PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Test du 15 mai 2024

Durée : 4h

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

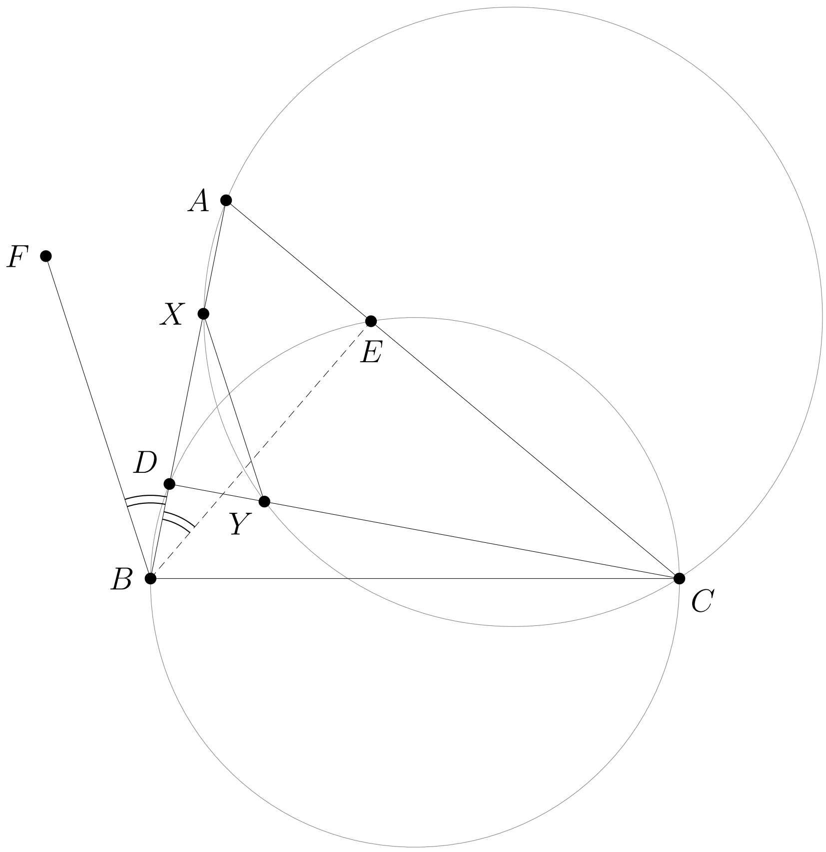
Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit ABC un triangle. Un cercle Γ passant par B et C recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en deux points D et E. Soit X un point situé sur le segment $[AD]$, puis Y le point d'intersection, autre que C, entre la droite (CD) et le cercle circonscrit au triangle ACX. Enfin, soit F le symétrique de E par rapport à la droite (AB).

Démontrer que les droites (BF) et (XY) sont parallèles.

Solution de l'exercice 1



Une chasse aux angles indique que

$$\widehat{BXY} = 180° - \widehat{YXA} = \widehat{ACY} = \widehat{ECD} = \widehat{EBD} = \widehat{EBA} = \widehat{ABF} = \widehat{XBF}.$$

Les angles $\widehat{BXY}$ et $\widehat{XBF}$ sont donc alternes-internes, et les droites (BF) et (XY) sont bien parallèles.

Commentaire des correcteurs Exercice très bien réussi. La plupart des élèves aillant rendu une copie on résolu l'exercice et beaucoup de copies ont été rendues.

Beaucoup d'élèves on redémontré que les angles $\widehat{FBA}$ et $\widehat{ABE}$ étaient égaux en utilisant des triangles semblables. Ce n'était pas nécessaire, il suffisait de dire ques les angles sont symétriques par rapport à la symétrie axiale par rapport à la droite (AB).

Exercice 2. Trouver tous les triplets de nombres premiers (p, q, r) tels que $p^2 + pq + q^2 = r^2$.

Solution de l'exercice 2 Soit (p, q, r) une solution éventuelle. Si $p = q$, l'énoncé indique que $r^2 = 3p^2$, donc 3 divise r, puis 9 divise $r^2 = 3p^2$ et 3 divise p ; mais alors $p = 3$ et $r^2 = 27$, ce qui est impossible. Par conséquent, $p \neq q$ et, puisque p et q jouent des rôles symétriques, on suppose que $p < q$.

