PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

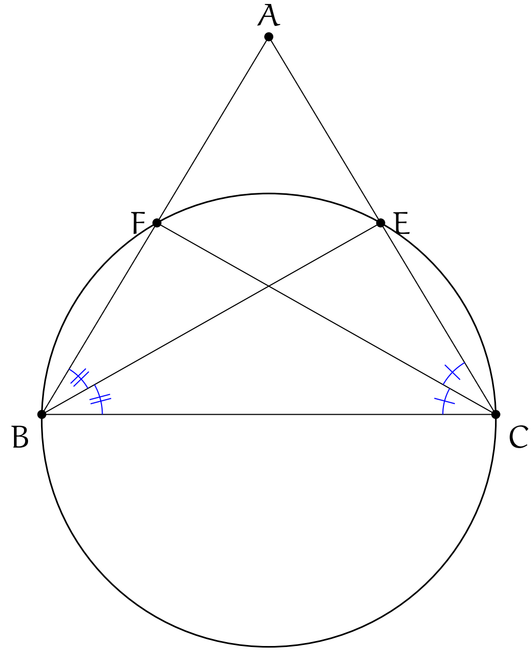
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 8 DÉCEMBRE

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit un triangle ABC isocèle en A. Soit E le pied de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{ABC}$ et F le pied de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{ACB}$. Montrer que B, C, E, F sont cocycliques.



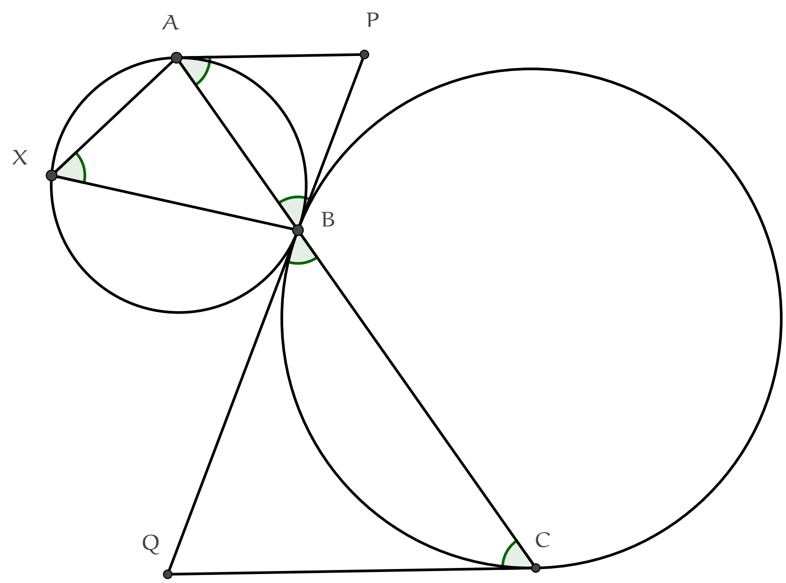
<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Etant donné que le triangle ABC est isocèle en A, il s'ensuit que $\widehat{CBA} = \widehat{ACB}$. De plus, par définition de la bissectrice d'un angle, on a

$$\widehat{CBA} = 2\widehat{ABE} \text{ et } \widehat{ACB} = 2\widehat{ACF}.$$

ce qui assure que $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$, soit $\widehat{FBE} = \widehat{ECF}$.
Ainsi, par réciproque de l'angle inscrit, on obtient B, C, E et F sont cocycliques.
<u>**Commentaires des correcteurs :**</u> L'exercice a été très bien réussi par les élèves. La rédaction peut et doit être améliorée, certains élèves ne rendent qu'une ligne ce qui n'est pas assez pour employer tous les arguments. La différence entre le théorème des angles inscrits et sa réciproque n'est pas toujours comprise. Enfin certains pourraient gagner en efficacité dans leurs chasses aux angles en exprimant les grandeurs considérées en fonction des autres pour limiter le nombre de variable introduites

Exercice 2. Soit deux cercles Γ_1 et Γ_2 tangents extérieurement (c'est-à-dire, ils sont tous les deux tangents à une même droite (d) et sont de part et d'autre de cette droite) en un point B. Soit A sur Γ_1 et C sur Γ_2 tels que la tangente en A à Γ_1 et la tangente en C à Γ_2 soient parallèles et que B soit positionné entre les deux tangentes. Montrer que A, B, C sont alignés

Solution de l'exercice 2



On nomme P et Q les points d'intersection de la tangente commune (d) avec les tangentes en A et en B, et X un point sur le cercle. Par hypothèse, $(AP)//(QC)$. Alors, par angles alternes internes et par angle tangentiel, on a :

$$\widehat{PBA} = \widehat{BXA} = \widehat{BAP}$$

Donc

$$\widehat{APB} = 180^\circ - 2\widehat{PBA}$$

De même, on a

$$\widehat{CQB} = 180^\circ - 2\widehat{QBC}$$

Or

$$\widehat{APB} = \widehat{APQ} = \widehat{PQC} = \widehat{BQC}$$

Donc

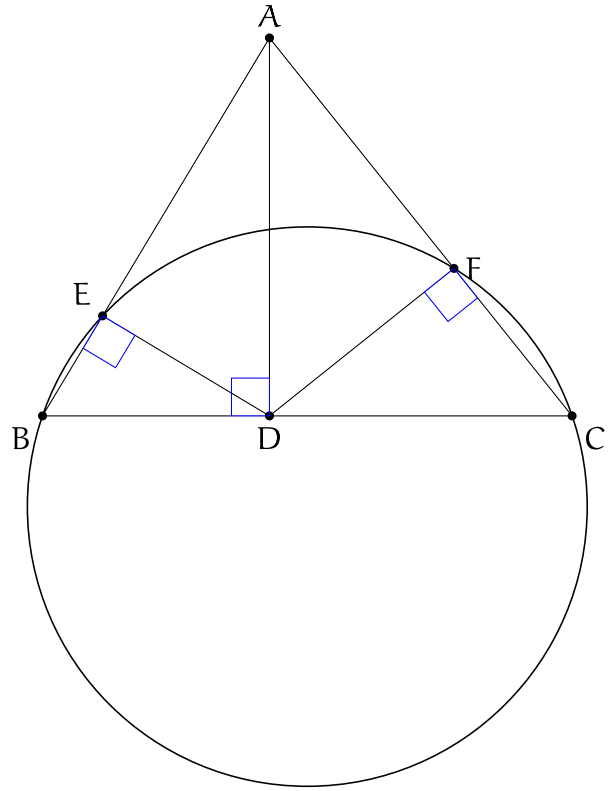
$$\widehat{PBA} = \widehat{QBC}$$

Comme P, B, Q, sont alignés, A, B, C aussi.

<u>Commentaires des correcteurs :</u>

L'exercice a été bien réussi, mais trop d'élèves ont supposé sans le voir A,B,C alignés pour le montrer, induits en erreur par leurs dessins.

Exercice 3. Soit un triangle ABC. Soit D le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A. On note E le pied de la hauteur du triangle ABD issues de D. On note F le pied de la hauteur du triangle ACD issue de D. Démontrer que les points B, C, E, F sont cocycliques.



Solution de l'exercice 3 Comme les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{EFA}$ sont droits, ils sont supplémentaires et donc le quadrilatère $EDFA$ est cyclique. Il s'ensuit

$$\widehat{AEF} = \widehat{ADF} = 90° - \widehat{FDC} = \widehat{BCF}\,.$$

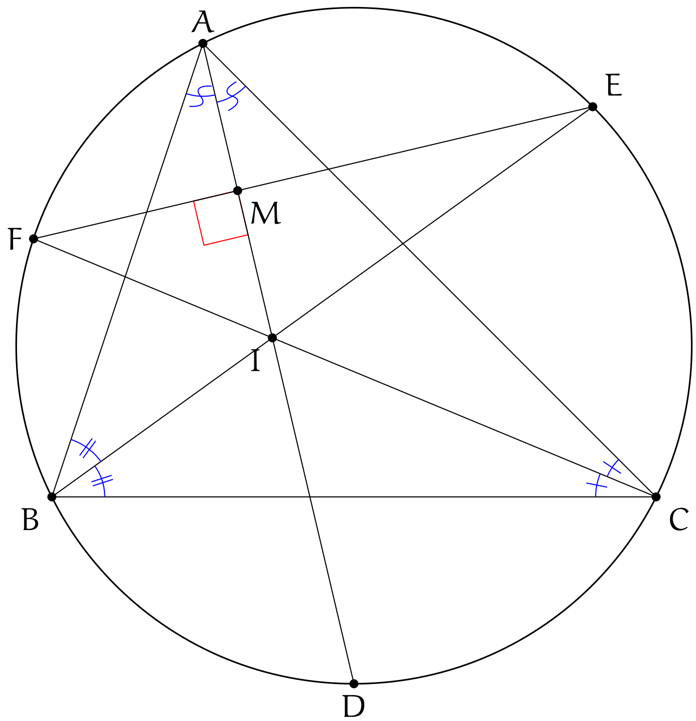
D'après le théorème de l'angle inscrit, les points B, C, E, F sont cocycliques.

Commentaires des correcteurs :

Exercice très bien réussi dans l'ensemble. La plupart des élèves sont passés par une chasse aux angles, alors que d'autres ont utilisé les triangles semblables pour conclure par la puissance du point A. Il est important d'inclure une figure à sa preuve, et il est souvent plus utile de l'annoter (par exemple avec les angles α et β que l'élève introduit) que de la laisser vide : cela permet à l'élève et au correcteur de se repérer. Il est également important de justifier les égalités utilisées.

