PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ALGÈBRE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 13 JANVIER 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$(ab+c)(ac+4b) \geqslant 8$$

Quand a-t-on égalité ?

Solution de l'exercice 1 On applique l'inégalité arithmético-géométrique (IAG). Elle nous dit que

$$\frac{ab+c}{2} \geqslant \sqrt{abc} = 1$$

Et

$$\frac{ac+4b}{2} \geqslant \sqrt{4abc} = 2$$

En multipliant ces deux inégalités entre nombres positifs, on obtient

$$\frac{ab+c}{2} \cdot \frac{ac+4b}{2} \geqslant 2$$

Soit

$$(ab+c)(ac+4b) \geqslant 8$$

Pour qu'il y ait égalité, il faut qu'il y ait égalité dans chacune des IAGs. Or le cas d'égalité de l'IAG est $ab = c$ pour la première et $ac = 4b$ pour la deuxième. On en déduit $c^2 = abc = 1$ donc $c = 1$ puis $a^2 = a^2c = 4ab = 4abc = 4$ donc $a = 2$ et enfin $b = \frac{1}{ac} = \frac{1}{2}$.
Réciproquement on vérifie qu'il y a bien égalité,

$$(ab+c)(ac+4b) = \left(\frac{2}{2}+1\right)\left(2+\frac{4}{2}\right) = 8$$

Commentaire des correcteurs :
L'exercice est très bien résolu, sauf les cas d'égalité. Pour trouver les cas d'égalité dans ce problème, il fallait montrer que si on a égalité, alors $a = 2, b = 1/2$ et $c = 1$, et que si on a ces trois valeurs, alors il y a bien égalité dans l'inégalité initiale. Beaucoup d'élèves oublient une de ces deux moitiés d'exercice, ou oublient tout simplement de traiter les cas d'égalité. Certains élèves font à la fois des équivalences (souvent fausses) et vérifient à la fin : il vaut vraiment mieux procéder par implication et mettre des équivalences à la fin.

Exercice 2. Montrer que

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+9}+\sqrt{19-3x} \leqslant 9$$

pour tout $x \in [1, \frac{19}{3}]$.

Solution de l'exercice 2 On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+9}+\sqrt{19-3x} &= 1\cdot\sqrt{x-1}+1\cdot\sqrt{2x+9}+1\cdot\sqrt{19-3x} \\
&\leqslant \sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{(x-1)+(2x+9)+(19-3x)} \\
&= \sqrt{3}\cdot\sqrt{27} \\
&= \sqrt{81} \\
&= 9
\end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs :

L'exercice est très bien résolu, que ce soit par Cauchy Schwarz, par inégalité arithmético quadratique, ou en élevant simplement chaque quantité de l'inégalité au carré.

Exercice 3. Soient $x_1, \ldots, x_4 \geqslant 0$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant 25$. Montrer qu'on peut choisir deux d'entre eux de sorte que leur somme soit supérieure ou égale à 5.

Solution de l'exercice 3

Sans perte de généralité, on peut supposer que $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant x_4$. Montrons que $x_1 + x_2 \geqslant 5$. Il suffit de vérifier que $(x_1 + x_2)^2 \geqslant x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Pour cela, quand on développe le membre de gauche, on remarque qu'on obtient 4 termes : les deux carrés x_1^2, x_2^2 et le double produit $2x_1x_2$. Mais on a clairement $x_1x_2 \geqslant x_3^2$ et $x_1x_2 \geqslant x_4^2$. Ceci donne l'inégalité.

Commentaire des correcteurs :

L'exercice a été résolu par la plupart des élèves ayant rendu une copie, avec de nombreux arguments différents. Il n'était ici pas nécessaire d'effectuer plusieurs changements de variables qui donnaient parfois lieu à des preuves inutilement compliquées. Quasiment tous les élèves, même sans avoir résolu l'exercice, ont bien eu le réflexe d'utiliser la symétrie de l'inégalité pour ordonner les quatre nombres. Cerains élèves ont enfin pu se ramener à une inégalité sur un polynôme de degré 2 sur un intervalle, mais ne l'ont pas montrée, ce qui est très dommage car cela représentait une bonne part de l'exercice.

Exercice 4. Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) tels que

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= c \\ b^4 - c^4 &= a \\ c^4 - a^4 &= b \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4 Solution évidente : $a = b = c = 0$

En sommant les trois équations, on voit que $a+b+c = 0$. On écrit alors $a^4-b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2)$. Ceci est égal à $-c(a-b)(a^2+b^2)$, puisque $a+b+c = 0$, et donc soit $c = 0$, soit $(a-b)(a^2+b^2) = -1$.

Si $c = 0$, on a $b^4 = a = -b$. Donc soit $b = 0$, soit $b = -1$. Dans le premier cas, on retrouve la solution évidente $(0, 0, 0)$, et dans le second on obtient $a = 1$. On vérifie que $(1, -1, 0)$ est bien solution.

