PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 27 MARS 2024

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Démontrer, pour tous les réels strictement positifs u et v, que

$$\min\left\{u, \frac{2024}{v}, \frac{1}{u} + v\right\} \leqslant 45.$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Il suffit de vérifier que, si $u \geqslant 45$ et $2024/v \geqslant 45$, on aura $1/u + v \leqslant 45$. Or, les inégalités $u \geqslant 45$ et $2024/v \geqslant 45$ se réécrivent respectivement comme $1/u \leqslant 1/45$ et $v \leqslant 2024/45$. Si toutes deux sont vraies, on en conclut que

$$\frac{1}{u} + v \leqslant \frac{1}{45} + \frac{2024}{45} = \frac{2025}{45} = 45.$$

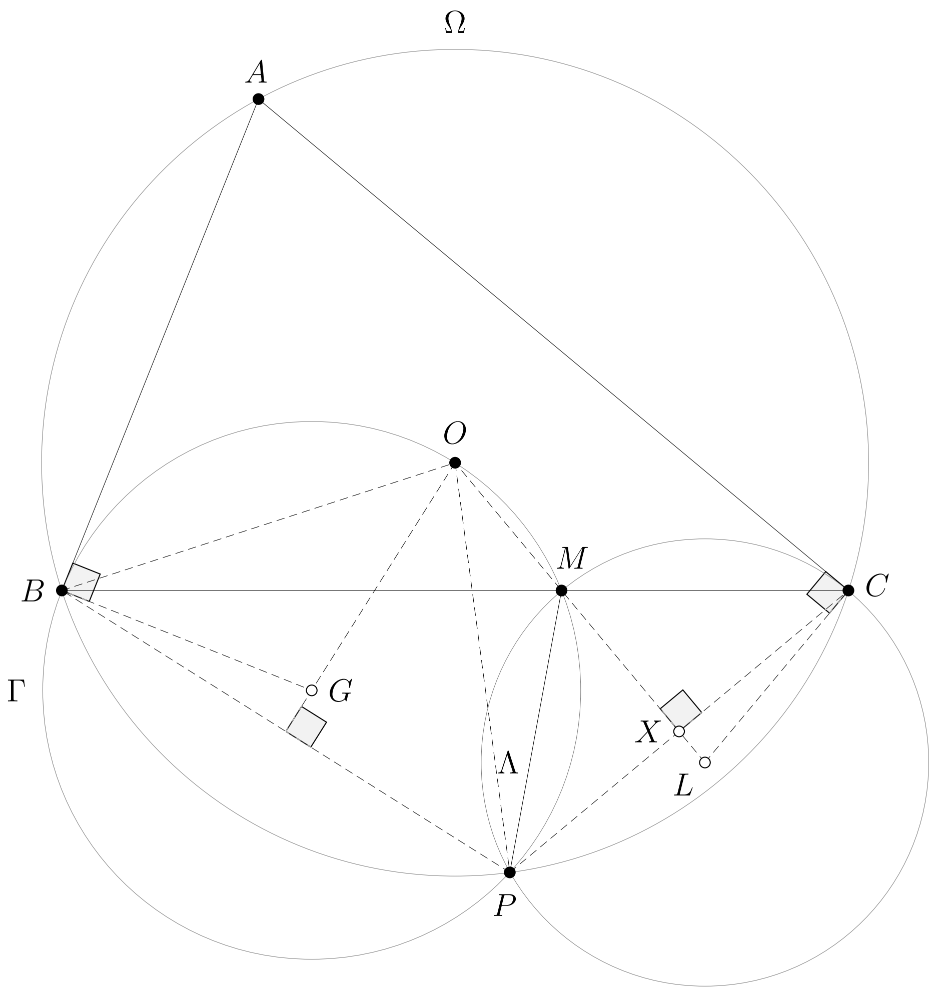
<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Cet exercice relativement abordable a été très bien résolu dans l'ensemble. Notons néanmoins deux écueils dans lesquels de trop nombreux élèves sont tombés :

1. l'énoncé faisait mention de **réels** u et v, donc on ne peut surtout pas supposer que u et v sont entiers ; en particulier, ce n'est pas parce que $v < 45$ que $v \leqslant 44$;
2. manipuler directement les fractions $\frac{1}{45}$ et $\frac{2024}{45}$ est **beaucoup mieux** que passer par des développements décimaux infinis (et souvent incorrects) de ces deux fractions.

Exercice 2. Soit ABC un triangle, Ω son cercle circonscrit, et O le centre de Ω. Soit Γ le cercle passant par B et O, et tangent à (AB) en B ; il recoupe Ω en un point P autre que B. Enfin, soit Λ le cercle passant par C et P, et tangent à (AC) en C ; il recoupe Γ en un point M autre que P.

Démontrer que $MC = MP$.

Solution de l'exercice 2



Pour tracer la figure, il nous faut commencer par identifier le centre G du cercle Γ comme le point d'intersection entre la perpendiculaire à (AB) passant par B et la médiatrice du segment $[BO]$. De même, tracer Λ requiert d'en identifier le centre L comme le point d'intersection entre la perpendiculaire à (AC) passant par C et la médiatrice du segment $[CP]$.

