PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 21 ET DU 22 FÉVRIER 2024

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- Le **groupe EGMO** est constitué des élèves nées en 2008 ou avant et éligibles à l'EGMO.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 8 à 10.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

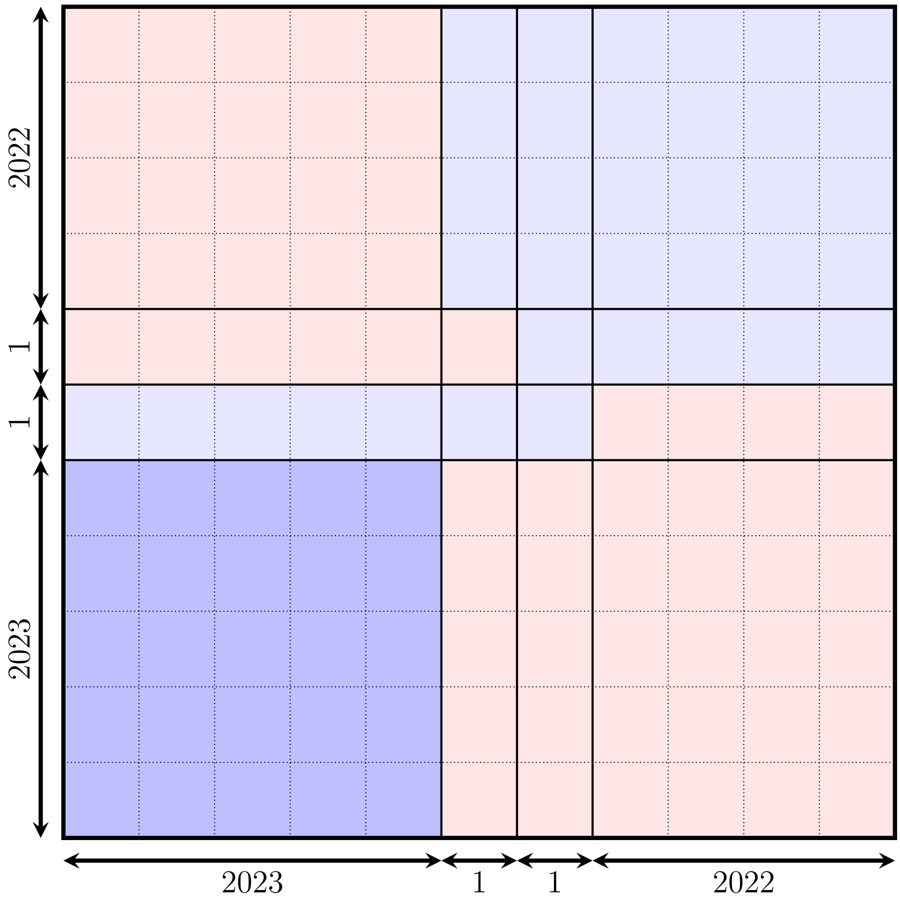
Énoncés Junior

Exercice 1. Trouver le plus grand entier k pour lequel il existe une grille à 4047 lignes et 4047 colonnes dont chacune des 4047^2 cases est coloriée en rouge ou en bleu de sorte que

- ▷ exactement 2024 colonnes contiennent une majorité de cases bleues ;
- ▷ exactement 2024 lignes contiennent une majorité de cases rouges ;
- ▷ la grille contienne un carré monochrome de côté k (c'est-à-dire dont les k^2 cases sont soit toutes rouges, soit toutes bleues).

Solution de l'exercice 1 Tout d'abord, nul entier $k \geqslant 2024$ ne satisfait la propriété désirée. En effet, s'il existe un carré monochrome de côté k, et quitte à faire une rotation de $90°$ et à échanger rouge et bleu, on le suppose bleu. Puisque $2024 + k > 4047$, ce carré contient une des 2024 lignes dont la majorité des cases est rouge ; puis, sur cette ligne, il contient une des 2024 (ou plus) cases rouges, ce qui est absurde.

Réciproquement, l'entier $k = 2023$ convient, comme illustré par le carré bleu foncé dans l'exemple ci-dessous. Par conséquent, $k = 2023$ est bien l'entier recherché.



Commentaire des correcteurs Le problème était de difficulté abordable et a été parfaitement réussi par la majorité des élèves. Un certain nombre de fautes de raisonnement restent à déplorer. Les deux principales difficultés du problème tiennent à la construction convenable pour le cas maximal $k = 2023$ (beaucoup de copies oublient une partie des conditions) et à la notion de maximum (il faut éliminer tous les $k > 2023$). Voici les remarques les plus importantes :

- ▷ Dans un tel problème, faire une figure aide beaucoup à la lisibilité de la copie et évite des erreurs de raisonnement (trop de copies sans figure).
- ▷ Il fallait montrer d'une part que le cas $k = 2023$ était atteignable, d'autre part que tous les cas $k > 2023$ ne l'étaient pas (et pas seulement le cas $k = 2024$). Beaucoup de copies ne traitent que le cas $k = 2024$ et ne mentionnent pas du tout les valeurs supérieures.
- ▷ On pouvait traiter le cas d'un carré rouge (par exemple) et se ramener au cas bleu par symétrie, mais il est nécessaire de le mentionner, sans quoi le raisonnement est incomplet (« sans perte de généralité… » ou « par symétrie des rôles » fonctionnent bien).
- ▷ Il est dommage de perdre des points parce que l'on laisse le lecteur finir le coloriage (sachant que toutes les options ne sont pas bonnes), alors qu'il aurait été possible de le finir soi-même de manière convenable.