Si $a = 0$ ou $b = 0$, on effectue le même raisonnement et on trouve les solutions supplémentaires $(0, 1, -1)$ et $(-1, 0, 1)$.

Supposons à présent $a, b, c \neq 0$. On a alors $(a-b)(a^2+b^2) = (b-c)(b^2+c^2) = (c-a)(c^2+a^2) = -1$. Puisque $a^2+b^2, b^2+c^2, c^2+a^2 > 0$, on en déduit $a-b < 0, b-c < 0, c-a < 0$, et en sommant on obtient $0 < 0$, ce qui est absurde.

Donc les solutions sont $(0, 0, 0), (1, -1, 0), (0, 1, -1)$ et $(-1, 0, 1)$.

Commentaire des correcteurs :

L'exercice est assez mal réussi. La plupart des élèves oublient de vérifier ques les triplets qu'ils trouvent sont bel et bien solution. C'est dommage, puisque tout problème de ce type est composé d'une phase d'analyse pour trouver les différentes solutions possibles, et une phase de synthèse où on vérifie les solutions trouvées. Certains traitent le cas où a, b, c sont tous non nuls, et conclut que le seul autre cas est $a = b = c = 0$. Or ce n'est pas vrai on peut avoir uniquement $a = 0$. Beaucoup ont donc loupé 3 des 4 solutions.

Exercice 5. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ des nombres réels non nuls. On suppose que, pour tout $i = 1, \ldots, 100$, on a $a_{i-1} + a_i > 0$. On suppose aussi que $a_0 + a_1 + \cdots + a_{100} < 0$. Quel signe peut avoir le produit $a_0 \cdot a_1 \ldots a_{100}$?

Solution de l'exercice 5 Un produit de réels non nuls est positif s'il y a un nombre pair de facteurs négatifs, et négatif s'il y a un nombre impair de tels facteurs. Il s'agit donc de trouver combien de a_i sont négatifs (au moins modulo 2).
Soit $0 \leqslant i \leqslant 100$, i pair. On a alors :

$$a_0 + \cdots + a_{100} = (a_0 + a_1) + \cdots + (a_{2i-2} + a_{2i-1}) + a_i + (a_{2i+1} + a_{2i+2}) + \cdots + (a_{99} + a_{100})$$

Chacune des parenthèses est positive, mais la somme totale est négative (strictement). Donc $a_i < 0$.
D'autre part, si i impair, on a $a_i + a_{i+1} > 0$, mais $a_{i+1} < 0$, donc nécessairement $a_i > 0$. Donc les a_i négatifs sont exactement ceux avec i pair. Il y en a 51, qui est impair, et donc $a_0 \cdot a_1 \ldots a_{100} < 0$.
D'autre part, il existe bien une solution au problème. On peut par exemple prendre $a_i = 1, i$ impair et $a_i = -\frac{99}{100}, i$ pair. En effet, on a alors $a_{i-1} + a_i = \frac{1}{100} > 0$ pour tout i, et $a_0 + a_1 + \cdots + a_{100} = 50 - 51 \cdot \frac{99}{100} = -\frac{49}{100} < 0$.
Commentaire des correcteurs :
Exercice relativement bien réussi. Beaucoup d'élèves ont trouvé la partie "dure" c'est-à-dire montrer que le produit ne pouvait pas être positif. La très grande majorité des copies ont pourtant oublié de donner un exemple de nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ qui vérifient les conditions de l'énoncé. Cette étape est importante comme on ne peut pas savoir a priori que le système d'inéquation admet une solution. Dans le cas contraire, la réponse à la question serait "aucun".

Exercice 6. Soient $a, b, c > 1$. Montrer que

$$\frac{ab}{c-1} + \frac{bc}{a-1} + \frac{ca}{b-1} \geqslant 12$$

Quand y a-t-il égalité ?

Solution de l'exercice 6 On pose $x = a - 1, y = b - 1, z = c - 1$ de sorte que la condition devient $x, y, z > 0$, et l'inégalité à démontrer

$$(\frac{xy}{z} + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} + \frac{1}{z}) + (\frac{yz}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{x} + \frac{1}{x}) + (\frac{zx}{y} + \frac{z}{y} + \frac{x}{y} + \frac{1}{y}) \geqslant 12$$

Notons qu'il y a 12 termes dans le membre de gauche. De plus, chacune des variables x, y, z apparaît 4 fois au numérateur et 4 fois au dénominateur, donc le produit de tous ces termes est 1.
En particulier, leur moyenne géométrique vaut 1. Par IAG, on obtient alors le résultat souhaité.
Il y a égalité lorsque tous les termes sont égaux. Leur produit vaut 1, et ils sont positifs, donc ils valent nécessairement tous 1. Par conséquent, $x = y = z = 1$, c'est-à-dire $a = b = c = 2$. On vérifie aisément que ceci est bien un cas d'égalité.
Commentaire des correcteurs :
L'inégalité est quasiment réussie par tous ceux qui ont rendu l'exercice. Certains oublient le cas d'égalité. D'autres n'ont pas compris que le cas d'égalité se passe en deux étapes : ici la première étape est de montrer que si on a égalité $a = b = c = 2$, la seconde que si $a = b = c = 2$ on a égalité. Il faut que les deux étapes soient présentes.