La figure ainsi obtenue indique visiblement que les points B, M et C semblent être alignés. On s'empresse donc effectivement de vérifier que

$$\begin{aligned}
\widehat{BMC} &= \widehat{BMP} + \widehat{PMC} \\
&= (180° - \widehat{PBA}) + (180° - \widehat{ACP}) \\
&= (\widehat{BAP} + \widehat{APB}) + (\widehat{CPA} + \widehat{PAC}) \\
&= \widehat{CPB} + \widehat{BAC} \\
&= 180°.
\end{aligned}$$

Il s'agit ensuite de montrer que (OM) est la médiatrice de $[PC]$, c'est-à-dire qu'elle est perpendiculaire à (PC). Ainsi, si l'on note X le point d'intersection entre (OM) et (PC), on vérifie comme prévu que

$$\begin{aligned}
\widehat{MXC} &= 180^\circ - \widehat{XCM} - \widehat{CMX} \\
&= 180^\circ - \widehat{PCB} - \widehat{BMO} \\
&= 180^\circ - \widehat{GOB} - \widehat{ABO} \\
&= 180^\circ - \widehat{OBG} - (\widehat{ABG} - \widehat{OBG}) \\
&= 90^\circ.
\end{aligned}$$

<u>*Solution alternative n°1*</u> Une fois acquis l'alignement des points B, C et M, et sans nécessiter d'introduire le point X, on peut aussi vérifier directement que

$$\begin{aligned}
\widehat{MPC} &= 180^\circ - \widehat{PCM} - \widehat{CMP} \\
&\widehat{PMB} - \widehat{PCM} \\
&= \widehat{POB} - \widehat{PCM} \\
&= 2\widehat{PCB} - \widehat{PCM} \\
&= \widehat{PCM},
\end{aligned}$$

ce qui signifie comme souhaité que PCM est isocèle en M.

Remarque : Le fait que M appartienne à la droite (BC) ne dépend pas du fait que Γ passe par O : il s'agit en fait d'une simple conséquence de la réciproque d'un cas limite du théorème de Miquel. Le théorème de Miquel indique que, lorsque D, E et F sont des points de (CA), (AB) et (BC), les cercles circonscrits à ADE, BEF et CFD ont un point commun, appelé *point de Miquel*. Réciproquement, si D et E sont deux points de (CA) et (AB), et si ces trois cercles ont toujours un point commun, alors F est sur (BC). C'est ici le résultat que l'on a utilisé lorsque $D = C$, $E = B$, $F = M$ et P est le point de Miquel.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Cet exercice a été très peu résolu. Le point crucial était de remarquer que le point M se trouvait sur la droite (BC), ce qu'une chasse aux angles permettait de démontrer. Bon nombre d'élèves ont utilisé à un moment donné ce fait-là sans s'en rendre compte.

On déplore également que beaucoup d'élèves n'aient pas utilisé toutes les hypothèses de l'énoncé : il est très peu probable que la résolution d'un exercice ne nécessite pas toutes les hypothèses de l'énoncé. Certains ont ainsi cherché à montrer que le triangle PMC était isocèle sans faire intervenir aucun autre points de la figure, en d'autres mots ils ont démontré que tous les triangles sont isocèles !

La plupart des élèves pensent à utiliser les théorèmes de type angle au centre et angles inscrits ; cependant, beaucoup semblent oublier (ou ne pas connaître) le théorème de l'angle tangentiel, qui est un indispensable pour étudier les droites tangentes.

Par ailleurs, bien que nous n'enlevions pas de points directement, il est très fortement conseillé de rendre avec sa copie une figure propre. Cela permet par exemple au correcteur d'accorder des points pour des raisonnements où l'élève s'est emmêlé les pinceaux sur les noms des points mais où l'on comprend que le raisonnement est le bon avec le schéma.

Exercice 3. Étant donné un entier $n \geqslant 2$ fixé, Morgane souhaite disposer n jetons mauves sur les cases d'une grille à n lignes et n colonnes de sorte que chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un jeton mauve chacune. Bosphore souhaite ensuite placer k jetons bleus sur les cases restantes de sorte que, lorsque deux jetons bleus sont sur une même ligne ou une même colonne, il y ait un jeton mauve entre les deux.

Déterminer, en fonction de n, la plus grande valeur de k pour laquelle Bosphore pourra exaucer son souhait quelle que soit la disposition qu'aura choisie Morgane.

Solution de l'exercice 3 On démontre tout d'abord que $k \leqslant 2n-2$. En effet, Bosphore peut placer au plus deux jetons bleus par ligne, de part et d'autre du jeton mauve qu'aura placé Morgane sur cette ligne. En outre, sur les deux lignes occupées par un jeton situé en colonne 1 ou n, Bosphore ne pourra en fait placer qu'un seul jeton bleu. En tout, il ne pourra donc pas dépasser les $2(n-2)+2 = 2n-2$ jetons bleus.

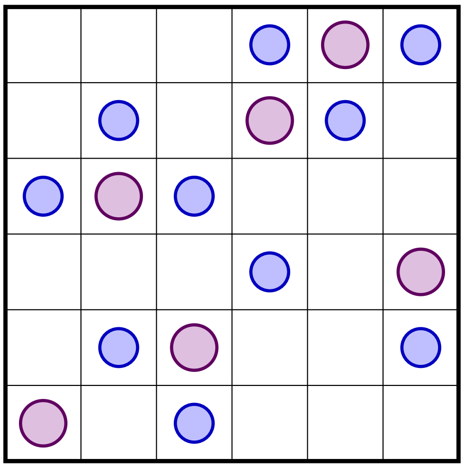
Réciproquement, on démontre par récurrence sur n que Bophore dispose d'une stratégie lui permettant de placer $2n-2$ jetons. Si $n=1$, il n'a rien à faire. Sinon, il numérote les lignes et les colonnes de 1 à n, en partant du haut et de la gauche, puis il note c_i la colonne occupée par le jeton mauve situé en ligne i, et ℓ_i la ligne occupée par le jeton mauve situé en colonne i. Ensuite :

- Si $\ell_n = n$, Bosphore élimine les ligne et colonne n. Il utilise alors l'hypothèse de récurrence pour placer $2n-4$ jetons bleus sur les lignes et colonnes 1 à $n-1$. Enfin, il place deux jetons bleus aux cases de coordonnées (c_{n-1}, n) et (n, ℓ_{n-1}).