Exercice 2. Soit a, b et c des réels tels que $a \geqslant b \geqslant 1 \geqslant c \geqslant 0$ et $a+b+c=3$. Démontrer que

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) \geqslant 4c^2+\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}.$$

Solution de l'exercice 2 Puisque les contraintes de l'énoncé et l'inégalité à démontrer font tous deux apparaître la constante 3, on se ramène à démontrer que la quantité

$$\Delta = (a+b+c)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) - 4c^2 - \frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}$$

est positive ou nulle. On réécrit donc successivement Δ comme

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{a^2}{b}+a+\frac{ac}{b}+b+\frac{b^2}{a}+\frac{bc}{a}-4c^2-\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}\\ &= 3-c+c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-4c^2.\end{aligned}$$

L'inégalité arithmético-géométrique indique alors que

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2,$$

de sorte que

$$\Delta \geqslant 3+c-4c^2 = 3(1-c^2)+c(1-c) \geqslant 0.$$

Commentaire des correcteurs L'exercice était relativement atypique, mais une vingtaine d'élèves ont trouvé une solution complète. Cependant, voici quelques erreurs récurrentes :

- Beaucoup d'élèves procèdent en développant des choses au hasard, sans même utiliser une inégalité. Il est illusoire de croire qu'on peut réussir un problème d'inégalités sans utiliser d'inégalités.
- Certains élèves font une ou plusieurs erreurs de calcul. Si celles-ci sont trop tôt dans la solution, elles empêchent les élèves d'avoir des points, car leurs calculs sont faux dès le début.
- Certains élèves essaient de prouver l'inégalité dans des cas particuliers, par exemple pour $c=1$ ou 0. Une preuve dans un cas si particulier ne peut constituer une preuve dans le cas de tout c vérifiant $0 \leq c \leq 1$, et donc souvent ne rapporte aucun point.
- Ici, remplacer 3 par $a+b+c$ était logique pour homogénéiser l'inégalité : en effet ainsi, $a^2/b+b^2/a$ et $(a+b+c)(a/b+b/a)$ ont le même degré. Cela peut faciliter les preuves en inégalités.
- Attention aux élèves qui ne maîtrisent pas bien leurs inégalités. Certains utilisent l'inégalité des mauvais élèves dans le mauvais sens, ou l'inégalité arithmético-géométrique avec des nombres négatifs, ce qui n'est pas autorisé.

Exercice 3. On dit qu'un entier n est *olympique* lorsqu'il existe des entiers x et y strictement positifs tels que $n = x^2 + 6xy + y^2$. Démontrer que 36^{2024} n'est pas olympique mais est la somme de deux entiers olympiques.

Solution de l'exercice 3 Supposons tout d'abord l'entier $n = 36^{2024}$ olympique. Soit x et y deux entiers strictement positifs tels que $n = x^2 + 6xy + y^2$. On note d leur PGCD, puis on pose $a = x/d$, $b = y/d$ et $m = a^2 + 6ab + b^2 = n/d^2$. Comme 3 divise au plus l'un des deux entiers a et b, et puisque $1^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod 3$, on sait que m n'est pas divisible par 3.

Puisque $n = 2^{4048} \times 3^{4048}$, c'est donc que m est une puissance de 2. Par ailleurs, $m \geqslant 8$, et $m = (6^{2024}/d)^2$ est un carré, donc 16 divise m. Comme $m \equiv x^2 + y^2 \equiv (x+y)^2 \pmod 2$, c'est donc que x et y sont de même parité, et sont même impairs. On pose donc $u = (x-1)/2$ et $v = (y-1)/2$, de sorte que

$$\begin{aligned} m &= (2u+1)^2 + 6(2u+1)(2v+1) + (2v+1)^2 \\ &= 4u^2 + 16u + 24uv + 16v + 4v^2 + 8 \\ &\equiv 4(u+v)^2 + 8 \pmod{16}. \end{aligned}$$

Or, les seuls carrés $\pmod 4$ sont 0 et 1. Par conséquent, $m \equiv 8$ ou $12 \pmod{16}$, en contradiction avec le fait que 16 divise m. Notre supposition initiale est donc invalide : n n'est pas olympique.

Réciproquement, on constate cependant que $8 = 1^2 + 6 \times 1^2 + 1^2$ est olympique. En reprenant à l'envers la construction précédente, on observe alors que $n/2 = x^2 + 6xy + y^2$ lorsque

$$x = y = \sqrt{n/16} = 2^{2022} \times 3^{2024},$$

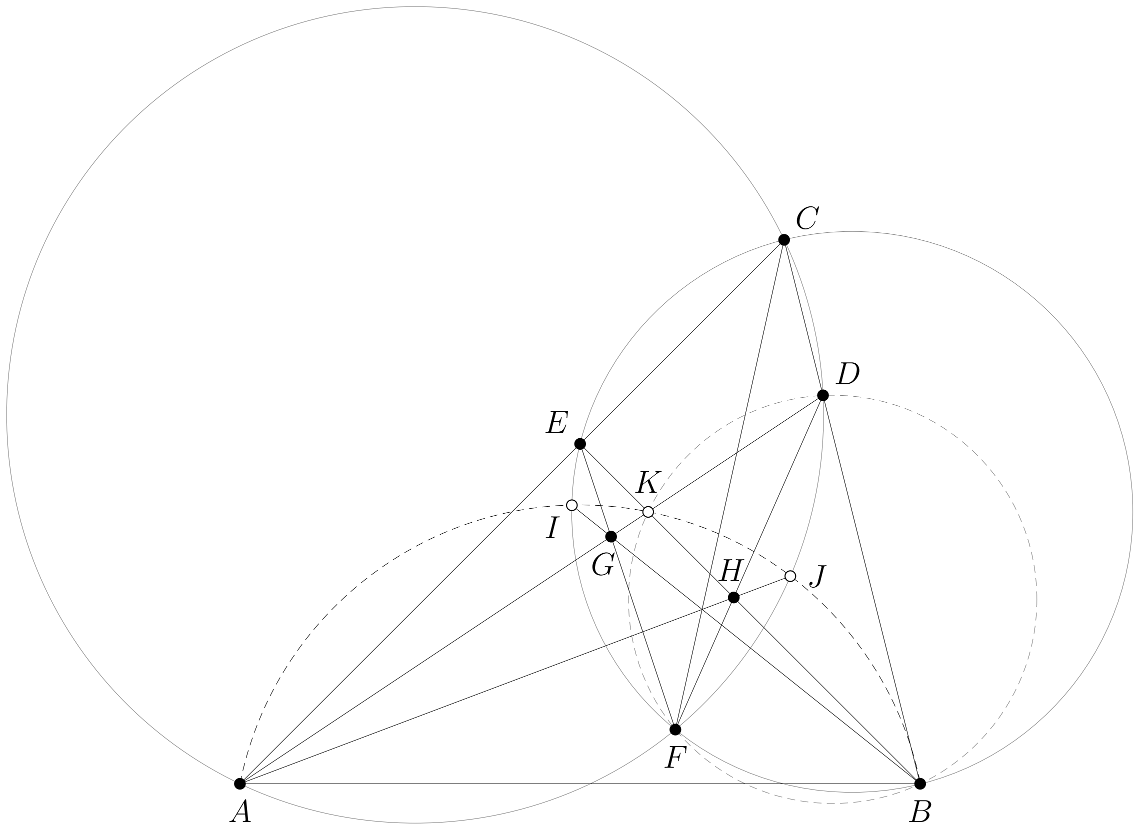
ce qui indique bien que $n/2$ est olympique, et donc que n est somme de deux entiers olympiques.

