn$

Exercice 7
(JBMO 2016, N3) Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = \dfrac{2^{4n+2} + 1}{65}$. Trouver tous les entiers n tels que :

— A_n est entier ;

— A_n est premier.

Exercice 8
(Corée 2012) Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (m, n, p) avec p premier, tels que $2^m p^2 + 1 = n^5$

Exercice 9
(Italie 2019) Soient p et q deux nombres premiers tels que $p + q^2$ soit un carré parfait. Montrer que $p^2 + q^n$ n'est un carré parfait pour aucun entier n.

Exercice 10
(JBMO 2021, N5) Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 + 5y^2 = 2021y$.

Exercice 11
(JBMO 2012, 4) Trouver tous les quadruplets (x, y, z, t) d'entiers strictement positifs tels que $2^x \cdot 3^y + 5^z = 7^t$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Clairement, on doit avoir $a \geqslant 1$, puisque $2^a = 3^b + 6^c \geqslant 1 + 1 = 2$. On en déduit que le membre de gauche de cette équation est pair, donc comme 3^b est impair, 6^c doit l'être aussi, ce qui n'est le cas que si $c = 0$. L'équation se réécrit $2^a = 3^b + 1$.
On regarde l'équation modulo 8. Si $a \geqslant 3$, $2^a \equiv 0[8]$, auquel cas on doit avoir $3^b \equiv 7[8]$. Mais comme $9 \equiv 1[8]$, les puissances de 3 ne peuvent valoir que 1 ou 3 modulo 8, d'où une absurdité. Ainsi, $a \leqslant 2$, et une étude exhaustive donne les solutions $(1, 0, 0)$ et $(2, 1, 0)$.

Solution de l'exercice 2
On peut factoriser l'équation sous la forme $p^n = (m - 12)(m + 12)$. Ainsi, $m - 12$ et $m + 12$ sont tous deux des diviseurs de p^n, donc eux aussi des puissances de p. On appelle a et b les exposants, de sorte que $p^a = m - 12$ et $p^b = m + 12$ (on sait donc que $b > a$ et que $a + b = n$). En soustrayant la deuxième égalité à la première, on obtient $p^b - p^a = 24$. Si $a > 0$, on sait que p divise $p^b - p^a$, donc p divise 24, donc $p = 2$ ou $p = 3$ sauf si $a = 0$. On distingue donc 3 cas :
Si $a = 0$, la première équation donne $1 = m - 12$, soit $m = 13$. En reportant dans la deuxième équation, on obtient $p^b = 13 + 12 = 25$ donc p vaut 5 et on trouve la solution $(5, 2, 13)$.
Si $p = 2$, on obtient $2^b - 2^a = 24$. On remarque que $2^b > 24 > 2^4$, donc $b \geqslant 5$. Ainsi, on trouve que $-2^a \equiv 8[16]$, autrement dit $a = 3$. On trouve alors $b = 5$, soit $n = 3 + 5 = 8$, et finalement la solution $(2, 8, 20)$.
Si $p = 3$, on obtient $3^b - 3^a = 24$. Par un raisonnement analogue, on trouve $a = 1$ et $b = 3$, d'où la solution $(3, 4, 15)$.
On vérifie réciproquement que ces trois solutions conviennent, ce sont donc les seules.

Solution de l'exercice 3
On applique la méthode vue en cours en même temps que le petit théorème de Fermat. L'idée est de choisir un modulo p premier, pour lequel les exposants dans l'équation, à savoir 2 et 5 divisent $p - 1$. Le choix le plus simple est donc $p = 2 \cdot 5 + 1 = 11$. On calcule que $x^2 \equiv 0/1/3/4/5/9[11]$ et $y^5 \equiv 0/1/10[11]$ soit $y^5 + 7 \equiv 6/7/8[11]$. Ces deux expressions ne coïncident jamais modulo 11 donc l'équation n'admet pas de solutions entières, comme attendu.

Solution de l'exercice 4
On regarde notre équation modulo 3. Si q et r sont différents de 3, leurs carrés valent 1 modulo 3, donc on trouve $-5 - 4 \equiv 26[3]$, ce qui est absurde. Ainsi, $q = 3$ ou $r = 3$. (NB : en étudiant attentivement les cas, on peut en fait montrer ici que $q = 3$ est nécessaire)
Si $q = 3$, on réécrit $3p^4 - 4r^2 = 431$. Si $p \neq 5$, on a $p^4 \equiv 1[5]$ d'après le petit théorème de Fermat, donc on devrait avoir $3 - 4r^2 \equiv 431[5]$, soit $4r^2 \equiv 2[5]$. Mais $r^2 \equiv 0/1/4[5]$, donc $4r^2 \equiv 0/4/1[5]$, contradiction. On en déduit que $p = 5$, d'où la solution $(5, 3, 19)$.
Si $r = 3$, l'équation devient $3p^4 - 5q^4 = 62$. De même, on procède modulo 5. On doit avoir $3p^4 \equiv 2[5]$, ce qui est absurde d'après le petit théorème de Fermat. Finalement, la seule solution est $(5, 3, 19)$.

Solution de l'exercice 5
Supposons sans perte de généralité que $a \geqslant b$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $a = b$. Dans ce cas, $a! + a = a((a - 1)! + 1) = 5^k$, donc a divise 5^k, donc $a = 5^\ell$ avec $\ell \leqslant k$. Si $\ell = 1$, le couple $(a, b) = (5, 5)$ convient. Sinon, on a $\ell \geqslant 2$, auquel cas $a - 1 \geqslant 5$ et donc $(a - 1)! + 1 \equiv 1 \pmod 5$, mais comme ce nombre est aussi une puissance de 5 (il divise

5^k), on doit avoir $(a-1)!+1=1$, absurde.

Cas 2 : $a>b$. Notons $a=b+s$ avec $s\geqslant 1$, et $a!+b=5^k$ avec $k\geqslant 1$. Ainsi, on peut réécrire $b((b-1)!\cdot(b+1)\cdots(b+s)+1)=5^k$. De nouveau, on obtient $b=5^\ell$ avec $\ell\geqslant 0$, et si $b-1\geqslant 5$ alors $(b-1)!\cdot(b+1)\cdots(b+s)+1\equiv 1 \pmod 5$, d'où la même absurdité que précédemment. De plus, si $s\geqslant 5$, alors $5\mid(b+1)\cdots(b+5)\mid(b+1)\cdots(b+s)$, et donc $(b+1)\cdots(b+s)+1\equiv 1 \pmod 5$, à nouveau absurde. On en déduit que $b\leqslant 5$ et $s\leqslant 4$. Il ne reste plus qu'à tester tous ces cas, et on trouve $(b,s)=(1,3)$, soit $(a,b)=(4,1)$.
Finalement, les seules solutions sont $(a,b)=(5,5),(4,1)$ et $(1,4)$.

Solution de l'exercice 6
Cet exercice a été corrigé sur la chaîne YouTube de la POFM, précisément ici : https://youtu.be/AKCFq5UpHIA

Solution de l'exercice 7

a) On a toujours $5\mid 2^{4n+2}+1$. En effet, $2^{4n+2}+1=4\cdot 16^n+1\equiv 4\cdot 1^n+1\equiv 0[5]$. Pour 13 ce n'est le cas que si $n\equiv 1[3]$, ce que l'on peut conjecturer par un tableau de congruence. L'expression $4\cdot 2^{4n}$ vaut $-1,10$ et 4 modulo 13 pour $n=1,2$ et 3 respectivement. Ensuite, quand on ajoute 3 à n, on multiplie l'expression par $2^{4\cdot 3}=2^{12}\equiv 1[13]$ d'après le petit théorème de Fermat. Cela prouve que le tableau de congruence est bien périodique de période 3 comme attendu. Finalement, A_n est entier si et seulement si $n\equiv 1[3]$.
b) On fait appel à la factorisation de Sophie Germain :
$2^{4n+2}+1=4\cdot(2^n)^4+1^4=(2^{2n+1}+2^{n+1}+1)(2^{2n+1}-2^{n+1}+1)$. On vérifie que $A_1=1$ n'est pas premier. Sinon $n\geqslant 4$ d'après la question précédente, donc $2^{2n+1}+2^{n+1}+1>2^{2n+1}-2^{n+1}+1>65$, donc A_n a deux facteurs distincts strictement supérieurs à 1, donc il ne peut pas être premier. Ainsi, il n'y pas de solutions.

Solution de l'exercice 8
On écrit $2^m p^2=n^5-1=(n-1)(n^4+n^3+n^2+n+1)$. Comme $n^4+n^3+n^2+n+1$ est impair, $2^m\mid n-1$.
Ainsi, $p^2=\frac{n-1}{2^m}(n^4+n^3+n^2+n+1)$. Or p^2 ne peut s'écrire comme produit de deux termes que sous la forme $p\times p$ ou $1\times p^2$, et $\frac{n-1}{2^m}<n^4+n^3+n^2+n+1$, donc $\frac{n-1}{2^m}=1$ et $p^2=n^4+n^3+n^2+n+1$. On a donc $n=2^m+1$ et $p^2=(2^m+1)^4+(2^m+1)^3+(2^m+1)^2+(2^m+1)+1$. Si $m\geq 2$, alors $p^2\equiv 5[8]$, mais 5 n'est pas un résidu quadratique modulo 8, absurde. Ainsi $m=1$. La seule solution est donc $(1,3,11)$.

Solution de l'exercice 9
Soit a l'entier positif tel que $p+q^2=a^2$. Alors $p=(a-q)(a+q)$. $a+q$ est positif, donc $a-q$ aussi, et $a-q<a+q$, donc $a-q=1$ et $a+q=p$, d'où $p=2q+1$. Par l'absurde, soient b et n deux entiers positifs tels que $p^2+q^n=b^2$. Alors $q^n=(b-p)(b+p)$, donc $\operatorname{pgcd}(b-p,b+p)\mid 2p=4q+2$, mais $b-p$ et $b+p$ sont des puissances de q, donc $q=2$ ou $b-p=1$. Si $b-p=1$, alors $q^n=b+p=2p+1=4q+3$. Ainsi q est impair donc $q\geq 3$, donc $q^n\geq 3^{n-1}q>4q+3$ si $n\geq 3$. Si $n=2$, $q^2=4q+3$ ne donne pas de solution entière et si $n=1$, $q=4q+3$ est également absurde. Ainsi $q=2$, donc $p=5$, et $2^n=(b-5)(b+5)$, mais deux puissances de 2 ne sont jamais à distance 10, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10
On peut regrouper les termes en y et factoriser : $x^2=y(2021-5y)$. On a nécessairement $y\geqslant 0$ puisque $x^2+5y^2\geqslant 0$. Ainsi, $2021-5y\geqslant 0$ car $x^2\geqslant 0$, et donc $y\leqslant 404$.

On considère d le pgcd des deux termes. Il divise $2021 - 5y$ et y, donc $d \mid 2021 = 43 \cdot 47$. On a donc 4 cas : $d = 1$, $d = 43$, $d = 47$ ou $d = 2021$.

Cas 1 : $d = 2021$. Dans ce cas, $2021 \mid y$, or $y \leqslant 404$ donc $y = 0$, d'où la solution $(0, 0)$.

Cas 2 : $d = 47$. On écrit alors $y = 47z$, et l'équation devient :

$$x^2 = 47z(2021 - 5 \cdot 47z)$$

On peut factoriser par 47^2, et en posant $x' = 47x$, on obtient $x'^2 = z(43 - 5z)$. Comme z et $43 - 5z$ sont premiers entre eux, $43 - 5z$ est un carré, mais $43 - 5z \equiv 3[5]$, absurde.

Cas 3 : $d = 43$. On suit le même raisonnement : $47 - 5z \equiv 2[5]$ et ne peut pas être un carré.

Cas 4 : $d = 1$. Dans ce cas, y doit être un carré parfait, posons $y = a^2$ et de même, $2021 - 5y = b^2$. L'équation se réécrit donc $2021 = 5a^2 + b^2$.

On a $b \leqslant 45$, on peut traiter tous les cas. On réduit avec des modulos : $b^2 \equiv 1[5]$ donc $b \equiv \pm 1[5]$. De plus, $2a^2 + b^2 \equiv 2[3]$ donc $b \equiv 0[3]$. Enfin, $2021 \equiv 5[7]$. Finalement, $b \equiv 0, 3, 4[7]$, donc $b \in \{21, 24, 39\}$.
Si $b = 21$, $y = 388$ n'est pas un carré.
Si $b = 24$, $y = 289 = 17^2$ donne les solutions $(\pm 408, 289)$.
Si $b = 39$, $y = 100 = 10^2$ donne les solutions $(\pm 390, 100)$.

Finalement, les 5 solutions sont $(0, 0)$, $(\pm 408, 289)$ et $(\pm 390, 100)$.

Solution de l'exercice 11
On pourra trouver une solution ici : Art Of Problem Solving : JBMO 2012 P4.

2 Inégalités classiques (Théo)

Voici quelques conseils en inégalité avec des fractions :

— Utiliser l'inégalité des mauvais élèves si l'inégalité est dans le bon sens

— Utiliser la méthode roumaine : poser $A, B, C, \ldots$ les dénominateurs, et exprimer tout en fonction de A, B ou C

— Si on note $\frac{E}{F}$ une fraction présente, essayer de trouver des coefficients a et b tels que $aE + bF$ ait une forme jolie, symétrique, et que ce soit la même pour toutes les fractions. Par exemple, pour l'exercice 8, on voit que $F - E = 1$ pour chacune des fractions. Ensuite on multiplie l'inégalité par a, et on ajoute b à chaque fraction, on essaie alors de prouver la dernière inégalité.

— Utiliser une inégalité type IAG pour minorer les dénominateurs qui ont l'air d'une somme par un produit. En effet, les produits sont bien plus pratiques pour un dénominateur.