Exercice 4. Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit D (resp. E, F) le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ (resp. $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$) avec $\mathcal{C}$. Démontrer que les droites (AD) et (EF) sont perpendiculaires.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>



Soit I le point d'intersection des bissectrices du triangle et M le point d'intersection des droites (AD) et (EF). On constate que

$$\widehat{IMF} = 180° - \widehat{MIF} - \widehat{IFM} = 180° - \widehat{AIF} - \widehat{CFE}.$$

Par ailleurs, on constate que

$$\widehat{AIF} = 180° - \widehat{AIC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{BCA}}{2}.$$

Par ailleurs, le théorème des angles inscrits assure que

$$\widehat{CFE} = \widehat{CBE} = \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Il s'ensuit que

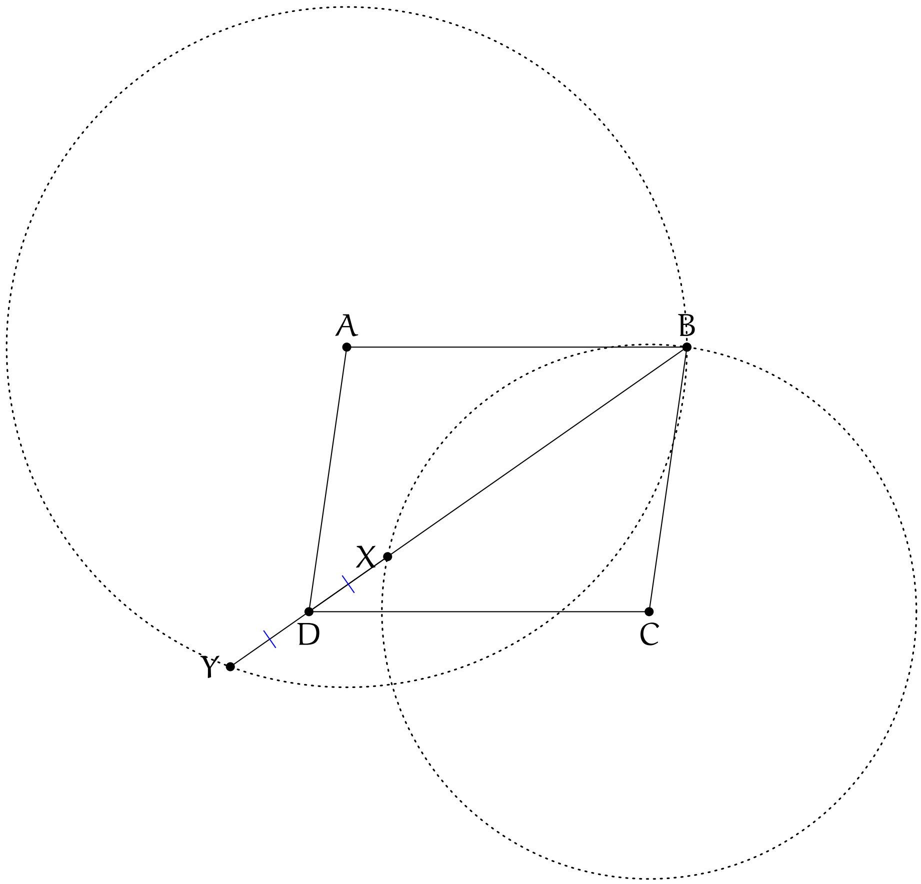
$$\widehat{IMF} = 180° - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{BCA}}{2} - \frac{\widehat{ABC}}{2} = 180 - \frac{180°}{2} = 90°.$$

<u>Commentaires des correcteurs:</u>

Exercice bien traité dans l'ensemble. La plupart des copies présentent de belles figures avec la chasse aux angles apparente. Il est important de bien justifier sa chasse aux angles, par exemple en citant le théorème de l'angle inscrit et en la faisant de manière progressive (écrire les égalités d'angle dans l'ordre où elles sont trouvées). La plupart des élèves ont eu le bon réflexe de poser chacun des demi-angles du triangle ABC, puis de conclure par angle inscrit et somme des angles d'un triangle. Certains ont proposé une autre preuve très efficace qui utilisait les propriétés du cercle antarctique afin de montrer que (EF) est la médiatrice du segment $[AI]$.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un parallelogramme dans lequel $AB > AD$. Soit X le point de la demi-droite $[BD)$ tel que $CX = CB$ et Y le point de la demi-droite $[BD)$ $AY = AB$. Montrer que $DX = DY$.

Solution de l'exercice 5



Puisque le triangle AYB est isocèle en A, on a

$$\widehat{AYB} = \widehat{ABY} = \widehat{ABD} = \widehat{BDC} = \widehat{XDC}.$$

De même, puisque le triangle CXB est isocèle en C,

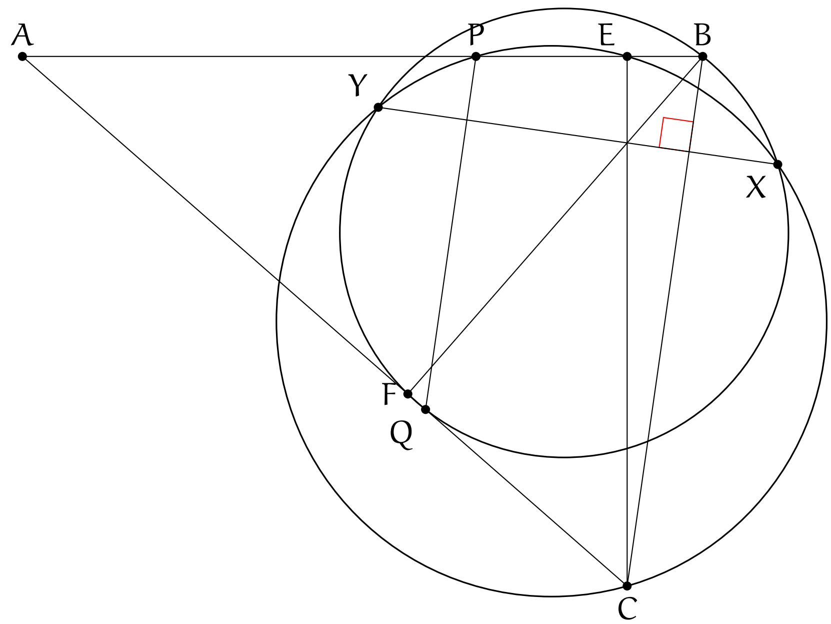
$$\widehat{YDA} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{DBC} = 180^\circ - \widehat{BXC} = \widehat{DXC}.$$

On a utilisé dans les deux calculs que les côtés du parallélogramme sont parallèles deux à deux. Il en résulte que les triangles YDA et DXC sont semblables. Or, $DA = CB = CX$, donc ces triangles sont en réalité isométriques, ce qui implique bien que $DY = DX$.

Commentaires des correcteurs:

Presque toutes les solutions proposées sont passées par une chasse aux angles, semblable à celle corrigé, et en général réalisée avec brio ! Les curieux peuvent chercher (au moins) deux solutions exploitant les symétries de la figure, et une autre utilisant la puissance d'un point. Quelques élèves ont dit que $\widehat{AYD} = \widehat{CDX}$, $AY = CD$ et $AD = CX$ permettait de conclure que les triangles AYD et CDX sont isométriques, ce qui est faux : il suffit de considérer la deuxième intersection du cercle de centre A et de rayon AX avec la droite (DB) pour s'en convaincre. Plus fréquentes mais beaucoup plus bégnines sont les chasses aux angles qui expriment les valeurs de tous les angles de la figure, ce qui est très tentant mais pas très efficace, et irréalisable pour des figures plus complexes.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, P sur (AB) et Q sur (AC) tels que (PQ) est parallèle à (BC). Les cercles de diamètres $[BQ]$ et $[CP]$ s'intersectent en deux points X et Y. Montrer que (XY) est la perpendiculaire à (BC) passant par A. <ins>*Solution de l'exercice 6*</ins>