Commentaire des correcteurs L'exercice était plutôt difficile, avec seulement quelques personnes qui ont réussi à le traiter en entier. Les correcteurs saluent le réflexe que beaucoup ont eu de regarder modulo 2 et 3, ainsi que le réflexe de diviser par 3 autant de fois que possible. Il est cependant dommage qu'aussi peu d'élèves aient essayé de chercher la deuxième partie de l'exercice, pourtant sensiblement plus facile que la première.

Exercice 4. Soit ABC un triangle, D un point situé sur le segment $[BC]$, et E un point situé sur le segment $[AC]$. On note F le point d'intersection, autre que C, entre les cercles circonscrits aux triangles ACD et BCE. Soit G le point d'intersection des droites (AD) et (EF), et H le point d'intersection des droites (BE) et (DF).

Démontrer que les trois droites (AH), (BG) et (CF) sont concourantes.

Solution de l'exercice 4



Une manière usuelle de démontrer que trois droites sont concourantes consiste à démontrer qu'il s'agit des axes radicaux de trois cercles. Ici, les segments $[AH]$ et $[BG]$ ne sont des cordes d'aucun cercle visible sur la figure, mais $[CF]$ est une corde des deux cercles circonscrits à $BCEF$ et à $ACDF$. On espère donc qu'il pourra s'agir de nos deux premiers cercles, puis on note I le point d'intersection de (BG) avec le cercle circonscrit à $BCEF$, et J le point d'intersection de (AH) avec le cercle circonscrit à $ACDF$.

On s'empresse alors de vérifier visuellement que A, B, I et J semblent cocycliques : c'est bien le cas. Ce cercle semble en outre passer par le point d'intersection des droites (AD) et (BE), que l'on note K. Un objectif secondaire peut donc consister à démontrer que les points A, B, I, J et K sont cocycliques.

Par ailleurs, comme identifier des droites concourantes à des axes radicaux semble avoir été fructueux, il est tentant d'interpréter H comme un centre radical associé aux axes radicaux (AJ), (BE) ou (BK), et (DF). Or, on dispose déjà d'un cercle circonscrit à $ADFJ$, et d'un autre cercle dont on espère qu'il est circonscrit à $ABJK$. Notre troisième cercle devrait donc être circonscrit à $BDFK$, et on vérifie une fois de plus sur notre figure que ce cercle semble bien exister.

Une chasse aux angles permet de confirmer cette observation :

$$\widehat{DFB} = \widehat{CFB} - \widehat{CFD} = \widehat{CEB} - \widehat{CAD} = (180^\circ - \widehat{KEA}) - \widehat{EAK} = \widehat{AKE} = \widehat{DKB},$$

ce qui signifie que les points B, D, F et K sont bien cocycliques.

Par conséquent, $-HD \times HF$ est égale à la puissance de H par rapport aux deux cercles circonscrits à $ADFJ$ et à $BDFK$, ce qui signifie que $HB \times HK = HD \times HF = HA \times HJ$, et donc que les points A, B, I et K sont cocycliques. On démontre de même que A, B, J et K sont cocycliques, ce qui achève notre quête secondaire.

On en conclut comme souhaité que (AH), (BG) et (CF) sont les axes radicaux des cercles circonscrits à $ACDJF$, à $BCEFI$ et à $ABIJK$, et donc qu'ils sont bien concourants.

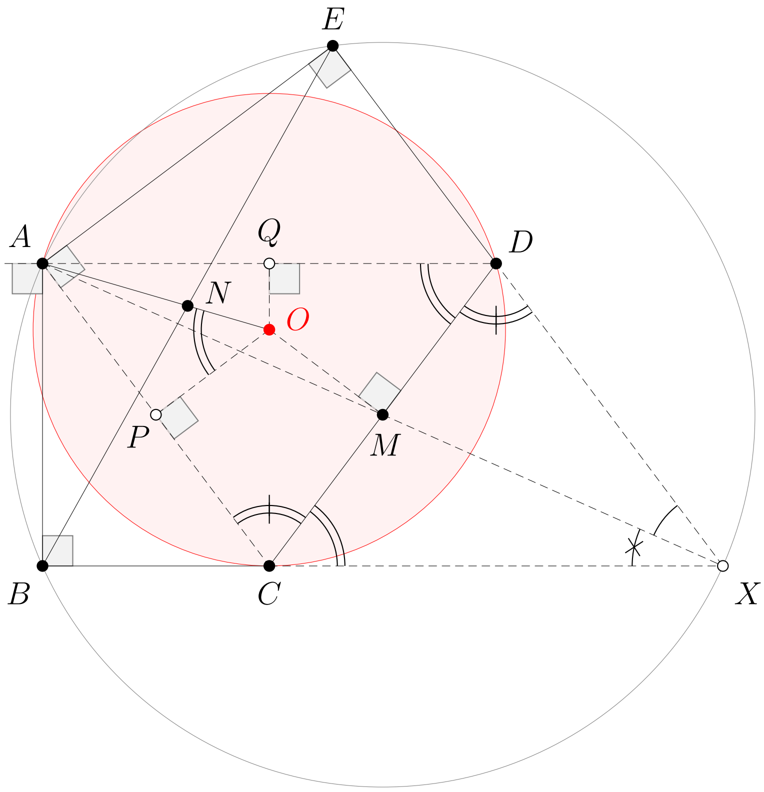
Commentaire des correcteurs Le problème, difficile, n'a été résolu par aucun élève. La première difficulté est de trouver un procédé pour montrer que les trois droites sont concourantes, notamment en les voyant comme les axes radicaux de trois paires de cercles. La deuxième difficulté est de conjecturer les cercles correspondants et de montrer leur existence avec une chasse aux angles et de nouveaux points. Plusieurs élèves ont pensé à passer par les axes radicaux, et plusieurs élèves sont parvenus à introduire de bons points et les relier au reste de l'exercice. Au vu de la difficulté du problème, de telles avancées sont admirables.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit $ABCDE$ un pentagone convexe dont les angles en B et E sont droits. On suppose que le milieu du segment $[CD]$ est le centre du cercle circonscrit à ABE. Enfin, on note O le centre du cercle circonscrit à ACD.