Exercice 1
Soit $x, y > 0$, montrer que

$$\left(x + \frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x} + 2\right) \geqslant 8$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 2
Soit a, b, c trois réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\frac{a^2 + b^2}{a^4 + b^4} + \frac{b^2 + c^2}{b^4 + c^4} + \frac{c^2 + a^2}{c^4 + a^4} \leqslant a + b + c$$

Exercice 3
Soit a, b, c des réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{a^2 b^2}{a + b} + \frac{b^2 c^2}{b + c} + \frac{c^2 a^2}{c + a} \leqslant \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2}$$

Exercice 4
Soit x, y strictement plus grands que -1 tels que $x + y = 1$. Montrer que

$$\frac{x}{y + 1} + \frac{y}{x + 1} \geqslant \frac{2}{3}$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 5
Déterminer tous les triplets (x, y, z) de réels strictement positifs tels que $x(6 - y) = y(6 - z) = z(6 - x) = 9$

Exercice 6
Pour tout x, y, z réels positifs, démontrer que

$$\frac{x^2-y^2}{2x^2+1}+\frac{y^2-z^2}{2y^2+1}+\frac{z^2-x^2}{2z^2+1}\leqslant 0$$

Exercice 7
Déterminer la valeur maximale de xyz lorsque x, y, z sont des réels tels que $x \geqslant 20$, $y \geqslant 40$, $z \geqslant 1675$ et $x+y+z=2015$.

Exercice 8
Soit x, y, z des réels strictement positifs avec $x^2+y^2+z^2=3$, montrer que

$$\frac{x^2+yz}{x^2+yz+1}+\frac{y^2+zx}{y^2+zx+1}+\frac{z^2+xy}{z^2+xy+1}\leqslant 2$$

Exercice 9
Soit a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^2+4}{b+c}+\frac{b^2+9}{c+a}+\frac{c^2+16}{a+b}\geqslant 9$$

Exercice 10
Soit x, y des réels strictement positifs tels que $2(x+y)=1+xy$. Déterminer la valeur minimale que peut prendre

$$x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}$$

Exercice 11
Soit a, b, c trois réels positifs tels que $abc=1$. Déterminer la valeur minimale de

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\times\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)$$

ainsi que tous les triplets pour lesquels la valeur minimale est atteinte.

Exercice 12
Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $abcd=1$. Montrer que

$$\frac{1}{a^3+b+c+d}+\frac{1}{a+b^3+c+d}+\frac{1}{a+b+c^3+d}+\frac{1}{a+b+c+d^3}\leqslant\frac{a+b+c+d}{4}$$

Exercice 13
Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que $ab+bc+ca=3$, montrer que

$$\frac{a}{\sqrt{a^3+5}}+\frac{b}{\sqrt{b^3+5}}+\frac{c}{\sqrt{c^3+5}}\leqslant\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Solution de l'exercice 1
Par IAG, $x+\frac{2}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{2x}{y}}$ et $\frac{y}{x}+2 \geqslant 2\sqrt{\frac{2y}{x}}$. En faisant le produit on obtient que

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+2\right) \geqslant 4\sqrt{2\frac{x}{y}2\frac{y}{x}} = 8$$

En particulier, on a égalité si et seulement si $x=\frac{2}{y}$ et $\frac{y}{x}=2$. Ainsi $y=2x$ et $yx=2$, donc $2x^2=2$, donc $x^2=1$, donc $x=1$ et $y=2$. Réciproquement si $x=1$ et $y=2$ on a bien

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(\frac{y}{x}+2\right) = 2\times 4 = 8$$

donc l'unique cas d'égalité est $(x,y)=(1,2)$.

Solution de l'exercice 2
Par l'inégalité arithmético-quadratique, $\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2$, donc $a^4+b^4 \geqslant \frac{(a^2+b^2)^2}{2}$. En particulier, comme de plus $a^2+b^2 \geqslant 2ab$ par IAG,

$$\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4} \leqslant \frac{2}{a^2+b^2} \leqslant \frac{1}{ab} = c$$

En faisant de même symétriquement on a $\frac{a^2+c^2}{a^4+c^4} \leqslant b$ et $\frac{b^2+c^2}{b^4+c^4} \leqslant a$ ce qui donne l'inégalité voulue en sommant.

Solution de l'exercice 3
En faisant une IAG sur chaque dénominateur, on a que

$$\frac{a^2b^2}{a+b}+\frac{b^2c^2}{b+c}+\frac{c^2a^2}{c+a} \leqslant \frac{a^2b^2}{2\sqrt{ab}}+\frac{b^2c^2}{2\sqrt{bc}}+\frac{c^2a^2}{2\sqrt{ac}}$$

Posons $u=\sqrt{a}$, $v=\sqrt{b}$ et $w=\sqrt{c}$, il suffit donc de montrer que $\frac{u^3v^3+u^3w^3+v^3w^3}{2} \geqslant \frac{u^6+v^6+w^6}{2}$, donc que $u^3v^3+u^3w^3+v^3w^3 \leqslant u^6+v^6+w^6$. Cette inégalité est en fait une simple application du lemme du tourniquet ce qui conclut la preuve.

Solution de l'exercice 4
Deux solutions :

— On ajoute 1 à chaque fraction, on se ramène à montrer que $\frac{x+y+1}{y+1}+\frac{x+y+1}{x+1} \geqslant \frac{8}{3}$. Or comme $x+y+1=2$, il suffit de montrer que $\frac{1}{y+1}+\frac{1}{x+1} \geqslant \frac{4}{3}$. Or d'après l'inégalité des mauvais élèves, comme $x+1$ et $y+1$ sont strictement positifs :

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1} \geqslant \frac{4}{x+y+2} = \frac{4}{3}$$

Si on a égalité, $\frac{1}{x+1}=\frac{1}{y+1}$, donc $x=y$, et comme $x+y=1$, on a $(x,y)=(1/2,1/2)$, qui réciproquement en le vérifiant donne bien égalité.

— On pose $A=x+1$ et $B=y+1$ qui sont strictement positifs et de somme 3. L'inégalité se réécrit

$$\frac{A-1}{B}+\frac{B-1}{A} = \frac{2-B}{B}+\frac{2-A}{A} = \frac{2}{A}+\frac{2}{B}-2$$

Or d'après l'inégalité des mauvais élèves, $\frac{2}{A} + \frac{2}{B} \geqslant 2\frac{4}{A+B} = \frac{8}{3}$, donc

$$\frac{A-1}{B} + \frac{B-1}{A} \geqslant \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$$

On obtient les cas d'égalité comme précédemment.

Solution de l'exercice 5
On multiplie les trois équations, on a donc

$$9^3 = x(6-x)y(6-y)z(6-z)$$

Or par IAG, $x(6-x) \leqslant \left(\frac{x+6-x}{2}\right)^2 = 9$, et de même pour y et z. Donc $x(6-x)y(6-y)z(6-z) \leqslant 9^3$. Ainsi on a égalité dans l'IAG, donc $x = 6-x$, $y = 6-y$, $z = 6-z$, donc $(x, y, z) = (3, 3, 3)$ qui réciproquement convient.

Solution de l'exercice 6
On utilise la méthode roumaine, on pose $A = 2x^2 + 1$, $B = 2y^2 + 1$, $C = 2z^2 + 1$. Ainsi $x^2 - y^2 = \frac{A-B}{2}$ et de même cycliquement. L'inégalité à montrer devient alors

$$0 \geqslant \frac{A-B}{2A} + \frac{B-C}{2B} + \frac{C-A}{2C} = \frac{3}{2} - \frac{B}{2A} - \frac{C}{2B} - \frac{A}{2C}$$

En multipliant par 2, il suffit donc de montrer que $\frac{B}{A} + \frac{C}{B} + \frac{A}{C} \geqslant 3$ ce qui est vrai par IAG.

Solution de l'exercice 7
Soit x, y, z vérifiant les conditions de l'énoncé. Ici notons que $x + y = 2015 - z \leqslant 340$ donc comme x et y sont positifs (ils sont supérieurs à 20), on a $x \leqslant 340 \leqslant 1675 \leqslant z$ et $y \leqslant 1675$.

Logiquement, le cas d'égalité de l'IAG se produit lorsque x, y, z sont les plus proches possibles. On aurait donc envie de dire que pour maximiser xyz il faut avoir $z = 1675$. On pourrait donc essayer de montrer que $xyz \leqslant x \times (y + z - 1675) \times 1675$. En effet $x + y + z - 1675 + 1675 = x + y + z = 2015$ et on a toujours les trois inégalités de l'énoncé car $z \geqslant 1675$.

L'inégalité $xyz \leqslant x \times (y + z - 1675) \times 1675$ est équivalente à $yz \leqslant (y + z - 1675) \times 1675$ donc à $(1675 - y)(1675 - z) \leqslant 0$ qui est vrai car $y \leqslant 1675$ et $z \geqslant 1675$.

Ainsi $xyz \leqslant x'y' \times 1675$ avec $x' \geqslant 20$, $y' \geqslant 40$ et $x' + y' = 2015 - 1675 = 340$.

Par IAG, $xyz \leqslant (\frac{x'+y'}{2})^2 \times 1675 = 170^2 \times 1675$. De plus cette valeur est atteinte pour $x = y = 170$ et $z = 1675$ qui vérifie l'énoncé car $x + y + z = 2015$ et les trois inégalités sont évidemment vérifiées. Ainsi la valeur maximale possible $170^2 \times 1675 = 48407500$.

Solution de l'exercice 8
Remarquons que $\frac{x^2+yz}{x^2+yz+1} = 1 - \frac{1}{x^2+yz+1}$ et de même cycliquement. Ainsi l'inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{x^2+yz+1} + \frac{1}{y^2+zx+1} + \frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant 1$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves

$$\frac{1}{x^2+yz+1} + \frac{1}{y^2+zx+1} + \frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+3}$$

Or par le lemme du tourniquet, $xy + yz + xz \leqslant x^2 + y^2 + z^2 = 3$ donc

$$\frac{1}{x^2 + yz + 1} + \frac{1}{y^2 + zx + 1} + \frac{1}{z^2 + xy + 1} \geqslant \frac{9}{3 + 3 + 3} = 1$$

ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 9
On sépare chaque numérateur en 2. D'après l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{2}$$

et

$$\frac{2^2}{b+c} + \frac{3^2}{c+a} + \frac{4^2}{a+b} \geqslant \frac{9^2}{2(a+b+c)} = \frac{81}{2(a+b+c)}$$

En sommant

$$\frac{a^2+4}{b+c} + \frac{b^2+9}{c+a} + \frac{c^2+16}{a+b} \geqslant \frac{a+b+c}{2} + \frac{81}{2(a+b+c)} \geqslant 2\sqrt{\frac{(a+b+c)}{2}\frac{81}{2(a+b+C)}} \geqslant 9$$

ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 10
On pose $s = x + y$et $p = xy$, on a donc $2s = 1 + p$. En particulier, on a

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = s + \frac{s}{p} = \frac{p + p^2 + 1p}{2p} = \frac{(1+p)^2}{2p}$$

Or on a $s^2 \geqslant 4p$, donc $1 + p = 2s \geqslant 4\sqrt{p}$, donc

$$\frac{(1+p)^2}{2p} \geqslant \frac{16p}{2p} = 8$$

Réciproquement on a égalité si et seulement si $s^2 = 4p$ donc si $x = y$, et si $1+p = 2\sqrt{p}$, donc de manière équivalente si $1 + x^2 = 4x$. En résolvant l'équation, on obtient que $x = y = 2 \pm \sqrt{3}$ convient.

Solution de l'exercice 11
Déjà si $a = b = c1$, on trouve comme valeur $\frac{9}{2}$. Essayons de montrer que c'est la valeur minimale.

En utilisant que $abc = 1$, il suffit de montrer que

$$(a^2c + b^2a + c^2b)\left(\frac{1}{ac+bc} + \frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ac}\right) \geqslant \frac{9}{2}$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves, $\left(\frac{1}{ac+bc} + \frac{1}{ab+ac} + \frac{1}{bc+ac}\right) \geqslant \frac{3^2}{2(ab+ac+bc)}$, donc il suffit de montrer que $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant ab + bc + ca$.

Or par IAG $a^2b + a^2b + b^2c \geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^4c} = 3ab$, et de même $2b^2c + c^2a \geqslant 3bc$ et $2c^2a + a^2b \geqslant 3ac$. En sommant, on a $3(a^2b + b^2c + c^2a) \geqslant 3(ab + bc + ca)$ ce qui donne bien l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 12

Utilisons l'inégalité de Cauchy Schwarz pour se débarasser de ces dénominateurs peu attrayants.

$(a^3+b+c+d)(1/a+b+c+d) \geqslant (a+b+c+d)^2$, donc

$$\frac{1}{a^3+b+c+d}+\frac{1}{a+b^3+c+d}+\frac{1}{a+b+c^3+d}+\frac{1}{a+b+c+d^3} \leqslant \sum_{cycl} \frac{1/a+b+c+d}{(a+b+c+d)^2}$$

En particulier il suffit de montrer $\sum\limits_{cycl} bcd+b+c+d \leqslant \frac{(a+b+c+d)^3}{4}$ i.e.

$$3(a+b+c+d)+\sum_{cycl} abc \leqslant \frac{(a+b+c+d)^3}{4}$$

Or comme $abcd=1$, par IAG $a+b+c+d \geqslant 4$, donc $3(a+b+c+d) \leqslant \frac{3}{16}(a+b+c+d)^2$. Il suffit donc de montrer que $\sum\limits_{cycl} abc \leqslant (a+b+c+d)^3(1/4-3/16) = \frac{(a+b+c+d)^3}{16}$.

En développant, l'inégalité est équivalente en terme de p moyennes à $64[(1,1,1,0)] \leqslant 4[(3,0,0,0)]+36[(2,1,0,0)]+24[(1,1,1,0)]$ donc à $40[(1,1,1,0)] \leqslant 4[(3,0,0,0)]+36[(2,1,0,0)]$ qui est vrai par Muirhead car $(3,0,0,0)$ et $(2,1,0,0)$ dominent $(1,1,1,0)$.

Solution de l'exercice 13

Déjà le terme en cube ne nous arrange pas, puisque l'info qu'on a est en fait de degré 2. On veut donc faire une IAG : $2a^3+1=a^3+a^3+1 \geqslant 3a^{6/3}=3a^2$, de même pour b et c. On a donc

$$\frac{a}{\sqrt{a^3+5}}+\frac{b}{\sqrt{b^3+5}}+\frac{c}{\sqrt{c^3+5}} \leqslant \sqrt{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2a^3+10}}+\frac{b}{\sqrt{2b^3+10}}+\frac{c}{\sqrt{2c^3+10}}\right) \leqslant \sqrt{2}\sum_{cycl}\frac{a}{\sqrt{3a^2+9}}$$

Il suffit donc de montrer que $\sum\limits_{cycl} \frac{a}{\sqrt{a^2+3}} \leqslant \frac{3}{2}$. On réhomogénéise : $a^2+3=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(b+c)$. On veut donc montrer que $\sum\limits_{cycl} \frac{a}{\sqrt{a+b}\sqrt{a+c}} \leqslant \frac{3}{2}$.