On reconnaît la droite (XY) comme un axe radical, et donc pour la première partie du problème, montrer qu'elle est perpendiculaire à (BC), on va utiliser qu'elle est perpendiculaire à la droite reliant les centres des deux cercles, qui sont les milieux de $[CP]$ et de $[BQ]$. Or, comme $(BC)//(PQ)$, ces deux milieux se trouvent sur la droite au milieu entre ces deux droites parrèlles, donc la droite reliant ces milieux est parrallèle, donc $(XY) \perp ((BC)$.
Il reste à montrer que A est sur cet axe radical. Pour ce faire, introduisons un troisième cercle et montrons que c'est le centre radical des trois cercles.
Soit E et F les pieds des hauteurs issues de B et C, respectivement. Alors E (resp. F) est sur le cercle de diamètre (BQ) (resp. (CP)). De plus, B, C, E, F sont cocycliques et comme

$$\widehat{EFQ} = 180 - \widehat{EBC} = \widehat{EPQ}$$

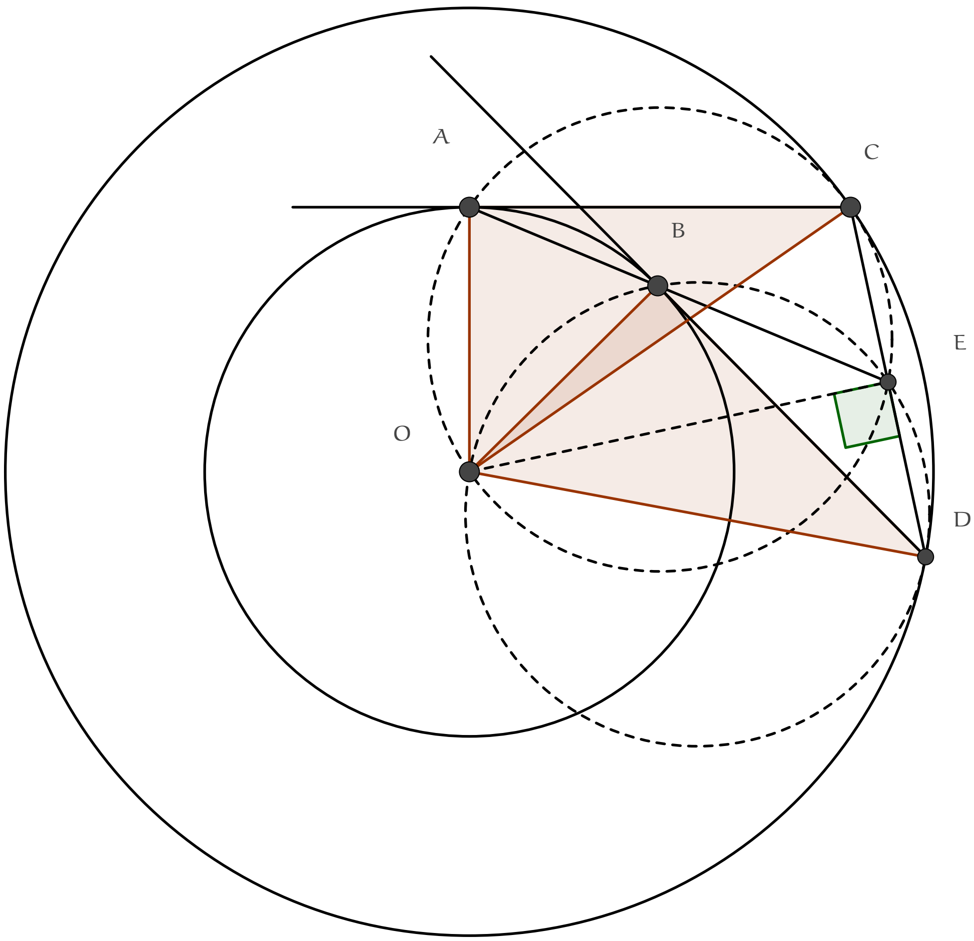
on en déduis que E, F, P, Q sont cocycliques. Comme les axes radicaux de ce nouveau cercle avec les deux de l'énoncé sont (PE) et (FQ), qui se coupent en A, A est le centre radical des trois et A, X, Y sont alignés.

<ins>Commentaires des correcteurs:</ins>

L'exercice a été beaucoup résolu, mais de nombreux élèves ont perdu un point car ils n'ont pas jugé bon de préciser pourquoi la droite joignant les milieux des diagonales d'un trapèze était parallèle aux côtés de celui-ci, ce qui est loin d'être évident. D'autres élèves ont utilisé un point pour appliquer le théorème de Thalès qui n'était pas défini si les droites (BQ) et (CP) étaient parallèles, leur preuve ne marchait donc pas dans ce cas particulier. Les chasses aux angles peuvent en général être simplifiées : il n'était pas nécessaire d'écrire plusieurs lignes de calcul ni d'introduire beaucoup de points pour prouver la cocyclicité importante ici. Enfin, la figure n'était pas évidente à faire, et nombreux sont les élèves qui ont utilisé une figure qui montrait un alignement faux en général. Il est ainsi important de tracer plusieurs figures pour vérifier que les conjectures que l'on peut formuler sont vraies sur toutes ces figures.

Exercice 7. Soit deux cercles T et T' concentriques, de centre O avec T' de rayon plus grand que T. Soit A, B sur T. Soit C, D sur T' tel que (CA) et (DB) sont tangents à T et C et D sont de part et d'autre de la droite (AB). Soit E l'intersection de (AB) et (CD). Montrer que C, A, O, E et D, B, O, E sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

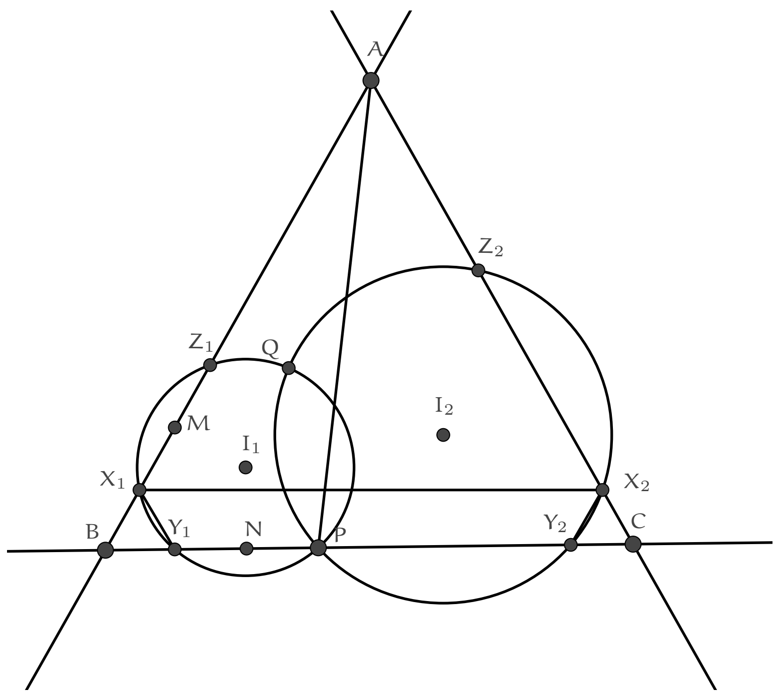


On redéfini E comme la projection de O sur CD. Comme CEO est droit, et que CAO aussi, C, A, O, E sont cocycliques. De même pour D, B, O, E. Ensuite, le théorème de l'angle inscrit fourni $\widehat{OEA} = \widehat{OCA}$ puis, comme les triangles OCA et ODB sont égaux (deux côtés égaux et un angle droit commun), alors $\widehat{OCA} = \widehat{ODB}$ d'où $\widehat{OEA} = \widehat{ODB} = \widehat{OEB}$ par angle inscrit. Cela prouve que A, E, B sont alignés, et que donc notre nouveau point E était bien celui de l'énoncé. **<u>Commentaires des correcteurs:</u>**

Le problème est bien résolu. L'approche de la plupart des élèves est de montrer successivement que les triangles AOC et BOD sont isométriques, puis que les triangles AOB et COD sont semblables, pour conclure enfin.

Exercice 8. Soit ABC un triangle, et P un point du côté $[BC]$. Soit I_1 et I_2 les centres des cercles inscrits dans les triangles APB et APC respectivement. Soit Γ_1 et Γ_2 des cercles passant par P et ayant pour centres I_1 et I_2 respectivement. Soit Q le second point d'intersection de Γ_1 avec Γ_2. Soit X_1 et Y_1 les points d'intersection de Γ_1 avec (AB) et (BC) respectivement et qui sont proches de B et soit X_2 et Y_2 les points d'intersection de Γ_2 avec (AC) et (BC). respectivement et qui sont proches de C. Montrer que les droites (X_1Y_1), (X_2Y_2) et (PQ) sont concourantes.

Solution de l'exercice 8



Soient Z_1 le second point d'intersection de (Γ_1) avec (AB), et Z_2 le second point d'intersection de (Γ_2) avec (AC). Puisque I_1 est le centre de (Γ_1), alors $X_1Z_1 = PY_1$ et $BZ_1 = BP$. Supposons que le cercle inscrit dans le triangle ABP coupe (AB) et (PB) en M et N respectivement, alors M et N sont les milieux de $[X_1Z_1]$ et $[PY_1]$ respectivement. Par suite :

$$AX_1 = AM + \frac{1}{2}X_1Z_1 = \frac{AP + AB - PB}{2} + \frac{X_1Z_1}{2} = \frac{AP + AB - PB}{2} + \frac{PY_1}{2}.$$