Démontrer que le milieu du segment $[BE]$ appartient à la droite (AO).

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>



La première chose à faire ici est de nommer les points encore anonymes que sont les milieux de $[CD]$ et $[BE]$, que l'on appellera M et N. Il faut ensuite s'intéresser au point d'intersection des droites (BC) et (DE), que l'on notera X. En effet, l'énoncé nous indique que les angles $\widehat{ABX}$ et $\widehat{XEA}$ sont droits, et donc que $[AX]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABE. Ainsi, M est le milieu des deux segments $[CD]$ et $[AX]$, et $ACXD$ est un parallélogramme.

Munis de tous ces milieux, et pour mieux caractériser le point O, on introduit également les milieux P et Q des segments $[AC]$ et $[AD]$, ce qui nous permet de disposer d'innombrables angles droits et droites parallèles.

Or, si l'on note N' le point d'intersection de (BE) et (AO), puis B' et E' les projetés orthogonaux de B et E sur la droite (AO), le théorème de Thalès indique que $N'B/N'E = BB'/EE'$; ce dernier ratio est lui-même égal au ratio des distances de B et E à la droite (AO), donc aux aires de ABO et AEO. Dès lors, l'énoncé revient à démontrer que $N = N'$, c'est-à-dire que les triangles ABO et AEO sont de même aire. En notant $\mathcal{A}(T)$ l'aire du triangle T, on vérifie alors que

$$\mathcal{A}(ABO) = \mathcal{A}(ABQ) = \mathcal{A}(ABD)/2 = \mathcal{A}(ACD)/2$$
$$\mathcal{A}(AEO) = \mathcal{A}(AEP) = \mathcal{A}(AEC)/2 = \mathcal{A}(ACD)/2,$$

ce qui conclut.

Solution alternative n°1 Voici une autre manière de démontrer l'égalité $BN' = EN'$, et donc d'arriver à nos fins. Posons $\alpha = \widehat{DXA}$, $\beta = \widehat{AXC}$, $\gamma = \widehat{XCD} = \widehat{DCA}$ and $\delta = \widehat{DCA} = \widehat{CDX}$. La loi des sinus indique que

$$BN' = \frac{\sin(\widehat{BAN'})AN'}{\sin(\widehat{N'BA})} = \frac{\sin(\widehat{BAO})AN'}{\sin(\alpha)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\widehat{BAO} &= \widehat{BAC} + \widehat{CAO} = (90° - \widehat{ACB}) + (90° - \widehat{AOC}/2)\\ &= 180° - (180° - \widehat{XCA}) - \widehat{ADC} = (\gamma + \delta) - \gamma = \delta,\end{aligned}$$

et la loi des sinus indique également que

$$\frac{\sin(\delta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\widehat{MDX})}{\sin(\widehat{DXM})} = \frac{MX}{MD}.$$

Ainsi, $BN' = \dfrac{\sin(\delta)AN'}{\sin(\alpha)} = \dfrac{MX \times AN'}{MD}$. On démontre de même que $EN' = \dfrac{MX \times AN'}{MC}$, et on conclut en rappelant que $MC = MD$.

Solution alternative n°2 Une fois n'est pas coutume, après avoir identifié les points M, N et X, on peut se placer dans un repère cartésien et calculer les coordonnées de chaque point. Cela sera aussi douloureux qu'attendu, mais puisque (AB) et (AD) sont perpendiculaire et parallèle à (BC), cela peut valoir le coup.

Ainsi, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$M = \frac{A+X}{2} = \begin{pmatrix} x/2 \\ y/2 \end{pmatrix} \text{ et } D = 2M - C = \begin{pmatrix} x-c \\ y \end{pmatrix}.$$

Ensuite, si l'on pose

$$E = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} u/2 \\ v/2 \end{pmatrix},$$

l'alignement de E, D, X et l'angle droit en E indiquent que $y(x-u) = vc$ et $u(x-u) = v(v-y)$, ce qui signifie que

$$u = \frac{(x-c)y^2}{c^2+y^2} \text{ et } v = \frac{(cx+y^2)y}{c^2+y^2}.$$

Enfin, si l'on note O' le point de (AN) équidistant de A et D, il s'agira de démontrer que $O'A^2 = O'C^2$. Or, si l'on pose

$$O' = \begin{pmatrix} (x-c)/2 \\ z \end{pmatrix},$$

l'alignement de A, N et O' indique que $(z-y)u/2 = (v/2-y)(x-c)/2$, c'est-à-dire que

$$z = y + \frac{(v-2y)(x-c)}{2u} = \frac{y^2+cx-2c^2}{2y}.$$

On vérifie alors comme prévu que

$$\begin{aligned}
O'A^2 - O'C^2 &= (x-c)^2/4 + (z-y)^2 - (x-3c)^2/4 - z^2 \\
&= cx - 2c^2 - 2yz + y^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs L'exercice a été abordé par un nombre important d'élèves. De nombreux élèves ont rajouté le point diamétralement opposé à A, ce qui est un bon réflexe. Ce point était intéressant dans l'exercice car il permettait d'interpréter les angles droits et la propriété du milieu de $[CD]$. Cependant, de manière générale il faut éviter de rajouter des points qui ne font que rajouter des inconnues au problème. La difficulté principale venait de l'interprétation géométrique du milieu de $[EB]$. Il était un des rares exercices où une approche analytique pouvait être envisagée; nous rappelons cependant qu'une preuve qui ne donne pas explicitement de résultat interprétable géométriquement ne rapporte pas de points. En particulier, ici, il fallait généralement ajouter d'autres arguments aux preuves analytiques pour analyser les résultats sur les cercles.