Comme $(p + q)^2 = r^2 + pq > r^2 > \max\{p, q\}^2$, on sait que $2q > p + q > r > q > p$. Or, p divise $r^2 - q^2 = (r - q)(r + q)$ et $0 < r - q < p$, donc p est premier avec $r - q$ et p divise $r + q$. De même, q divise $r + p$. Ainsi, p et q divisent $r + p + q$ et, puisqu'ils sont distincts, pq divise aussi $r + p + q$.

Mais alors $4q > r + p + q \geqslant pq$, donc $p = 2$ ou $p = 3$:

- ▷ lorsque $p = 2$, $r^2 = q^2 + 2q + 4 = (q + 1)^2 + 3$, donc $3 = (r - q - 1)(r + q + 1)$, ce qui est impossible car $r + q + 1 \geqslant 5$;
- ▷ lorsque $p = 3$, $r^2 = q^2 + 3q + 9 = (q + 3/2)^2 + 27/4$, donc $27 = (2r - 2q - 3)(2r + 2q + 3)$. Comme $2r + q + 3 > \max\{0, 2r - q - 3\}$, on en déduit que $(2r - q - 3, 2r + q + 3)$ vaut $(1, 27)$ ou $(3, 9)$, ce qui signifie que $(q, r) = (5, 7)$ ou $(0, 3)$.

Réciproquement, on vérifie que les triplets $(p, q, r) = (3, 5, 7)$ et $(5, 3, 7)$ sont bien solutions.

Solution alternative n°1 Soit (p, q, r) une solution éventuelle. L'égalité de l'énoncé se réécrit comme $(p + q + r)(p + q - r) = (p + q)^2 - r^2 = pq$. Par conséquent, les nombres $p + q - r$ et $p + q + r$ valent soit 1 et pq, soit p et q (dans le désordre). Puisque $p + q + r > \max\{p, q\}$, cela signifie que $p + q + r = pq$ et $p + q - r = 1$.

Ainsi, $r = p + q - 1$ et $pq = 2p + 2q - 1$. Cette dernière égalité se réécrit comme $(p - 2)(q - 2) = 3$, ce qui signifie que les nombres $p - 2$ et $q - 2$ valent 1 et 3 (dans le désordre).

On en conclut que (p, q, r) vaut $(3, 5, 7)$ ou $(5, 3, 7)$, et on vérifie dans les deux cas que p, q et r sont des nombres premiers tels que $p^2 + pq + q^2 = 3^2 + 15 + 5^2 = 49 = 7^2$.

Commentaire des correcteurs L'exrcice est plutôt bien réussi, beaucoup d'élèves ont vu la factorisation de la solution alternative 3, parfois sans réussir à conclure. La factorisation de la solution était astucieuse, mais une idée générale est qu'un produit croît plus rapidement qu'une somme, donc l'égalité ne devrait pas pouvoir être vraie lorsque p, q sont suffisamment grands.

Par ailleurs, un certain nombre d'élèves ont tenté des raisonnements modulo 2, 3 ou 4. Bien qu'ici cela ne marchait pas, c'était un bon réflexe, qui est à garder.

Exercice 3. Soit x, y et z des nombres réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 1$. Démontrer que

$$\frac{2}{xyz} + 9xyz \geqslant 7(x + y + z).$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Pour tous les entiers a, b et c, on note $S_{a,b,c}$ la somme

$$S_{a,b,c} = x^a y^b z^c + x^a y^c z^b + x^b y^a z^c + x^b y^c z^a + x^c y^a z^b + x^c y^b z^a.$$

Il s'agit en fait de démontrer la positivité du nombre

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2 + 9(xyz)^2 - 7xyz(x + y + z) \\
&= 2(xy + yz + zx)^3 + 9(xyz)^2 - 7xyz(x + y + z)(xy + yz + zx) \\
&= (S_{3,3,0} + 6S_{3,2,1} + 2S_{2,2,2}) + 3S_{2,2,2}/2 - (7S_{3,2,1} + 7S_{2,2,2}/2) \\
&= S_{3,3,0} - S_{3,2,1},
\end{aligned}$$

ce qui est un cas particulier de l'inégalité de Muirhead.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Il était difficile d'avancer sur ce problème sans avoir l'idée d'homogénéiser l'inégalité à l'aide de l'hypothèse. Seule une petite dizaine d'élèves ayant mené cette idée jusqu'au bout en homogénéisant chaque terme de l'inégalité au même degré que le terme $9xyz$ sont alors allés au bout de l'exercice en utilisant l'inégalité de Muirhead.