Ainsi,

$$AX_1 = \frac{AP + AB - PB}{2} + \frac{AP + PB - AB}{2} = AP.$$

De même, on a $AX_2 = AP$. Par suite, le triangle AX_1X_2 est isocèle avec $AX_1 = AX_2$. De plus, les triangles BX_2Y_2 et CX_2Y_2 sont aussi isocèles. Ainsi :

$$\widehat{Y_2X_2X_1} = 180° - \frac{90° - \widehat{AB}}{2} - \frac{90° - \widehat{BCA}}{2} = 90° - \widehat{ABC},$$

et

$$\widehat{Y_2Y_1X_1} = 90° + \widehat{ABC}.$$

Donc, $X_1Y_1Y_2X_2$ est un quadrilatère cyclique. Supposons que les droites (X_1Y_1) et (X_2Y_2) se coupent en R. Alors, d'après la puissance de R par rapport au cercle circonscrit à $X_1Y_1Y_2X_2$, on a :

$$RX_1 \cdot RY_1 = RX_2 \cdot RY_2,$$

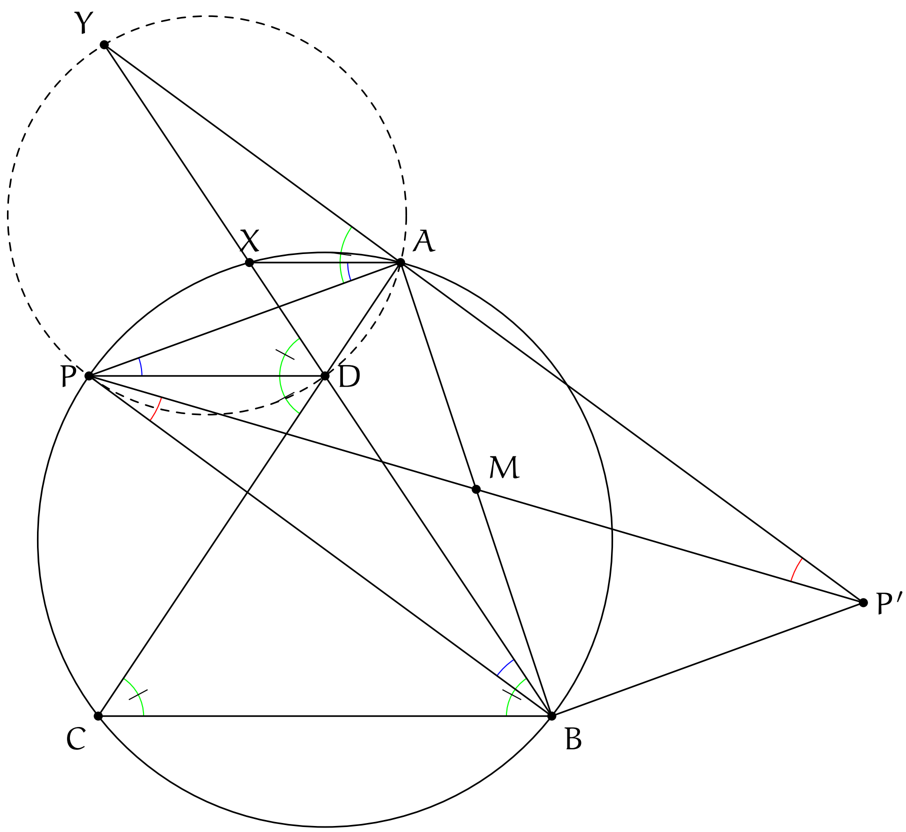
d'où R est sur l'axe radical de (Γ_1) et (Γ_2). Puisque cet axe radical est la droite (PQ), alors les droites (X_1Y_1), (X_2Y_2) et (PQ) concourent au point R.

<u>**Commentaires des correcteurs:**</u>

Le problème a été plutôt bien résolu. Plusieurs élèves ont compris qu'il fallait prouver que les points X_1, X_2, Y_1, Y_2 étaient cocycliques et ont réussi à s'y ramener, sans forcément trouver le reste de la preuve. L'erreur la plus courante est de poser Z l'intersection de (X_1Y_1) et (X_2Y_2) et d'utiliser dans une des égalités que Z est aligné avec P et Q. Une technique pour éviter cela, en plus de sa jolie figure faite pour comprendre le problème, est de tricher un peu et faire une figure où P, Q, Z ne sont pas alignés (en ne traçant pas de manière droit (X_1Y_1) et (X_2Y_2) et de vérifier que tous les arguments de chasse aux angles y sont corrects.

Exercice 9. Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit D le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et du segment $[AC]$. La droite parallèle au segment $[BC]$ passant par le point D coupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point P, de sorte que le point P appartienne au petit arc AC. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{APD} = \widehat{BPM}$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On demande une égalité d'angle impliquant un milieu de segment. Pour transformer cet énoncé en un énoncé plus facile, il y a deux solutions.



Solution 1 : Dans cette première solution, on utilise l'approche de compléter le parallélogramme.
On introduit donc P' le point tel que le quadrilatère $APBP'$ soit un parallélogramme. Alors $\widehat{BPM} = \widehat{PP'A}$. Pour l'instant, on ne voit pas trop à quoi cela peut nous servir car on n'a pas encore beaucoup d'informations sur le point P'. Il va nous falloir un peut plus d'idées.
La définition du point D interpelle. On pourrait vouloir rajouter un peu de symétrie dans la figure en rajoutant le point X tel que le quadrilatère $XABC$ est un trapèze isocèle, c'est-à-dire que le point X est le second point d'intersection de la droite (BD) avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Les droites (AX) et (DP) sont parallèles donc on a $\widehat{DPA} = \widehat{PAX}$. Par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{XAP} = \widehat{XBP} = \widehat{DBP}$.
On progresse ! On cherche désormais à montrer que $\widehat{PBD} = \widehat{PP'A}$. Ceci nous invite à introduire le point Y d'intersection des droites (BD) et (AP'). Il suffit dès lors de montrer que les points Y, P, B et P' sont cocycliques.
Mais on peut déjà remarquer que, puisque les droites (YP') et (BP) sont parallèles,

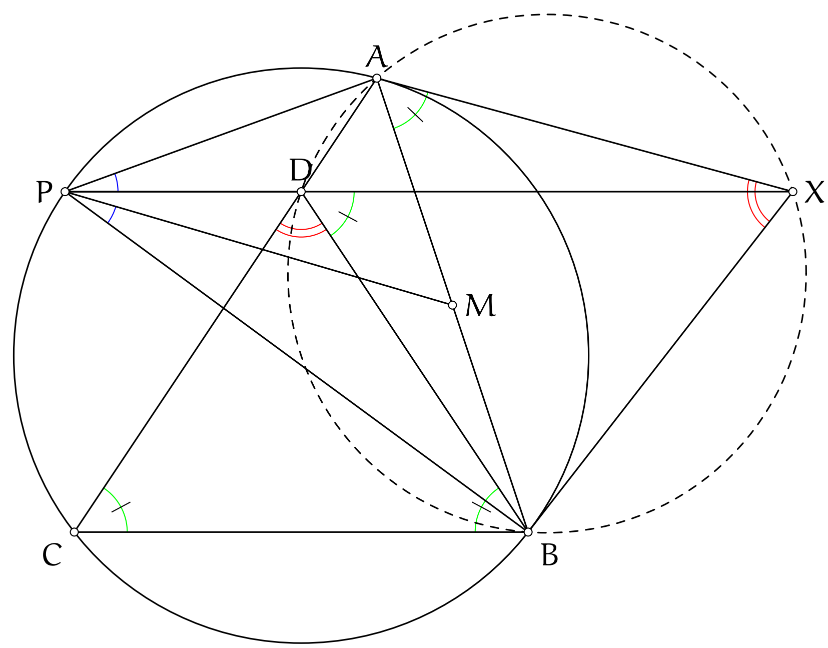
$$\widehat{DYP'} = \widehat{XBP} = \widehat{DPA}$$

donc les points P, D, A et Y sont cocycliques. On peut désormais conclure :

$$\widehat{PYP'} = \widehat{PYA} = \widehat{PDC} = \widehat{DCB} = \widehat{DBC} = \widehat{PDY} = \widehat{PAY} = 180° - \widehat{P'AP} = 180° - \widehat{PBP'}$$

Les points sont cocycliques donc on a l'égalité d'angle désirée.

Solution 2 :



On présente une autre solution utilisant les symédianes. En effet, une bonne façon de manipuler l'angle $\widehat{BPM}$ est d'utiliser un angle dont on sait qu'il a la même mesure mais qui fait intervenir des sommets avec de meilleures propriétés. Or on dispose de points intéressants appartenant à la symédiane issue d'un sommet.

Soit donc X le point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC aux points A et B. Le point X appartient à la symédiane du sommet P dans le triangle APB. Alors $\widehat{BPM} = \widehat{APX}$. Il s'agit donc de montrer que $\widehat{APD} = \widehat{APX}$, c'est-à-dire que les points P, D et X sont alignés ! Cette réduction significative de l'énoncé nous indique que nous sommes sur la bonne voie.