Exercice 6. Trouver le plus grand entier $\ell \geqslant 1$ pour lequel il existe des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ compris (au sens large) entre 1 et 2^{2024} et vérifiant la propriété suivante :

Pour tous les entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant \ell$ et tous les entiers $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j \in \{-1, +1\}$, la somme $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \cdots + s_j a_j$ est non nulle.

Solution de l'exercice 6 Tout d'abord, l'entier $\ell = 2^{2025} - 1$ convient, car il suffit de poser $a_k = 2^{2024 - v_2(k)}$ pour tout $k \leqslant \ell$. En effet, quels que soient les entiers i et j que l'on choisit, il existe un unique entier k, de valuation 2-adique maximale, tel que $i \leqslant k \leqslant j$; en effet, lorsque u et v sont deux entiers de valuation 2-adique égale à p tels que $i \leqslant u < v \leqslant j$, l'entier $u + 2^p$ est divisible par 2^{p+1}, et il est compris entre u et v. Le terme a_k est alors l'unique terme, parmi $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_j$, de valuation 2-adique minimale, et la somme $s_i a_i + s_{i+1} a_{i+1} + \cdots + s_j a_j$ est donc non nulle.

Réciproquement, il suffit de démontrer que $\ell = 2^{2025}$ ne convient pas. On considère donc une suite $a_1, a_2, \ldots a_\ell$ arbitraire, dont les termes sont compris entre 1 et 2^{2024}. On définit ensuite la suite (s_i) par récurrence, en posant

$$s_i = \begin{cases} +1 & \text{si } a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_{i-1} s_{i-1} \leqslant 0\,; \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

puis on pose $t_i = a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_i s_i$.

Or, une récurrence immédiate indique que $-\ell/2 < t_i \leqslant \ell/2$ pour tout i :

- ▷ si $t_i \leqslant 0$, on a bien $-\ell/2 < t_i \leqslant t_{i+1} = t_i + a_{i+1} \leqslant a_{i+1} \leqslant \ell/2$;
- ▷ si $t_i > 0$, on a également $\ell/2 \geqslant t_i \geqslant t_{i+1} = t_i - a_{i+1} > -a_{i+1} \geqslant -\ell/2$.

Les $\ell + 1$ termes t_i ne peuvent donc prendre que ℓ valeurs distinctes, et deux d'entre eux, disons t_i et t_j, coïncident. On tient là les entiers i et j et la suite $s_i, s_{i+1}, \ldots, s_j$ recherchés.

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile ; seulement six élèves ont une solution complète ou quasiment complète au problème, et une petite quinzaine d'élèves ont eu au moins un point au problème. Il est triste de voir que très peu d'élèves ont conjecturé la bonne valeur de ℓ. En combinatoire, il est **CRUCIAL** de tester les petits cas : ici, par exemple, remplacer 2024 par $0, 1, 2, 3$ pour se forger une intuition quant à la valeur de ℓ en fonction de n. Une fois cela fait, il est facile de trouver la construction de l'énoncé. Si $a_1, \ldots, a_{2^{n+1}-1}$ vérifient l'énoncé pour un certain n (à la place de 2024), on alors peut prendre $b_1 = 2a_1, \ldots, b_{2^{n+1}-1} = 2a_{2^{n+1}-1}, b_{2^{n+1}} = 1, b_{2^{n+1}+1} = 2a_1, \ldots, b_{2^{n+2}-1} = 2a_{2^{n+1}-1}$, qui vérifient l'énoncé pour $n+1$. Comme c'était le procédé utilisé pour avoir une suite maximale pour $n = 0, 1, 2, 3$, il est naturel de construire la suite ainsi.

La seconde partie de l'énoncé était plus difficile à appréhender, surtout sans connaître la valeur de ℓ. C'est pour ça que regarder les petits cas pour avoir une bonne conjecture sur ℓ était crucial.

Nous notons aussi que certains élèves ont cru que les entiers étaient forcément distincts. Cela n'a pas de raison d'être vrai si ce n'est pas mentionné : à priori les entiers sont non distincts.

Exercice 7. Identifier tous les polynômes P à coefficients réels tels que, pour tous les réels x et y tels que $P(x)$ et $P(y)$ sont rationnels, $P(x+y)$ est aussi rationnel.

Solution de l'exercice 7 Tout d'abord, tout polynôme constant convient.

Ensuite, si P est de degré 1, c'est-à-dire de la forme $P(X) = aX + b$ avec $a \neq 0$, soit q et r deux nombres rationnels. Si on pose $x = (q-b)/a$ et $y = (r-b)/a$, on constate que $P(x) = q$ et $P(y) = r$ sont rationnels, de sorte que $P(x+y) = q+r-b$ est rationnel aussi. Par conséquent, $b = q+r-P(x+y)$ est lui-même un rationnel. Réciproquement, lorsque b est rationnel, et pour tous les réels x et y tels que $P(x)$ et $P(y)$ sont rationnels, le nombre $P(x+y) = P(x)+P(y)-b$ est rationnel lui aussi. Ainsi, les polynômes de degré 1 recherchés sont ceux dont le coefficient constant est rationnel.

Réciproquement, soit P une solution de degré $d \geqslant 1$. Puisque P n'est pas constant, l'ensemble $\{P(t) : t \in \mathbb{R}\}$ contient une infinité de valeurs rationnelles. Il existe donc un réel $t \neq 0$ tel que $P(t)$ est rationnel. Posons ensuite $Q(X) = P(tX)$: comme $t \neq 0$, il s'agit d'un polynôme de degré d, pour lequel $Q(x+y) = P(tx+ty)$ est rationnel dès que $Q(x) = P(tx)$ et $Q(y) = P(ty)$ est rationnel.