Exercice 7. Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c tels que $abc = 1$, on a :

$$\frac{1}{a\sqrt{c^2+1}} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{c\sqrt{b^2+1}} > 2$$

Solution de l'exercice 7 On commence par écrire $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ pour des réels $x, y, z > 0$. L'inégalité à montrer devient alors

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2+z^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{y^2+x^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{z^2+y^2}} > 2$$

Or on sait que $\sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2}$. Donc on a aussi $\sqrt{\frac{1}{x}} \geqslant \frac{2}{1+x}$. Donc $\sqrt{\frac{y^2}{x^2+z^2}} \geqslant \frac{2}{1+\frac{x^2+z^2}{y^2}} = \frac{2y^2}{x^2+y^2+z^2}$. En sommant, on obtient

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2+z^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{y^2+x^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{z^2+y^2}} \geqslant 2$$

Reste à voir qu'il ne peut pas y avoir égalité. Le cas d'égalité de $\sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2}$ correspond à $x = 1$. Pour qu'il y ait égalité ici, il faudrait donc que $\frac{x^2+z^2}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{z^2} = \frac{z^2+y^2}{x^2} = 1$, ce qui n'est pas possible.

Commentaire des correcteurs :

Presque tous les élèves qui ont rendu une solution complète ont bien résolu l'exercice. Malheureusement, la plupart de ceux qui n'ont rendu que des pistes ont été victimes d'un des écueils les plus fréquents en inégalités : à force d'appliquer des inégalités dans tous les sens, on finit par en utiliser une trop brutalement et on se retrouve à essayer de prouver une inégalité qui n'est plus toujours vraie. Cela n'est pas grave en soi, en revanche il est important de savoir s'en rendre compte en prenant du recul sur ce que l'on a écrit et en se demandant si c'est toujours vrai sur des exemples simples (tous égaux, une variable très grande par rapport aux autres etc). Cela permet de constater qu'on a fait fausse piste et de ne pas perdre de temps précieux en compétition.

Exercice 8. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geqslant 0$$

Solution de l'exercice 8 Mettons abc en facteur. En simplifiant, l'inégalité à prouver se réécrit :

$$\frac{a(b-c)}{c(a+b)} + \frac{b(c-a)}{a(b+c)} + \frac{c(a-b)}{b(c+a)} \geqslant 0$$

puis

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{a} \cdot \frac{bc}{b+c} + \frac{1}{b} \cdot \frac{ca}{c+a} \geqslant \frac{1}{b} \cdot \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{c} \cdot \frac{bc}{b+c} + \frac{1}{a} \cdot \frac{ca}{c+a}$$

Posons $I = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. On a alors $\frac{ab}{a+b} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{1}{I-\frac{1}{c}}$. Donc $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{bc}{b+c}, \frac{ca}{c+a}\right)$ sont rangés dans le même ordre que $\left(\frac{1}{c}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$. L'inégalité du réarrangement conclut alors.

Commentaire des correcteurs :

La plupart des élèves ont tout simplement tout mis au même dénominateur, et développé pour se ramener à montrer que $a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 \geqslant a^3b^2c + ab^3c^2 + a^2bc^3$, ce qui se fait par exemple en remarquant par IAG que $a^3b^3 + a^3b^3 + a^3c^3 \geqslant 3a^3b^2c$, en faisant de même cycliquement et en sommant. Mais certains ont voulu utiliser Muirhead pour prouver cela, ce qui n'était pas possible car l'inégalité n'est pas symétrique. D'autres ont imposé un ordre à a, b, c ce qui n'est pas possible car l'inégalité n'est pas symétrique : changer b et c change l'inégalité. Comme celle-ci est cyclique, on ne peut que supposer que a est le maximum ou le minimum par exemple. Attention également aux régulières erreurs de calcul.

