PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 17 JANVIER 2024

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2009 ou après.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2008 ou avant.
  Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
  Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit a et b deux entiers strictement positifs. On suppose que a divise b.

1. L'entier a^a divise-t-il nécessairement l'entier b^b ?
2. L'entier a^b divise-t-il nécessairement l'entier b^a ?

Solution de l'exercice 1 Puisque a divise b, le nombre $k = b/a$ est un entier strictement positif, et $a \leqslant b$. Par conséquent, $b^b = k^b \times a^b = k^b \times a^{b-a} \times a^a$ est bien divisible par a^a.
Au contraire, si $a = 2$ et $b = 6$, on constate que $a^b = 2^6$ ne divise pas $b^a = 2^2 \times 3^2$.

Commentaire des correcteurs Le problème a été globalement très bien réussi. Attention cependant à la règle des puissances : a^{ak} est égal à $(a^a)^k$ et non pas à $a^a \times a^k$. On déplore aussi certaines copies qui ont essayé de faire un raisonnement général qui s'est avéré faux pour la question 2., alors que donner un contre-exemple explicite suffisait pour conclure.

Exercice 2. Anna et Baptiste jouent au jeu suivant. Initialement, le nombre 1 est écrit au tableau. Ensuite, chacun son tour, en commençant par Anna, ils ont le choix entre ajouter 1 au nombre écrit au tableau et le multiplier par 2. Le premier joueur qui écrit un entier supérieur ou égal à 100 gagne, et l'autre perd.

Démontrer que l'un des deux joueurs peut se débrouiller pour gagner quels que soient les choix de son adversaire, et déterminer quel est ce joueur.

<u>Solution de l'exercice 2</u> Baptiste peut s'assurer la victoire en jouant comme suit :

▷ si le nombre n écrit au tableau vérifie l'inégalité $n \leqslant 49$, il remplace n par $n+1$;

▷ si $n \geqslant 50$, il remplace n par $2n$ et gagne aussitôt.

En effet, avec une telle stratégie, on constate que Baptiste n'aura de cesse de changer la parité du nombre que lui a laissé Anna, sauf s'il peut gagner directement. Or, partant d'un entier impair, Anna est obligée de laisser à Baptiste un entier pair.

Comme Anna débute avec un entier $n = 1$ impair, elle et Baptiste écriront donc alternativement des entiers pair et impair, de plus en plus grands, jusqu'au moment où l'un d'entre eux transformera un entier $m \leqslant 49$ en un entier $m' \geqslant 50$. Mais cette transformation ne peut être l'œuvre de Baptiste, car m aurait été pair, de sorte que $m \leqslant 48$, et Baptiste aurait alors transformé m en l'entier $m' = m+1 \leqslant 49$.

C'est donc Anna qui a écrit l'entier $m' \geqslant 50$; elle l'a obtenu à partir d'un entier $m \leqslant 49$, donc soit $m' = m+1 \leqslant 98$, soit $m' = 2m \leqslant 98$. Dans les deux cas, elle n'a pas encore gagné, et Baptiste a alors tôt fait de remplacer m' par l'entier $2m'$, s'assurant ainsi la victoire.

<u>Solution alternative n°1</u> On dit qu'un entier n compris entre 1 et 99 est *gagnant* si, lorsqu'un joueur J doit remplacer n par $n+1$ ou $2n$, il peut s'assurer de gagner quels que soient les coups que jouera son adversaire ; on dit que n est *perdant* si, dans les mêmes conditions, et si l'adversaire de J joue suffisamment bien, J est condamné à la défaite.

On constate alors que tout entier $n \leqslant 49$ est gagnant si l'un des entiers $n+1$ ou $2n$ est perdant, et que n est perdant si les deux entiers $n+1$ et $2n$ sont gagnants. En outre, tout entier compris entre 50 et 99 est manifestement gagnant. On en déduit, de proche en proche, que 49 est perdant, 48 gagnant, 47 perdant, etc. De manière plus générale, on peut démontrer par récurrence sur k l'assertion $\mathcal{A}_k$ suivante : « $50-k$ est perdant lorsque k est impair, et gagnant lorsque k est pair ».