Exercice 4. Soit $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$ deux entiers. Morgane a placé une pièce dans chacune des mn cases d'une grille rectangulaire à m lignes et n colonnes. Initialement, chaque pièce montre son côté PILE, et cache son côté FACE. Chaque minute, Morgane choisit un carré 2×2, retourne les deux pièces situées dans les cases en haut à gauche et en bas à droite du carré, ainsi qu'une des deux pièces situées en haut à droite ou bien en bas à gauche ; la quatrième pièce du carré 2×2 n'est pas retournée.

Pour quels couples d'entiers (m, n) Morgane peut-elle parvenir à ce que toutes les pièces montrent leur côté FACE en un temps fini ?

Solution de l'exercice 4 Ci-dessous, on numérote les lignes de bas en haut entre 1 et m, les colonnes de guache à droite entre 1 et n, et on identifie chaque pièce située en ligne ℓ et colonne c au couple (ℓ, c). On commence par identifier certaines tailles de grilles pour lesquelles Morgane peut arriver à ses fins :

- Si $(m, n) = (2, 3)$, Morgane retourne les pièces
  - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la $1^{\text{ère}}$ minute ;
  - $(1, 3)$, $(2, 3)$ et $(2, 2)$ lors de la $2^{\text{ème}}$ minute.
- Si $(m, n) = (3, 2)$, Morgane retourne les pièces
  - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la $1^{\text{ère}}$ minute ;
  - $(2, 2)$, $(3, 2)$ et $(3, 1)$ lors de la $2^{\text{ème}}$ minute.
- Si $(m, n) = (3, 3)$, Morgane retourne les pièces
  - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la $1^{\text{ère}}$ minute ;
  - $(1, 3)$, $(2, 3)$ et $(2, 2)$ lors de la $2^{\text{ème}}$ minute ;
  - $(2, 2)$, $(3, 2)$ et $(3, 1)$ lors de la $3^{\text{ème}}$ minute ;
  - $(2, 3)$, $(2, 2)$ et $(3, 2)$ lors de la $4^{\text{ème}}$ minute ;
  - $(2, 3)$, $(3, 3)$ et $(3, 2)$ lors de la $5^{\text{ème}}$ minute.

Plus généralement, si la grille $m \times n$ avec laquelle travaille Morgane peut être décomposée en rectangles 2×3, 3×2 et 3×3, Morgane s'en sortira en traitant ces rectangles un par un. C'est, en particulier, le cas lorsque 3 divise m ou n :

- si 3 divise m et n est pair, on peut décomposer la grille en rectangle 3×2 ;
- si 3 divise m et n est impair, on peut décomposer la grille en $m/3$ rectangles 3×3, tous alignés à gauche, puis des rectangles 3×2 ;
- la situation est analogue lorsque 3 divise n.

Enfin, si 3 ne divise ni m ni n, soit $m = 3q + r$ et $n = 3q' + r'$ les divisions euclidiennes de m et n par 3. On colorie alors les pièces (c, ℓ) en

- rouge si $c + \ell \equiv 0 \pmod 3$; il y a R cases rouges.
- vert si $c + \ell \equiv 1 \pmod 3$; il y a V cases rouges.
- bleu si $c + \ell \equiv 2 \pmod 3$; il y a B cases rouges.

Or, chaque minute, Morgane retourne une case de chaque couleur. Par conséquent, la parité du nombre de cases qui montrent leur côté FACE est la même pour chaque couleur. Si toutes les pièces sont retournées simultanément, c'est donc que R, V et B sont de même parité.