Exercice 9.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des entiers strictement positifs. Posons $b_i = a_i^n$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Montrer que

$$\sqrt[b_1]{n^{b_2}} + \sqrt[b_2]{n^{b_3}} + \cdots + \sqrt[b_{n+1}]{n^{b_1}} \geqslant \sqrt[a_2]{n^{a_1}} + \sqrt[a_3]{n^{a_2}} + \cdots + \sqrt[a_1]{n^{a_{n+1}}}$$

Solution de l'exercice 9

Regardons ce qui se passe si on enlève l'un des termes dans le membre de gauche - disons par symétrie le $n+1$-ième. Par IAG, on a

$$\frac{1}{n}(\sqrt[b_1]{n^{b_2}} + \sqrt[b_2]{n^{b_3}} + \cdots + \sqrt[b_n]{n^{b_{n+1}}}) \geqslant \sqrt[n]{\sqrt[b_1]{n^{b_2}} \cdot \sqrt[b_2]{n^{b_3}} \ldots \sqrt[b_n]{n^{b_{n+1}}}}$$

On élève le membre de droite à la puissance $C = n \cdot b_1 \ldots b_{n+1}$. Posons aussi $A = a_1 \ldots a_{n+1}, B = b_1 \ldots b_{n+1}$. Le membre de droite devient alors

$$n^{b_2 B/b_1} \cdot n^{b_3 B/b_2} \ldots n^{b_{n+1} B/b_n}$$

Mais ceci est égal à

$$n^{B \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i+1}}{b_i}}$$

Mais à présent, par IAG, on a

$$B \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i+1}}{b_i} \geqslant nB \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} \frac{b_{i+1}}{b_i}} = nB \sqrt[n]{\frac{b_{n+1}}{b_1}} = nB \frac{a_{n+1}}{a_1}$$

et cela est entier. Puisque $n \geqslant 1$, on a donc

$$n^{B \sum_{i=1}^{n} \frac{b_{i+1}}{b_i}} \geqslant n^{nB \frac{a_{n+1}}{a_1}}$$

On extrait à présent la racine C-ième - rappelons que $C = nB$. Ainsi :

$$\sqrt[C]{n^{nB \frac{a_{n+1}}{a_1}}} = \sqrt[\frac{nB}{a_1} \cdot a_1]{n^{\frac{nB}{a_1} \cdot a_{n+1}}} = \sqrt[a_1]{n^{a_{n+1}}}$$

On a ainsi montré :

$$\frac{1}{n}(\sqrt[b_1]{n^{b_2}} + \sqrt[b_2]{n^{b_3}} + \cdots + \sqrt[b_n]{n^{b_{n+1}}}) \geqslant \sqrt[a_1]{n^{a_{n+1}}}$$

En sommant sur tous les indices (on a éliminé $n+1$, mais on aurait pu choisir n'importe quel autre terme), on obtient l'inégalité voulue.

Commentaire des correcteurs :

Problème peu abordé. Les élèves l'ayant essayé ont remarqué que le produit des exposants de chaque côté était 1, ce qui était l'idée clé pour penser à utiliser l'IAG. Ceux qui ont pensé à appliquer l'IAG à n termes parmi n + 1 ont tous fini le problème.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \geqslant 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2$$

Solution de l'exercice 10 On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$3\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\frac{1}{a_i a_j} = \left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} 1\right)\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}\frac{1}{a_i a_j}\right) \geqslant \left(\sum_{i<j}\frac{1}{\sqrt{a_i a_j}}\right)^2$$

Or par IAG on a pour tous $i<j$ que $\frac{1}{\sqrt{a_i a_j}} \geqslant \frac{2}{a_i+a_j}$, donc

$$\sum_{i<j}\frac{1}{\sqrt{a_i a_j}} \geqslant \sum_{i<j}\frac{2}{a_i+a_j}$$

d'où

$$\left(\sum_{i<j}\frac{1}{\sqrt{a_i a_j}}\right)^2 \geqslant 4\left(\sum_{i<j}\frac{1}{a_i+a_j}\right)^2$$

En combinant cette inégalité avec la première obtenue cela donne le résultat voulu.
Commentaire des correcteurs :
Problème bien traité, l'inégalité pouvait se résoudre de diverses manières, les plus naturelles étant celle du corrigé et une variation avec l'inégalité des mauvais élèves. Il n'y a pas besoin de rédémontrer l'IAG à deux variables (surtout si c'est pour utiliser l'IAG à trois variables dans la preuve), ni l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ni l'inégalité du tourniquet. Dans l'ensemble si l'exercice était bien compris, il est possible de gagner en efficacité dans sa résolution.

Exercice 11. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_N$ des réels, avec $a_0 = a_N = 0$, tels que

$$a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant N-1$. Montrer que $a_i \leqslant 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant N$.

Solution de l'exercice 11 Soit i tel que a_i soit maximal. Si $i = 0$ ou N, on a le résultat. Sinon, on a $a_i \geqslant a_{i-1}$ et $a_i \geqslant a_{i+1}$, donc $a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} \leqslant 0$. Puisque ceci est égal à a_i^2, on a donc $a_i^2 \leqslant 0$, d'où $a_i = 0$, comme souhaité.