En effet, puisque 50 est gagnant, $\mathcal{A}_0$ est vraie. Ensuite, si l'on dispose d'un entier $k \geqslant 1$ pour lequel chacune des assertions $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_{k-1}$ sont vraies, on va démontrer $\mathcal{A}_k$ elle-même, en distinguant selon la parité de k :

▷ si k est pair, $\mathcal{A}_{k-1}$ indique que $51-k$ est perdant, donc $50-k$ est gagnant, et $\mathcal{A}_k$ est vraie ;

▷ si $k \leqslant 25$ et k est impair, $\mathcal{A}_{k-1}$ indique que $51-k$ est gagnant, et $50 \leqslant 2(50-k) \leqslant 99$, donc $2(50-k)$ est gagnant aussi ; par conséquent, $50-k$ est perdant, et $\mathcal{A}_k$ est vraie ;

▷ si $k \geqslant 26$ et k est impair, $\mathcal{A}_{k-1}$ et $\mathcal{A}_{2k-50}$ indiquent que $51-k$ et $2(50-k)$ sont gagnants ; $50-k$ est perdant, et $\mathcal{A}_k$ est toujours vraie.

En conclusion, $\mathcal{A}_1$ est vraie, ce qui signifie que l'entier 1 est donc perdant. C'est donc Baptiste qui pourra s'assurer de gagner s'il joue suffisamment bien.

<u>Commentaire des correcteurs</u> Beaucoup d'élèves ont trouvé une stratégie gagnante pour Baptiste. Cependant, peu d'élèves ont obtenu tous les points à ce problème. Voici des exemples de preuves fausses qui ont été pénalisées ;

▷ « Anna va forcément écrire un entier plus grand que 50 » : à priori, cette affirmation mérite une preuve. Si on avait remplacé 50 par 49, ce serait faux.

- « Anna écrira toujours des nombres pairs (avec preuve), donc elle va forcément écrire un entier plus grand que 50 et pas Baptiste » : pourquoi ? Si on remplace 50 par 49 ça ne devient plus vrai. Cette partie là de l'argument était justement la clé de la preuve : toute copie n'ayant pas de preuve de ce fait-là, ni d'avancée dans ce sens ne pouvait avoir plus de $5/7$. Dire que 50 est pair n'était pas une preuve suffisante non plus.

  Merci de lire le corrigé pour voir comment rédiger cela proprement.
- « Entre 25 et 49, avoir un nombre impair implique perdre, et avoir un nombre pair implique gagner. Donc Anna va perdre car elle n'a que des nombres impairs ». Ceci, à priori ne prouve rien. En effet, pourquoi y aurait-il un nombre entre 25 et 49 à un moment ? Pourquoi est-ce que ce sera au tour d'Anna que le nombre sera écrit ? Sans formalisation, une copie affirmant cela ne pouvait avoir plus de $5/7$.

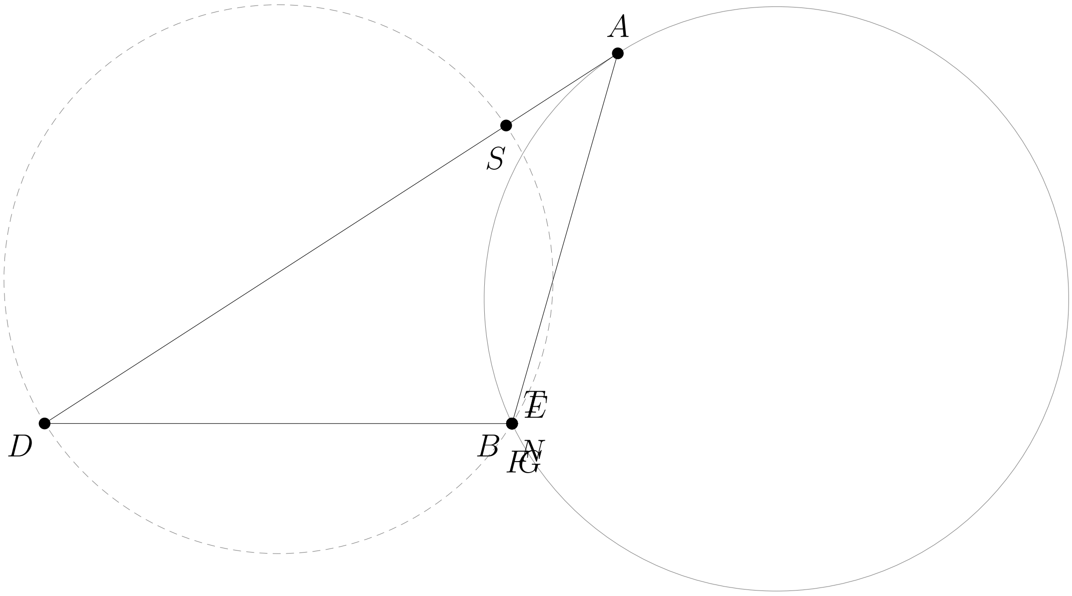
La morale de ce problème est que donner tous les arguments nécessaires est **CRUCIAL** en mathématiques olympiques, surtout sur un problème où trouver la stratégie n'était pas si dur.