Or par IAG :

$$\sum_{cycl}\frac{a}{\sqrt{a+b}\sqrt{a+c}} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{cycl}\frac{a}{a+b}+\frac{a}{a+c} = \frac{1}{2}\sum_{cycl}\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=\frac{3}{2}$$

ce qui conclut.

3 Lemme LTE et théorème de Zsigmondy (Théo)

Racines primitives et LTE

Les différentes version de LTE de Zsigmondy et des racines primitives ont été évoquées.

Exercice 1
Soit p un nombre premier et k un entier positif, que vaut $1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k$ modulo p ?

Exercice 2
On dit qu'un sous-ensemble A de $\{2, \ldots, 28\}$ est joli si pour tout $a \in A$, le reste de la division euclidienne de a^2 par 29 est dans A. Déterminer la plus petite taille d'un ensemble joli.

Exercice 3
Déterminer tous les nombres premiers p tels que p divise $(x+y)^{19} - x^{19} - y^{19}$ pour tout couple (x, y) d'entiers strictement positifs.

Exercice 4
Déterminer tous les couples (a, p) d'entiers strictement positifs, avec p premier, tel que pour tout couple (m, n) d'entiers strictement positifs, le reste de la division euclidienne de a^{2^n} modulo p^n est non nul, et est le même que celui de a^{2^m} modulo p^m.

Zsigmondy

Exercice 5
Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers positifs tels que $3^m - 2^n = \pm 1$.

Exercice 6
Déterminer tous les triplets (a, b, c) d'entiers positifs tels que $7^a = 1 + 2^b 3^c$.

Exercice 7
Déterminer tous les entiers n strictement positifs tels qu'il existe p premier tel que $p^n - (p-1)^n$ soit une puissance de 3.

Exercice 8
Déterminer tous les triplets d'entiers strictement positifs (a, b, p) avec p premier tels que $2^a + p^b = 19^a$.

Exercice 9
Déterminer tous les entiers strictement positifs (x, y, n, k) tels que $3^a = x^k + y^k$.

Exercice 10
Déterminer tous les entiers strictement positifs x, r, p, n avec $n, r > 1$, p premier et $x^r - 1 = p^n$.

Exercice 11
Déterminer tous les entiers strictement positifs a, m, n tels que $a^m + 1$ divise $(a+1)^n$.

Exercice 12
Déterminer tous les entiers strictement positifs x, y et z tels que

$$45^x - 6^y = 2019^z.$$

Exercice 13
Déterminer tous les quadruplets d'entiers strictement positifs (p, q, a, b), où p et q sont des nombres premiers et $a > 1$, tels que :

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Exercice 14
Déterminer tous les triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs tels que $2018^x = 100^y + 1918^z$.

Exercice 15
Déterminer tous les triplets d'entiers strictement positifs (x, y, z) tels que $2020^x + 2^y = 2024^z$

Exercice 16
Déterminer tous les triplets (a, b, p) d'entiers strictement positifs, avec p premiers, tels que $a^p = b! + p$.

Exercice 17
Déterminer tous les quadruplets d'entiers positifs (t, x, y, z) qui vérifient $5^t + 3^x 4^y = z^2$.

Solution de l'exercice 1
Soit z une racine primitive modulo p. On sait que $(1, z, \dots, z^{p-2})$ est une permutation de $(1, \dots, p-1)$ modulo p.

Ainsi on a

$$1^k + \cdots + (p-1)^k \equiv (z^0)^k + \cdots + (z^{p-2})^k \equiv (z^k)^0 + \cdots + (z^k)^{p-2}$$

Or cette somme est une somme géométrique, qui vaut $p-2$ si $z^k \equiv 1 \pmod{p}$, donc si $p-1$ divise k, et qui vaut sinon $\frac{z^{k(p-1)}-1}{z-1} \equiv 0 \pmod{p}$.

Donc la somme vaut 0 si $p-1$ ne divise pas k, 1 sinon.

Solution de l'exercice 2
Soit A un ensemble joli. Fixons a un élément de A. Notons que a est premier avec 29, donc par Petit Fermat $a^{28} \equiv 1 \pmod{29}$

— Si A est de cardinal 1, a est le reste de la division euclidienne de a^2 par 29, donc $a^2 \equiv a \pmod{29}$. Comme a est inversible car premier avec 29, on obtient $a \equiv 1 \pmod{29}$ ce qui est impossible.

— Si A est de cardinal 2, comme montré précédemment $a^2 \not\equiv a \pmod{29}$. Comme le reste de a^2 est dans A, par hypothèse le reste de $(a^2)^2 = a^4$ y est aussi. Or A contient a et le reste de a^2 (qui sont donc ses deux éléments, donc on a soit $a \equiv a^4 \pmod{29}$, soit $a^2 \equiv a^4 \pmod{29}$. Dans le second cas $a^2 \equiv 1 \pmod{29}$. Or le reste de a^2 par 29 est dans A, donc 1 est dans A ce qui est absurde. Dans le premier cas, $a^3 \equiv 1 \pmod{29}$, donc

$$1 \equiv a^{28} = a \times (a^3)^9 \equiv a \pmod{29}.$$

Ceci n'est pas possible car $A \subset \{2, \dots, 28\}$.

— Si A est de cardinal 3 on montre comme avant que a, a^2 et a^4 sont distincts modulo 29, donc forcément a^8 vaut a, a^2 ou a^4. On peut chercher à avoir $a^8 \equiv a$, soit $a^7 \equiv 1 \pmod{29}$. Pour cela, si on note z une racine primitive modulo 29, alors $b = z^4$ vérifie $b^7 \equiv 1 \pmod{29}$. En prenant l'ensemble des restes des divisions euclidienne de z^4, z^8, z^{16} par 29, on a bien le résultat voulu car $(z^4)^2 \equiv z^8$, $(z^8)^2 \equiv z^{16}$, $(z^{16})^2 \equiv z^{32} \equiv z^{28}z^4 \equiv z^4 \pmod{29}$.

Donc la taille minimale d'un ensemble joli est 3.

Solution de l'exercice 3
Soit p un nombre premier solution. Pour $y = 1$, on obtient que p divise $(x+1)^{19} - x^{19} - 1$. En particulier, p divise $2^{19} - 2$.

Montrons car récurrence sur n que $n^{19} \equiv n \pmod{p}$ pour tout $n > 0$. C'est vrai pour $n = 1$, et si c'est vrai au rang n, alors comme p divise $(n+1)^{19} - n^{19} - 1$ et divise $n^{19} - n$, en sommant p divise $(n+1)^{19} - n - 1$.

Ainsi p divise $n^{19} - n$ pour tout n. Prenons n une racine primitive mod p, n est premier avec p, donc p divise $n^{18} - 1$. Ainsi l'ordre de n divise 18, donc vaut $1, 2, 3, 6, 9, 18$. Or celui-ci vaut $p - 1$, donc $p = 2, 3, 4, 7, 10$ ou 19. Ainsi p vaut $2, 3, 7$ ou 19.

Notons que si z est un entier quelconque, $z^{19} - z = z(z^{18} - 1)$ est divisible par $z(z^{18} - 1) = z^{19} - z$ donc par Petit Fermat par 19, par $z(z-1) = z^2 - z$ donc par Petit Fermat par 2, par $z(z^2 - 1) = z^3 - z$ donc par Petit Fermat par 3, par $z(z^6 - 1) = z^7 - z$ donc par Petit Fermat par 7. En particulier si x, y sont des entiers strictement positifs, chacun des quatre nombres premiers divise $(x+y)^{19} - (x+y) - (x^{19} - x) - (y^{19} - y) = (x+y)^{19} - x^{19} - y^{19}$ ce qui donne le résultat voulu : les nombres premiers qui conviennent sont $2, 3, 7, 19$.

Solution de l'exercice 4
En prenant $n = 1$ dans l'énoncé, on obtient que pour tout entier m strictement positif, le reste de a^{2^m} modulo p^m vaut celui de a^2 modulo p, donc est constant. Notons r ce reste : on a donc $r \neq 0$ ainsi $r \in \{1, \ldots, p-1\}$. On a $a^2 \equiv r \pmod{p}$ et $a^4 \equiv r \pmod{p^2}$, donc $a^4 \equiv r \pmod{p}$, donc $r^2 \equiv r \pmod{p}$. Ainsi comme r est premier avec p, r est inversible mod p, donc $r \equiv 1 \pmod{p}$. On a donc $a^{2^m} \equiv 1 \pmod{p^m}$ pour tout m. En particulier $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$

Comme p divise $a^2 - 1$, par LTE si $p \geqslant 3$ que si $a > 1$, $V_p(a^{2^m} - 1) = V_p(a^2 - 1) + V_p(2^{m-1}) = V_p(a^2 - 1)$. En particulier, comme $V_p(a^{2^m} - 1) \geqslant m$ pour tout $m \geqslant 1$, $V_p(a^2 - 1) \geqslant m$ pour tout m ce qui est absurde donc $a = 1$.

Réciproquement, $a = 1$ et $p \geqslant 3$ convient trivialement.

Pour le cas $p = 2$, on a que a est impair, donc 4 divise $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$, donc par LTE, comme 4 divise $a^2 - 1$, si $a > 1$ $V_2(a^{2^m} - 1) = V_2(a^2 - 1) + V_2(2^{m-1}) \geqslant 2 + m - 1 = m + 1$, ainsi $a^{2^m} - 1$ est divisible par 2^m pour tout m, et on conclut de la même façon que précédemment.

Ainsi les couples solutions sont ceux de la forme $(1, p)$ pour $p \geqslant 3$ et $(a, 2)$ pour a impair.

Solution de l'exercice 5
Résolvons déjà $3^m - 2^n = 1$, on a $3^m - 1 = 2^n$, en particulier $m > 0$. En appliquant le théorème de Zsigmondy (faisable car 3 et 1 sont premiers entre eux), on a que $3^m - 1$ admet un facteur primitif, sauf si $m = 1$ ou $m = 2$ (car $3 + 1$ est une puissance de deux). Or les seuls facteurs premiers de $3^m - 1$ sont des 2, et 2 divise déjà $3 - 1$, donc n'est pas un facteur primitif. Donc forcément $m = 1$ ou 2, ce qui implique respectivement $n = 1$ ou 3, ainsi les seules solutions sont $(m, n) = (1, 1)$ et $(2, 3)$ qui conviennent bien.

Pour l'équation $3^m - 2^n = -1$, on a $2^n = 3^m + 1$. Or si $m > 1$ par Zsigmondy, $3^m + 1$ admet un facteur primitif, qui ne vaut pas 2 car 2 divise $3^m + 1$, donc $3^m + 1$ n'est pas une puissance de 2. Ainsi $m > 1$ ne donne lieu à aucune solution. Si $m = 0$ ou 1, on obtient respectivement $n = 1$ ou 2, donc les couples solution sont $(m, n) = (0, 1), (1, 2)$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

Soit (a, b, c) solution. Déjà notons que vu l'équation, $a > 0$. On a donc $7^a - 1 = 2^b \times 3^c$. Si $a > 2$ (pour éviter l'exception $a = 2$ car $7 + 1$ est une puissance de 2), alors comme 7 et 1 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Zsigmondy $7^a - 1$ admet un facteur primitif, qui ne divise donc pas $7 - 1 = 6$, donc $7^a - 1$ ne peut pas valoir $3^b 2^a$.

Si $a = 1$, on a $7^a - 1 = 6$, donc $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. Si $a = 2$, on a $7^a - 1 = 48 = 2^4 \times 3$, donc $(a, b, c) = (2, 4, 1)$ convient.

Ainsi les deux seules solutions sont $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ ou $(2, 4, 1)$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

Notons déjà que pour $n = 1$, tout p premier vérifie $p^n - (p-1)^n = 1$, qui est bien une puissance de 3, donc $n = 1$ convient.

Supposons désormais $n > 1$, et soit p tel que $p^n - (p-1)^n$ soit une puissance de 3. Déjà notons que $p^n = (p - 1 + 1)^n > (p-1)^n + 1$ d'après la formule du binôme, donc $p^n - (p-1)^n$ est une puissance de 3 divisible par 3. Or on voit assez facilement que si $p \equiv 1 \pmod 3$ ou $p \equiv 0 \pmod 3$, 3 ne divise pas $p^n - (p-1)^n$. Donc $p \equiv 2 \pmod n$.

En particulier, $p^2 - (p-1)^2 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3$. Donc si $n > 2$, sauf dans le cas où $p = 2$ et $n = 6$, d'après Zsigmondy, comme p et $p - 1$ sont premiers entre eux, $p^n - (p-1)^n$ admet un facteur primitif. Ce facteur ne divise donc pas $p^2 - (p-1)^2$ donc ne vaut pas 3, ce qui est absurde. Ainsi on a $p = 2$ et $n = 6$, donc $p^n - (p-1)^n = 63$ qui ne convient pas non plus. On a donc forcément $n = 2$.

Or $n = 2$ est bien solution, car $2^2 - 1^2 = 3$ est une puissance de 3. Les solutions sont donc 2 et 3.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

Soit a, b, p solution, on a $p^b = 19^a - 2^a$. En regardant modulo 17, on obtient $p^b \equiv 2^a - 2^a \equiv 0$, donc $p = 17$. Ainsi l'équation devient $17^b = 19^a - 2^a$.

Or si $a > 1$, comme 19 et 2 sont premiers entre eux, et comme on n'est pas dans une exception car $19 \neq 2$ et $19 + 2$ n'est pas une puissance de 2, par Zsigmondy $19^a - 2^a$ admet un facteur primitif. Celui-ci ne divise pas $19 - 2 = 17$, ce qui contredit l'équation. Ainsi on a forcément $a = 1$ et $b = 1$.

On vérifie réciproquement que $(a, b, p) = (1, 1, 19)$ est bien solution

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Si $k = 1$, on a toutes les solutions de la forme $(x, 3^n - x, n, 1)$ pour $n > 0$ et x vérifiant $0 < x < 3^n$.

