PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 22 NOVEMBRE 2023

à destination des élèves du groupe Senior

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de renvoyer les copies par voie électronique via le formulaire de dépôt disponible à l'adresse suivante :

`http://monge.univ-mlv.fr/~juge/animath/`

Exercice 1. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Avant que le jeu ne commence, leur amie Clara a écrit les entiers $2, 3, 4, \ldots, 30$ au tableau. Puis, chacun à leur tour, Alice et Bob effacent certains entiers encore présents sur le tableau ; on note S_k l'ensemble des entiers effacés au $k^{\text{ème}}$ tour de jeu. Pour corser le jeu, Clara a elle-même choisi l'ensemble S_1 dont elle force Alice à effacer les éléments au premier tour.

De plus, pour tout entier $k \geqslant 2$, au moment de choisir l'ensemble S_k des nombres qu'il s'apprête à effacer, le joueur qui joue au $k^{\text{ème}}$ tour doit respecter la contrainte suivante : pour chaque élément x de S_k, il doit exister au moins un élément y de S_{k-1} tel que $\mathsf{PGCD}(x, y) \neq 1$.

Par exemple, si Clara choisit l'ensemble $S_1 = \{2, 5\}$, Bob peut choisir, au deuxième tour, l'ensemble $S_2 = \{14, 25, 26\}$; au troisième tour, Alice peut alors effacer les entiers 15 et 22, mais pas 27.

Le premier joueur qui choisit un ensemble vide perd la partie. Pour combien d'ensembles S_1 non vides Alice pourra-t-elle se débrouiller pour gagner quels que soient les choix de Bob ?

Exercice 2. Soit A, B, C, D et E cinq points situées dans cet ordre sur un même cercle, tels que $AD = BC$. On suppose que les droites (AD) et (BC) se rencontrent en un point F, et on note P le point d'intersection, autre que F, entre les cercles circonscrits à ABF et CEF.

Démontrer que les cercles circonscrits à BDF et BEP sont tangents l'un à l'autre.

Exercice 3. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2 - f(y)^2$$

pour tous les réels x et y. On suppose qu'il existe des réels x_0 et y_0 pour lesquels cette inégalité est stricte.

Démontrer que f ne change jamais de signe : soit $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, soit $f(x) \leqslant 0$ pour tout réel x.

Exercice 4. On dit qu'une suite d'entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ est *olympique* lorsque $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et

$$(a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n)(a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n) = 0$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. On dit également qu'un entier est *olympique* s'il appartient à une suite olympique.

Soit m un entier tel que m et $m + 1$ soient tous deux olympiques. Démontrer que m est un multiple de 3 et que $m/3$ est lui aussi olympique.