Enfin, plusieurs élèves ont mal lu l'énoncé. Nous ne pouvons que recommander aux élèves de lire plusieurs fois les énoncés pouvant être compliqués.

Exercice 3. Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$, et soit ω son cercle circonscrit. La tangente à ω en A et la droite (BC) se coupent en un point D, et la parallèle à (AD) passant par B recoupe ω en un point E autre que B. La droite (DE) coupe ensuite la droite (AB) en un point F, et recoupe ω en un point G autre que E. Enfin, la droite (BE) recoupe le cercle circonscrit à BFG en un point N autre que B, et la droite (NF) coupe (AD) et (AE) en deux points que l'on nomme respectivement S et T.

Démontrer que les points D, G, S et T sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Soit O le centre du cercle circonscrit à $ABCEG$, que l'on notera ω : comme (AD) et (BE) sont parallèles, et puisque (OA) est perpendiculaire à (AD), donc à (BE), il s'agit de la médiatrice de $[BE]$, et ABE est isocèle en A. Puisque l'on dispose de droites parallèles et de triangles isocèles, on pose $\theta = \widehat{ABE} = \widehat{AEB}$ et on entame une chasse aux angles.

Ainsi, $\widehat{SAT} = \widehat{BAS} = \theta$ et $\widehat{TSA} = \widehat{FNE} = 180° - \widehat{BNF} = \widehat{FGB} = \widehat{EGB} = \widehat{EAB} = 180° - 2\theta$, donc $\widehat{ATF} = \widehat{ATS} = 180° - \widehat{TSA} - \widehat{SAT} = \theta$ également. Les triangles FSA et FAT sont donc semblables, et $FS \times FT = FA^2$.

Par ailleurs, le théorème de Thalès indique que $FB \times FD = FE \times FA$, et la puissance de F par rapport à ω vaut, au signe près, $FG \times FE = FA \times FB$. On en conclut que

$$FG \times FD = \frac{FA \times FB}{FE} \times \frac{FE \times FA}{FB} = FA^2 = FS \times FT,$$

ce qui signifie bien que D, G, S et T sont cocycliques.

Remarque : Le point C n'apparaît ni dans l'énoncé du problème, ni dans la solution !

<u>*Solution alternative n°1*</u> Voici une autre chasse aux angles possible. On commence par remarquer que

$$\widehat{GET} = \widehat{GEA} = \widehat{GBA} = \widehat{GBF} = \widehat{GNF} = \widehat{GNT},$$

ce qui signifie que les points G, N, E et T sont cocycliques.

Puisque les droites (DS) et (EN) sont parallèles, on en conclut alors que

$$\widehat{GTS} = \widehat{GTN} = \widehat{GEN} = \widehat{GDS},$$

ce qui signifie comme souhaité que les points D, G, S et T sont cocycliques.

Commentaire des correcteurs Le problème a été abordé par beaucoup d'élèves. Sur ces copies, on note un certain nombre de solutions complètes très variées, plus ou moins efficaces.

La plupart des élèves ont raisonné en chasse aux angles, et peu ont pensé aux puissances de points : même s'il y avait des solutions très efficaces en chasse aux angles, les puissances de point fonctionnaient très bien pour aboutir rapidement. À l'inverse, beaucoup d'élèves ont réalisé une chasse aux angles infructueuse, souvent car ils se perdaient en voulant calculer tous les angles de la figure, au lieu d'avoir un objectif, une propriété précise qu'on souhaite montrer et qui permet de mieux diriger les calculs.

Enfin, certains élèves se sont embarqués dans des calculs faux car supposant des propriétés fausses (par exemple un alignement de points qui n'a pas lieu en général) : il est important, lorsque l'on fait sa figure, de ne pas supposer implicitement les propriétés que l'on n'a pas démontrées, et d'essayer de faire la figure la plus générale possible pour ne pas faire apparaître de propriétés fausses en général.