En outre, une récurrence immédiate démontre que $Q(k)$ est rationnel pour tout entier $k \geqslant 1$. En écrivant Q comme le polynôme d'interpolation de Lagrange

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{d+1} Q(k) \prod_{i \neq k} \frac{X-i}{k-i},$$

on en déduit que Q est à coefficients rationnels. À partir de notre solution P, on a donc construit une solution Q de degré d et à coefficients rationnels ; quitte à multiplier Q par le produit des dénominateurs de ses coefficients et par -1, on suppose même Q à coefficients entiers et de coefficient dominant positif :

$$Q(X) = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On choisit maintenant un nombre premier p strictement supérieur à tous les entiers $|a_i|$. Comme $Q(0) = a_0$ et $\lim_\infty Q = +\infty$, le théorème des valeurs intermédiaires indique que le nombre rationnel $a_0 + 1/p$ admet un antécédent z par Q. Puisque $Q(1)$ est entier et que Q est solution du problème, tous les nombres de la forme $Q(z+k)$, où k est entier, sont également rationnels. On pose alors $R = \Delta^{d-1} Q$, où Δ est l'opérateur qui transforme chaque polynôme $S(X)$ en le polynôme $S(X+1) - S(X)$. Or Δ transforme tout monôme X^k en un polynôme de degré $k-1$. Il diminue donc de 1 le degré des polynômes auxquels on l'applique, et transforme chaque polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ en un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$. Par construction, $R(X)$ est de degré 1, à coefficients rationnels, et $R(z)$ est rationnel.

Si l'on écrit $R(X)$ sous la forme $R(X) = uX + v$, on en déduit que $z = (R(z) - v)/u$ est lui aussi rationnel. Cependant, si $v_p(z) \geqslant 0$, alors $v_p(Q(z)) \geqslant 0$, et si $v_p(z) \leqslant -1$, alors $v_p(a_k z^k) = k v_p(z)$ pour tout k, donc $v_p(Q(z)) = d v_p(z)$. Puisque $v_p(Q(z)) = -1$, on en conclut que $v_p(z) = -1$ et que $d = 1$.

Ainsi, les polynômes recherchés sont les polynômes constants et les polynômes affines dont le coefficient constant est rationnel.

Solution alternative n°1 Voici une preuve alternative du fait que tout réel x pour lequel $Q(x)$ est rationnel est lui-même rationnel.

Soit d le PGCD des indices i pour lesquels $a_i \neq 0$. On a montré plus haut que le polynôme $R(X) = Q(xX)$ est à coefficients rationnels. De la sorte, x^i est rationnel pour tout entier i tel que $a_i \neq 0$. Or, si l'on note k le plus petit entier naturel non nul pour lequel x^k est rationnel, on constate que x^j est rationnel si et seulement si k divise j. Par conséquent, k divise d, et x^d est rationnel.

En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, puisque $Q(1 + nx)$ est rationnel, $(1 + nx)^d$ l'est également. Si l'on interprète cette expression comme un polynôme en n, l'interpolation de Lagrange indique une nouvelle fois que ses coefficients sont rationnels ; c'est en particulier le cas du coefficient de degré 1 en n, qui vaut dx, et x est donc rationnel.

Commentaire des correcteurs Ce problème fort difficile a été substantiellement résolu par une poignée d'élèves. Il est toutefois dommage qu'un grand nombre d'élèves aient galvaudé l'étude des polynômes de degré au plus 1, qui était dans les cordes de chacun : même quand on fait face à un problème immodérément difficile, glaner les quelques points accessibles est indispensable, et les perdre en ayant omis la vérification des solutions potentielles que l'on a identifiées (alors qu'un simple « ils conviennent manifestement » aurait suffi) n'est pas raisonnable.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Sur une planète lointaine se trouvent n réverbères et 2024 interrupteurs. Chaque réverbère est relié à exactement 1000 interrupteurs. L'allumeur de réverbères peut effectuer un certain nombre d'opérations, dont chacune est définie comme suit :

L'allumeur de réverbères choisit un interrupteur sur lequel il appuie, et tous les réverbères reliés à cet interrupteur changent d'état; ceux qui étaient allumés s'éteignent, et ceux qui étaient éteints s'allument.

Le petit prince lui a assuré qu'il était possible, en effectuant un nombre fini de telles opérations, d'allumer tous les réverbères de la planète. Démontrer que, dans ces conditions, l'allumeur de réverbères peut se débrouiller pour allumer tous les réverbères en effectuant au plus 1012 opérations.

Solution de l'exercice 8 Soit $I_1, I_2, \ldots, I_k$ les interrupteurs sur lesquels le petit prince prévoit d'appuyer un nombre impair de fois pour allumer les n réverbères; soit $I_{k+1}, \ldots, I_{2024}$ les autres réverbères, sur lesquels le petit prince prévoit d'appuyer un nombre pair de fois. Pour chaque lampe ℓ, on note $a(\ell)$ le nombre d'interrupteurs, parmi $I_1, I_2, \ldots, I_k$, auxquels la lampe ℓ est reliée; et $b(\ell)$ le nombre d'interrupteurs, parmi $I_{k+1}, \ldots, I_{2024}$, auxquels la lampe ℓ est reliée.

En procédant selon son plan, le petit prince a changé $a(\ell) \bmod 2$ fois l'état de la lampe ℓ. Puisque $a(\ell) + b(\ell) = 1000$, cette lampe a également changé $b(\ell) \bmod 2$ fois d'état. Par conséquent, appuyer une fois sur chacun des interrupteurs I_1 à I_k, ou bien I_{k+1} à I_{2024}, suffit à allumer la lampe ℓ.

Ceci étant valable pour toute lampe, il suffit à l'allumeur d'appuyer, selon son choix, sur les k interrupteurs I_1 à I_k, ou bien sur les $2024 - k$ interrupteurs I_{k+1} à I_{2024}; il fera le premier choix lorsque $k \leqslant 1012$, et le second choix sinon.

Commentaire des correcteurs Ce problème assez abordable a été parfaitement bien traité par plusieurs élèves, au grand plaisir des correcteurs. Cependant, plusieurs élèves ont mal lu l'énoncé, ce qui les a irrémédiablement handicapées par la suite. D'autres ont tenté de proposer un algorithme glouton pour l'allumeur de réverbères, visant à minimiser à chaque étape le nombre de lampes éteintes , mais sans tenir compte de l'indication du petit prince; outre le fait qu'il soit relativement facile de construire des exemples sur lesquels cet algorithme échoue, ne pas tenir compte d'une partie de l'énoncé est le moyen le plus sûr de ne pas résoudre le problème considéré !