Une deuxième remarque est que les triangles ABX et CBD sont isocèles avec les angles à la bases valant $\widehat{BCA}$ donc ils sont semblables. On déduit que $\widehat{AXB} = \widehat{CDB}$ donc les points A, X, B et D sont cocycliques. Ainsi,

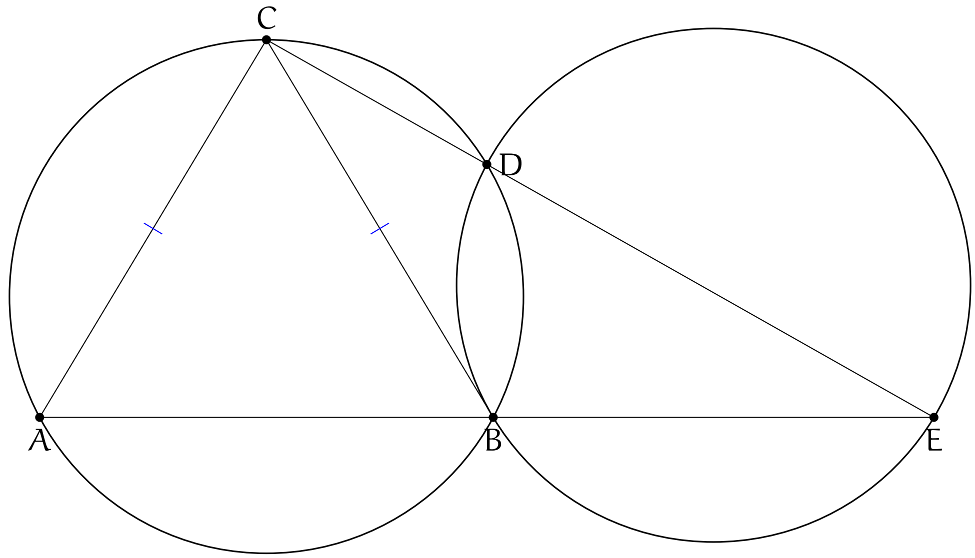
$$\widehat{BDX} = \widehat{BAX} = \widehat{ACB} = \widehat{CBD}$$

donc les droites (DX) et (BC) sont parallèles. Puisque les droites (PD) et (BC) le sont aussi, les points P, D et X sont donc alignés, ce que nous voulions. **Commentaires des correcteurs:**

Le problème a été abordé par une quinzaine d'élèves, avec plusieurs très bonnes solutions. La plupart des solutions proposées passent par l'étude de triangles semblables bien choisis. Une poignée d'élèves a employé a bon escient la configuration de la symédiane.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle isocèle en C et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit D un point de $\mathcal{C}$ différent de B et C et situé sur le petit arc de cercle $\widehat{BC}$. Soit E l'intersection de (CD) et (AB). Démontrer que la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit du triangle BDE.



Solution de l'exercice 10 On présente deux solutions, une par chasse aux angles et une par inversion.
Solution 1 :
On a les égalités d'angles suivantes

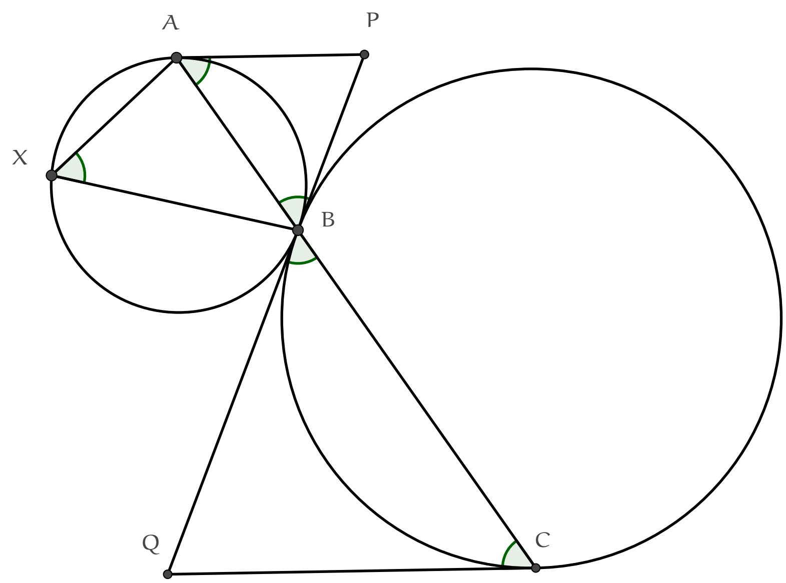
$$\widehat{EDB} = 180 - \widehat{CBD} = \widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 180 - \widehat{CBE}$$

Ce qui conclut par théorème de l'angle tangent.
Solution 2 :
Considérons l'inversion de centre C qui fixe A. Elle fixe aussi B. Donc elle envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur la droite (AB), d'où elle envoie D sur E, donc elle échange D et E Donc $|CD| \cdot |CE| = |CB|^2$, d'où par puissance d'un point, (BC) est tangente au cercle circonscrit à BDE. **Commentaires des correcteurs:**

Exercice quasi systématiquement résolu. La grande majorité a fait une chasse aux angles et le reste est passé par la puissance de B par rapport au cercle (BDE). Beaucoup de preuves par chasse aux angles, par contre, n'invoquent pas directement la propriété de l'angle tangentiel (ou même les angles opposés d'un quadrilatère cyclique) et finissent par la redémontrer avec plus ou moins de souffrances... Pour une illustration de l'angle tangentiel vous pouvez consulter
https ://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_base.pdf. Enfin, rappelons que ne pas faire de figure oblige le correcteur à considérer chaque erreur comme une faute mathématique plutôt qu'une faute d'étourderie, ce qui a généralement son coût en points.

Exercice 11. Soit deux cercles Γ_1 et Γ_2 tangents extérieurement (c'est-à-dire, ils sont tous les deux tangents à une même droite (d) et sont de part et d'autre de cette droite) en un point B. Soit A sur Γ_1 et C sur Γ_2 tels que la tangente en A à Γ_1 et la tangente en C à Γ_2 soient parallèles et que B soit positionné entre les deux tangentes. Montrer que A, B, C sont alignés

Solution de l'exercice 11



On nomme P et Q les points d'intersection de la tangente commune (d) avec les tangentes en A et en B, et X un point sur le cercle. Par hypothèse, $(AP)//(QC)$. Alors, par angles alternes internes et par angle tangentiel, on a :

$$\widehat{PBA} = \widehat{BXA} = \widehat{BAP}$$

Donc

$$\widehat{APB} = 180^\circ - 2\widehat{PBA}$$

De même, on a

$$\widehat{CQB} = 180^\circ - 2\widehat{QBC}$$

Or

$$\widehat{APB} = \widehat{APQ} = \widehat{PQC} = \widehat{BQC}$$

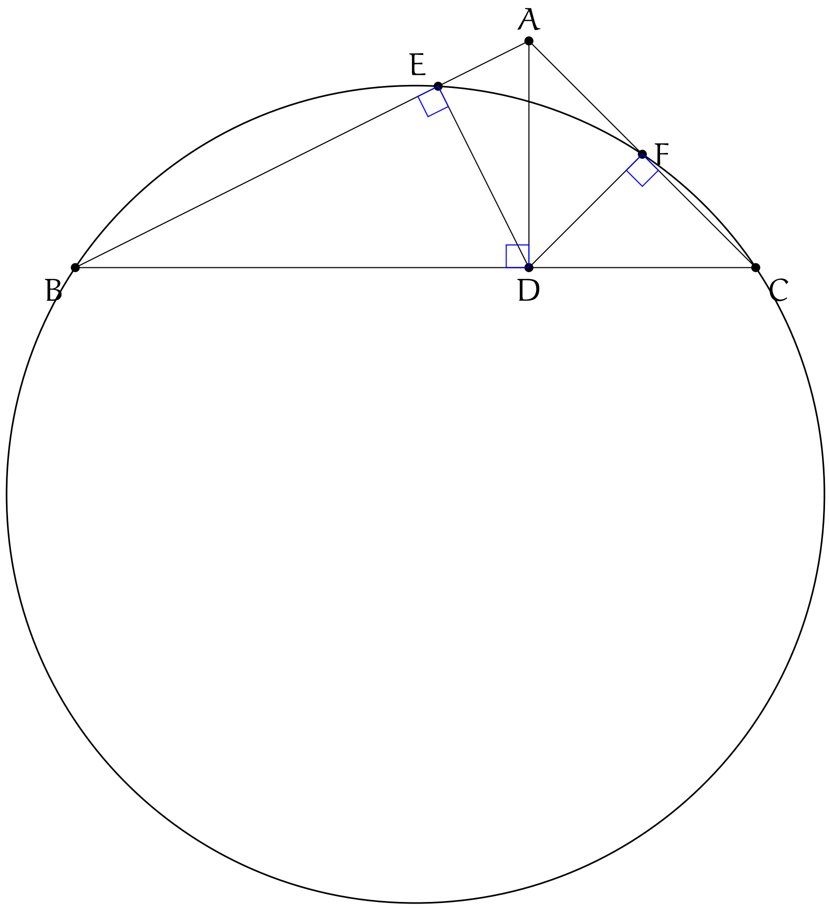
Donc

$$\widehat{PBA} = \widehat{QBC}$$

Comme P, B, Q, sont alignés, A, B, C aussi. **<u>Commentaires des correcteurs:</u>**

L'exercice a été extrêmement bien réussi, que ce soit par chasse aux angles, ou en utilisant l'hothétie de centre B qui envoie un cercle sur l'autre (de manière générale, quand deux cercles sont tangents, regarder cette homothétie peut être un bon réflexe).

Exercice 12. Soit un triangle ABC. Soit D le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A. On note E le pied de la hauteur du triangle ABD issues de D. On note F le pied de la hauteur du triangle ACD issue de D. Démontrer que les points B, C, E, F sont cocycliques.