Exercice 4. Cruella souhaite nourrir ses 100 chiens, qu'elle a numérotés de 1 à 100. On note a_k la quantité de nourriture, mesurée en kilogrammes, dont a besoin le $k^{\text{ème}}$ chien de Cruella. Il s'agit d'un réel strictement positif, et il se trouve que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100$.

Cruella dispose de 100 steaks de 1 kg qu'elle répartit parmi ses chiens, en donnant b_k steaks au $k^{\text{ème}}$ chien ; chaque nombre b_k est un entier positif ou nul, et $b_1 + b_2 + \cdots + b_{100} = 100$.

On appelle *inefficacité* de cette distribution la somme $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{100} - b_{100}|$.

Trouver le plus petit nombre réel I tel que, quelles que soient les quantités de nourriture $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ dont ont besoin les chiens de Cruella, celle-ci pourra choisir les entiers $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$, de manière à obtenir une distribution dont l'inefficacité est inférieure ou égale à I.

Solution de l'exercice 4 Tout d'abord, si $a_1 = 101/2$ et $a_2 = a_3 = \cdots = a_{100} = 1/2$, tout réel $|a_i - b_i|$ est la distance entre a_i et un entier, donc vaut au moins $1/2$. Toute distribution est donc d'inefficacité au moins $100 \times 1/2 = 50$.

Réciproquement, Cruella peut procéder comme suit. Elle commence par donner $\lfloor a_k \rfloor$ steaks à son $k^{\text{ème}}$ chien, qui souhaite donc encore manger $c_k = a_k - \lfloor a_k \rfloor$ kg de viande ; il lui reste $\ell = c_1 + c_2 + \cdots + c_{100}$ steaks à distribuer. Sans perte de généralité, on suppose que les chiens ont été ordonnés de sorte que $1 > c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_{100} \geqslant 0$. Cruella donne alors un steak supplémentaire aux ℓ premiers chiens, qui sont les plus affamés.

Cette distribution est d'inefficacité

$$i = \ell - (c_1 + c_2 + \cdots + c_\ell) + (c_{\ell+1} + c_{\ell+2} + \cdots + c_{100}) = 2(c_{\ell+1} + c_{\ell+2} + \cdots + c_{100}).$$

Par conséquent,

$$(100-\ell)(\ell - i/2) = (100-\ell)(c_1 + c_2 + \cdots + c_\ell) \geqslant (100-\ell)\ell c_\ell \geqslant \ell(c_{\ell+1} + c_{\ell+2} + \cdots + c_{100}) = \ell i/2$$

et

$$i \leqslant \frac{(100-\ell)\ell}{\ell/2 + (100-\ell)/2} = \frac{(100-\ell)\ell}{50} = \frac{50^2 - (\ell-50)^2}{50} \leqslant 50.$$

En conclusion, le réel I recherché est $I = 50$.

Remarque : Cette stratégie consiste simplement, pour Cruella, à donner les steaks un par un, en choisissant à chaque fois le chien le plus affamé. On peut d'ailleurs démontrer qu'il s'agit de la stratégie minimisant l'efficacité de la distribution de steaks.

En effet, si un chien i a plus faim qu'un chien j, c'est-à-dire si $a_i > a_j$, Cruella n'a aucun intérêt à donner strictement plus de viande au chien j qu'au chien i, c'est-à-dire à choisir $b_i < b_j$: échanger les rations de ces deux chiens lui permet de gagner strictement en efficacité. Par conséquent, tant qu'il reste au moins un steak à donner, l'un des chiens les plus affamés aura au moins un steak à manger, donc Cruella, pour être aussi efficace que possible, peut bien le lui donner. Notre chien étant partiellement repu, elle réitérera alors ce processus à chaque nouveau steak.

Commentaire des correcteurs Le problème était très difficile, et c'est avec satisfaction que les correcteurs ont vu les élèves proposer plusieurs idées pertinentes, identifiant assez souvent une stratégie pour Cruella. Néanmoins, ils ont également repéré plusieurs erreurs mathématiques ou stratégiques évitables, qu'ils listent ici en espérant que les élèves sauront mieux les éviter à l'avenir :

- ▷ Plusieurs élèves ont mal compris l'énoncé, et cru que Cruella tenterait d'avoir l'inefficacité la plus importante possible. Mais être méchant ne signifie pas être crétin : Cruella tient évidemment à satisfaire au mieux ses chiens, dont la fourrure ne sera que plus resplendissante.