Commentaire des correcteurs :

"Problème très bien traité, la plupart des élèves pensent à poser le max ou font un raisonnement par l'absurde sur le plus petit/le plus grand indice tel que a_i est strictement positif. Un grand nombre de copies remarque immédiatement la suite des $a_{i+1} - a_i$ est croissante et parviennent à conclure à partir de là. Pour le raisonnement par l'absurde, il était nécessaire d'établir au moins une égalité stricte pour trouver une contradiction, les égalités larges ne permettant pas de conclure dans ce cas."

Exercice 12. Soit $n \geqslant 2$ et soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $z_j \leqslant j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ et $z_1 + \cdots + z_n$ est pair. Montrer que

$$z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_n$$

est égal à 0 pour un certain choix de signes (où chaque signe est choisi indépendemment des autres).

Solution de l'exercice 12 Récurrence sur n.
Tout d'abord, si $n = 2$, on a $z_1 = z_2 = 1$, donc $z_1 - z_2 = 0$.
Ensuite, si $n = 3$, on a $z_1 = 1$, puis :

— Si $z_2 = 1$, nécessairement $z_3 = 2$, et donc $z_1 + z_2 - z_3 = 0$
— Si $z_2 = 2, z_3 = 1$, alors $z_1 - z - 2 + z_3 = 0$
— Si $z_2 = 2, z_3 = 3$, alors $z_1 + z_2 - z_3 = 0$

Ceci conclut l'initialisation. Montrons l'hérédité. On prend z_n de signe opposé à celui de z_{n-1} (qui n'est pas encore déterminé). Si $z_n = z_{n-1}$, ceci fait disparaître les deux derniers termes et nous ramène au cas $n - 2$. Si $z_n \neq z_{n-1}$, alors $|z_n - z_{n-1}| \leqslant n - 1$, donc on peut le mettre en $n - 1$-ième position et appliquer l'hypothèse de récurrence. Dans ces deux cas, on vérifie aisément que la nouvelle somme de tous les termes est encore paire.
Commentaire des correcteurs :
L'exercice a été traité par une vingtaine d'élèves. Même si la plupart ont quasiment une solution, souvent des justifications manquent : certains obtiennent que $\pm z_1 + \cdots + \pm z_n = 0$ sans expliquer comment on efface le premier $\pm$ demandé par l'énoncé, certains oublient des cas ou des vérifications : attention à être précautionneux.

Exercice 13. Trouver toutes les suites strictement croissantes d'entiers $a_1, \dots, a_n, \dots$ telles que $a_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$3(a_1 + \dots + a_n) = a_{n+1} + \dots + a_{2n}$$

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Tout d'abord, en $n = 1$, l'équation nous donne $3a_1 = a_2$, donc $a_2 = 3$. Ensuite, en $n = 2$, on obtient $3(a_1 + a_2) = a_3 + a_4$, donc $a_3 + a_4 = 12$. Puisque la suite doit être strictement croissante, il y a *a priori* deux possibilités : soit $a_3 = 4, a_4 = 8$, soit $a_3 = 5, a_4 = 7$. Supposons être dans le premier cas. Dans ce cas, e $n = 3$, l'équation nous donne $3(a_1 + a_2 + a_3) = a_4 + a_5 + a_6$, donc $24 = 8 + a_5 + a_6$. Donc $a_5 + a_6 = 16$, ce qui contredit le caractère strictement croissant de la suite puisque $a_4 = 8$. Par conséquent, on a nécessairement $a_3 = 5, a_4 = 7$. À partir de là, on peut conjecturer que $a_n = 2n - 1$ est la seule solution.
Tout d'abord, il s'agit bien d'une solution. En effet, $a_1 + \dots a +_n = n^2$, donc $a_{n+1} + \dots + a_{2n} = (a_1 + \dots + a_{2n}) - (a_1 + \dots + a_n) = (2n)^2 - n^2 = 3n^2 = 3(a_1 + \dots + a_n)$.
Réciproquement, montrons que c'est la seule. On a déjà montré que $a_n = 2n-1$ pour $n \leqslant 4$. Supposons que ce soit vrai pour tout $i \leqslant 2n$. Pour faire apparaître a_{2n+1} et a_{2n+2}, on soustrait l'équation en n à l'équation en $n + 1$, ce qui donne :

$$3a_{n+1} = a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{n+1}$$

Donc $a_{2n+1} + a_{2n+2} = 4a_{n+1} = 8n + 4$. Puisque $a_{2n} = 4n - 1$, on a $a_{2n+1} \geqslant 4n$, et donc soit $a_{2n+1} = 4n, a_{2n+2} = 4n + 4$, soit $a_{2n+1} = 4n + 1, a_{2n+2} = 4n + 3$. Supposons par l'absurde être dans le premier cas. On a aussi $a_{2n+3} + a_{2n+4} = 4a_{n+2} = 8n + 12$, car $n + 2 < 2n + 1$. Mais si $a_{2n+2} = 4n + 4$, ceci contredit le caractère strictement croissant de la suite.
Donc on a bien $a_n = 2n - 1$ pour tout n.
<u>*Commentaire des correcteurs :*</u>
"L'exercice est en général bien réussi. Cependant, trop d'élèves ne vérifient pas la solution qu'ils obtiennent : en raisonnant par récurrence sur les valeurs de a_n, les élèves supposent implicitement qu'une suite (a_n) solution existe bien, et raisonnent (implicitement) par analyse-synthèse. Comme pour les équations fonctionnelles, rien ne nous garantit qu'une solution existe : il faut donc vérifier la solution obtenue. Attention également aux erreurs de calcul."