  On vérifie alors aisément qu'aucun de ces jetons ne pose de problème. Par exemple, le jeton bleu placé en (c_{n-1}, n) est le seul en ligne n, et sur la colonne c_{n-1}, il est coincé entre un jeton mauve et le bord de la grille. De même, le jeton bleu placé en (n, ℓ_{n-1}) ne pause pas de problème.
- Si $2 \leqslant \ell_n < \ell_{n-1}$, il élimine les ligne ℓ_n et colonne n, puis utilise l'hypothèse de récurrence pour placer $2n-4$ jetons bleus sur les lignes et colonnes restantes. Le jeton bleu situé le plus à droite dans la ligne $\ell_n - 1$ se trouve sur l'une des colonnes 1 à $n-1$, et Bosphore déplace ce jeton sur la ligne ℓ_n, sans le changer de colonne. Il place ensuite deux jetons bleus aux cases de coordonnées $(n, \ell_n - 1)$ et (n, ℓ_{n-1}).

  On vérifie là encore qu'aucun jeton ainsi placé ou déplacé ne pose de problème. Ainsi, le jeton que Bosphore a déplacé d'une case, de la ligne $\ell_n - 1$ à la ligne ℓ_n ne pose toujours aucun problème sur sa colonne, et il est le seul jeton posé en ligne ℓ_n. Ensuite, les jetons placés en $(n, \ell_n - 1)$ et (n, ℓ_{n-1}) ne posent aucun problème pour la colonne n ; le premier ne pose pas de problème non plus pour la ligne $\ell_n - 1$ (car on vient justement de déplacer le jeton qui était le plus à droite sur cette ligne), et le second, sur la ligne ℓ_n, est coincé entre un jeton mauve et le bord de la grille.
- Si $\ell_n = 1$, ou si $\ell_{n-1} < \ell_n \leqslant n-1$, Bosphore décide d'échanger le haut et le bas, et il procède comme précédemment.

Voici un exemple de grille obtenue en appliquant une telle stratégie.



On vérifie aisément que cette manière de procéder lui assure de respecter les règles du jeu, et on en conclut que $k = 2n - 2$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Le problème n'a été trouvé par aucun élève. Il est dommage de voir que certains ne savent pas comment prouver qu'une quantité est un maximum. Pour prouver qu'un entier k est le maximum des entiers vérifiant une propriété, il faut montrer que ce k vérifie la propriété, et que les entiers plus grands ne la vérifient pas. Il y a donc **deux parties distinctes de raisonnement à effectuer** : une partie où l'on vérifie que k convient, et une partie où l'on montre que les valeurs plus grandes ne conviennent pas.

Ici, il fallait donc montrer que Bosphore pouvait placer $2n - 2$ jetons **peu importe le placement des jetons de Morgane** (première partie) et que Morgane pouvait placer ses jetons de sorte à ce que Bosphore ne puisse placer strictement plus que $2n-2$ jetons (seconde partie). Il s'avère que la première partie était difficile et n'a été trouvée par personne, et que la seconde partie a été plus ou moins bien trouvée.

Voici les différents types de copies que nous avons eues :

- Certains élèves ont trouvé une mauvaise valeur pour le maximum. Il est dommage de ne pas avoir regardé les cas $n = 2$ et 3 : au brouillon il est facile de tester toutes les possibilités pour Morgane, et de voir que la formule donnée pour le maximum ne convient pas pour ces valeurs.
- Certains élèves n'ont donné que des exemples, que ce soit pour le placement des jetons de Morgane ou de Bosphore. Rappelons encore une fois que des exemples ne constituent pas une preuve, et ne rapportent généralement aucun point. Faire des exemples est important pour se forger une intuition, mais ne constitue pas une preuve. Autant illustrer une preuve avec des exemples est évidemment bienvenu, autant dessiner trois exemples et écrire « donc $k = 2n - 2$ est la valeur maximale » est problématique.
- Certains élèves n'ont fait qu'une seule étape pour montrer que le maximum valait $2n-2$. En faisant cela, ils n'ont montré aucune des deux parties, puisque souvent ils ont donné un protocole à Bosphore pour placer ses jetons, n'ont pas réussi à prouver que cela fonctionnait, et ont dit que comme leur protocole ne pouvait pas placer plus de $2n - 2$ jetons, alors on ne pouvait pas placer plus de $2n - 2$ jetons. Cela ne traite pas toutes les possibilités pour Bosphore : celui-ci pourrait placer plus de $2n - 2$ jetons en les plaçant différemment.
- Certains élèves ont essayé de montrer que $k \leqslant 2n - 2$ en donnant une stratégie à Bosphore. Pour les mêmes raisons que dans le second point, c'était faux.
- Certains élèves ont bien réussi à prouver $k \leqslant 2n - 2$, mais en ont conclu $k = 2n - 2$ car ils n'ont pas compris ce qu'ils ont réellement prouvé, ou ont essayé d'arnaquer

le correcteur. Il est important de bien réfléchir à ce que chaque argument prouve ou ne prouve pas : un argument qui dit qu'il y a au plus 2 jetons par ligne ne dit pas qu'on peut poser 2 jetons par lignes. Et si c'est de la malhonnêteté, c'est une très mauvaise idée : dans tout concours mathématique, un correcteur qu'on tente d'arnaquer plusieurs fois sera évidemment moins enclin à donner des points en cas de litige dans le futur. Ce n'est pas un drame de ne pas réussir à ne pas prouver une partie de l'énoncé, mais il faut être honnête sur cela, pour éviter de se retrouver à perdre des points ultérieurement qu'on aurait pu gagner en étant honnête. Ici, il n'était pas du tout évident qu'on pouvait à chaque fois poser deux jetons par ligne (sauf les lignes où le jeton posé par Morgane était au bord) sans qu'il n'y ait deux jetons sur le même colonne sans jeton mauve entre eux.