Cependant, lorsque $q = q' = 0$, on constate que R, V et B ne sont pas tous trois de même parité. Dans le cas général, on vient juste de gagner $qn + q'r$ pièces de chaque couleur, donc R, V et B ne sont toujours pas tous trois de même parité.

En conclusion, les couples recherchés sont ceux pour lesquels 3 divise m ou n.

Commentaire des correcteurs La résolution de ce problème nécessitait trois étapes, de difficultés croissantes :

1. constater que l'on pouvait gagner à partir d'un rectangle 2×3 ou 3×3, donc à partir de tout rectangle $2k \times 3\ell$ ou $3k \times 2\ell$;
2. constater que l'on pouvait aussi gagner à partir d'un rectangle 3×3, donc à partir de tout rectangle $3k \times \ell$;
3. démontrer que l'on ne pouvait gagner que lorsque que 3 divisait m ou n.

La plupart des élèves se sont arrêtés à la première étape ; nombre d'entre eux ont abusivement et prématurément prétendu que les rectangles $2k \times 3\ell$ (ou leurs symétriques) étaient les seules solutions, ce qui les a condamnés à ne pas avancer davantage. Plusieurs autres ont oublié que Morgane pouvait tout à fait décider de retourner plusieurs fois une même pièce, et on cru se ramener à un problème de pavage ; de manière générale, il faut faire attention à bien lire les énoncés.

Les élèves qui ont passé cet écueil ont ensuite tiré le maximum de cet exercice, étant entendu que trouver l'invariant permettant de démontrer que $mn \equiv 0 \pmod 3$ était extrêmement difficile, et qu'il est donc normal que peu d'élèves aient réussi cette dernière étape.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$ deux entiers. Morgane a placé une pièce dans chacune des mn cases d'une grille rectangulaire à m lignes et n colonnes. Initialement, chaque pièce montre son côté PILE, et cache son côté FACE. Chaque minute, Morgane choisit un carré 2×2, retourne les deux pièces situées dans les cases en haut à gauche et en bas à droite du carré, ainsi qu'une des deux pièces situées en haut à droite ou bien en bas à gauche ; la quatrième pièce du carré 2×2 n'est pas retournée.

Pour quels couples d'entiers (m, n) Morgane peut-elle parvenir à ce que toutes les pièces montrent leur côté FACE en un temps fini ?

Solution de l'exercice 5 Ci-dessous, on numérote les lignes de bas en haut entre 1 et m, les colonnes de guache à droite entre 1 et n, et on identifie chaque pièce située en ligne ℓ et colonne c au couple (ℓ, c). On commence par identifier certaines tailles de grilles pour lesquelles Morgane peut arriver à ses fins :

- Si $(m, n) = (2, 3)$, Morgane retourne les pièces
  - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la $1^{\text{ère}}$ minute ;
  - $(1, 3)$, $(2, 3)$ et $(2, 2)$ lors de la $2^{\text{ème}}$ minute.
- Si $(m, n) = (3, 2)$, Morgane retourne les pièces
  - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la $1^{\text{ère}}$ minute ;
  - $(2, 2)$, $(3, 2)$ et $(3, 1)$ lors de la $2^{\text{ème}}$ minute.
- Si $(m, n) = (3, 3)$, Morgane retourne les pièces
  - $(1, 2)$, $(1, 1)$ et $(2, 1)$ lors de la $1^{\text{ère}}$ minute ;
  - $(1, 3)$, $(2, 3)$ et $(2, 2)$ lors de la $2^{\text{ème}}$ minute ;
  - $(2, 2)$, $(3, 2)$ et $(3, 1)$ lors de la $3^{\text{ème}}$ minute ;
  - $(2, 3)$, $(2, 2)$ et $(3, 2)$ lors de la $4^{\text{ème}}$ minute ;
  - $(2, 3)$, $(3, 3)$ et $(3, 2)$ lors de la $5^{\text{ème}}$ minute.