Exercice 14. Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c tels que $abc = 1$, on a :

$$\frac{1}{a\sqrt{c^2+1}} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{c\sqrt{b^2+1}} > 2$$

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> On commence par écrire $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ pour des réels $x, y, z > 0$. L'inégalité à montrer devient alors

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2+z^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{y^2+x^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{z^2+y^2}} > 2$$

Or on sait que $\sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2}$. Donc on a aussi $\sqrt{\frac{1}{x}} \geqslant \frac{2}{1+x}$. Donc $\sqrt{\frac{y^2}{x^2+z^2}} \geqslant \frac{2}{1+\frac{x^2+z^2}{y^2}} = \frac{2y^2}{x^2+y^2+z^2}$. En sommant, on obtient

$$\sqrt{\frac{y^2}{x^2+z^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{y^2+x^2}} + \sqrt{\frac{z^2}{z^2+y^2}} \geqslant 2$$

Reste à voir qu'il ne peut pas y avoir égalité. Le cas d'égalité de $\sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2}$ correspond à $x = 1$. Pour qu'il y ait égalité ici, il faudrait donc que $\frac{x^2+z^2}{y^2} = \frac{y^2+x^2}{z^2} = \frac{z^2+y^2}{x^2} = 1$, ce qui n'est pas possible.

<u>*Commentaire des correcteurs :*</u>

Presque tous les élèves ayant abordé le problème l'ont traité correctement. Attention toutefois à ne pas oublier une partie de l'énoncé : il s'agissait d'une inégalité stricte donc la stratégie consistait à montrer l'inégalité large puis de justifier que le cas d'égalité ne pouvait pas être atteint.

Exercice 15. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers, et soit k son degré. Montrer qu'il existe $d \leqslant k+1$ et des entiers $a_1, \ldots, a_{2d}$ deux à deux distincts tels que

$$P(a_1) + \cdots + P(a_d) = P(a_{d+1}) + \ldots P(a_{2d})$$

Solution de l'exercice 15 Soit N un entier qu'on prendra plus tard suffisamment grand. On dispose de $\binom{N}{k+1}$ possibilités pour choisir des a_i distincts non ordonnées entre 1 et N. A chacun de ces ensembles de a_i, on associe la somme des $P(a_i)$, qui est un entier entre $(k+1)\min_{x\in[0,N]} P(x)$ et $(k+1)\max_{x\in[0,N]} P(x)$.
Cette somme peut donc prendre au plus $1 + (k+1)\max_{x\in[0,N]} P(x) - (k+1)\min_{x\in[0,N]} P(x)$ valeurs différentes.
Comme P à partir d'un certain rang est croissant et tend vers plus l'infini, on a

$$(k+1) \min_{x\in[0,N]} P(x) \geqslant (k+1) \min_{x\in\mathbb{R}_+} P(x)$$

qui ne dépend pas de N, et pour N assez grand

$$(k+1) \max_{x\in[0,N]} P(x) = (k+1)P(N)$$

Ainsi le nombre de valeurs différentes que peut prendre cette somme est majorée par un polynôme en N de degré d, alors que le nombre de $(k+1)$-uplets est un polynôme de degré $d+1$, et donc pour un N assez grand, il y a plus de uplets que de valeur possible pour la somme de leurs images par P. Par principe des tiroirs, on a donc une collision, deux uplets non orodnnés de $k+1$ entiers distincts qui ont la même somme des images par P. On a presque ce que l'on souhaitait, le seul risque restant est qu'un entier soit présent dans les deux uplets, mais dans ce cas il suffit de le supprimer des deux uplets.
Commentaire des correcteurs :
Seuls 7 élèves ont abordé le problème, et tous ont une solution quasiment complète.

Exercice 16. Les réels $a, b \geqslant 0$ sont tels que le polynôme $P = X^3 + aX^2 + 2bX - 1$ a trois racines réelles, tandis que $Q(X) = 2X^2 + 2bX + a$ n'a pas de racine réelle.
Montrer que $a - b > 1$.