On suppose désormais $k \geqslant 2$. Posons $d = PGCD(x, y)$, on a que d divise 3^a donc d est une puissance de 3. Posons alors $d = 3^j$, $x = 3^j a'$ et $y = 3^j b'$ avec a' et b' premiers entre eux et strictement positifs. L'équation devient

$$3^{a-kj} = a'^k + b'^k.$$

En particulier on a que $a - kj > 0$. Comme 3 divise $a'^k + b'^k$, on a que modulo 3, a'^k et b'^k valent tous les deux 0, ou l'un vaut 1 et l'autre 2 modulo 3. Le premier cas n'est pas possible car cela impliquerait que 3 divise a' et b' qui sont premiers entre eux. Le second cas impose que k est impair (car les carrés valent 0 ou 1 mod 3), et que quitte à échanger a' et b', $a' \equiv 1 \pmod 3$ et $b' \equiv 1 \pmod 3$.

En particulier 3 divise $a' + b'$. Si $(a', b', k) \neq (2, 1, 3)$ et $(a', b') \neq (1, 1)$, d'après le théorème de Zsigmondy, $a'^k + b'^k$ admet un facteur primitif. Celui-ci ne divise pas $a' + b'$, donc ne vaut pas 3 ce qui est absurde. Ainsi $(a', b', k) \neq (2, 1, 3)$ ou $(a', b') \neq (1, 1)$.

Le cas $(a', b') = (1, 1)$ est impossible car 3 ne divise pas $a' + b'$. Le cas $(a', b', k) = (2, 1, 3)$ donne que $3^{a-kj} = 2^3 + 1 = 9$, donc $a = 3j + 2$. Ainsi on a $(x, y, k, a) = (2 \times 3^j, 3^j, 3, 3j + 2)$ ou $(3^j, 2 \times 3^j, 3, 3j + 2)$ qui conviennent réciproquement.

Solution de l'exercice 10

Soit (x, r, p, n) solution. Supposons $x > 2$. Dans ce cas, $x - 1$ divise $x^r - 1$, et est strictement plus grand que 1 : c'est donc une puissance de p différente de 1.

Par Zsigmondy, sauf dans le cas où $r = 2$ et $x + 1$ est une puissance de 2, ou dans le cas où $x = 2$ et $r = 6$ (qui est déjà exclu), alors $x^r - 1$ admet un facteur primitif. Celui-ci ne divise pas $x - 1$ donc est différent de p ce qui est absurde. Ainsi $r = 2$ et $x + 1$ est une puissance de 2.

On a donc $p = 2$ et $(x - 1)(x + 1) = 2^n$. Donc $x - 1$ et $x + 1$ sont des puissances de 2, de pgcd divisant $(x + 1) - (x - 1) = 2$, donc l'une d'entre elle vaut 1 ou 2. Ainsi $x = 0, 1, 2$ ou 3. Comme on a supposé $x > 2$, on a $x = 3$, donc $2^n = 8$ donc $n = 3$. On trouve $(x, r, p, n) = (3, 2, 2, 3)$ qui convient réciproquement.

Supposons désormais $x \leqslant 2$. Il est clair que $x = 1$ ne peut convenir, donc $x = 2$, donc $2^r - 1 = p^n$. Ainsi $p^n + 1 = 2^r$, donc p est impair donc différent de 2.

Par Zsigmondy, comme ici on ne peut être en présence d'une exception et $n > 1$, $p^n + 1$ admet un facteur premier primitif. Celui-ci ne divise pas $p + 1$ donc ne vaut pas 2 ce qui est absurde : il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

Ainsi $(x, r, p, n) = (3, 2, 2, 3)$ est l'unique solution.

Solution de l'exercice 11

Soit (a, m, n) une solution. Supposons $m > 1$. Excepté si $(a, m) = (2, 3)$, d'après Zsigmondy $a^m + 1$ admet un facteur premier primitif. Celui-ci ne divise donc pas $a + 1$, donc ne divise pas non plus $(a + 1)^n$ ce qui est absurde. Ainsi $a = 2$, $m = 3$, et $2^3 + 1 = 9$ divise $(2 + 1)^n$, donc $n \geqslant 2$. Ainsi on a $(a, m, n) = (2, 3, n)$ avec $n \geqslant 2$, qui réciproquement convient.

Sinon on a $m = 1$, et tous les triplets $(a, 1, n)$ conviennent.

Solution de l'exercice 12

On commence par décomposer chaque terme en produit de facteurs premiers. L'équation devient alors

$$3^{2x} \cdot 5^x - 3^y \cdot 2^y = 3^z \cdot 673^z.$$

Rappelons que si $a + b = c$ avec a, b, c des entiers strictement positifs, pour tout nombre premier p, $v_p(a) = v_p(b)$ ou $v_p(a) = v_p(c)$ ou $v_p(b) = v_p(c)$. En effet, dans le cas où $v_p(a)$ est le minimum des valuations p adiques, si $v_p(b) > v_p(a)$ et $v_p(c) > v_p(a)$, alors $p^{v_p(a)+1}$ divise $c - b$, mais pas a ce qui est absurde. Les autres cas se traitent de même.

En particulier, ici cela implique $2x = z$ ou $2x = y$ ou $y = z$.

— Si $2x = z$, $2019^z < 45^x \leqslant 45^z$ ce qui est absurde.

— Si $2x = y$, on a $3^{2x} \cdot (5^x - \cdot 4^x) = 3^z \cdot 673^z$, donc $z \geqslant 2x$. Ainsi $2019^z < 45^x \leqslant 45^z$ ce qui est absurde.

— Si $y = z$, on a $45^x = 6^y + 2019^y = 3^y(2^y + 673^y)$. Par Zsigmondy, comme 673 et 2 sont premiers entre eux, si $y > 1$, $2^y + 673^y$ admet un facteur premier primitif. Celui-ci ne divise pas $2 + 673 = 675 = 3^3 \times 5^2$, donc ne vaut ni 3 ni 5, et donc ne divise pas 45^x ce qui est absurde. Ainsi $y = 1$, donc $45^x = 6 + 2019 = 2025$, donc $z = 2$.

Réciproquement, le triplet $(2, 1, 1)$ est bien solution ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13

Soit (p, q, a, b) un quadruplet solution. La parité nous donne que p ou q est pair, mais pas l'autre, donc $p = 2$ ou $q = 2$ mais pas l'autre. Traitons d'abord le cas $p = 2$.

On a $2^a = 1 + 5q^b$ donc $2^a - 1 = 5q^b$. Or les puissances de 2 modulo 5 valent $1, 2, 4, 3, 1$, donc 4 divise a. En particulier, on peut écrire $a = 2c$ pour un entier $c \geqslant 1$ (car $a > 1$), donc $(2^c - 1)(2^c + 1) = 5q^b$. Le pgcd de $2^c - 1$ et $2^c + 1$ divise leur différence, donc 2. Mais il divise aussi leur produit donc $5q^b$. Ainsi comme $q \neq 2$, le pgcd vaut 1. En particulier parmi $2^c - 1$ et $2^c + 1$, un vaut soit 1, soit 5. Or $2^c - 1$ ne peut pas valoir 5, mais peut valoir 1 si $c = 1$ (dans ce cas $a = 2$), et $2^c + 1$ ne peut pas valoir 1, mais vaut 5 lorsque $c = 2$ (et dans ce cas $a = 4$). Ainsi $a = 2$ ou 4. Mais comme 4 divise a, on a forcément $a = 4$.

Si $a = 4$ et $p = 2$, l'équation devient $5q^b = 2^4 - 1 = 15$ donc l'unique possibilité est $q = 3$, $b = 1$: le quadruplet $(2, 3, 4, 1)$ est bien solution.

Traitons désormais le cas $q = 2$, on a $p^a - 1 = 52^b$. On aimerait montrer que a est pair pour avoir à nouveau une différence de carré mais à priori ce n'est pas clair. Supposons a impair. Par Zsimondy, sauf exception, $p^a - 1$ admet un facteur primitif. Comme $p^a - 1$ et $p - 1$ ont même parité, 2 divise $p - 1$ donc le facteur primitif ne vaut pas 2. Donc le facteur primitif vaut 5, et a est l'ordre de p modulo 5, qui divise 4. On a donc $a = 1, 2$ ou 4, donc comme $a > 1$, a est pair.

De même on pose $a = 2c$, on a $(p^c - 1)(p^c + 1) = 5 \times 2^b$. Le pgcd de $p^c - 1$ et $p^c + 1$ divise leur différence donc 2 : ainsi un des deux n'est pas multiple de 4. Comme il divise 5×2^b, il divise 10, donc vaut $1, 2, 5$ ou 10. Ainsi $p^c - 1$ ou $p^c + 1$ vaut $1, 2, 5$ ou 10.

Si c'est $p^c - 1$, il ne vaut pas 1 (sinon $p = 2$ ce qui est interdit), pas 6 sinon $p^c = 6$ ce qui est impossible. Donc soit $p^c - 1 = 2$, ce qui donne $p^c = 3$ soit $p = 3$ et $c = 1$ donc $p = 3$ et $a = 2$, soit $p^c - 1 = 10$, donc $p^c = 11$, donc $p^c + 1 = 12$. Mais dans le dernier cas, 12 ne divise pas 5×2^b car 3 ne le divise pas donc on a une contradiction. Notons que si $p = 3, a = 2$ et $q = 2$, l'équation devient $5 \times 2^b = 3^2 - 1 = 8$ n'a pas de solution car 5 ne divise pas 8.

Sinon, c'est $p^c + 1$ qui vaut $1, 2, 5$ ou 10. Déjà notons que $p^c + 1$ est pair car p est impair, et vaut au moins $3 + 1 = 4$, donc forcément $p^c + 1 = 10$, donc $p^c = 9$ donc $p = 3$, $c = 2$. Ainsi $p = 3, a = 4$ et $q = 2$. Dans ce cas l'équation est équivalente à $5 \times 2^b = 3^4 - 1 = 80 = 5 \times 2^4$ donc à $b = 4$. Ainsi $(3, 2, 4, 4)$ est bien solution.

Les solutions sont donc $(3, 2, 4, 4)$ et $(2, 3, 4, 1)$

Solution de l'exercice 14

On réutilise l'argument du problème 12 sur les valuations 2 adiques. La valuation 2-adique de 2018^x vaut x, celle de 100^y vaut $2y$ et celle de 1918^z vaut z. Donc $z = x$ ou $x = 2y$ ou $z = 2y$.

Modulo 3, on a $2^x \equiv 1 + 1 \equiv 2$. Comme les puissances de 2 alternent entre 1 et 2, on en déduit que x est impair, donc $x \neq 2y$.

Modulo 5, l'équation devient $3^x \equiv 3^z \pmod 5$. Or modulo 5, les puissances de 3 alternent entre $1, 3, 4, 2$, donc on a que $x \equiv z \pmod 4$. Ainsi z est impair, donc $z \neq 2y$.

On a donc $x = z$. En particulier,

$$100^y = 2018^x - 1918^x = 2^x(1009^x - 959^x)$$

Or 1009 et 959 sont premiers entre eux (car leur pgcd divise $1009 - 959 = 50$, et ceux-ci sont premiers avec 2 et 5), donc par Zsigmondy, comme $1009 + 959 = 1968$ n'est pas une puissance de 2, si $x > 1$, alors $1009^x - 959^x$ admet un facteur primitif. Celui-ci ne divise pas $1009 - 959 = 50$ donc ne vaut ni 2 ni 5, or il divise 100^y ce qui est absurde.

On a donc $x = 1$, et $y = 1$. Ainsi $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ est l'unique solution, qu'on vérifie facilement.

Solution de l'exercice 15
Déjà rappelons que pour a, b des entiers strictement positifs tels que $V_2(a) \neq V_2(b)$, $V_2(a+b) = \min(V_2(a), V_2(b))$ donc dans ce cas la valuation 2-adique de la somme est le minimum de celle des deux termes.

En particulier, parmi 2020^x, 2^y et 2024^z, deux ont la même valuation 2-adique. Donc parmi $xV_2(2020) = 2x$, y et $zV_2(2024) = 3z$, deux sont égales.

Essayons maintenant de faire des remarques arithmétiques pertinentes. Déjà $(1, 2, 1)$ est clairement solution. On peut donc essayer tous les modulos possibles : modulo 3, on a que $1 + 2^y \equiv 2^z$. Les puissances de 2 alternent entre 1 et 2 modulo 3, donc y est pair et z impair. En particulier $2x \neq 3z$, sinon z serait pair. Idem, $y \neq 3z$ car y est pair et z impair.

On a donc $2x = y$. Ainsi $2024^z = 4^x(505^x + 1)$.Si $x > 1$ alors d'après Zsigmondy $505^x + 1$ admet un diviseur premier qui ne divise pas 506. Or comme $2024 = 506 \times 4$, tout diviseur premier de 2024 divise 506 donc on a une contradiction. Ainsi $x = 1$ ce qui implique que $y = 2$ et $z = 1$.

L'unique solution est donc $(1, 2, 1)$.

Solution de l'exercice 16
Supposons que p ne divise pas a. Dans ce cas, p ne divise pas $b! + p$, donc $b < p$. De plus on a $a \geqslant p > 1$. Comme a ne divise pas p (car $a \neq p$), a ne divise pas $b!$, donc $a > b$. Ainsi,

$$p = a^p - b! \geqslant a^p - (a-1)^{a-1} \geqslant a^p - (a-1)^p = \sum_{k=0}^{p-1} a^k (a-1)^{p-1-k} > p$$

l'inégalité étant stricte car $a^{p-1} > 1$ (et les autres termes de la somme valent au moins 1). Ainsi, dans ce cas, on a une contradiction.

Supposons désormais que p divise a, dans ce cas p divise $b!$ donc $b \geqslant p$. p^2 divise a^p mais pas p, donc p^2 ne divise pas $b!$. On a donc $b \leqslant 2p-1$. Ainsi comme pour tout x, $(p-x)(p+x) = p^2 - x^2 \leqslant p^2$, on a

$$b! + p = p \times (p-1)(p+1) \times \cdots \times (p-(p-1))(p+(p-1)) + p \leqslant p \times p^2 \times \cdots \times p^2 + p = p^{2p-1} + p$$

Or si $a \neq p$, alors $a > p$. Tout facteur premier de a différent de p ne peut diviser $b!$, donc doit être supérieur à p. Ainsi $a \geqslant p^2$, donc

$$a^p \geqslant p^{2p} = p^{2p-1} + (p-1)p^{2p-1} > p^{2p-1} + p \geqslant b! + p$$

ce qui est absurde.