Solution de l'exercice 12 Comme les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{EFA}$ sont droits, ils sont supplémentaires et donc le quadrilatère $EDFA$ est cyclique. Il s'ensuit

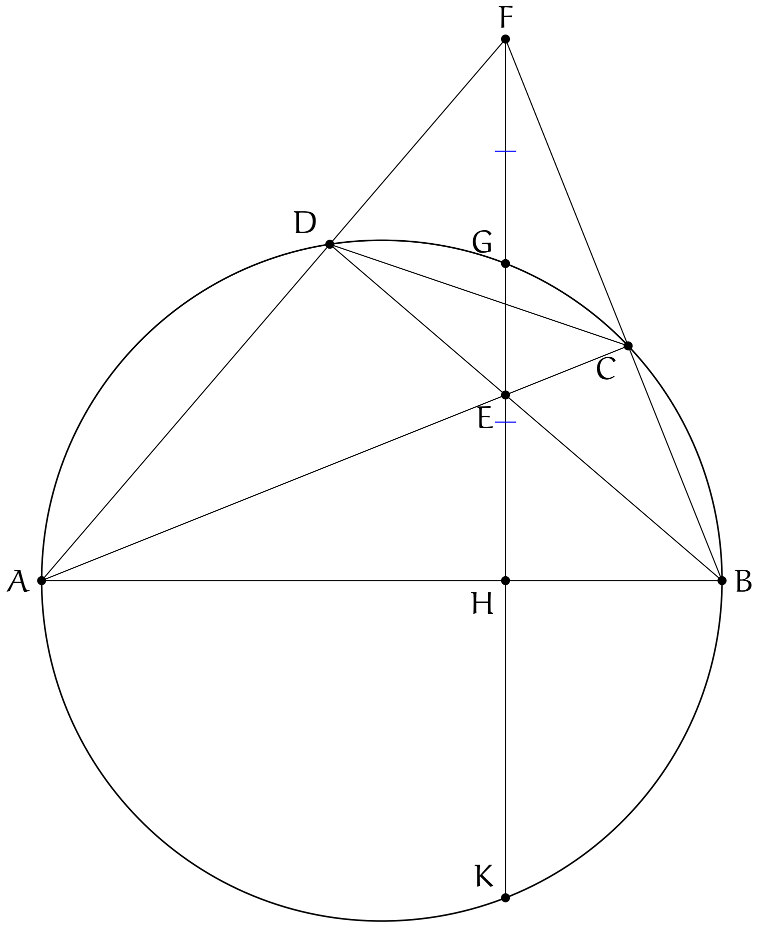
$$\widehat{AEF} = \widehat{ADF} = 90° - \widehat{FDC} = \widehat{BCF}\,.$$

Il s'ensuit que les points B, C, E, F sont cocycliques.

Commentaires des correcteurs:

Exercice très bien réussi, la majorité des élèves ont choisi de procéder par chasse aux angles qui était maitrisée. Une certaine part a aussi utilisé la puissance du point A avec succès.

Exercice 13. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ tel que $[AB]$ est un diamètre du cercle Γ. Les droites (AC) et (BD) s'intersectent en E, les droites (AD) et (BC) s'intersectent en F. Le segment $[EF]$ coupe Γ en G et la droite (EF) coupe (AB) en H. On suppose que G est le milieu de $[FH]$.
Montrer que E est le milieu de $[GH]$.



Solution de l'exercice 13
La figure donne envie d'utiliser la puissance d'un point et c'est ce que nous allons faire :
On introduit K le symétrique de G par rapport à (AB). K est sur (FH) et sur le cercle Γ. Alors on a $FEG = GH = HK$. Notons x cette longueur commune.
On pourrait utiliser la puissance de F, mais il est plus simle d'utiliser la puissance de E. Comme $\widehat{AHF}$ et $\widehat{ACF}$ sont droits, $AHCF$ est cyclique et on a les égalités suivantes :

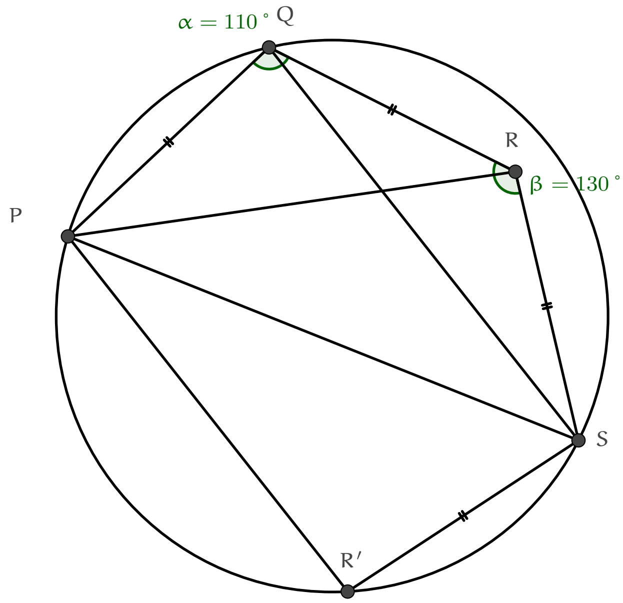
$$EG \cdot EH + x \cdot EH = EF \cdot EH = EC\dot{E}A = EG \cdot EK = EG \cdot EF + x \cdot EG$$

Donc $EH = EG$, ce qui conclut que E est le milieu de $[GH]$.
Commentaires des correcteurs:

Exercice très bien résolu par les élèves qui l'ont cherché. La plupart des élèves ont procédé par une application astucieuse de la puissance d'un point.

Exercice 14. Considérons un quadrilatère $PQRS$ tel que $|PQ| = |QR| = |RS|$, $\widehat{PQR} = 110°$ et $\widehat{QRS} = 130°$. Calculer la valeur de $\widehat{SPQ}$ and $\widehat{RSP}$.

Solution de l'exercice 14



On peut facilement caculer quelques angles.

$$\widehat{QPR} = \widehat{QRP} = 35°$$

$$\widehat{RQS} = \widehat{RSQ} = 25°$$

Donc

$$\widehat{PQS} = 85°$$

$$\widehat{PRS} = 95^{circ}$$

Comme ces deux angles ne sont pas égaux, les 4 points ne sont pas cocylciques, mais remarquer qu'ils somment à $180°$ nous incite à introduire R' le symétrique de R par rapport à la droite (SP). On constate que $SR' = PQ$ et que les points P, Q, S, R' sont cocycliques.
Comme $SR' = SR = QP$, il s'ensuit que le trapèze $PQSR'$ est isocèle. Ses angles à la base sont égaux, ce qui assure que $\widehat{PQS} = \widehat{QSR'} = 85°$.
Il s'ensuit que

$$\widehat{RSP} = \frac{\widehat{RSR'}}{2} = \frac{25° + 85°}{2} = 55°$$

et

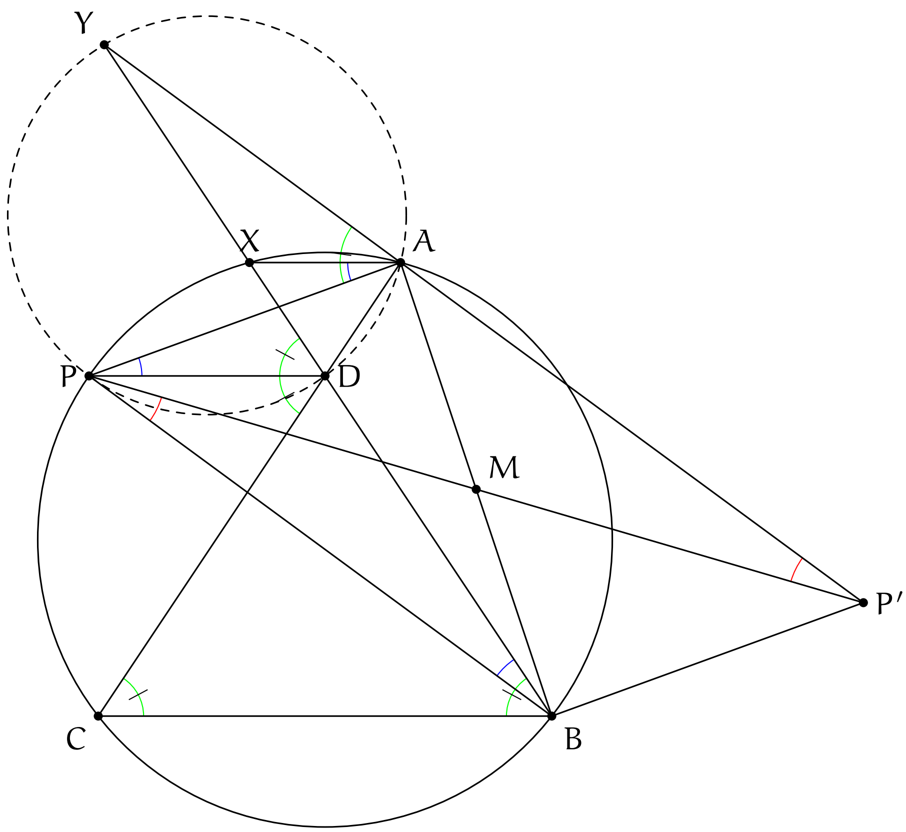
$$\widehat{SPQ} = 360° - \widehat{PQR} - \widehat{QRS} - \widehat{RSP} = 360° - 110° - 130° - 55° = 65°$$

Commentaires des correcteurs:

L'exercice, à première vue, pourrait paraître assez rasoir, puisqu'il n'est pas courant d'avoir des valeurs numériques à manipuler. Toutefois, les élèves ont su, par leurs preuves, mettre en évidence tout l'intérêt des différentes hypothèses. Et c'était précisément l'objectif didactique d'un tel exercice. L'exercice se faisait en 2 temps : dans un premier temps on exploite les hypothèses d'angles et de longueur pour obtenir le plus d'angles possibles dans la figure. Puis on reconnaît dans les angles calculés des angles supplémentaires, complémentaires, qui invitent à introduire des points auxiliaires qui transforment ces hypothèses d'angles en propriétés géométriques.