- ▷ De nombreux élèves, après avoir correctement conjecturé que $I = 50$, on tenté de trouver une stratégie pour Cruella afin de démontrer que $I \leqslant 50$, mais ont oublié qu'il fallait aussi démontrer l'inégalité $I \geqslant 50$.
- ▷ Plusieurs élèves, dans le but de démontrer que $I \geqslant 50$, ont fourni une configuration analogue à celle du corrigé, mais ont ensuite affirmé que « puisque la stratégie que j'ai présentée plus haut pour Cruella ne lui permet pas de faire mieux que 50, c'est bien qu'elle ne peut pas faire mieux ». Ce raisonnement est incorrect, car il aurait aussi fallu démontrer que la stratégie proposée pour Cruella était la meilleure possible (ce qui était parfois vrai et parfois faux, et souvent beaucoup plus difficile que de démontrer directement que l'on ne pouvait pas baisser l'inefficacité en-dessous de 50).
- ▷ De nombreux élèves ont proposé, pour Cruella, de choisir pour b_i l'entier le plus proche possible de a_i ; cette idée n'est pas bête, mais elle n'assure pas d'avoir une somme de b_i égale à 100, et il était facile de trouver des contre-exemples. C'est le cas, par exemple, si $a_1 = a_2 = \ldots = a_{99} = 1/3$ et $a_{100} = 67$, car cette technique permet à Cruella de distribuer 67 steaks, et de mourir d'indigestion en avalant elle-même les 33 steaks surnuméraires.

  De manière générale, quand on formule une conjecture, au lieu de chercher à se convaincre tout de go qu'elle fonctionnera, il est important de chercher à la fois à démontrer que la conjecture est correcte, mais aussi à trouver des contre-exemples à la conjecture.

Énoncés Senior

Exercice 5. Cruella souhaite nourrir ses 100 chiens, qu'elle a numérotés de 1 à 100. On note a_k la quantité de nourriture, mesurée en kilogrammes, dont a besoin le $k^{\text{ème}}$ chien de Cruella. Il s'agit d'un réel strictement positif, et il se trouve que $a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 100$.

Cruella dispose de 100 steaks de 1 kg qu'elle répartit parmi ses chiens, en donnant b_k steaks au $k^{\text{ème}}$ chien ; chaque nombre b_k est un entier positif ou nul, et $b_1 + b_2 + \cdots + b_{100} = 100$.

On appelle *inefficacité* de cette distribution la somme $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \cdots + |a_{100} - b_{100}|$.

Trouver le plus petit nombre réel I tel que, quelles que soient les quantités de nourriture $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ dont ont besoin les chiens de Cruella, celle-ci pourra choisir les entiers $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$, de manière à obtenir une distribution dont l'inefficacité est inférieure ou égale à I.

Solution de l'exercice 5 Tout d'abord, si $a_1 = 101/2$ et $a_2 = a_3 = \cdots = a_{100} = 1/2$, tout réel $|a_i - b_i|$ est la distance entre a_i et un entier, donc vaut au moins $1/2$. Toute distribution est donc d'inefficacité au moins $100 \times 1/2 = 50$.

Réciproquement, Cruella peut procéder comme suit. Elle commence par donner $\lfloor a_k \rfloor$ steaks à son $k^{\text{ème}}$ chien, qui souhaite donc encore manger $c_k = a_k - \lfloor a_k \rfloor$ kg de viande ; il lui reste $\ell = c_1 + c_2 + \cdots + c_{100}$ steaks à distribuer. Sans perte de généralité, on suppose que les chiens ont été ordonnés de sorte que $1 > c_1 \geqslant c_2 \geqslant \ldots \geqslant c_{100} \geqslant 0$. Cruella donne alors un steak supplémentaire aux ℓ premiers chiens, qui sont les plus affamés.

Cette distribution est d'inefficacité

$$i = \ell - (c_1 + c_2 + \cdots + c_\ell) + (c_{\ell+1} + c_{\ell+2} + \cdots + c_{100}) = 2(c_{\ell+1} + c_{\ell+2} + \cdots + c_{100}).$$

Par conséquent,

$$(100-\ell)(\ell - i/2) = (100-\ell)(c_1 + c_2 + \cdots + c_\ell) \geqslant (100-\ell)\ell c_\ell \geqslant \ell(c_{\ell+1} + c_{\ell+2} + \cdots + c_{100}) = \ell i/2$$

et

$$i \leqslant \frac{(100-\ell)\ell}{\ell/2 + (100-\ell)/2} = \frac{(100-\ell)\ell}{50} = \frac{50^2 - (\ell-50)^2}{50} \leqslant 50.$$

En conclusion, le réel I recherché est $I = 50$.