Ainsi on a $a = p$, donc l'équation devient $p^p = b! + p$. On a donc $p \times (p^{p-1} - 1) = b!$. De plus, rappelons que $p \leqslant b \leqslant 2p - 1$. Soit q un facteur premier primitif de $p^{p-1} - 1$, qui existe bien si $p - 1 \neq 2$, $p - 1 \neq 1$ et $p \neq 2$ pour éviter l'exception $2^6 - 1$. l'ordre de p modulo q vaut $p - 1$, donc $p - 1$ divise $q - 1$. Ainsi $q = 1 + k(p-1)$ avec $k > 0$. Notons que $k = 1$ est impossible : en effet, $q = p$ ne divise pas $p^{p-1} - 1$. De plus, q divise $b!$, donc $q \leqslant b \leqslant 2p - 1$. Ainsi $1 + k(p-1) \leqslant 2p - 1$, donc $k(p-1) \leqslant 2(p-1)$. On a donc $k = 2$, et égalité dans toutes les inégalités, donc $b = 2p - 1$.

Ainsi on a $b!+p > p(p+1)\dots(2p-1) \geqslant p^p$ ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de solution si $p \neq 2, 3$.

Il reste alors à regarder $p = 2$ et 3. Pour $p = 2$, l'équation devient $b! = 2$, donc $b = 2$, réciproquement $(2, 2, 2)$ est bien solution. Pour $p = 3$ l'équation devient $b! = 24$ donc $b = 4$, et $(3, 4, 3)$ convient bien.

Solution de l'exercice 17

Idéalement vu qu'on a un carré à droite, on aimerait trouver un carré à gauche. Le candidat naturel est 5^t. Pour montrer que c'est un carré, il faudrait idéalement regarder modulo un élément divisant $5^2 - 1$ mais pas $5 - 1$, on peut donc regarder modulo 3. Supposons $x \geqslant 1$, en regardant modulo 3, $5^t = z^2$. Les carrés modulo 3 valent 0 ou 1, les puissances de 5 valent $1, 2, 1$, on a donc forcément $5^t \equiv 1 \pmod 3$ soit 2 divise t. Posons $t = 2l$, on a donc $3^x 4^y = (z-5^l)(z+5^l)$. Notons que $z - 5^l$ est forcément strictement positif. Posons d le pgcd de $z - 5^l$ et $z + 5^l$, alors d divise $z + 5^l - (z - 5^l) = 2 \times 5^l$, et d divise $3^x 4^y$ donc d divise 2.

Dans le cas où $y = 0$, on a forcément $d = 1$. Comme $z-5^l < z+5^l$, on a forcément $z-5^l = 1$, donc $2 \times 5^l + 1 = 3^x$. En regardant modulo 5, si $l \geqslant 1$, on a $3^x \equiv 1 \pmod 5$. Or les puissances de 3 valent $1, 3, 4, 2, 1$ donc forcément 4 divise x. Posons $x = 2b$, on a $(3^b - 1)(3^b + 1) = 5^x$. Le pgcd de $3^b - 1$ et $3^b + 1$ divise leur différence donc 2 et il divise 5^x, il vaut donc 1, on a donc comme $3^b - 1$ et $3^b + 1$ donc des puissances de 5 vérifiant $0 < 3^b - 1 < 3^b + 1$, $3^b - 1 = 1$, donc $3^b = 2$ contradiction. En particulier on a $l = 0$, $x = 1$ donc $z = 2$ donc $(t, x, y, z) = (0, 1, 0, 2)$ qui réciproquement convient.

Dans le cas où $y > 0$, on a $z - 5^l$ et $z + 5^l$ de même parité et de produit pair, leur pgcd vaut donc nécessairement 2. On a donc forcément $(z - 5^l, z + 5^l)$ vaut à permutation près $(2, 3^x 2^{2y-1}), (2 \times 3^x, 2^{2y-1})$. Notons que comme $z-5^l < z+5^l$ on ne peut avoir $(z-5^l, z+5^l) = (3^x 2^{2y-1}, 2)$. Il reste donc 3 cas à traiter.

— Si $z-5^l = 2$ et $z+5^l = 3^x 2^{2y-1}$, alors $2+2 \times 5^l = 3^x 2^{2y-1}$, donc $5^l+1 = 3^x 2^{2(y-1)}$ Modulo 4, $5^l + 1$ vaut 2, donc $2(y - 1) = 1$ contradiction.

— Si $z - 5^l = 2 \times 3^x$ et $z + 5^l = 2^{2y-1}$, on a donc $2 \times 5^l = 2^{2y-1} - 2 \times 3^x$ soit $5^l + 3^x = 2^{2(y-1)}$. Modulo 3, on a $5^l \equiv 2^l \equiv 1 \pmod 3$ donc l est pair. Ainsi si on pose $l = 2h$, on a $3^x = (2^{y-1} - 5^h)(2^{y-1} + 5^h)$. En particulier le pgcd de $(2^{y-1} - 5^h)$ et $(2^{y-1} + 5^h)$ divise leur différence c'est-à-dire 2×5^h, et il divise aussi 3^x donc il vaut 1. On obtient donc $2^{y-1} - 5^h = 1$ et $2^{y-1} + 5^h = 3^x$, donc $3^x = 2 \times 5^h + 1$. D'après le cas $y = 0$, on a $x = 1$ et $h = 0$ donc $t = l = 0$ donc $z = 7$ et comme $2^{y-1} = 2$, $y = 2$. Réciproquement $(0, 1, 2, 7)$ convient.

— Si $z+5^l = 2\times 3^x$ et $z-5^l = 2^{2y-1}$, on a donc $2\times 5^l = -2^{2y-1}+2\times 3^x$ donc $5^l+2^{2(y-1)} = 3^x$. Si $y > 1$ modulo 4 on a $3^x \equiv 1 \pmod 4$ donc x est pair. En particulier si on pose $x = 2b$, $5^l = (3^b - 2^{y-1})(3^b + 2^{y-1})$. Le pgcd de $(3^b - 2^{y-1})$ et $(3^b + 2^{y-1})$ divise $2 \times 2^{y-1}$ et 5^l donc il vaut 1. On a donc $3^b - 2^{y-1} = 1$. Cette équation est connue : si $y \geqslant 3$, en regardant modulo 4, on a $3^b = 1$ donc comme les puissances de 3 valent $1, 3, 1$ modulo 4, b est pair, donc si $b = 2u$, $(3^u - 1)(3^u + 1) = 2^{y-1}$. Comme $3^u - 1$ et $3^u + 1$ sont de même parités, ils sont tous les deux pairs, chacun est une puissance de deux, et leur pgcd divise leur différence qui vaut 2. En particulier leur pgcd vaut donc 2, et comme $0 < 3^u-1 < 3^u+1$, $3^u - 1 = 2$ donc $u = 1$. donc $b = 2$, on obtient $y = 4$. Sinon si $y = 2$, $b = 1$ et si $y = 1$ l'équation $3^b = 2$ n'a pas de solution.

  Ainsi, on a $(b, y) = (1, 2)$ ou $(2, 4)$. Dans le premier cas $x = 2, y = 2$, $5^l = 3^1 + 2^1 = 5$ donc $l = 1$ donc $t = 2$. Or $5^2 + 3^2 4^2 = 169 = 13^2$ donc $z = 13$ et $(2, 2, 2, 13)$ convient. Dans le second cas, $x = 4$, $y = 4$ donc $5^l = 3^2 + 2^3 = 17$ contradiction.

Reste le cas où $y = 1$, dans ce cas $1 + 5^h = 3^x$. On a forcément $h \neq 0$. En regardant modulo 5, x est pair. En posant $x = 2b$, on a $5^h = (3^x - 1)(3^x + 1)$ donc comme le pgcd des deux termes divise leur différence qui vaut 2 et 5^h, il vaut 1, on obtient $3^x - 1 = 1$ soit $3^x = 2$ contradiction.

Reste le cas où $x = 0$, l'équation devient $5^t + 4^y = z^2$, donc $(z - 2^y)(z + 2^y) = 5^t$. Comme $z + 2^y > 0$, de même $z - 2^y > 0$ et le pgcd de $(z - 2^y)$ et $(z + 2^y)$ divisent leur différence, i.e. 2^{y+1} et leur produit, i.e. 5^t, il vaut donc 1. Comme $(z - 2^y)$ et $(z + 2^y)$ divisent 5^t, ce sont des puissances de deux, la plus petite vaut 1, donc $z - 2^y = 1$ et $z + 2^y = 5^t$. En faisant la différence, $5^t - 1 = 2^{y+1}$. Si $y \geqslant 2$, 8 divise $5^t - 1$, or les puissances de 5 valent alternativement 1 et 5 modulo 8 donc t est pair. On a donc $5^2 - 1$ divise $5^t - 1$ donc 24 divise 2^{y+1}. Or 3 divise 24, contradiction. On a donc forcément $y = 0$ ou 1. Pour $y = 0$, $5^t = 1 + 2^{y+1} = 3$ contradiction. Pour $y = 1$, $5^t = 1 + 2^{y+1} = 5$ donc $t = 1$. De plus $z = 1 + 2^y = 3$. Réciproquement $(1, 0, 1, 3)$ convient.

Les solutions sont donc $(0, 1, 2, 7)$, $(2, 2, 2, 13)$, $(0, 1, 0, 2)$, $(1, 0, 1, 3)$.

4 Inégalités non classiques (Anatole)

Exercice 1 (Grèce JBMO TST 2018, P1)
Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4$. Montrer qu'il existe deux nombres parmi a, b, c, d dont la somme est inférieure ou égale à 2.

Solution de l'exercice 1
On veut montrer que la somme des deux plus petits nombres parmi a, b, c, d est inférieure ou égale à 2. On commence par les ordonner (ce qu'on peut faire sans perdre de généralité car l'égalité est symétrique) : $a \leq b \leq c \leq d$.
On a alors $c^2 \geq a^2$ et $d^2 \geq b^2$ donc $a^2 + b^2 \leq 2$. Par Cauchy-Schwarz, on trouve bien $a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)} \leq 2$.

Exercice 2 (2024 Polish Junior MO Finals P3)
Soit a, b, c des réels tels que $a + b \neq 0$, $b + c \neq 0$ et $a + c \neq 0$. Montrer que

$$\left(\frac{a^2c}{a+b} + \frac{b^2a}{b+c} + \frac{c^2b}{c+a}\right)\left(\frac{b^2c}{a+b} + \frac{c^2a}{b+c} + \frac{a^2b}{c+a}\right) \geq 0$$

Solution de l'exercice 2
L'astuce est ici de remarquer que les deux nombres sont égaux. En effet, $\frac{a^2c}{a+b} - \frac{b^2c}{a+b} = c(a-b)$ puis, en sommant, $c(a-b) + a(b-c) + b(c-a) = 0$. Le produit est alors le carré d'un nombre réel, qui est bien toujours positif.

Exercice 3 (2020 Austrian MO Junior Regional Competition, P1)
Trouver toutes les paires de réels (a, b) avec $b \neq -1$ et $b \neq 0$ telles que

$$\frac{(1+a)^2}{1+b} \geq 1 + \frac{a^2}{b}$$

Solution de l'exercice 3
En mettant tout sous le même dénominateur, on obtient que cette inégalité est équivalente à

$$-\frac{(a-b)^2}{b(1+b)} \geq 0$$

donc $a = b$ ou $b(1+b) < 0$ (c'est-à-dire $b \in]-1, 0[$).

Exercice 4
Soit a, b, c, d des réels supérieurs ou égaux à 1. Montrer que

$$(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq 2abcd - 1$$

Solution de l'exercice 4
On commence par montrer que si $x, y \geq 1$, alors $(2x-1)(2y-1) \geq 2xy - 1$. En développant,

c'est équivalent à $2(x-1)(y-1) \geq 0$, ce qui est bien vrai.
Ensuite, on ajoute les variables une par une :

$$\begin{aligned}(2a-1)(2b-1)(2c-1)(2d-1) \geq & (2a-1)(2b-1)(2cd-1)\\ \geq & (2a-1)(2b\cdot cd-1)\\ \geq & 2abcd-1\end{aligned}$$

Exercice 5
Soit x, y deux réels tels que $x^2+y^2-1 < xy$. Montrer que $x+y-|x-y| < 2$

Solution de l'exercice 5
La condition est symétrique en x et y donc on peut suppoer SPDG $x \leq y$. On veut alors montrer que $x < 1$. Mais on a $xy > x^2+y^2-1 > 2xy-1$ donc $xy < 1$. Si $x \geq 1$, on a alors $xy \geq 1 \cdot 1 \geq 1$ donc $x < 1$, ce qui conclut.

Exercice 6 (JBMO 2022, P1)
Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs (a, b) telles que

$$11ab \leq a^3-b^3 \leq 12ab$$

Solution de l'exercice 6
Clairement $a > b$. On regarde ce qui se passe selon la valeur de $a-b$. On a $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2) \geq (a-b)\cdot 3ab$ donc si $a-b \geq 4$, $a^3-b^3 > 12ab$ (l'IAG étant stricte car $a \neq b$). Si $a-b \leq 2$, on a $a^3-b^3-11ab = (a-b)^3-ab(11-3(a-b)) \leq 8-5ab \leq -2 < 0$. Ainsi, $a-b=3$ donc $a^3-b^3-11ab = -2b^2-6b+27 \geq 0$ donc $b=1$ ou 2. On vérifie et seul le couple $(5, 2)$ convient.

Exercice 7
Soit $x, y > 0$ deux réels tels que $xy(x-y) = 4$. Montrer que $x+y \geq \sqrt{12}$

Solution de l'exercice 7
Soit $p = xy$ et $s = x+y$. L'égalité se réécrit

$$p\sqrt{s^2-4p} = 4$$

soit

$$s^2 = (\frac{4}{p})^2+4p = \frac{16}{p^2}+4p$$

Or, par IAG, $\frac{16}{p^2}+2p+2p \geq 3\sqrt[3]{\frac{16}{p^2}\cdot 2p\cdot 2p} = 3\cdot 4 = 12$. Ansi, $s \geq \sqrt{12}$.

Exercice 8
Soit x, y, z des entiers strictement positifs deux à deux distincts. Montrer que

$$(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx+1)$$

Solution de l'exercice 8
On a

$$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx+1) = \frac{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}{2}-3$$

Or, on a clairement $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 6$ (si $x<y<z$, on a $(x-y)^2 \geq 1, (y-z)^2 \geq 1, (x-z)^2 \geq 4$).