Exercice 15. Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit D le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et du segment $[AC]$. La droite parallèle au segment $[BC]$ passant par le point D coupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point P, de sorte que le point P appartienne au petit arc AC. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{APD} = \widehat{BPM}$.

Solution de l'exercice 15 On demande une égalité d'angle impliquant un milieu de segment. Pour se transformer cet énoncé en un énoncé plus facile, il y a deux solutions.



Solution 1 : Dans cette première solution, on utilise l'approche de compléter le parallélogramme.
On introduit donc P' le point tel que le quadrilatère $APBP'$ soit un parallélogramme. Alors $\widehat{BPM} = \widehat{PP'A}$. Pour l'instant, on ne voit pas trop à quoi cela peut nous servir car on n'a pas encore beaucoup d'informations sur le point P'. Il va nous falloir un peut plus d'idées.
La définition du point D interpelle. On pourrait vouloir rajouter un peu de symétrie dans la figure en rajoutant le point X tel que le quadrilatère $XABC$ est un trapèze isocèle, c'est-à-dire que le point X est le second point d'intersection de la droite (BD) avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Les droites (AX) et (DP) sont parallèles donc on a $\widehat{DPA} = \widehat{PAX}$. Par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{XAP} = \widehat{XBP} = \widehat{DBP}$.
On progresse ! On cherche désormais à montrer que $\widehat{PBD} = \widehat{PP'A}$. Ceci nous invite à introduire le point Y d'intersection des droites (BD) et (AP'). Il suffit dès lors de montrer que les points Y, P, B et P' sont cocycliques.
Mais on peut déjà remarquer que, puisque les droites (YP') et (BP) sont parallèles,

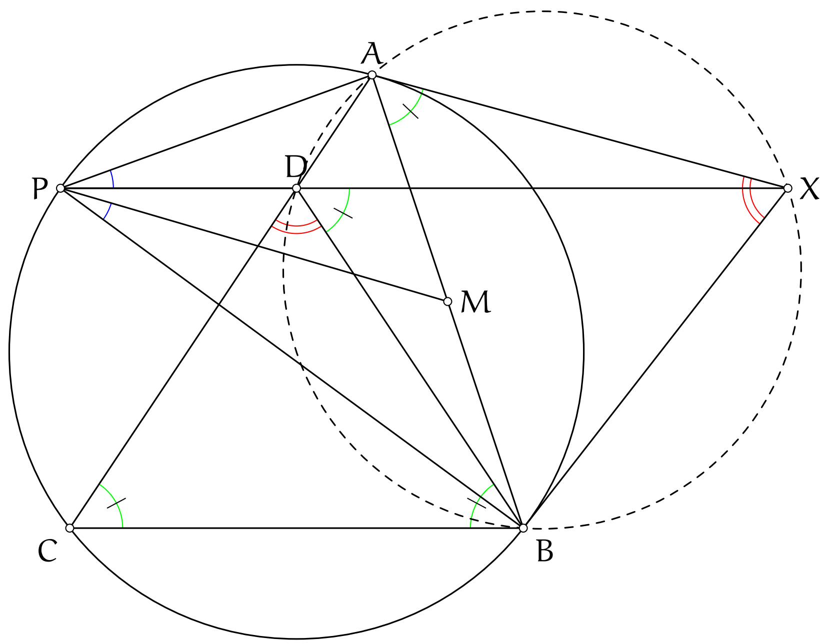
$$\widehat{DYP'} = \widehat{XBP} = \widehat{DPA}$$

donc les points P, D, A et Y sont cocycliques. On peut désormais conclure :

$$\widehat{PYP'} = \widehat{PYA} = \widehat{PDC} = \widehat{DCB} = \widehat{DBC} = \widehat{PDY} = \widehat{PAY} = 180° - \widehat{P'AP} = 180° - \widehat{PBP'}$$

Les points sont cocycliques donc on a l'égalité d'angle désirée.

Solution 2 :



On présente une autre solution utilisant les symédianes. En effet, une bonne façon de manipuler l'angle $\widehat{BPM}$ est d'utiliser un angle dont on sait qu'il a la même mesure mais qui fait intervenir des sommets avec de meilleures propriétés. Or on dispose de points intéressants appartenant à la symédiane issue d'un sommet.

Soit donc X le point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC aux points A et B. Le point X appartient à la symédiane du sommet P dans le triangle APB. Alors $\widehat{BPM} = \widehat{APX}$. Il s'agit donc de montrer que $\widehat{APD} = \widehat{APX}$, c'est-à-dire que les points P, D et X sont alignés ! Cette réduction significative de l'énoncé nous indique que nous sommes sur la bonne voie.

Une deuxième remarque est que les triangles ABX et CBD sont isocèles avec les angles à la bases valant $\widehat{BCA}$ donc ils sont semblables. On déduit que $\widehat{AXB} = \widehat{CDB}$ donc les points A, X, B et D sont cocycliques. Ainsi,

$$\widehat{BDX} = \widehat{BAX} = \widehat{ACB} = \widehat{CBD}$$

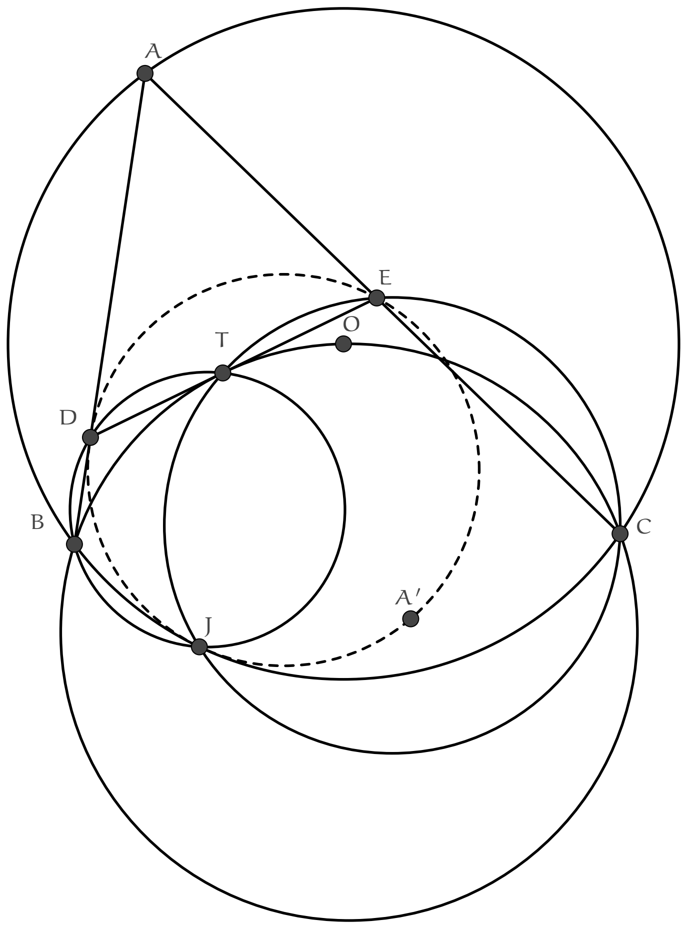
donc les droites (DX) et (BC) sont parallèles. Puisque les droites (PD) et (BC) le sont aussi, les points P, D et X sont donc alignés, ce que nous voulions.

<u>**Commentaires des correcteurs:**</u>

Le problème est bien résolu par les élèves l'ayant cherché. La principale approche proposée était de passer par la théorie des symédianes. pour montrer que (DP) était bien la symédiane issue de P dans le triangle ABP, les élèves ont pour la plupart, soit identifié des triangles semblables, soit mis en évidence un quadrilatère harmonique.

Exercice 16. Dans un triangle ABC, on pose O le centre du cercle circonscrit et t une droite tangente au cercle circonscrit du triangle BCO. On note D et E les intersections de t avec (AB) et (AC), ainsi que A' le symétrique de A par rapport à t.
Montrer que les cercles circonscrits aux triangles DEA' et ABC sont tangents.