Plus généralement, si la grille $m \times n$ avec laquelle travaille Morgane peut être décomposée en rectangles 2×3, 3×2 et 3×3, Morgane s'en sortira en traitant ces rectangles un par un. C'est, en particulier, le cas lorsque 3 divise m ou n :

- si 3 divise m et n est pair, on peut décomposer la grille en rectangle 3×2 ;
- si 3 divise m et n est impair, on peut décomposer la grille en $m/3$ rectangles 3×3, tous alignés à gauche, puis des rectangles 3×2 ;
- la situation est analogue lorsque 3 divise n.

Enfin, si 3 ne divise ni m ni n, soit $m = 3q + r$ et $n = 3q' + r'$ les divisions euclidiennes de m et n par 3. On colorie alors les pièces (c, ℓ) en

- rouge si $c + \ell \equiv 0 \pmod 3$; il y a R cases rouges.
- vert si $c + \ell \equiv 1 \pmod 3$; il y a V cases rouges.
- bleu si $c + \ell \equiv 2 \pmod 3$; il y a B cases rouges.

Or, chaque minute, Morgane retourne une case de chaque couleur. Par conséquent, la parité du nombre de cases qui montrent leur côté FACE est la même pour chaque couleur. Si toutes les pièces sont retournées simultanément, c'est donc que R, V et B sont de même parité.

Cependant, lorsque $q = q' = 0$, on constate que R, V et B ne sont pas tous trois de même parité. Dans le cas général, on vient juste de gagner $qn + q'r$ pièces de chaque couleur, donc R, V et B ne sont toujours pas tous trois de même parité.

En conclusion, les couples recherchés sont ceux pour lesquels 3 divise m ou n.

Commentaire des correcteurs Exercice bien réussi, nous avons apprécié les nombreux efforts de construction, qui ont souvent permis de trouver toutes les grilles que Morgane pouvait retourner, rapportant ainsi un nombre significatif de points. Nous attirons l'attention sur un type d'argument à éviter : ce n'est parce qu'on sait retourner une partie d'une grille et qu'il est impossible de retourner le reste qu'on peut en déduire que la grille en entier n'est pas retournable. Nous regrettons également de nombreux points perdus par de bonnes copies qui n'ont pas pris le temps de justifier proprement pourquoi les trois couleurs n'avaient pas toutes la même parité.

Exercice 6. On note $\mathbb{R}_{>0}$ l'ensemble des réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que

$$x\big(f(x)+f(y)\big) \geqslant \big(f(f(x))+y\big)f(y)$$

pour tous les réels $x>0$ et $y>0$.

Solution de l'exercice 6 Ci-dessous, on note f^k la $k^{\text{ème}}$ itérée de f. L'inégalité à démontrer se réécrit comme

$$yf(y) \leqslant (x-f^2(x))f(y)+xf(x).$$

Lorsque $x=y$, cela signifie que $x \geqslant f^2(x)$. Ainsi, la suite $x, f^2(x), f^4(x), \ldots$ est décroissante; elle admet une limite que l'on note $f^{\omega}(x)$, et on sait que $f^{2k}(x)-f^{2k+2}(x) \to 0$ lorsque $k \to +\infty$.

Si l'on remplace x par $f^{2k}(x)$, l'inégalité de l'énoncé indique alors que

$$yf(y) \leqslant (f^{2k}(x)-f^{2k+2}(x))f(y)+f^{2k}(x)f^{2k+1}(x).$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit que

$$yf(y) \leqslant f^{\omega}(x)f^{\omega}(f(x)) \leqslant xf(x).$$

Ceci étant valable pour tous x et y, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est constante.

Ainsi, f est de la forme $f\colon t \mapsto c/t$, auquel cas on vérifie que

$$x\left(f(x)+f(y)\right)=c+\frac{cx}{y}=(x+y)\frac{c}{y}=\left(f(f(x))+y\right)f(y).$$

Les fonctions solutions sont donc les fonctions $f\colon t \mapsto c/t$ obtenues lorsque $c \in \mathbb{R}_{>0}$.