Exercice 9 (JBMO Shortlist 2019 A1)
Soit a, b deux réels tels que $a^3+b^3-6ab=-11$. Montrer que

$$-\frac{7}{3} < a+b < -2$$

Solution de l'exercice 9
Soit $s=a+b, p=ab$. On a $s^3-3sp-6p=-11$, soit

$$p(3s+6)=s^3+11$$

. On veut montrer d'abord que $s<-2$. On sait par IAG que $s^2 \geq 4p$. Supposons par l'absurde que $s \geq -2$. On a alors $3s+6 \geq 0$, donc

$$s^3+11 \leq \frac{s^2}{4}(3s+6)$$

soit

$$s^3+44 \leq 6s^2$$

Or, si $s \leq 0$, $s^3+44 \geq 44-8 \geq 36 > 6 \cdot (-2)^2 \geq 6s^2$ et si $s \geq 0$, $s^3+44 > \frac{1}{2}(s^3+s^3+64) \geq \frac{1}{2}(12s^2)=6s^2$ par IAG. On obtient donc une contradiction dans les deux cas.
Montrons maintenant que $s > -\frac{7}{3}$. On a $s^3+11 \geq \frac{s^2}{4}(3s+6)$, soit

$$s^2(6-s) \leq 44$$

. Si $s \leq -\frac{7}{3}$, on a clairement $s^2 \geq (\frac{7}{3})^2$ et $6-s \geq 6+\frac{7}{3}=\frac{25}{3}$, donc $s^2(6-s) \geq (\frac{7}{3})^2 \cdot \frac{25}{3} \geq \frac{49 \cdot 25}{27}$. Or, $49 \cdot 25 > 44 \cdot 27$, donc $s^2(6-s) > 44$, ce qui est contradictoire. On a donc bien $-\frac{7}{3} < s < -2$.

Exercice 10 (Baltic Way 2019, P1)
Soit x, y, z des réels positifs avec $x \geq y$. Montrer que

$$\frac{x^3-y^3+z^3+1}{6} \geq (x-y)\sqrt{xyz}$$

Solution de l'exercice 10
On a

$$\begin{aligned}
\frac{x^3-y^3+z^3+1}{6} &\geq \frac{(x-y)^3+3(x-y)xy+z^3+1}{6} \\
&\geq \frac{(x-y)^3+(x-y)xy+(x-y)xy+(x-y)xy+z^3+1}{6} \\
&\geq \sqrt[6]{(x-y)^6 \cdot (xy)^3 \cdot z^3} \\
&\geq (x-y)\sqrt{xyz}
\end{aligned}$$

Exercice 11 (Roumanie JBMO TST 2018)
Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Montrer que

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} \geq 4a^2 + 3b^2 + 2c^2$$

Solution de l'exercice 11
On peut multiplier l'inégalité par 2 et ajouter $a^2 + 3b^2 + 5c^2$ pour se ramener à montrer

$$(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + a^2) + 3(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + b^2) + 5(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + c^2) \geq 9(a^2 + b^2 + c^2) = 27$$

Or, par IAG,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + a^2 \geq 3$$

et de même pour b et c donc

$$(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + a^2) + 3(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + b^2) + 5(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + c^2) \geq 3(1 + 3 + 5) = 27$$

ce qui conclut.

Exercice 12 (JBMO 2012 A5, modifié)
Soit $a, b, c \in [0, 1]$. Montrer que

$$\frac{a + b + c}{abc + 1} + \sqrt[3]{abc} \leq \frac{5}{2}$$

Solution de l'exercice 12
Soit $s = a + b + c$ et $p = abc$. Montrons d'abord que $p + 2 \geq s$.
On a d'abord $(a - 1)(b - 1) \geq 0 \Rightarrow 1 \geq a + b - ab$. Ensuite, $(ab - 1)(c - 1) \Rightarrow abc + 1 \geq ab + c$.
On obtient le résultat voulu en additionnant ces deux inégalités.
Ainsi,

$$\begin{aligned}\frac{a + b + c}{abc + 1} + \sqrt[3]{abc} \leq & \frac{abc + 2}{abc + 1} + \sqrt[3]{abc} \\ \leq & \frac{1}{p + 1} + \sqrt[3]{p} + 1\end{aligned}$$

Posons $\sqrt[3]{p} = y$. On veut montrer que $\frac{1}{y^3+1} + y \leq \frac{3}{2}$ pour tout $y \in [0, 1]$. Or,

$$\begin{aligned}& \frac{1}{y^3 + 1} + y \leq \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & 2(1 + y(y^3 + 1)) \leq 3(y^3 + 1) \\ \Leftrightarrow & 2y^4 + 2y \leq 3y^3 + 1 \\ \Leftrightarrow & (1 - y)(1 - y - y^2 + 2y^3)\end{aligned}$$

Or, par IAG, $y^3 + 1 + 1 \geq 3y$ et $y^3 + y^3 + 1 \geq 3y^2$ donc, en additionnant, $y^3 + 1 \geq y^2 + y$. Ainsi, les deux facteurs du produit sont positifs, donc le produit est positif, ce qui conclut.

IV. Entraînement de fin de parcours

1 Entraînement du groupe A

Énoncés

Exercice 1
Théo a écrit le mot $abca$ au tableau. Martin a le droit de transformer le mot selon les règles suivantes :

— $ab \longrightarrow bab$

— $bba \longrightarrow ab$

— $ac \longrightarrow cca$ et $cca \longrightarrow ac$

— $bc \longrightarrow cb$ et $cb \longrightarrow bc$

Peut il forcément transformer le mot de Théo en $bacb$?
(On précise que Martin peut appliquer plusieurs transformations à la suite, et plusieurs fois la même).

Exercice 2
Soient ω_1 et ω_2 des cercles s'intersectant en deux points A et B. Soit d une tangente commune à ω_1 et ω_2. On note P et Q les points de tangence à ω_1 et ω_2 respectivement. Enfin, on note B' le symétrique de B par rapport à (d). Montrer que B', Q, A, P sont cocycliques.

Exercice 3
Soit ABC un triangle isocèle en A, et ω son cercle circonscrit. Soit D un point appartenant à ω tel que D appartient à l'arc de cercle reliant B et C qui ne contient pas A. Soit M le milieu de $[BC]$, soit H l'intersection de (AD) et (BC) et soit H' le symétrique de H par rapport à M. Une droite passant par D coupe (BC) en E et ω en F. Montrer que les points A, H', E, F sont cocycliques.

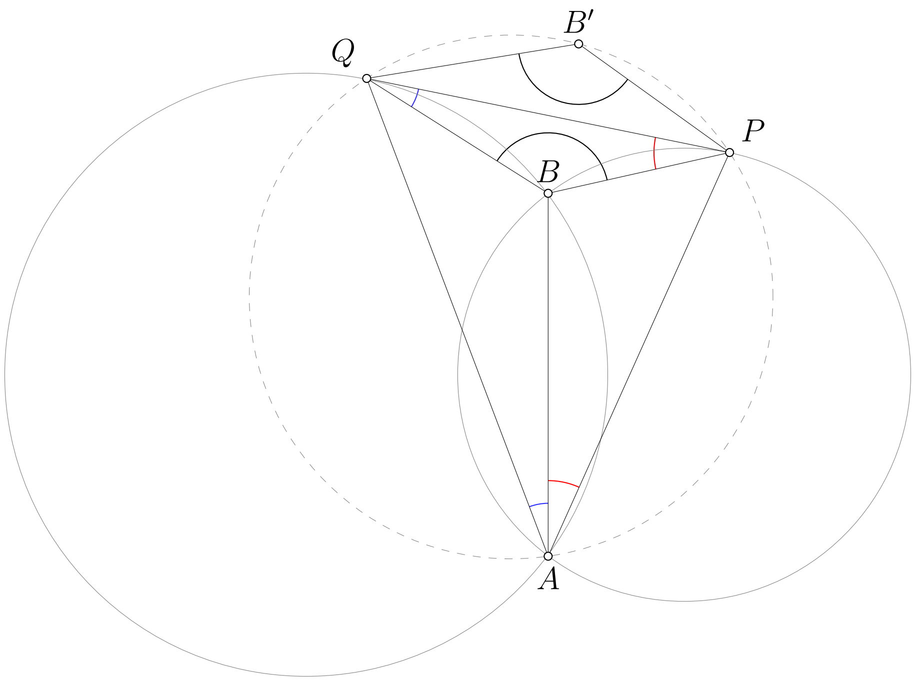
Exercice 4
Les entiers naturels de 1 à 50 sont écrits au tableau. Combien d'entiers au minimum faut-il supprimer pour s'assurer que pour tous les entiers x et y restants, $x + y$ ne soit pas un nombre premier ?

Solutions :

Solution de l'exercice 1
On constate qu'à chaque opération, le nombre de a est conservé. Ainsi, le mot de départ et le mot d'arrivée doivent contenir le même nombre de a, ce qui n'est pas le cas ici.

Martin ne peut donc pas réussir.

Solution de l'exercice 2

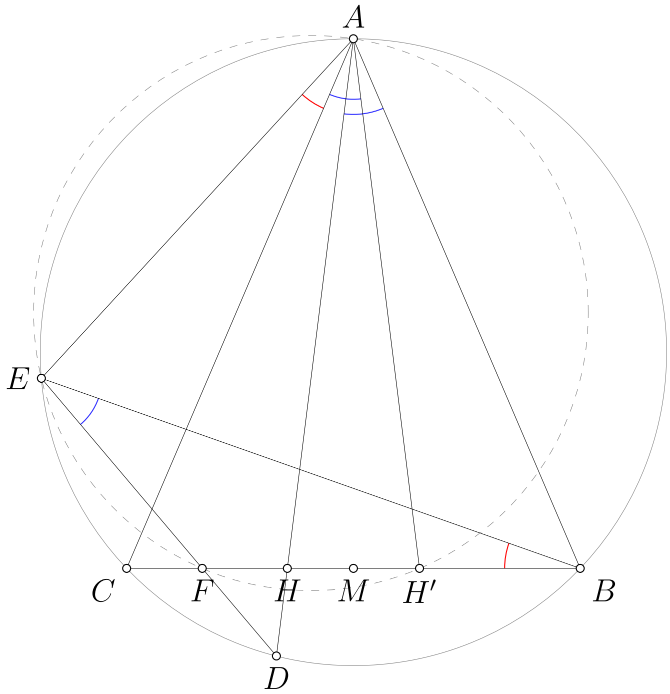


D'après le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{QPB} = \widehat{PAB}$ et $\widehat{BQP} = \widehat{BAQ}$. Il vient que

$$\widehat{QAP} = \widehat{QAB} + \widehat{BAP} = \widehat{BQP} + \widehat{QPB} = 180° - \widehat{PBQ} = 180° - \widehat{QB'P},$$

où la dernière égalité vient du fait que B et B' sont symétriques par rapport à (PQ). On en déduit que les points B', P, A et Q sont bien cocycliques.

Solution de l'exercice 3



Nous allons montrer que $\widehat{EFB} + \widehat{EAH'} = 180°$. Pour cela, on remarque que, puisque H et H' sont symétriques par rapport à M, on a $\widehat{CAH'} = \widehat{HAB}$. Ainsi, à l'aide du théorème de l'angle inscrit, on trouve

$$\widehat{EAH'} = \widehat{EAC} + \widehat{CAH'} = \widehat{EAC} + \widehat{HAB} = \widehat{EBC} + \widehat{DAB} = \widehat{EBF} + \widehat{DEB} = 180° - \widehat{EFB},$$

ce qui donne bien l'égalité d'angle voulue.

Solution de l'exercice 4

Tout d'abord, essayons de trouver des nombres à effacer pour que les nombres restants vérifient l'hypothèse : si on efface tous les 25 nombres impairs, tous les nombres restants sont pairs, la somme de deux de ces nombres est paire et vaut au moins 4 donc elle n'est pas première. Maintenant on aimerait bien montrer qu'il faut au moins effacer 25 nombres : pour cela il serait bien de montrer qu'on ne peut pas avoir certaines paires de nombre car leur somme est première. Pour avoir le maximum de paires, on cherche un nombre premier proche de 50. Prenons 47 : on groupe les termes dont la somme vaut 47 : $(1,46),(2,45),\ldots,(23,24)$. Parmi ces 46 nombres répartis en paire, il faut en effacer au moins 23. Pour conclure il suffirait de répartir $47, 48, 49, 50$ en paires de somme première, il faut donc avoir un pair et un impair dans chaque somme. Après quelques tests, on voit que les paires $(47,50)$, $(48,49)$ ont même somme valant 97 qui est premier. On doit donc effacer au moins $23 + 2 = 25$ nombres au minimum.

2 Entraînement du groupe B

Énoncés

Exercice 1
Soit a, b, c, x, y, z des réels positifs tels que $xyz = a + b + c = 1$. Montrer que

$$\frac{x^2}{3a+2} + \frac{y^2}{3b+2} + \frac{z^2}{3c+2} \geqslant 1$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 2
Soit ABC un triangle tel que $AB < BC$, soit Γ son cercle circonscrit et P un point sur $[BC]$ tel que ABP soit isocèle en B. La droite (AP) recoupe Γ en Q. La bissectrice de $\widehat{AQC}$ recoupe Γ en S. Montrer que (SP) est perpendiculaire à (BQ).

Exercice 3
Soit $n \geqslant 3$ un entier. On place n points sur un cercle. Chacun à leur tour, Noémie et Paul doivent tracer un triangle dont les sommets sont parmi les points qui ne sont pas les sommets d'un triangle déjà tracé et dont les côtés ne coupent pas les côtés des triangles déjà tracés. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Si Noémie commence, lequel des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 4
Soit Γ un cercle. Soit ω un cercle tangent intérieurement à Γ et soit T leur point de tangence. Soit P un point de ω différent de T. Soit O le centre de ω. On note M le milieu du segment $[PT]$. Enfin, soient A et B les points d'intersection de la tangente à ω en P avec le cercle Γ. Montrer que O, M, A, B sont cocycliques.

