TEST DU 27 MARS 2024

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Énoncés Junior

Exercice 1. Démontrer, pour tous les réels strictement positifs u et v, que

$$\min\left\{u, \frac{2024}{v}, \frac{1}{u}+v\right\} \leqslant 45.$$

Exercice 2. Soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit, et O le centre de Ω. Soit Γ le cercle passant par B et O, et tangent à (AB) en B ; il recoupe Ω en un point P autre que B. Enfin, soit Λ le cercle passant par C et P, et tangent à (AC) en C ; il recoupe Γ en un point M autre que P.

Démontrer que $MC = MP$.

Exercice 3. Étant donné un entier $n \geqslant 2$ fixé, Morgane souhaite disposer n jetons mauves sur les cases d'une grille à n lignes et n colonnes de sorte que chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un jeton mauve chacune. Bosphore souhaite ensuite placer k jetons bleus sur les cases restantes de sorte que, lorsque deux jetons bleus sont sur une même ligne ou une même colonne, il y ait un jeton mauve entre les deux.

Déterminer, en fonction de n, la plus grande valeur de k pour laquelle Bosphore pourra exaucer son souhait quelle que soit la disposition qu'aura choisie Morgane.

Exercice 4. Trouver tous les nombres premiers p tels que $\frac{p+1}{2}$ soit lui aussi un nombre premier et qu'il existe au moins trois entiers n strictement positifs tels que $p+n^2$ divise p^2+n.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ et r des entiers naturels strictement positifs tels que les $n+1$ produits

$$\begin{aligned} p_0 &= a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ p_1 &= b_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ p_2 &= b_1 \times b_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ &\vdots \\ p_n &= b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_n \end{aligned}$$

satisfassent les égalités $p_1 - p_0 = p_2 - p_1 = \ldots = p_n - p_{n-1} = r$; autrement dit, $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison $r \geqslant 1$.

Trouver, en fonction de n, la plus petite valeur de r possible.

Exercice 6. Soit $ABCD$ quatre points cocycliques dans cet ordre, tels que $\widehat{BAD} < \widehat{ADC}$. Soit M le milieu de l'arc de cercle $\overset{\frown}{CD}$ ne contenant pas A. On suppose qu'il existe un point P, situé à l'intérieur de $ABCD$, tel que $\widehat{ADB} = \widehat{CPD}$ et $\widehat{ADP} = \widehat{PCB}$.

Démontrer que les droites (AD), (BC) et (MP) sont concourantes.

Exercice 7. Elsa dispose de 2024 coffrets dans lesquels elle souhaite entreposer ses bijoux. Chacun de ces coffrets dispose d'une serrure, qui permet de le fermer à clé. Initialement, chaque coffret est ouvert et vide. Puis, chaque jour, Elsa choisit un coffret ouvert et y dépose un bijou ; la nuit suivante, la bonne fée sa marraine effectue une des deux actions suivantes :

- si 2023 des 2024 coffrets sont fermés à clé, elle les ouvre tous ;
- sinon, elle choisit un des coffrets encore ouverts et le ferme à clé.

Elsa et sa marraine agissent ainsi pendant n jours.

Démontrer qu'il existe un entier B tel que, quelle que soit la valeur de n et quels que soient les choix de sa marraine, Elsa peut toujours faire en sorte que nul coffret ne contienne B bijoux de plus qu'un autre à quelque moment que ce soit.