▷ Certains élèves ont bien réussi à prouver que $k \leqslant 2n - 2$, et ont ensuite donné un algorithme sans preuve pour Bosphore. Malheureusement, sur ce problème, il était extrêmement ardu de faire fonctionner un algorithme (sauf en utilisant la récurrence du corrigé).

▷ Certains élèves ont bien réussi à prouver que $k \leqslant 2n - 2$ et ont tenté de faire une récurrence en passant d'un carré de côté $n + 1$ à un carré de côté n. Cependant, ceux-ci n'ont pas trouvé le bon carré de côté n auquel appliquer la récurrence. Et certains concluent sans même vérifier que le carré en question vérifie l'hypothèse de récurrence : c'est dommage. En effet, enlever la dernière ligne et la dernière colonne donne un carré qui ne vérifie pas l'énoncé dans la majorité des cas, car il peut y avoir un jeton sur la dernière colonne et un autre sur la dernière ligne.

Exercice 4. Trouver tous les nombres premiers p tels que $\frac{p+1}{2}$ soit lui aussi un nombre premier et qu'il existe au moins trois entiers n strictement positifs tels que $p+n^2$ divise p^2+n.

Solution de l'exercice 4 Tout d'abord, on vérifie que $p = 5$ est solution, car $(p + 1)/2 = 3$ est premier et les nombres

$$\frac{5^2+2}{5+2^2} = \frac{27}{9} = 3, \frac{5^2+3}{5+3^2} = \frac{28}{14} = 2 \text{ et } \frac{5^2+5}{5+5^2} = \frac{30}{30} = 1$$

sont entiers, ce qui signifie que les entiers $n = 2$, 3 et 5 conviennent.
Réciproquement, soit p et q deux nombres premiers tels que $p = 2q - 1$, et soit n un éventuel entier strictement positif tel que $p + n^2$ divise $p^2 + n$.
On observe tout d'abord que $p + n^2 \leqslant p^2 + n$, c'est-à-dire que $n(n - 1) \leqslant p(p - 1)$, ou encore que $n \leqslant p$. En outre, puisque

$$p^4 \equiv (p^2)^2 \equiv (-n)^2 \equiv n^2 \equiv -p \pmod{p+n^2},$$

on sait que $p + n^2$ divise $p^4 + p = p(p + 1)(p^2 - p + 1) = 2pq(p^2 - p + 1)$.
On s'intéresse donc à la divisibilité de $p + n^2$ par p et par q :

- ▷ Si p divise $p + n^2$, c'est que p divise n, et donc que $n = p$.
- ▷ Si q divise $p + n^2$, c'est que $0 \equiv p^2 + n \equiv n + 1 \pmod{q}$, et donc que $n = p$ ou $n = q - 1$. On a déjà traité le cas $n = p$, et le cas $n = q-1$ signifie que $p+n^2 = (2q-1)+(q-1)^2 = q^2$ divise $p^2+n = (2q-1)^2+(q-1) = 4q^2-3q$, c'est-à-dire que q divise 3, et donc que $p = 5$.
- ▷ Sinon, $p + n^2$ est premier avec pq. Il divise donc $2(p^2 - p + 1)$, et divise même

  $$2(p^2 + n) - 2(p^2 - p + 1) = 2(p + n - 1).$$

  Comme $2(p+n^2) > 2(p+n-1)$, on en déduit donc que $p+n^2 = 2(p+n-1)$, c'est-à-dire que $0 = n^2-2n-p+2 = (n-1)^2-(p-1)$, ou encore que $n = 1\pm\sqrt{p-1}$: puisque $n \geqslant 1$, c'est donc que $n = 1 + \sqrt{p-1}$.

Ainsi, lorsque $p \neq 5$, au plus deux valeurs de n satisfont la relation de divisibilité recherchée. La seule solution du problème est donc $p = 5$.

Commentaire des correcteurs L'exercice était très difficile, et n'a été résolu entièrement que par très peu d'élèves, la plupart ayant bloqué dès la première étape qui nécessitait de trouver une combinaison linéaire astucieuse avec laquelle on pouvait ensuite travailler. Cependant, certaines remarques préliminaires, comme constater que $n \leqslant p$, étaient à la portée de tout le monde, mais n'ont été écrites que par une minorité.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ et r des entiers naturels strictement positifs tels que les $n+1$ produits

$$\begin{aligned} p_0 &= a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ p_1 &= b_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ p_2 &= b_1 \times b_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ &\vdots \\ p_n &= b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_n \end{aligned}$$

satisfassent les égalités $p_1 - p_0 = p_2 - p_1 = \ldots = p_n - p_{n-1} = r$; autrement dit, $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison $r \geqslant 1$.

Trouver, en fonction de n, la plus petite valeur de r possible.

Solution de l'exercice 5 Pour tout k, on note δ_k la différence $b_k - a_k$. Nous allons maintenant démontrer que $a_k > (k-1)\delta_k$ pour tout $k \geqslant 1$.