Solutions :

Solution de l'exercice 1

D'après l'inégalité des mauvais élèves, on a

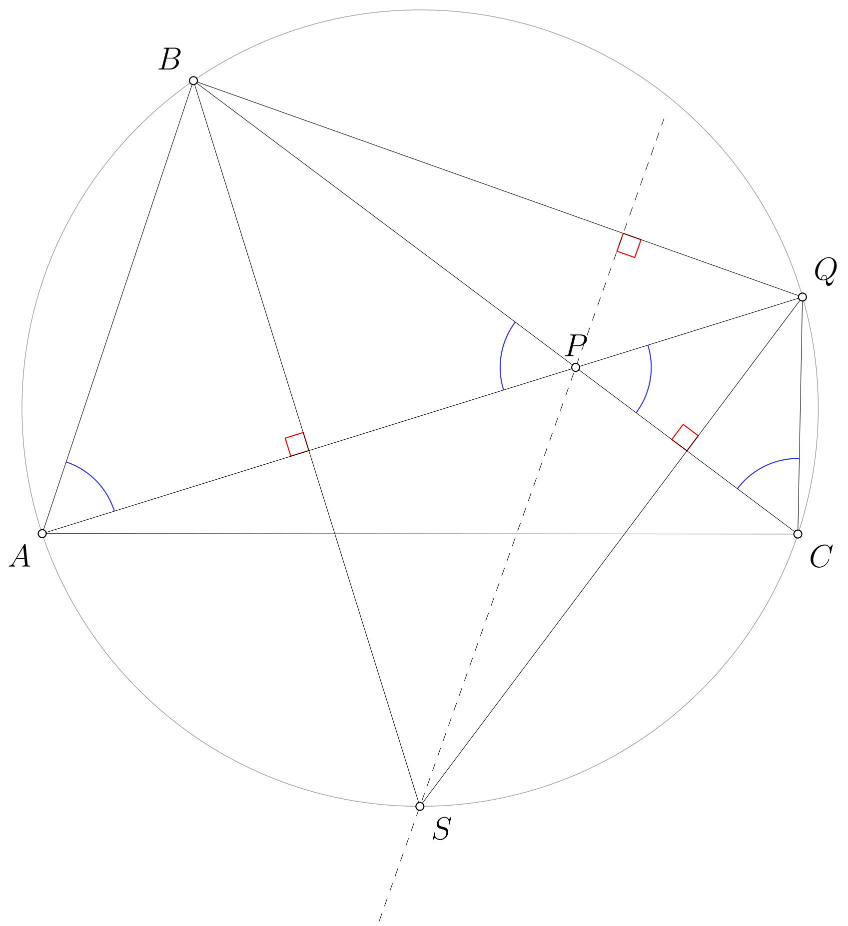
$$\frac{x^2}{3a+2}+\frac{y^2}{3b+2}+\frac{z^2}{3c+2} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3(a+b+c)+6}=\frac{1}{9}(x+y+z)^2.$$

De plus, d'après l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques, $(x+y+z)^2 \geqslant (3\sqrt[3]{xyz})^2=9$. Ainsi,

$$\frac{x^2}{3a+2}+\frac{y^2}{3b+2}+\frac{z^2}{3c+2} \geqslant 1.$$

Il y a égalité s'il y a égalité dans les deux inégalités que l'on a appliquées. Le cas d'égalité de l'inégalité de la moyenne impose que $x=y=z$, ce qui implique que $x=y=z=1$. Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz impose qu'il existe un réel k tel que $(3a+2)^2=kx^2, (3b+2)^2=ky^2$ et $(3c+2)^2=kz^2$. On déduit que $a=b=c$, et en injectant on trouve $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Solution de l'exercice 2



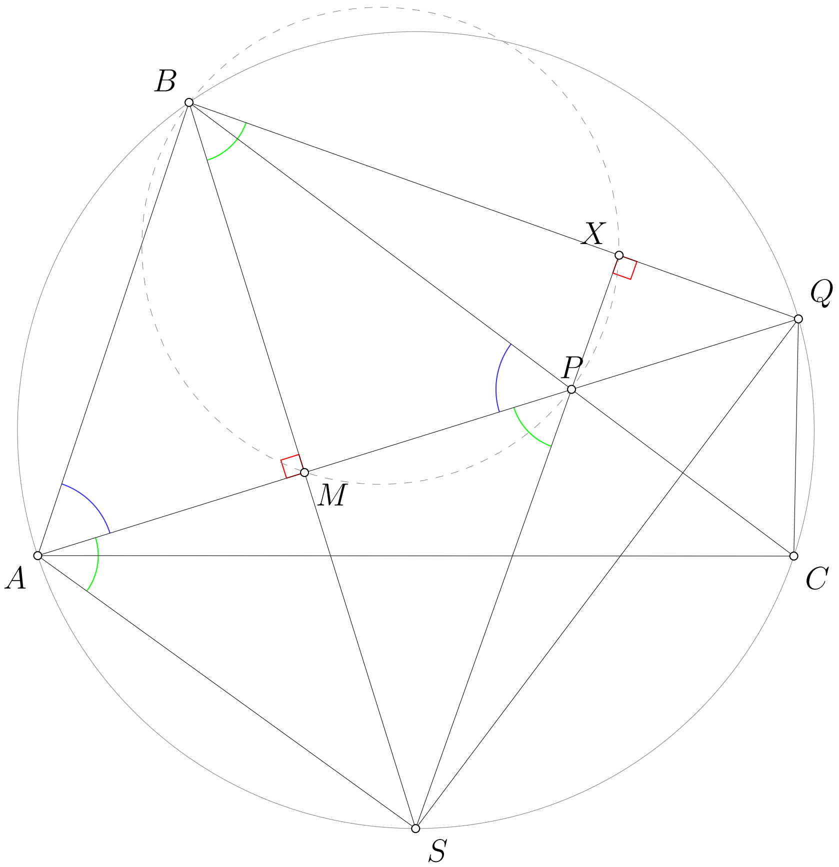
Puisque le triangle BAP est isocèle en B, on a $\widehat{BAP}=\widehat{BPA}$. Avec le théorème de l'angle inscrit, on déduit que

$$\widehat{QPC} = \widehat{BPA} = \widehat{BAP} = \widehat{QCP},$$

de sorte que le triangle PQC est isocèle en Q. La droite (QS), qui est la bissectrice de l'angle $\widehat{PQC}$, est donc aussi la hauteur issue de Q dans PQC. De plus, d'après sa définition, S est le milieu de l'arc AC ne contenant pas C, il s'agit donc du pôle Sud du point B. La droite (BS) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{ABP}$, c'est donc également la hauteur issue de B dans ce triangle. En conclusion, les droites (BS) et (AQ) sont perpendiculaires.

Dans le triangle BSQ, les droites (AQ) et (BC) sont donc deux hauteurs. Leur point d'intersection P est donc l'orthocentre du triangle BQS, de sorte que les droites (SP) et (BQ) sont bien perpendiculaires.

<u>*Solution alternative :*</u>



On nomme M le milieu du segment $[AP]$. Comme (SQ) est la bissectrice de $\widehat{AQC}$, S est le pôle sud, le milieu de l'arc AC, donc BS est la bissectrice de $\widehat{ABC}$, donc aussi de $\widehat{ABP}$. Comme ce triangle est isocèle, la bissectrice est aussi la médiatrice, donc A, M et S sont alignés et le triangle SPA est isocèle en A.

Posons X le point d'intersection de (BQ) avec (PS). On veut montrer que $\widehat{BXP}$ est droit et pour cela on va montrer que $BXPM$ est cyclique. Pour cela, on procède par chasse aux angles :

$$\begin{aligned}\widehat{XBM} &= \widehat{QBS}\\ &= \widehat{QAS}\\ &= \widehat{PAS}\\ &= \widehat{APS}\\ &= 180 - \widehat{XPM}\end{aligned}$$

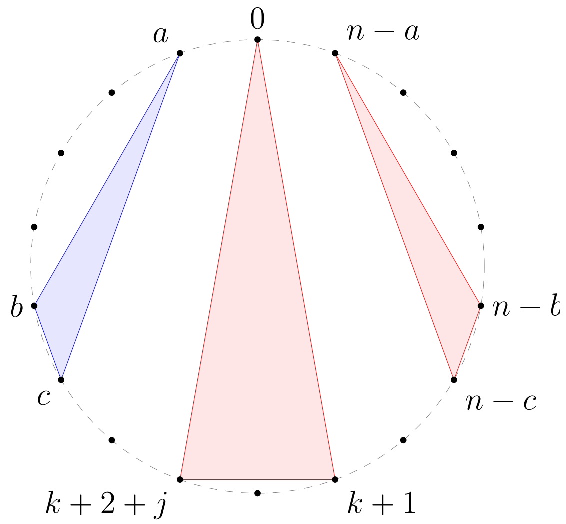
Ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3
En examinant l'énoncé pour des petites valeurs de n, on se rend compte que Noémie dispose d'une stratégie gagnante. On essaye donc de montrer que c'est toujours le cas.

Notons que, quitte à déplacer les points le long du cercle, on peut supposer que le $n-$gone est régulier. On numérote alors les sommets de 0 à $n-1$ dans le sens trigonométrique.

L'idée est d'employer une stratégie dite "miroir", c'est-à-dire une stratégie dans laquelle Noémie est en position d'effectuer le même mouvement que son adversaire, de sorte que tant que Paul peut jouer, Noémie le peut aussi et donc Paul sera le premier à ne plus pouvoir effectuer de mouvement.

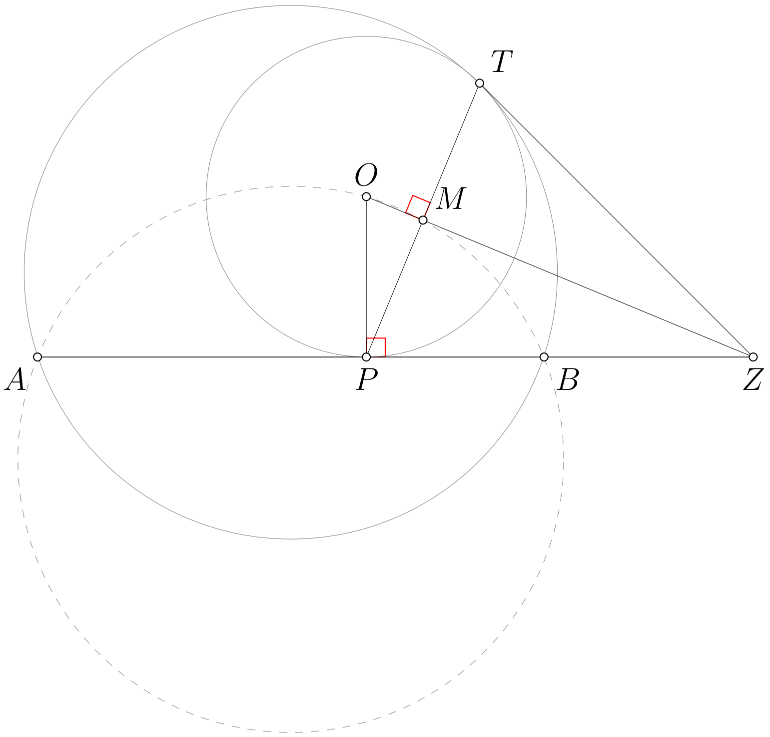
Pour cela, Noémie va essayer, lors de son premier tour, de séparer le $n-$gone en deux parties symétriques par rapport à un axe. Dans ce but, on écrit $n-3 = 2k+j$, avec $j = 0$ ou 1. Noémie trace alors le triangle ABC dont les sommets ont pour numéro $0, 1+k$ et $2+k+j$. Le petit arc AB contient donc k sommets, le petit arc BC en contient j et le petit arc CA en contient k. Dans la suite du jeu, un triangle tracé a ses trois sommets qui appartiennent au même arc. Puisque l'arc BC contient au plus un sommet, on ne peut pas tracer de triangle avec l'éventuel sommet de cet arc.



Dans la suite, si Paul trace un triangle en employant les sommets a, b, c, et disons que ces sommets appartiennent à l'arc AB, alors Noémie trace un triangle symétrique avec les sommets $n-a, n-b$ et $n-c$ dans l'arc BC.

En appliquant cette stratégie, on obtient de proche en proche que tant que Paul peut tracer un triangle valide, Noémie le peut également, ce qui lui donne la stratégie gagnante voulue.

Solution de l'exercice 4



Soit Z le point d'intersection de (AB) avec la tangente commune à ω et Γ en T. O est sur la médiatrice de $[TP]$ car c'est le centre de ω. Puisque Z est sur les tangentes en P et T, $ZP = ZT$ et Z est aussi sur la médiatrice de $[TP]$. Donc, puisque cette médiatrice passe par M, $\boxed{\text{les points } Z, M \text{ et } O \text{ sont alignés}}$ et $\boxed{\text{l'angle } \widehat{ZMP} \text{ est droit}}$. De plus, $\boxed{\text{l'angle } \widehat{OPZ} \text{ est droit}}$ car c'est l'angle entre une tangente et un rayon.

Maintenant, on fait une chasse aux puissances de points. Pour montrer que O, A, M, B sont cocycliques, il est nécessaire et suffisant de montrer que

$$ZM \cdot ZO = ZA \cdot ZB$$

Or par puissance de Z par rapport à Γ et puis par rapport à ω,

$$ZA \cdot ZB = ZT^2 = ZP^2$$

Il est donc nécessaire et suffisant de montrer que

$$ZM \cdot ZO = ZP^2$$

Par puissance d'un point, il faut donc montrer que le cercle circonscrit au triangle OMP est tangent à la droite (ZP). Comme on sait que les angles $\widehat{OMP}$ et $\widehat{OPZ}$ sont droits, on conclue soit par angle tangentiel, soit en remarquant que ce cercle a pour diamètre $[OP]$ et que la tangente est perpendiculaire au diamètre.

3 Entraînement du groupe C

Énoncés

Exercice 1
Soit a et b des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}+\sqrt{ab}\leqslant a+b.$$

Exercice 2
Déterminer tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que 18^n+6 soit le produit de trois entiers consécutifs.

Exercice 3
Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soit S le milieu de l'arc BC ne contenant pas A et N le milieu de l'arc BC contenant A. Soit D le point diamétralement opposé au point A sur Ω. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. La droite (SD) coupe (BI) et (CI) respectivement aux points P et Q. Montrer que (IN) coupe le segment $[PQ]$ en son milieu.

