PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Préparation Olympique POFM Mathématiques

TEST DU 21 ET DU 22 FÉVRIER 2024

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2008 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Énoncés Junior

Exercice 1. Trouver le plus grand entier k pour lequel il existe une grille à 4047 lignes et 4047 colonnes dont chacune des 4047^2 cases est coloriée en rouge ou en bleu de sorte que

- exactement 2024 colonnes contiennent une majorité de cases bleues ;
- exactement 2024 lignes contiennent une majorité de cases rouges ;
- la grille contienne un carré monochrome de côté k (c'est-à-dire dont les k^2 cases sont soit toutes rouges, soit toutes bleues).

Exercice 2. Soit a, b et c des réels tels que $a \geqslant b \geqslant 1 \geqslant c \geqslant 0$ et $a+b+c=3$. Démontrer que

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geqslant 4c^2+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}.$$

Exercice 3. On dit qu'un entier n est *olympique* lorsqu'il existe des entiers x et y strictement positifs tels que $n = x^2+6xy+y^2$. Démontrer que 36^{2024} n'est pas olympique mais est la somme de deux entiers olympiques.

Exercice 4. Soit ABC un triangle, D un point situé sur le segment $[BC]$, et E un point situé sur le segment $[AC]$. On note F le point d'intersection, autre que C, entre les cercles circonscrits aux triangles ACD et BCE. Soit G le point d'intersection des droites (AD) et (EF), et H le point d'intersection des droites (BE) et (DF).

Démontrer que les trois droites (AH), (BG) et (CF) sont concourantes.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe dont les angles en B et E sont droits. On suppose que le milieu du segment $[CD]$ est le centre du cercle circonscrit à ABE. Enfin, on note O le centre du cercle circonscrit à ACD.

Démontrer que le milieu du segment $[BE]$ appartient à la droite (AO).

Exercice 6. Trouver le plus grand entier $\ell \geqslant 1$ pour lequel il existe des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ compris (au sens large) entre 1 et 2^{2024} et vérifiant la propriété suivante :

Pour tous les entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \ell$ et tous les entiers $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j \in \{-1,+1\}$, la somme $s_i a_i + s_{i+1}a_{i+1} + \cdots + s_j a_j$ est non nulle.

Exercice 7. Identifier tous les polynômes P à coefficients réels tels que, pour tous les réels x et y tels que $P(x)$ et $P(y)$ sont rationnels, $P(x+y)$ est aussi rationnel.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Sur une planète lointaine se trouvent n réverbères et 2024 interrupteurs. Chaque réverbère est relié à exactement 1000 interrupteurs. L'allumeur de réverbères peut effectuer un certain nombre d'opérations, dont chacune est définie comme suit :

L'allumeur de réverbères choisit un interrupteur sur lequel il appuie, et tous les réverbères reliés à cet interrupteur changent d'état ; ceux qui étaient allumés s'éteignent, et ceux qui étaient éteints s'allument.

Le petit prince lui a assuré qu'il était possible, en effectuant un nombre fini de telles opérations, d'allumer tous les réverbères de la planète. Démontrer que, dans ces conditions, l'allumeur de réverbères peut se débrouiller pour allumer tous les réverbères en effectuant au plus 1012 opérations.

Exercice 9. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathsf{S}(n)$ la somme des chiffres de n. On dit qu'un ensemble A d'entiers est *beau* si, pour tous les éléments a et b de A, a divise b si et seulement si $\mathsf{S}(a)$ divise $\mathsf{S}(b)$.

Quel est le nombre maximal d'éléments que peut avoir un bel ensemble ne contenant que des entiers compris (au sens large) entre 1 et 100 ?

Exercice 10. Soit A, B, C, D quatre points situés dans cet ordre sur un cercle Ω, et soit I le centre du cercle inscrit dans ABC. On choisit deux points K et L points situés sur la tangente en I au cercle circonscrit à ADI de sorte que $BK = KI$ et $CL = LI$.

Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles ADI et DKL sont tangents.