Solution de l'exercice 16 Tout d'abord, le fait que Q n'ait pas de racine réelle signifie que son discriminant est strictement négatif, c'est-à-dire $4b^2 < 8a$, ou $b^2 < 2a$ en simplifiant.
D'autre part, si on note α, β, γ les racines de P, les formules de Viète nous donnent :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma = & \ -a \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = & \ 2b \\ \alpha\beta\gamma = & \ 1 \end{aligned}$$

En mettant la première au carré et en lui soustrayant deux fois la deuxième, on obtient

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 - 4b$$

Mais par IAG $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geqslant 3(|\alpha| \cdot |\beta| \cdot |\gamma|)^{\frac{1}{3}} = 3$. Donc $a^2 - 4b \geqslant 3$.
Si $a \leqslant b + 1$, on a alors $b^2 < 2a \leqslant 2b + 2 \leqslant a^2 - 2b - 1$. Mais $a^2 \leqslant (b+1)^2$, donc $a^2 - 2b - 1 \leqslant b^2$, absurde.
Commentaire des correcteurs :
La dizaine d'élèves ayant abordé le problème ont essentiellement une solution complète. Certains ont cependant des solutions trop compliquées, utilisant par exemple le discriminant d'un polynôme de degré 3. A priori le problème est un problème de mathématique olympique, utiliser un tel outil n'est donc pas un prérequis.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a^{-n}+b}{1-a}+\frac{b^{-n}+c}{1-b}+\frac{c^{-n}+a}{1-c}$$

quand a, b, c sont des réels strictement positifs vérifiant $a+b+c=1$.

Solution de l'exercice 17 Commençons par nous rappeler que $\frac{a^{-n}-1}{1-a}=\sum_{k=1}^{n} a^{-k}$, et donc que $\frac{a^{-n}}{1-a}=\frac{1}{1-a}+\sum k=1^{n} a^{-k}$. Donc la quantité à minimiser se réécrit

$$\frac{1+b}{1-a}+\frac{1+c}{1-b}+\frac{1+a}{1-c}+\sum_{k=1}^{n}(a^{-k}+b^{-k}+c^{-k})$$

Puisque $a+b+c=1$, d'après l'inégalité de Jensen (la fonction $x \mapsto x^{-k}, k \geqslant 1$, est concave), on a $a^{-k}+b^{-k}+c^{-k} \geqslant 3 \cdot (\frac{1}{3})^{-k}=3^{k+1}$, avec égalité en $a=b=c=\frac{1}{3}$. D'autre part, $\frac{1+b}{1-a}=\frac{1-c+1-a}{1-a}=\frac{1-c}{1-a}+1$, et de même pour les autres termes. Donc

$$\frac{1+b}{1-a}+\frac{1+c}{1-b}+\frac{1+a}{1-c}=3+\frac{1-c}{1-a}+\frac{1-a}{1-b}+\frac{1-b}{1-c}$$

et par IAG le membre de droite est lui-même supérieur ou égal à 6, avec égalité lorsque $1-a=1-b=1-c$ (et donc $a=b=c=\frac{1}{3}$).
Donc le minimum possible de $\frac{a^{-n}+b}{1-a}+\frac{b^{-n}+c}{1-b}+\frac{c^{-n}+a}{1-c}$ est $6+\sum_{k=1}^{n} 3^{k+1}=2+\sum_{k=0}^{n+1} 3^{k}=2+\frac{3^{n+2}-1}{2}=\frac{3^{n+2}+3}{2}$, et ce minimum est atteint en $a=b=c=\frac{1}{3}$.
Commentaire des correcteurs :
La dizaine d'élèves ayant abordé le problème ont essentiellement une solution complète. Attention aux erreurs de calcul dans le résultat : vérifier que pour $n=0$ on a le bon résultat est quand même un must.

Exercice 18. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels positifs, et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f(x + P(x)f(y)) = (y + 1)f(x)$$

a) Montrer que $\deg P \leqslant 1$.
b) Trouver tous les couples (P, f) qui vérifient cette équation.

<u>*Solution de l'exercice 18*</u> Remarquons pour commencer que P est non nul : sinon, on aurait $f(x) = (y + 1)f(x)$, ce qui est absurde car f ne s'annule pas.
<u>Étape 1 :</u> f est injective.
En effet, soient y_1, y_2 tels que $f(y_1) = f(y_2)$. Le membre de gauche est alors le même en y_1 et y_2 (pour tout x) donc $(y_1 + 1)f(x) = (y_2 + 1)f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. Puisque f ne s'annule pas, on a $y_1 = y_2$.
<u>Étape 2 :</u> $P(x)f(y) + P(x + P(x)f(y))f(z) = P(x)f(y + z + yz)$ pour tous $x, y, z > 0$.
On va itérer l'équation fonctionnelle. Pour cela, soient $x, y, z > 0$, et regardons l'équation en $(x + P(x)f(y), z)$. On obtient alors :