Commentaire des correcteurs Le problème a été résolu par une dizaine d'élèves. Quelques remarques :

- Beaucoup d'élèves n'ont même pas tenté de deviner les solutions, ou se sont arrêté au fait que $x \to 1/x$ était solution. Il est important de trouver les différentes solutions de l'équation fonctionnelle, car cela peut donner une intuition des différentes étapes de la solution, et surtout éviter de se lancer dans la preuve d'un fait qui n'est pas vérifié pour toutes les solutions.
- Certains élèves ont essayé de faire de l'analyse, souvent dans l'esprit de la dernière solution. Le résultat est souvent un ensemble de contre-vérités : avant de se lancer dans une solution purement orientée analyse, il faut faire particulièrement attention aux limites, aux inégalités en passant à la limite, aux histoires de minimum/maximum (qui n'existent pas toujours) et donc être très méticuleux. Même des élèves parmi les plus expérimentés ont à plusieurs reprises écrits des choses fausses : il faut donc rester alerte, et éventuellement lire des vraies preuves rigoureuses d'analyse avant de vouloir en faire soi-même.

Exercice 7. Trouver tous les entiers s pour lesquels il existe des entiers strictement positifs a, b, c et d tels que $a+b+c+d=s$ et

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}.$$

Solution de l'exercice 7 Ci-dessous, on dit qu'un quadruplet (a,b,c,d) est *joli* lorsqu'il est solution de l'équation

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}. \tag{1}$$

Soit s un entier dont l'un des facteurs est un carré parfait plus grand que 1 ; autrement dit, $s=k\ell^2$. En posant $a=k(\ell-1)^2$, $b=c=k(\ell-1)$ et $d=k$, on vérifie bien que $a+b+c+d=k(\ell^2-2\ell+1+2\ell-2+1)=s$ et que

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}=\frac{k^2(\ell-1)^3}{k\ell(\ell-1)}+\frac{k^2(\ell-1)}{k\ell}=k(\ell-1)=\frac{k\ell(\ell-1)\times k\ell}{k\ell^2}=\frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}.$$

Par conséquent, (a,b,c,d) est joli, et s est effectivement l'un des entiers recherchés.

Réciproquement, soit s une solution, et soit (a,b,c,d) un joli quadruplet tel que $a+b+c+d=s$. Pusique $s=a+b+c+d\geqslant 4$, il admet au moins un facteur premier, disons p.

L'équation (1) se réécrit comme $s(ab(c+d)+cd(a+b))=(a+b)^2(c+d)^2$, et puisque p est premier et divise s, il divise donc l'un des entiers $a+b$ et $c+d$. Comme (a,b) et (c,d) jouent des rôles symétriques, on suppose que p divise $a+b$; mais alors p divise aussi $c+d=s-(a+b)$. Ceci étant valable pour tout facteur premier de s, le produit de ces facteurs premiers lui-même divise $a+b$ et $c+d$. Puisque $a+b<s$, ce produit est distinct de s, et il existe donc un nombre premier p tel que p^2 divise s.

En conclusion, les entiers s recherchés sont ceux dont au moins un facteur est un carré parfait plus grand que 1.

Commentaire des correcteurs Cet exercice très difficile a été abordé par une trentaine d'élèves, dont seuls trois ont réussi à obtenir des points. L'immense majorité des élèves a identifié que les multiples de 4 étaient des solutions du problème, mais ont ensuite conjecturé hâtivement qu'il s'agissait des seules solutions, et beaucoup ont cru parvenir à démontrer ce résultat incorrect, en usant d'inégalités ou d'identités arithmétiques fantaisistes : c'est dommage.

En dépit de la difficulté de cet exercice, on ne peut que regretter que peu d'élèves aient entrepris d'étudier les petites valeurs des sommes s solutions. Par exemple, étudier le cas $s=5$, ou plus généralement le cas où s est un nombre premier, permettait de se rendre compte que les dénominateurs $a+b$, $c+d$ du membre de gauche et le numérateur $(a+b)(c+d)$ du membre de droite ne pouvaient pas être divisibles par s, ce qui empêchait s d'être une solution. De même, quelques élèves sont parvenus à trouver le quadruplet $(a,b,c,d)=(1,2,2,4)$, donc $s=9$, mais n'ont pas cherché à généraliser cette construction, qui les aurait pourtant amenés à trouver l'ensemble des solutions.