Exercice 9. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathsf{S}(n)$ la somme des chiffres de n. On dit qu'un ensemble A d'entiers est *beau* si, pour tous les éléments a et b de A, a divise b si et seulement si $\mathsf{S}(a)$ divise $\mathsf{S}(b)$.

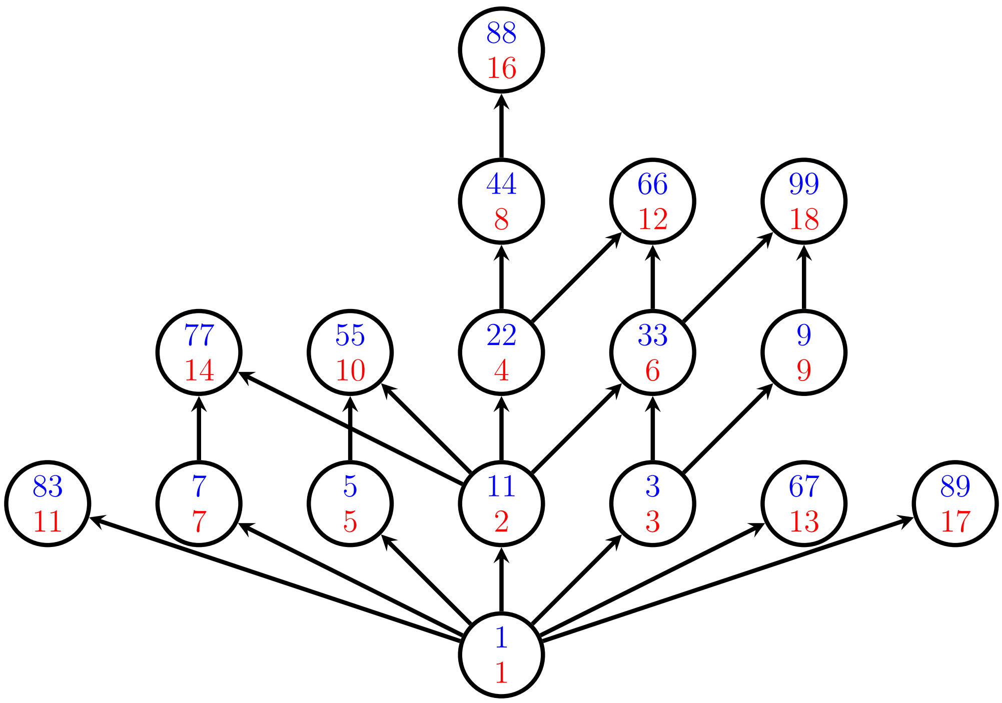
Quel est le nombre maximal d'éléments que peut avoir un bel ensemble ne contenant que des entiers compris (au sens large) entre 1 et 100 ?

Solution de l'exercice 9 Lorsque $1 \leqslant n \leqslant 100$, on sait que $1 \leqslant \mathsf{S}(n) \leqslant 18$. Ainsi, un bel ensemble $A \subseteq \{1, 2, \ldots, 100\}$ est de taille au plus 18. En effet, pour chaque entier $k \leqslant 18$, il contient au plus un élément, disons a_k, tel que $\mathsf{S}(a_k) = k$; s'il en contenait deux ou plus, ils se diviseraient mutuellement.

Supposons qu'il existe un tel ensemble de taille 18 : l'ensemble A_k est donc formé de 18 entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{18}$, que nous allons tâcher d'identifier un à un. On est obligé de choisir $a_{18} = 99$. Puisque $a_2 \in \{2, 11, 20\}$ et a_2 divise a_{18}, on a $a_2 = 11$. Par conséquent, a_{10} est un multiple de 11 tel que $\mathsf{S}(a_{10}) = 10$, donc $a_{10} = 55$. Ensuite, a_5 divise $a_{10} = 55$ et $\mathsf{S}(a_5) = 5$, donc $a_5 = 5$. Cependant, $\mathsf{S}(a_{15}) = 15$, donc $a_{15} \in \{69, 78, 87, 96\}$, ce qui l'empêche d'être un multiple de a_5. Ainsi, la taille de A ne peut dépasser 17.

Réciproquement, si l'on souhaite que A ait 17 éléments, une idée raisonnable est de reprendre le raisonnement ci-dessus en éliminant a_{15} de A et de nos considérations. Dans ces conditions, chaque entier a_{2k} est un multiple de $a_2 = 11$ tel que $S(a_{2k}) = 2k$, de sorte que $a_{2k} = 11k$. Puis, lorsque $k \in \{1, 3, 7, 9\}$, l'entier a_k divise $a_{2k} = 11k$ et n'est pas un multiple de $a_2 = 11$, donc a_k divise k ; puisque $\mathsf{S}(a_k) = k$, c'est donc que $a_k = k$. Il reste à identifier des entiers a_{11}, a_{13} et a_{17} possibles ; ils n'entretiennent aucune relation de divisibilité non triviale avec quelque autre entier a_i, et on peut par exemple choisir les nombres premiers $a_{11} = 83$, $a_{13} = 67$ et $a_{17} = 89$.

Le nombre maximal d'éléments recherché est donc égal à 17, comme illustré par l'ensemble dont on a listé les éléments n et les sommes $\mathsf{S}(n)$ ci-dessous, en dessinant une flèche (ou un chemin) de a vers b lorsque a divise b, ou encore lorsque $\mathsf{S}(a)$ divise $\mathsf{S}(b)$.

