PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 17 JANVIER 2024

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit a et b deux entiers strictement positifs. On suppose que a divise b.

1. L'entier a^a divise-t-il nécessairement l'entier b^b ?
2. L'entier a^b divise-t-il nécessairement l'entier b^a ?

Exercice 2. Anna et Baptiste jouent au jeu suivant. Initialement, le nombre 1 est écrit au tableau. Ensuite, chacun son tour, en commençant par Anna, ils ont le choix entre ajouter 1 au nombre écrit au tableau et le multiplier par 2. Le premier joueur qui écrit un entier supérieur ou égal à 100 gagne, et l'autre perd.

Démontrer que l'un des deux joueurs peut se débrouiller pour gagner quels que soient les choix de son adversaire, et déterminer quel est ce joueur.

Exercice 3. Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$, et soit ω son cercle circonscrit. La tangente à ω en A et la droite (BC) se coupent en un point D, et la parallèle à (AD) passant par B recoupe ω en un point E autre que B. La droite (DE) coupe ensuite la droite (AB) en un point F, et recoupe ω en un point G autre que E. Enfin, la droite (BE) recoupe le cercle circonscrit à BFG en un point N autre que B, et la droite (NF) coupe (AD) et (AE) en deux points que l'on nomme respectivement S et T.

Démontrer que les points D, G, S et T sont cocycliques.

Exercice 4. Cruella souhaite nourrir ses 100 chiens, qu'elle a numérotés de 1 à 100. On note a_k la quantité de nourriture, mesurée en kilogrammes, dont a besoin le $k^{\text{ème}}$ chien de Cruella. Il s'agit d'un réel strictement positif, et il se trouve que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100$.

Cruella dispose de 100 steaks de 1 kg qu'elle répartit parmi ses chiens, en donnant b_k steaks au $k^{\text{ème}}$ chien ; chaque nombre b_k est un entier positif ou nul, et $b_1 + b_2 + \cdots + b_{100} = 100$.

On appelle *inefficacité* de cette distribution la somme $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{100} - b_{100}|$.

Trouver le plus petit nombre réel I tel que, quelles que soient les quantités de nourriture $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ dont ont besoin les chiens de Cruella, celle-ci pourra choisir les entiers $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$, de manière à obtenir une distribution dont l'inefficacité est inférieure ou égale à I.

Énoncés Senior

Exercice 5. Cruella souhaite nourrir ses 100 chiens, qu'elle a numérotés de 1 à 100. On note a_k la quantité de nourriture, mesurée en kilogrammes, dont a besoin le $k^{\text{ème}}$ chien de Cruella. Il s'agit d'un réel strictement positif, et il se trouve que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100$.

Cruella dispose de 100 steaks de 1 kg qu'elle répartit parmi ses chiens, en donnant b_k steaks au $k^{\text{ème}}$ chien ; chaque nombre b_k est un entier positif ou nul, et $b_1 + b_2 + \cdots + b_{100} = 100$.

On appelle *inefficacité* de cette distribution la somme $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{100} - b_{100}|$.

Trouver le plus petit nombre réel I tel que, quelles que soient les quantités de nourriture $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ dont ont besoin les chiens de Cruella, celle-ci pourra choisir les entiers $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$, de manière à obtenir une distribution dont l'inefficacité est inférieure ou égale à I.

Exercice 6. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers strictement positifs, strictement croissante, telle que a_{k+1} divise $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ pour tout entier $k \geqslant 1$. On suppose qu'il existe une infinité de nombres premiers p qui divisent au moins un terme parmi $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ divise au moins un terme parmi $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Exercice 7. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit ω son cercle circonscrit. Soit Γ un cercle situé à l'intérieur de ω, tangent à ω en A, et tangent à la droite (BC) ; on note D le point de tangence entre Γ et (BC). Soit P le point en lequel (AB) recoupe Γ, et Q le point en lequel (AC) recoupe Γ. Soit M et N les symétriques respectifs de D par rapport à B et C. Les droites (MP) et (NQ) se coupent en K ; la droite (MP) recoupe Γ en un point I autre que P, et (NQ) recoupe Γ en un point J autre que Q. Enfin, la droite (KA) recoupe le cercle circonscrit à IJK en un point X autre que K.

Démontrer que $\widehat{BXP} = \widehat{CXQ}$.