Le résultat étant immédiat pour $k = 1$, on suppose désormais que $k \geqslant 2$ et que $a_\ell > (\ell - 1)\delta_\ell$ pour tout $\ell \leqslant k-1$. Dans ces conditions, l'égalité $p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$ se réécrit comme $a_k \delta_{k-1} = b_{k-1}\delta_k$, et cette dernière indique justement que

$$a_k \delta_{k-1} = (a_{k-1} + \delta_{k-1})\delta_k > (k-1)\delta_{k-1}\delta_k,$$

ce qui signifie comme souhaité que $a_k > (k-1)\delta_k$.

On en déduit en particulier que $a_k > k-1$, c'est-à-dire que $a_k \geqslant k$, et donc que

$$r = p_2 - p_1 = a_2 a_3 \cdots a_n \delta_1 \geqslant n!\delta_1 \geqslant n!.$$

Réciproquement, si l'on pose $a_k = k$ et $b_k = k+1$ pour tout k, on constate bien que

$$p_k = (2 \times 3 \times \cdots \times k) \times (k \times (k+1) \times \cdots \times n) = k \times n!$$

est le $k^{\text{ème}}$ terme de la suite arithmétique de raison $n!$ et de premier terme $n!$.

En conclusion, la valeur recherchée est $n!$.

Solution alternative n°1 Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on constate que

$$r = p_k - p_{k-1} = p_k \delta_k / b_k,$$

de sorte que $b_k r = p_k \delta_k \geqslant p_k \geqslant p_0 + kr > kr$, et donc que $b_k \geqslant k+1$. On en conclut que

$$r \geqslant p_k / b_k = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \geqslant n!.$$

Solution alternative n°2 Ci-dessous, on pose $p_{k,\ell} = b_1 b_2 \cdots b_k a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_\ell$. L'entier ℓ étant fixé, la suite $p_{0,\ell}, p_{1,\ell}, \ldots, p_{\ell,\ell}$ est arithmétique, et on note $r_\ell = p_{k+1,\ell} - p_{k,\ell}$ sa raison.

Démontrons maintenant par récurrence sur ℓ la propriété $\mathcal{P}(\ell)$ selon laquelle $p_{0,\ell} \geqslant \ell!$ et $r_\ell \geqslant \ell!$. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est manifestement valide. Étant donné un entier $\ell \geqslant 1$ pour lequel $\mathcal{P}(\ell)$ est vraie, on entreprend donc de démontrer $\mathcal{P}(\ell+1)$.

En effet, dans ce cas, $b_1 b_2 \cdots b_\ell = p_{\ell,\ell} = p_{0,\ell} + \ell r_\ell \geqslant \ell! + \ell \times \ell! = (\ell + 1)!$. En outre, $b_1 b_2 \cdots b_\ell$ divise $p_{\ell,\ell+1}$ et $p_{\ell+1,\ell+1}$, donc divise aussi le premier terme et la raison de la suite $p_{0,\ell+1}, p_{1,\ell+1}, \ldots, p_{\ell+1,\ell+1}$, c'est-à-dire $p_{0,\ell+1}$ et $r_{\ell+1}$.

Puisque $p_{0,\ell+1}$ et $r_{\ell+1}$ sont non nuls, on en conclut que $p_{0,\ell+1}$ et $r_{\ell+1}$ valent au moins $b_1 b_2 \cdots b_\ell$, donc au moins $(\ell + 1)!$. Ainsi, $\mathcal{P}(\ell + 1)$ est vraie, ce qui conclut la récurrence.

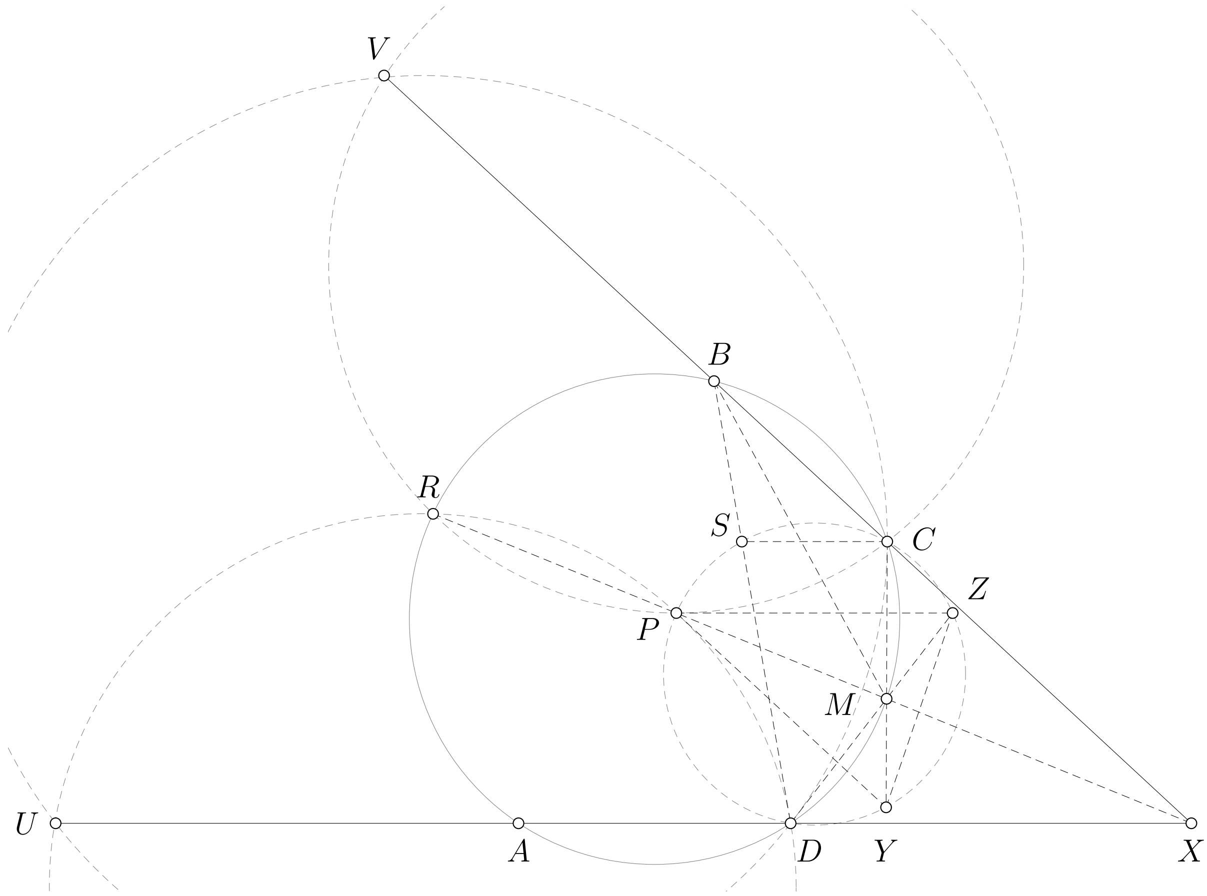
Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc $r = r_n$ vaut au moins $n!$.