Solution de l'exercice 16



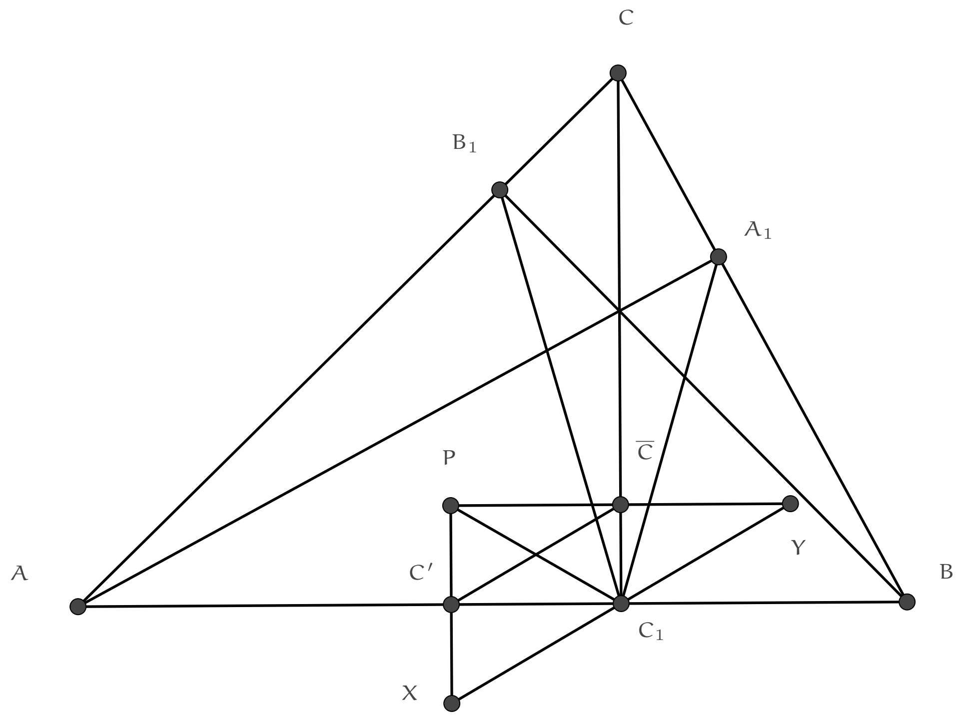
Soit T le point de tangence de t avec le cercle circonscrit à BCO.
Le théorème des trois cercles de Miquel appliqué au triangle ADE et au point B sur (AD), C sur AE et T sur DE fournit que les cercles circonscrits à ABC, DBT et TEC s'intersecte en un point J. On va montrer que J est notre point de tangence.
$\widehat{DA'E} = \widehat{DAE} = \widehat{BAC}$.
Par angle inscrit, on a $\widehat{BAC} = 180 - \widehat{CJB}$
De plus, par angle au centre,
$2\widehat{BAC} = \widehat{COB} = 180 - \widehat{BJC} = \widehat{BJD} + \widehat{CJD} = \widehat{BJD} + \widehat{CJE}$.
Donc $\widehat{DJE} = 360 - \widehat{CJB} - \widehat{CJE} - \widehat{BJD} = 180 - \widehat{BAC} = 180 - \widehat{DA'E}$, d'où D, A', E, J sont cocycliques.
Nous n'avons maintenant plus besoin du point A', ni même du point A.

Pour finir, au vu de la figure, on a envie de faire une inversion, de centre J. Ne nous privons pas, et faisons donc une inversion de centre J
en confondant par abus de notation les points avec leurs images, l'inversion de centre J nous envoie sur la figure suivante : B, C, T sont trois points, dont le cercle circonscrit est tangeant à un cercle Γ en T. On trace les droites TB et TC. Elles intersectent Γ en D et E respectivement.
Mais alors, l'homothétie de centre T envoie Γ sur le cercle circonscrit à BCT, Donc, par alignement, elle envoie D sur B et E sur C. Donc, (BC) et (DE) sont parallèles, ce qui en revenant à la figure originel donne alors que les cercles circonscrit à BCJ et DEJ sont tangents (en J) d'où la conclusion.
Commentaires des correcteurs:

Le problème est bien résolu ! La plupart des élèves ont réussi à résoudre le problème en montrant successivement les diverses étapes du corrigé par chasse aux angles.

Exercice 17. Soit ABC un triangle. P un point du plan. On nomme respectivement A', $\overline{A}$ les projections respectives de P sur (BC) et sur la hauteur issue de A. On construit de même B', $\overline{B}$ et C', $\overline{C}$. Montrer que $(A'\overline{A})$, $(B'\overline{B})$ et $(C'\overline{C})$ sont concourantes.

Solution de l'exercice 17



Notons A_1 (resp. B_1, C_1) le pied de la hauteur de A (resp. B, C).
Commençons par considérer l'homothétie de centre P et de coefficient 2. L'image de la droite $(C'\overline{C})$ est une droite passant par C_1 et parallèle à $(C'\overline{C})$. Soit X l'image de C' et soit Y celle de $\overline{C}$.

Il s'ensuit que $\widehat{XC_1A} = \widehat{PC_1A}$ et $\widehat{XC_1A} = \widehat{BC_1Y}$. Par conséquent $\widehat{AC_1P} = \widehat{BC_1Y}$.
Par ailleurs, puisque (C_1C) est la bissectrice de $\widehat{A_1C_1B_1}$, on sait que $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1}$. Par conséquent, $\widehat{PC_1B_1} = \widehat{YC_1A_1}$.
Il s'ensuit que les droites (C_1P) et (XC_1) sont conjugées isogonales dans le triangle $A_1B_1C_1$. Comment les droites C_1P, A_1P et B_1P sont concourantes en P, leurs droites conjugées respectives sont aussi concourantes, en un point Q.

Par homothétie, la droite $(C'\overline{C}$ passe par le milieu de $[PQ]$. Comme c'est aussi le cas des autres droites, on en déduit que $(A'\overline{A})$, $(B'\overline{B})$ et $(C'\overline{C})$ sont concourantes **Commentaires des correcteurs:**

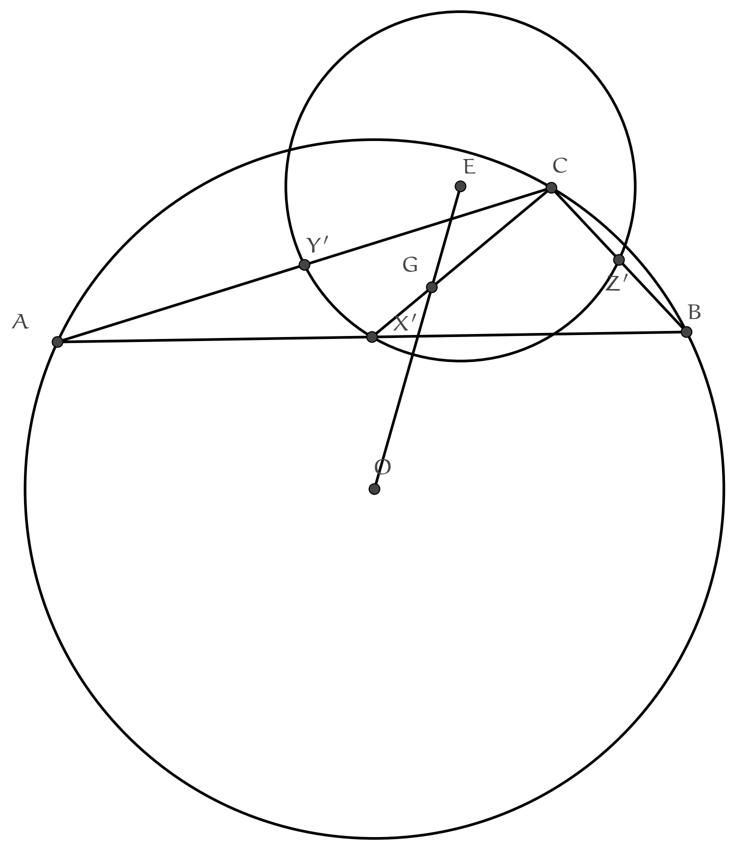
Le problème a été très peu abordé. Ce problème était, malheureusement pour les élèves qui l'ont cherché, assez "tout ou rien" : il y avait une idée à avoir qui permettait d'avancer significativement dans le problème, à savoir de considérer la dilatation de rapport 2 et de centre P. Celle-ci faisait alors naturellement apparaître le conjugué isogonal de P dans le triangle orthique. Sans cette idée, il était difficile de récupérer des points. Il n'est toutefois pas inintéressant de se confronter à ce style de problème.

Exercice 18. On fixe un cercle Γ du plan, l une ligne tangente à Γ et Ω un cercle n'intersectant pas l tel que Γ et Ω soit situé de part et d'autre de l. On fait varier un point X sur Ω. On nomme Y et Z les deux points de l tel que (XY) et (XZ) soit tangents à Γ. Montrer que lorsque X varie sur Ω, le cercle circonscrit à XYZ est tangent à deux cercles fixes.

Solution de l'exercice 18

On nomme A (resp B) le point d'intersection de Γ et (XY) (resp (XZ)). On nomme C le point de tangence de l à Γ, et O le centre de Γ.

La clé est d'appliquer une inversion dont le cercle est Γ, donc fixant tous les points de ce cercle.



On nomme X', Y', Z' les images respectives de X, Y, Z après inversion. Il est alors connu que X' est le milieu de AB, Y' celui de AC et Z' celui de BC. On nomme G le centre de gravité commun aux triangles ABC et de $X'Y'Z'$. Ainsi, le cercle circonscrit à XYZ est envoyé sur le cercle d'Euler ϵ_X de ABC. De plus, ce cercle d'euler est l'image de Γ par homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. En particulier, ce cercle est de rayon constant (qui ne dépend pas de la position de X sur Ω), et son centre E est l'image de G par homothétie de centre O et de rapport $3/2$. De plus, G est l'image de X' par l'homothétie de centre C et de rapport $2/3$. Composer les deux homothéties donne une translation, donc quand X' parcours le cercle image par inversion de Ω, E parcours un cercle.

Ainsi, les cercles images ϵ_X sont tous de même rayon, et ont leurs centres qui varie sur un cercle fixé. Ils sont donc tous tangents à l'enveloppe exterieur et à l'enveloppe intérieur de ces cercles, qui sont des cercles par symétrie. Ces enveloppes ne passe pas par O (sinon O serait sur un des ϵ_X, absurde car alors le cercle circonscrit à X, Y, Z serait dégénéré). Donc, en prenant l'image réciproque de ces deux enveloppes par notre inversion, on obtient les deux cercles voulus.

Commentaires des correcteurs:

Le problème a été très peu abordé. Tous les élèves (4) qui l'ont abordé l'ont résolu. Le point principal était de se rendre compte qu'il fallait effectuer un inversion par rapport au cercle Γ.