$$f(x + P(x)f(y) + P(x + P(x)f(y))f(z)) = (z + 1)f(x + P(x)f(y))$$

On applique l'équation fonctionnelle au membre de droite, ce qui donne

$$f(x + P(x)f(y) + P(x + P(x)f(y))f(z)) = (z + 1)(y + 1)f(x)$$

On peut alors réécrire $(z + 1)(y + 1) = (y + z + yz) + 1$. L'équation fonctionnelle donne alors :

$$f(x + P(x)f(y) + P(x + P(x)f(y))f(z)) = f(x + P(x)f(y + z + yz))$$

Par injectivité, on obtient :

$$x + P(x)f(y) + P(x + P(x)f(y))f(z) = x + P(x)f(y + z + yz)$$

d'où

$$P(x)f(y) + P(x + P(x)f(y))f(z) = P(x)f(y + z + yz)$$

<u>Étape 3 :</u> f est une bijection continue strictement croissante.
Remarquons d'abord que, si $f(x) = c$, alors pour tout $d > c$ il existe $x' > x$ tel que $f(x') = d$. Pour cela, il suffit de prendre $y > 0$ tel que $(y + 1)c = d$ et $x' = x + P(x)f(y)$. Combiné à l'injectivité, ceci montre que f est strictement croissante. Il s'agit donc de vérifier que f peut prendre des valeurs arbitrairement petites. On aura alors la surjectivité, donc la bijectivité, et il est vrai qu'une bijection strictement croissante est automatiquement continue.
Pour cela, on reprend l'équation du point précédent. Remarquons que P est croissant (il est à coefficients positifs), donc $P(x+P(x)f(y)) \geqslant P(x)$. Donc l'équation du point précédent entraîne, après simplification par $P(x) > 0$:

$$f(y) + f(z) \leqslant f(y + z + yz)$$

En $y = z$, on trouve $2f(y) \leqslant f(2y + y^2)$. Or l'application $y \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 2y + y^2 \in \mathbb{R}_+^*$ est surjective. Donc, si on fixe $y > 0$, on peut l'écrire $y = 2z + z^2$, et on a alors $2f(z) \leqslant f(y)$, donc $f(z) \leqslant \frac{1}{2}f(y)$. En itérant cette construction, on trouve des antécédents dont les images sont à chaque fois deux fois plus petites, par conséquent, f peut prendre des valeurs arbitrairement petites, comme voulu.
<u>Étape 4 :</u> $\deg P \leqslant 1$
Prenons $y = z = 1$. On a alors $P(x)f(1)+P(x+P(x)f(1))f(1) = P(x)f(3)$, donc $P(x+P(x)f(1))f(1) = P(x)(f(3) - f(1))$. Le membre de gauche est un polynôme de degré $(\deg P)^2$, tandis que celui de droite est de degré $\deg P$. Donc $\deg P$ vaut 0 ou 1.

On écrit dans la suite $P = aX + b$.
<u>Étape 5 :</u> $b = 0$
Supposons par l'absurde $b > 0$. Revenons à l'équation initiale, et faisons tendre x vers 0, y étant fixé. Puisque f est une bijection continue strictement croissante $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, on a alors $f(x) \to 0$. Donc $(y+1)f(x) \to 0$. D'autre part, $x + P(x)f(y) \to bf(y)$, et donc par continuité $f(x + P(x)f(y)) \to f(bf(y)) > 0$. Absurde.
<u>Étape 6 :</u> $f(x) = \frac{x}{a}$
On a $axf(y) + a(x + axf(y))f(z) = axf(y+z+yz)$ donc $f(y) + (1 + af(y))f(z) = f(y+z+yz)$ pour tous $y, z > 0$, c'est-à-dire

$$f(y) + f(z) + af(y)f(z) = f(y+z+yz)$$

Posons $g(x) = 1 + af(x-1)$, $g :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$. On a alors

$$g(y+1)g(z+1) = g((y+1)(z+1))$$

et donc $g(x)g(t) = g(xt)$ pour tous $x, t > 1$. Il s'agit d'une forme d'équation de Cauchy (multiplicative, sur les réels strictement supérieurs à 1). La continuité ou la croissance de g assure alors qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $g(x) = x^\alpha$ pour tout $x > 1$, et donc $f(x) = a^{-1}((x+1)^\alpha - 1)$.
En réinsérant dans l'équation de départ, on obtient alors :

$$a^{-1}(x + x((y+1)^\alpha - 1)) = a^{-1}(y+1)((x+1)^\alpha - 1)$$

pour tous $x, y > 0$. Donc

$$x(y+1)^\alpha = (y+1)((x+1)^\alpha - 1)$$

Il est clair que ceci implique que $\alpha = 1$, et donc $f(x) = \frac{x}{a}$.
Réciproquement, on vérifie aisément que pour tout $a > 0$, $P(X) = aX$ et $f(x) = \frac{x}{a}$ est bien solution.
<u>*Commentaire des correcteurs :*</u>
Les quelques élèves ayant rendu le problème ont quasiment tous une solution complète.