Commentaire des correcteurs Le problème est bien réussi : une trentaine d'élèves ont une solution complète. Ce problème admettait des solutions très diverses : certaines faisaient appel à beaucoup d'arithmétique, d'autres étaient purement algébriques. Cependant, quelques écueils sont à déplorer :

- ▷ Certains élèves n'ont pas réussi à se forger une intuition de la borne. Dans ce cas, il faut tester les petits cas : $n = 2, 3, 4$ pour essayer d'avoir une idée. Ici, la construction n'était pas très difficile à trouver.
- ▷ Il est déplorable que des élèves disent que prendre $a_i = i$ et $b_i = i + 1$ pour tout i donne une suite de raison $n!$ sans aucun calcul le justifiant. L'exercice est court, il est indispensable de vérifier explicitement cela, surtout quand ça ne prend que quelques lignes. Même si ceci n'a pas été pénalisé ici, en compétition il est plausible que cela le soit, et il serait regrettable de perdre un point sur une telle chose.
- ▷ Beaucoup d'affirmations complètement fausses sont écrites, avec pour seul objectif que cela vise à minimiser r. Par exemple, comme $r = a_1 \ldots a_i (b_{i+1} - a_{i+1}) b_{i+2} \ldots b_n$, certains affirment que $b_{i+1} = a_{i+1} + 1$. Cela n'a aucune raison d'être vrai : imposer $b_i = a_i + 1$ pour tout i contraint énormément la suite, et il pourrait y avoir des suites avec des $b_i - a_i$ plus grands, mais avec des a_i plus petits. Il est dommage de voir beaucoup d'élèves tomber dans ce travers pourtant connu.

Exercice 6. Soit $ABCD$ quatre points cocycliques dans cet ordre, tels que $\widehat{BAD} < \widehat{ADC}$. Soit M le milieu de l'arc de cercle $\widehat{CD}$ ne contenant pas A. On suppose qu'il existe un point P, situé à l'intérieur de $ABCD$, tel que $\widehat{ADB} = \widehat{CPD}$ et $\widehat{ADP} = \widehat{PCB}$.
Démontrer que les droites (AD), (BC) et (MP) sont concourantes.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>



La deuxième condition angulaire n'aidant pas directement à placer P, on note X le point d'intersection de (AD) et (BC), S le point d'intersection de (BD) et de la parallèle à (AD) passant par C, et P' le point d'intersection de (MX) avec le cercle circonscrit à CDS situé à l'intérieur de $ABCD$. Par construction, $\widehat{CP'D} = \widehat{CSD} = \widehat{ADB}$, et il s'agit donc de prouver que $P = P'$.

Posons $\alpha = \widehat{DBA}$, $\beta = \widehat{BAC}$, $\gamma = \widehat{CAM} = \widehat{MAD}$, $x = \widehat{ADB} = \widehat{CPD}$ et $y = \widehat{ADP} = \widehat{PCB}$. Une première chasse aux angles indique que

$$\begin{aligned}180^\circ &= \widehat{CPD} + \widehat{PDC} + \widehat{DCP} = x + (\widehat{ADC} - y) + (\widehat{DCB} - y) \\ &= (180^\circ - \alpha - \beta - 2\gamma) + (180^\circ - \alpha - 2\gamma - y) + (180^\circ - \beta - 2\gamma - y),\end{aligned}$$

de sorte que $x = 180^\circ - (\alpha + \beta + 2\gamma)$ et $y = 180^\circ - (\alpha + \beta + 3\gamma)$.