Exercice 4
Soit $n \geqslant 2$ et P un $2n$-gone régulier, on dit qu'un point S appartenant à un des côtés de P est visible depuis E, un point à l'extérieur de P, si le segment ES n'intersecte les côtés de P qu'en S. On veut colorier les côtés de P (les sommets de P sont considérés comme sans couleur) avec 3 couleurs de façon à ce que les trois couleurs soient utilisées et tel que pour tout point E extérieur à P, il n'existe pas trois points de P visibles avec trois couleurs différentes. Combien y a-t-il de coloriage convenable de P ?

Solutions :

Solution de l'exercice 1

Posons $x = \dfrac{a^2+ab+b^2}{3}$ et $y = ab$. L'inégalité des moyennes arithmétiques et quadratiques pour x et y donne

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}} + \sqrt{ab} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{x+y} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+4ab+b^2}{3}}.$$

Par ailleurs, on vérifie, d'après l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques, que

$$a^2+4ab+b^2 = (a+b)^2 + 2ab \leqslant (a+b)^2 + \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{3}{2}(a+b)^2.$$

Ainsi,

$$\sqrt{2}\sqrt{\frac{a^2+4ab+b^2}{3}} \leqslant \sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(a+b)^2} = a+b.$$

On a donc bien l'inégalité voulue.

Solution alternative :

L'inégalité étant homogène on peut supposer $b = 1$, elle devient $\sqrt{\frac{a^2+a+1}{3}} + \sqrt{a} \leqslant a+1$. En mettant au carré, on obtient qu'elle est équivalente à $\frac{a^2+a+1}{3} + a + 2\sqrt{\frac{a(a^2+a+1)}{3}} \leqslant a^2+2a+1$, soit à $2\sqrt{\frac{a(a^2+a+1)}{3}} \leqslant \frac{2}{3}(a^2+a+1)$, ce qui se réécrit $\sqrt{3a} \leqslant \sqrt{a^2+a+1}$ soit $3a \leqslant a^2+a+1$. Or par IAG l'inégalité précédente est vraie, ce qui donne le résultat.

Solution alternative n^2 :

On pose $p = ab$ et $s = a+b$, on rappelle que l'IAG nous dit que $\frac{s}{2} \geqslant \sqrt{p}$, donc que $s^2 \geqslant 4p$. Or $a^2+ab+b^2 = s^2-p$, l'inégalité se réécrit donc

$$\sqrt{\frac{s^2-p}{3}} + \sqrt{p} \leqslant s$$

En élevant au carré, elle est équivalente à $p + \frac{s^2-p}{3} + 2\sqrt{\frac{(s^2-p)p}{3}} \leqslant s^2$ donc à $2\sqrt{\frac{p(s^2-p)}{3}} \leqslant \frac{2}{3}(s^2-p)$, ce qui se réécrit $\sqrt{3p} \leqslant \sqrt{s^2-p}$. Or $\sqrt{s^2-p} \geqslant \sqrt{4p-p} = 3p$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

Soit n un entier solution et k un entier tel que $18^n + 6 = (k-1)k(k+1) = k^3 - k$. En passant le 6 de l'autre côté et en factorisant, on trouve

$$18^n = k^3 - k - 6 = (k-2)(k^2+2k+3).$$

Notons d le pgcd des deux facteurs. Comme d divise $k^2+2k+3 = (k-2)(k+4)+11$ et d divise $k-2$, d divise 11, donc $d = 1$ ou $d = 11$. Comme 11 ne divise pas 18^n, on déduit que $d = 1$. Or, $18^n = 2^n \times 3^{2n}$, on a donc $\{k-2, k^2+2k+3\} = \{18^n, 1\}$ ou $\{k-2, k^2+2k+3\} = \{2^n, 3^{2n}\}$. Notons que dans les deux cas, puisque k^2+2k+3 et 18^n sont strictement positifs, $k-2$ est également strictement positif.

Cas 1 : $\{k-2, k^2+2k+3\} = \{18^n, 1\}$. Puisque $k-2 < (k-2)k < k^2+2k+3$, on a $k-2=1$ et $k^2+2k+3 = 18^n$. Mais alors $k=3$ et $18^n = 3^2+2\times 3+3 = 18$, et $n=1$, qui est bien une solution puisque $18^1+6 = 2\times 3\times 4$.

Cas 2 : $\{k-2, k^2+2k+3\} = \{2^n, 3^{2n}\}$. De nouveau, on a $k-2 < k^2+2k+3$, donc $k-2 = 2^n$ et $k^2+2k+3 = 9^n$. On déduit que

$$9^n = 4^n + 2^{n+1} + 3.$$

Le côté gauche de l'inégalité semble plus grand que le côté droit lorsque n est trop grand, c'est ce que nous allons démontrer. Si $n=1$, l'égalité dévient $9 = 4+4+3 = 11$, ce qui est de toute façon absurde. Si $n=2$, l'égalité devient $81 = 16+8+3 = 27$, ce qui est absurde aussi. Enfin, si $n=3$, vérifie que

$$4^{n-1} = 2^{n-1}\cdot 2^{n-1} \geqslant 2^{n-1}\cdot 4 \geqslant 2^{n-1}+1+1+1 = 2^{n-1}+3.$$

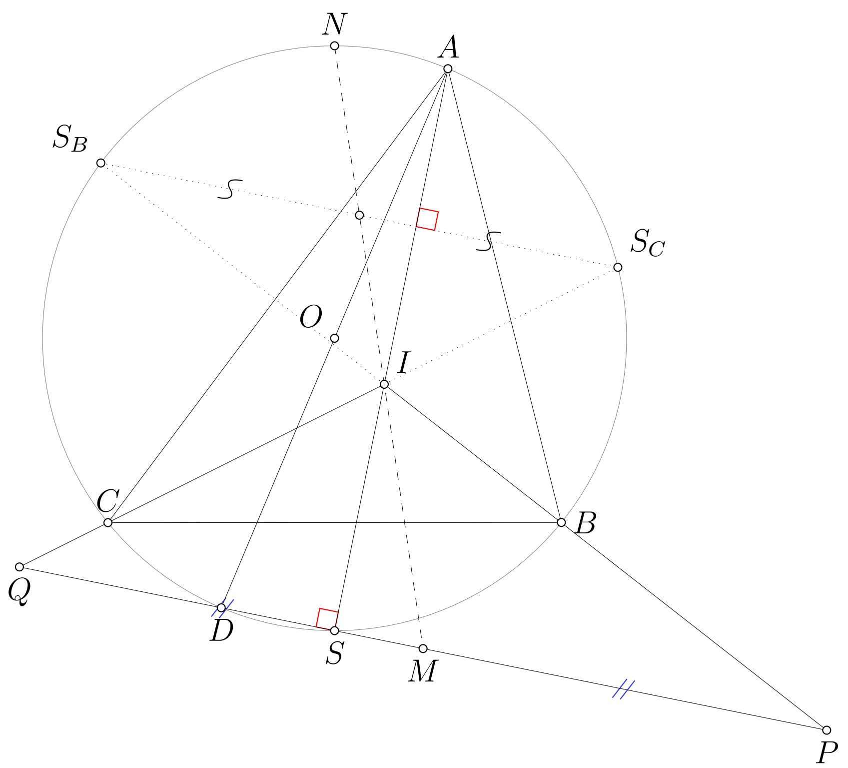
Ainsi, $2^{n+1}+3 < (2^{n-1}+3)\cdot 4 < 4^{n-1}\cdot 4 = 4^n$, de sorte que

$$4^n + 2^{n+1} + 3 < 4^n + 4^n = 2\cdot 4^n \leqslant 8\cdot 4^{n-1} < 8\cdot 8^{n-1} = 8^n < 9^n.$$

Ainsi, pour $n \geqslant 3$, l'égalité $9^n = 4^n + 2^{n+1} + 3$ ne peut avoir lieu, ce qui conclut qu'il n'y a pas de solution dans ce cas.

L'unique solution du problème est $n=1$.

Solution de l'exercice 3



Notons S_B et S_C les pôles Sud des sommets B et C dans le triangle ABC. Il est classique que le quadrilatère NS_BIS_C est un parallélogramme. En effet,

$$\widehat{S_C S_B N} = \widehat{S_B S_C N} = \widehat{NCB} - \widehat{BCS_C} = \frac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} - \frac{\widehat{BCA}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{S_B S_C C} = \widehat{S_B S_C I},$$

donc les droites (IS_C) et (NS_B) sont parallèles. De même on montre que les droites $(S_C N)$ et $(S_B I)$ sont parallèles, donc le quadrilatère NS_BS_CI est bien un parallélogramme. En particulier, la droite (NI) coupe la droite (S_BS_C) en son milieu.

De même, il est classique que les droites (AI) et (S_BS_C) sont perpendiculaires. En effet,

$$\widehat{AIS_C} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{BCA}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} = 90^\circ - \widehat{S_B S_C I}.$$

Puisque, de plus, $[AD]$ est un diamètre de Ω, les droites (AS) et (DS) sont perpendiculaires. On déduit que les droites (S_BS_C) et (PQ) sont parallèles. D'après le théorème de Thalès, le point I est aligné avec les milieux des segments $[PQ]$ et $[S_BS_C]$, de sorte que les points N, I et le milieu de $[PQ]$ sont bien alignés.

Solution de l'exercice 4

Ici un premier réflexe naturel est de traduire combinatoirement les hypothèses géométriques. En fixant 1 côté du polygone, et en prolongeant ce segment pour obtenir une droite, les points E depuis lequel un point de côté est visible sont exactement ceux qui sont placé du côté de cette droite où il n'y a pas P, en particulier c'est un demi-plan. Si on prolonge comme ça les segments de n côtés consécutifs et on regarde les demi-plans formés, ceux-ci ont une intersection non vide (car en suivant les $n+1$ côtés, on n'a pas encore parcouru 180 degré). Ainsi si on prend n côtés consécutifs, ils sont coloriés avec au plus deux couleurs ! De plus, on se convainc assez facilement qu'un point ne voit qu'un certain ensemble de côtés consécutifs, et que celui-ci ne peut contenir strictement plus que n côtés (car deux côtés opposés du $2n$-gone ne sont visibles simultanément d'aucun point. Ainsi un coloriage est convenable si et seulement si tout ensemble de n côtés consécutifs ne contient que 2 couleurs.

On note $a_1, \dots, a_{2n}$ les numéros des couleurs ($1, 2$ ou 3) des $2n$ côtés dans l'ordre, et on peut supposer $a_1 \neq a_{2n}$ vu qu'il y a 3 couleurs différentes. En notant $1, 2, 3$ les couleurs on peut supposer $a_1 = 1$, $a_{2n} = 2$. Comme $a_{2n}, a_1, \dots a_{n-1}$ sont n couleurs consécutives elles valent 1 ou 2. De même pour $a_{n+2}, \dots, a_{2n}, a_1$. En particulier soit $a_n = 3$ soit $a_{n+1} = 3$. Quitte à remplacer a_k par a_{2n+1-k} (et échanger 1 et 2) on peut supposer $a_n = 3$. Comme $a_1, \dots, a_n$ ont au plus deux valeurs on a que $a_2, \dots, a_{n-1}$ valent 1 ou 3. Comme ceux-ci valent 1 ou 2 on a forcément que $a_2, \dots, a_{n-1}$ valent 1.

Deux cas subsistent alors :

— Soit il existe i vérifiant $n+1 \leqslant i \leqslant 2n-1$ tel que $a_i = 1$. Dans ce cas, comme $a_{n+1}, \dots, a_{2n}$ prennent au plus deux valeurs, ceux-ci valent 1 ou 2 (car $a_{2n} = 2$). Or comme $a_n, \dots, a_{2n-1}$ prennent au plus 2 valeurs, ceux-ci valent 1 ou 3 (car $a_n = 3$). Ainsi on a $a_{n+1} = \dots = a_{2n-1} = 1$. Donc le polygone est un polygone où deux couleurs sont utilisées chacune une fois pour colorier deux côtés opposés, et le reste est de la dernière couleur.

— Sinon pour tout i vérifiant $n+1 \leqslant i \leqslant 2n-1$ $a_i = 2$ ou 3. Comme $a_{n+2}, \dots, a_1$ contient au plus deux valeurs et $a_1 = 1$ et $a_{2n} = 2$, $a_{n+2}, \dots, a_{2n-1}$ valent 1 ou 2. On a donc par hypothèse $a_{n+2} = \dots = a_{2n} = 2$. Si $n \geqslant 4$, alors $a_{n-1}, \dots, a_{2n-2}$ contient au moins 3 valeurs donc on a une contradiction. Si $n = 3$, on a $a_1 = a_2$, $a_4 = 3$, $a_5 = a_6 = 2$.

On a donc que comme a_3, a_4, a_5 contient au plus deux valeurs, a_4 vaut 2 ou 3. Comme a_2, a_3, a_4 contient au plus deux valeurs, a_4 vaut 1 ou 3, donc $a_4 = 3$. Réciproquement on vérifie qu'un tel coloriage n'a jamais 3 éléments consécutifs de couleur différente.

En particulier si $n \geqslant 4$, tout coloriage consiste en colorier un côté en une couleur, le côté parallèle en une deuxième couleur et le reste en une troisième couleur. Il y a n choix pour la paire de côté parallèle, 3 choix pour la couleur de tout le reste et 2 choix pour le coloriage des deux côtés, soit $6n$ possibilités. Ces coloriages conviennent car aucun point ne peut voir les deux côtés opposés de couleur différente.

Pour $n = 3$ on a ces $6n$ possibilités, plus les coloriages avec 3 blocs de 2 côtés de même couleur (chaque bloc étant de couleur différente). On a donc 3 choix pour la valeur de a_1, deux selon si $a_6 = a_1$ ou $a_2 = a_1$, puis deux choix pour la couleur consécutive à a_1 (ou a_2 si $a_2 = a_1$). Il y a donc 12 possibilités qui conviennent, on a donc $6 \times 3 + 12 = 30$ coloriages possibles.

Pour $n = 2$, comme un point ne peut pas voir un côté et son opposé, chaque point voit au plus deux côtés, donc un coloriage quelconque contenant trois couleurs convient. Par la formule du crible, on a donc $3 \times 2^4 - 3 = 45$ coloriages qui ne conviennent pas (on prend comme ensembles l'ensemble des coloriages sans couleur 1, sans couleur 2, sans couleur 3) soit $3^4 - 45 = 36$ coloriages qui conviennent, ce qui conclut.