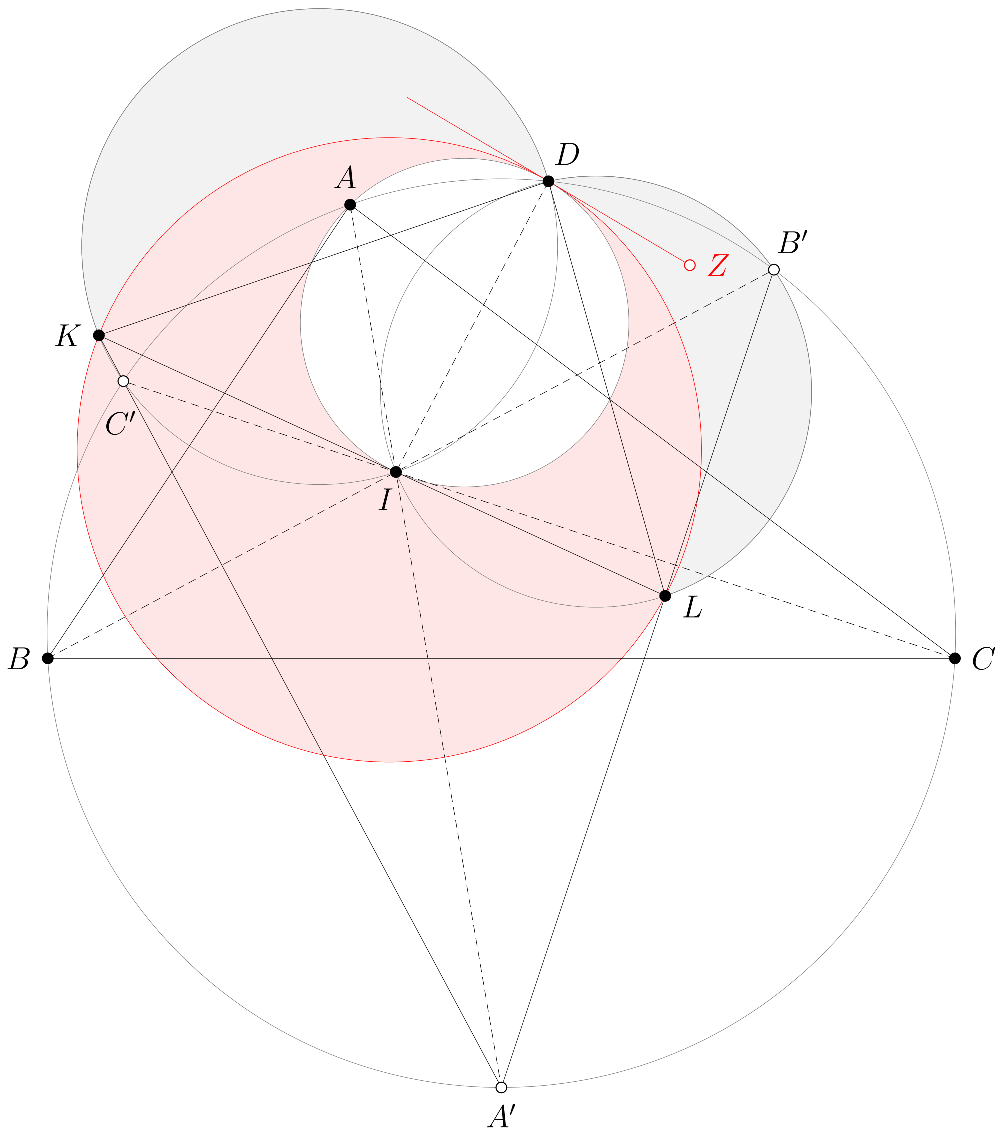


Commentaire des correcteurs Le problème était relativement abordable, mais il n'a pas été si bien traité. Beaucoup d'élèves ont fait des erreurs de lectures d'énoncé, en oubliant notamment la réciproque $S(a) \mid S(b) \Rightarrow a \mid b$. Rappelons également que les éléments d'un ensemble sont toujours considérés distincts : on n'autorise jamais les doublons dans un ensemble. Nous regrettons enfin que si peu de personnes aient réussi à prouver qu'il y avait au plus 18 éléments dans un bon ensemble, ce qui était pourtant une borne à portée de toutes.

Exercice 10. Soit A, B, C, D quatre points situés dans cet ordre sur un cercle Ω, et soit I le centre du cercle inscrit dans ABC. On choisit deux points K et L points situés sur la tangente en I au cercle circonscrit à ADI de sorte que $BK = KI$ et $CL = LI$.

Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles ADI et DKL sont tangents.

Solution de l'exercice 10



Soit Ω le cercle circonscrit à ABC. Puisque l'on s'intéresse simultanément à I et à Ω, il convient de faire apparaître les pôles Sud A', B' et C' de ABC issus de A, B et C. Il s'agit des milieux des arcs de cercle $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ et $\widehat{AB}$, et I est le point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC'). En outre, A' est le centre du cercle circonscrit à BIC, donc il est situé sur les médiatrices de $[BI]$ et $[CI]$. De même, B' est situé sur la médiatrice de $[CI]$, et C' est situé sur la médiatrice de $[BI]$, de sorte que K et L appartiennent respectivement aux droites $(A'C')$ et $(A'B')$.

On entame alors une chasse aux angles :

$$\widehat{DIK} = 180^\circ - \widehat{DAI} = 180^\circ - \widehat{DAA'} = 180^\circ - \widehat{DC'A'} = \widehat{DC'K},$$

de sorte que les points C', D, I et K sont cocycliques. On démontre de même que B', D, I et L sont cocycliques, et on en déduit que

$$\widehat{KDI} = 180^\circ - \widehat{IC'K} = \widehat{A'C'C} = \widehat{A'DC} = \widehat{BDA'} = \widehat{BB'A'} = \widehat{IB'L} = \widehat{IDL},$$

ce qui signifie que (DI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{KDL}$.
Enfin, soit Z un point situé sur la tangente en D au cercle circonscrit à DKL. On vérifie que

$$\widehat{IDZ} = \widehat{IDL} + \widehat{LDZ} = \widehat{KDI} + \widehat{LKD} = 180^\circ - \widehat{DIK} = \widehat{DAI},$$

ce qui signifie comme souhaité que (DZ) est tangente en D au cercle circonscrit à ADI.

Commentaire des correcteurs Un problème difficile qui a été peu abordé, et où très peu de personnes ont réussi à avancer significativement. On rappelle que pour qu'une chasse aux angles rapporte des points, il faut qu'elle se confronte directement à la difficulté du problème, ici les directions des tangentes aux deux cercles en D, ou les points K et L. Aligner les égalités d'angles découlant de la définition de I ou de la cocyclicité de $ABCD$ n'est ni intéressant ni valorisé.