PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 15 MAI 2024

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit ABC un triangle. Un cercle Γ passant par B et C recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en deux points D et E. Soit X un point situé sur le segment $[AD]$, puis Y le point d'intersection, autre que C, entre la droite (CD) et le cercle circonscrit au triangle ACX. Enfin, soit F le symétrique de E par rapport à la droite (AB).

Démontrer que les droites (BF) et (XY) sont parallèles.

Exercice 2. Trouver tous les triplets de nombres premiers (p, q, r) tels que $p^2 + pq + q^2 = r^2$.

Exercice 3. Soit x, y et z des nombres réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 1$. Démontrer que

$$\frac{2}{xyz} + 9xyz \geqslant 7(x + y + z).$$

Exercice 4. Soit $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$ deux entiers. Morgane a placé une pièce dans chacune des mn cases d'une grille rectangulaire à m lignes et n colonnes. Initialement, chaque pièce montre son côté PILE, et cache son côté FACE. Chaque minute, Morgane choisit un carré 2×2, retourne les deux pièces situées dans les cases en haut à gauche et en bas à droite du carré, ainsi qu'une des deux pièces situées en haut à droite ou bien en bas à gauche ; la quatrième pièce du carré 2×2 n'est pas retournée.

Pour quels couples d'entiers (m, n) Morgane peut-elle parvenir à ce que toutes les pièces montrent leur côté FACE en un temps fini ?

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$ deux entiers. Morgane a placé une pièce dans chacune des mn cases d'une grille rectangulaire à m lignes et n colonnes. Initialement, chaque pièce montre son côté PILE, et cache son côté FACE. Chaque minute, Morgane choisit un carré 2×2, retourne les deux pièces situées dans les cases en haut à gauche et en bas à droite du carré, ainsi qu'une des deux pièces situées en haut à droite ou bien en bas à gauche ; la quatrième pièce du carré 2×2 n'est pas retournée.

Pour quels couples d'entiers (m, n) Morgane peut-elle parvenir à ce que toutes les pièces montrent leur côté FACE en un temps fini ?

Exercice 6. On note $\mathbb{R}_{>0}$ l'ensemble des réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$$x\big(f(x) + f(y)\big) \geqslant \big(f(f(x)) + y\big)f(y)$$

pour tous les réels $x > 0$ et $y > 0$.

Exercice 7. Trouver tous les entiers s pour lesquels il existe des entiers strictement positifs a, b, c et d tels que $a + b + c + d = s$ et

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} = \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}.$$