En particulier, $\widehat{PDC} = \widehat{ADC} - \widehat{ADP} = (180^\circ - \alpha - 2\gamma) - y = \beta + \gamma$ et $\widehat{DCP} = \alpha + \gamma$. La loi des sinus dans le triangle CDP indique alors que

$$\frac{CP}{DP} = \frac{\sin(\widehat{CDP})}{\sin(\widehat{DCP})} = \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{\sin(\widehat{MCB})}{\sin(\widehat{ADM})} = \frac{\sin(\widehat{XCM})}{\sin(\widehat{MDX})}.$$

Puisque $MC = MD$, la loi des sinus, appliquée aux triangles DXM et CXM, indique aussi que

$$\frac{\sin(\widehat{XDM})}{\sin(\widehat{MXD})} = \frac{MD}{MX} = \frac{MC}{MX} = \frac{\sin(\widehat{MCX})}{\sin(\widehat{CXM})}.$$

De même, appliquée aux triangles DXP et CXP, elle indique que

$$\frac{\sin(\widehat{XDP})}{\sin(\widehat{PXD})} = \frac{PD}{PX} \text{ et } \frac{PC}{PX} = \frac{\sin(\widehat{PCX})}{\sin(\widehat{CXP})}.$$

On en conclut que

$$\frac{\sin(\widehat{PXD})}{\sin(\widehat{CXP})} = \frac{PC}{PD}\frac{\sin(\widehat{XDP})}{\sin(\widehat{PCX})} = \frac{\sin(\widehat{XCM})}{\sin(\widehat{MDX})}\frac{\sin(\widehat{XDP})}{\sin(\widehat{PCX})} = \frac{\sin(\widehat{MXC})}{\sin(\widehat{MXD})}\frac{\sin(y)}{\sin(y)} = \frac{\sin(\widehat{MXC})}{\sin(\widehat{MXD})},$$

c'est-à-dire, si l'on note Q le point d'intersection de $[PX]$ avec l'arc de cercle $\widehat{CD}$, que $\sin(\widehat{QXD})\sin(\widehat{MXD}) = \sin(\widehat{MXC})\sin(\widehat{QXC})$. Or, à mesure que Q se déplace de C vers D le long de l'arc $\widehat{CD}$, le produit $\sin(\widehat{QXD})\sin(\widehat{MXD})$ diminue, tandis que $\sin(\widehat{MXC})\sin(\widehat{QXC})$ augmente. Ces deux produit étant égaux lorsque $Q = M$, on en déduit comme souhaité que $Q = M$.

Solution alternative n°1 Réutilisons les notations précédentes. En outre, notons Y et Z les points en lesquels les droites (CM) et (DM) recoupent le cercle circonscrit à PCD. Puisque CDM est isocèle en M, les angles $\widehat{ZDC}$ et $\widehat{YCD}$ sont égaux, et $CDYZ$ est circonscriptible : la médiatrice de $[CD]$ en est donc un axe de symétrie, et (CD) est parallèle à (YZ).

Par ailleurs, en angles de droites, on démontre comme précédemment que

$$(DP, DA) = (DB, DA) + (AM, AD).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(BC, PZ) &= (BC, PC) + (PC, PD) + (PD, PZ)\\ &= (DP, DA) + (DA, DB) + (CD, CZ)\\ &= (DB, DA) + (AM, AD) + (DA, DB) + (CD, CM)\\ &= 0^\circ,\end{aligned}$$

ce qui signifie que (BC) et (PZ) sont parallèles. De même, (AD) et (PY) sont parallèles.

Les triangles CDX et ZYP sont donc homothétiques, et les drois droites (CZ), (DY) et (PX) sont concourantes, en le point M.

Solution alternative n°2 Cette fois-ci, on note U le point d'intersection des droites (AD) et (CP), V le point d'intersection des droites (BC) et (PD), et R le point en lequel (PM) recoupe le cercle circonscrit à $ABCD$. Puisque

$$(UC, UD) - (VC, VD) = (PC, AD) - (BC, PD) = (PC, BC) + (PD, AD) = 0^\circ,$$

les points C, D, U et V sont cocycliques.

Comme précédemment, $(DP, DA) = (DB, DA) + (AM, AD)$, de sorte que

$$\begin{aligned}(UP, UD) &= (CP, AD) = (CP, DP) + (DP, DA) \\ &= (DA, DB) + (DB, DA) + (AM, AD) \\ &= (BM, BD) = (RM, RD) = (RP, RD),\end{aligned}$$

de sorte que D, P, R et U sont cocycliques. De même, C, P, R et V sont cocycliques.

La concourrance demandée est celle des axes radicaux des cercles circonscrits aux quadrilatères $CDUV$, $DPRU$ et $CPRV$.

Commentaire des correcteurs Exercice très difficile, résolu par peu d'élèves dans son intégralité. Nous pouvons saluer la qualité des quelques copies complètes. Comme il y avait au moins quatre schémas de preuve assez différents, nous avons valorisé autant que possible les éléments qui pouvaient se rattacher à l'un ou l'autre.

Il est cependant dommage de trouver des conclusions manifestement fausses, qui devraient immédiatement alerter leur auteur, telles que « la figure est symétrique » ou « le point P ne peut pas exister ». Trop de solutions, très prometteuses au début, échouent sur une erreur de raisonnement géométrique (supposer trois points alignés pour montrer qu'ils le sont, confondre médiatrice et bissectrice, utiliser à mauvais escient des quadrilatères semblables...), et on ne peut qu'être étonné de la créativité dans certaines affirmations (non justifiées). S'il est utile de savoir puiser dans son stock de résultats connus, il est plus important encore de s'abstenir d'en inventer des faux en prenant ses désirs pour des réalités. Un peu de rigueur et de prudence rapportent plus de points qu'un coup de bluff.

Exercice 7. Elsa dispose de 2024 coffrets dans lesquels elle souhaite entreposer ses bijoux. Chacun de ces coffrets dispose d'une serrure, qui permet de le fermer à clé. Initialement, chaque coffret est ouvert et vide. Puis, chaque jour, Elsa choisit un coffret ouvert et y dépose un bijou ; la nuit suivante, la bonne fée sa marraine effectue une des deux actions suivantes :

- ▷ si 2023 des 2024 coffrets sont fermés à clé, elle les ouvre tous ;
- ▷ sinon, elle choisit un des coffrets encore ouverts et le ferme à clé.

Elsa et sa marraine agissent ainsi pendant n jours.

Démontrer qu'il existe un entier B tel que, quelle que soit la valeur de n et quels que soient les choix de sa marraine, Elsa peut toujours faire en sorte que nul coffret ne contienne B bijoux de plus qu'un autre à quelque moment que ce soit.

Solution de l'exercice 7 Soit $k = 2024$ le nombre de coffrets dont dispose Elsa. Une stratégie valide pour Elsa consiste, chaque jour, à choisir le coffret qui contient le moins de bijoux ; si elle a le choix entre plusieurs coffrets, elle en choisit un au hasard.

Dans la suite, pour tout entier $\ell \geqslant 0$, on note $\mathcal{C}_i^\ell$ le $i^{\text{ème}}$ coffret le plus rempli après ℓ jours et nuits, (en cas d'égalité, on numérote les coffrets *ex æquo* de manière arbitraire), et c_i^ℓ le nombre de bijoux qu'il contient à ce moment-là. On note également $\ell\,[k]$ le reste de la division euclidienne de ℓ par k. Enfin, on pose $s_i^\ell = c_1^\ell + c_2^\ell + \cdots + c_i^\ell$ et

$$t_i^\ell = i(k-i)/2 + i\lfloor \ell/k \rfloor + \max\{0, \ell\,[k] - (k-i)\}.$$

Nous allons démontrer par récurrence, pour tout entier $\ell \geqslant 0$ la propriété $\mathcal{P}_\ell$ selon laquelle $s_k^\ell = \ell = t_k^\ell$ et $s_i^\ell \leqslant t_i^\ell$ pour tout entier $i \leqslant k$.

Puisque tous les coffrets sont initialement vides, $\mathcal{P}_0$ est valide. Ensuite, dès que l'on dispose d'un entier $\ell \geqslant 0$ pour lequel $\mathcal{P}_\ell$ est valide, on entreprend de démontrer $\mathcal{P}_{\ell+1}$ Tout d'abord, $s_k^{\ell+1} = s_k^\ell + 1 = \ell + 1$ et $t_k^{\ell+1} = k\lfloor (\ell+1)/k \rfloor + (\ell+1)\,[k] = \ell + 1$. Ensuite, on vérifie que $t_i^{\ell+1} - t_i^\ell$ vaut 0 quand $\ell\,[k] \leqslant k-i-1$, et 1 quand $k-i \leqslant \ell\,[k]$, y compris quand $\ell\,[k] = k-1$. De même, $t_{i-1}^\ell + t_{i+1}^\ell - 2t_i^\ell$ vaut 0 quand $\ell\,[k] = k-i$, et -1 quand $\ell\,[k] \neq k-1$. Par conséquent,

- ▷ si $\ell\,[k] \geqslant k-i$, Elsa ajoute au plus un bijou parmi les i coffrets $\mathcal{C}_1^{\ell+1}$ à $\mathcal{C}_i^{\ell+1}$, donc
$$s_i^{\ell+1} \leqslant s_i^\ell + 1 \leqslant t_i^\ell + 1 = t_i^{\ell+1};$$
- ▷ si $\ell\,[k] \leqslant k-i-1$ et $c_i^\ell > c_{i-1}^\ell$, Elsa ajoute un bijou dans un des $k-i-1$ coffrets les moins pleins, et
$$s_i^{\ell+1} = s_i^\ell \leqslant t_i^\ell \leqslant t_i^{\ell+1};$$
- ▷ si $\ell\,[k] < k-i$ et $c_i^\ell = c_{i+1}^\ell$, alors
$$s_i^{\ell+1} \leqslant s_i^\ell + 1 = (s_{i-1}^\ell + s_{i+1}^\ell)/2 + 1 \leqslant (t_{i-1}^\ell + t_{i+1}^\ell)/2 + 1 = t_i^\ell - 1/2 \leqslant t_i^{\ell+1}.$$

Ceci démontre les propriétés $\mathcal{P}_\ell$.

En particulier, à tout moment,

$$c_k^\ell = s_k^\ell - s_{k-1}^\ell \geqslant t_k^\ell - t_{k-1}^\ell \geqslant \lfloor \ell/k \rfloor - (k-1)/2 \geqslant \ell/k - (k+1)/2,$$

de sorte que $c_i^\ell - c_j^\ell \leqslant c_1^\ell - c_k^\ell \leqslant \ell - kc_k^\ell = k(k+1)/2$ pour tous les numéros de boîtes i et j. Ainsi, l'entier $\mathsf{B} = k(k+1)/2 + 1$ satisfait les contraintes de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs Cet exercice très difficile n'a été résolu par aucun élève. Il fallait dans un premier temps comprendre qu'une stratégie possible pour Elsa était de toujours mettre son bijoux dans un des coffres en contenant le moins. Cette stratégie est apparue comme très intuitive pour beaucoup d'élèves.

Malheureusement, il a semblé également évident pour beaucoup que la meilleure stratégie pour la marraine était de toujours refermer les coffres contenant le moins de bijoux. Ce n'est cependant pas une bonne manière d'aborder ce genre de problème : pour démontrer qu'un stratégie fonctionne pour Elsa, il faut donner une démonstration pour toutes les stratégies possibles de la marraine quand bien même une stratégie particulière vous semble la plus adaptée.