Remarque : Cette stratégie consiste simplement, pour Cruella, à donner les steaks un par un, en choisissant à chaque fois le chien le plus affamé. On peut d'ailleurs démontrer qu'il s'agit de la stratégie minimisant l'efficacité de la distribution de steaks.

En effet, si un chien i a plus faim qu'un chien j, c'est-à-dire si $a_i > a_j$, Cruella n'a aucun intérêt à donner strictement plus de viande au chien j qu'au chien i, c'est-à-dire à choisir $b_i < b_j$: échanger les rations de ces deux chiens lui permet de gagner strictement en efficacité. Par conséquent, tant qu'il reste au moins un steak à donner, l'un des chiens les plus affamés aura au moins un steak à manger, donc Cruella, pour être aussi efficace que possible, peut bien le lui donner. Notre chien étant partiellement repu, elle réitérera alors ce processus à chaque nouveau steak.

Commentaire des correcteurs Ce problème difficile a été abordé avec succès par de nombreux élèves, au grand plaisir des correcteurs, et c'est avec satisfaction qu'ils ont vu les élèves proposer plusieurs idées pertinentes, identifiant assez souvent une stratégie parfois très inventive pour Cruella. Néanmoins, ils ont également repéré plusieurs erreurs mathématiques ou stratégiques évitables, qu'ils listent ici en espérant que les élèves sauront mieux les éviter à l'avenir :

- Plusieurs élèves ont mal compris l'énoncé, et cru que Cruella tenterait d'avoir l'inefficacité la plus importante possible. Mais être méchant ne signifie pas être crétin : Cruella tient évidemment à satisfaire au mieux ses chiens, dont la fourrure ne sera que plus resplendissante.
- De nombreux élèves, après avoir correctement conjecturé que $I = 50$, on tenté de trouver une stratégie pour Cruella afin de démontrer que $I \leqslant 50$, mais ont oublié qu'il fallait aussi démontrer l'inégalité $I \geqslant 50$.
- Plusieurs élèves, dans le but de démontrer que $I \geqslant 50$, ont fourni une configuration analogue à celle du corrigé, mais ont ensuite affirmé que « puisque la stratégie que j'ai présentée plus haut pour Cruella ne lui permet pas de faire mieux que 50, c'est bien qu'elle ne peut pas faire mieux ». Ce raisonnement est incorrect, car il aurait aussi fallu démontrer que la stratégie proposée pour Cruella était la meilleure possible (ce qui était parfois vrai et parfois faux, et souvent beaucoup plus difficile que de démontrer directement que l'on ne pouvait pas baisser l'inefficacité en-dessous de 50).
- De nombreux élèves ont proposé, pour Cruella, de choisir pour b_i l'entier le plus proche possible de a_i ; cette idée n'est pas bête, mais elle n'assure pas d'avoir une somme de b_i égale à 100, et il était facile de trouver des contre-exemples. C'est le cas, par exemple, si $a_1 = a_2 = \ldots = a_{99} = 1/3$ et $a_{100} = 67$, car cette technique permet à Cruella de distribuer 67 steaks, et de mourir d'indigestion en avalant elle-même les 33 steaks surnuméraires.

  De manière générale, quand on formule une conjecture, au lieu de chercher à se convaincre tout de go qu'elle fonctionnera, il est important de chercher à la fois à démontrer que la conjecture est correcte, mais aussi à trouver des contre-exemples à la conjecture.

Exercice 6. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers strictement positifs, strictement croissante, telle que a_{k+1} divise $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ pour tout entier $k \geqslant 1$. On suppose qu'il existe une infinité de nombres premiers p qui divisent au moins un terme parmi $a_1, a_2, a_3, \ldots$.
Démontrer que tout entier $n \geqslant 1$ divise au moins un terme parmi $a_1, a_2, a_3, \ldots$

<u>Solution de l'exercice 6</u> Pour tout $k \geqslant 0$, on pose $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ et $b_k = 2s_k/a_{k+1}$. Il s'agit là d'un entier lorsque $k \geqslant 1$, mais également lorsque $k = 0$, car $b_0 = 2s_0/a_1 = 0$. De la sorte, $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = s_k(1 + 2/b_k)$. L'inégalité $a_{k+2} > a_{k+1}$ se réécrit alors comme

$$\frac{2s_{k+1}}{b_{k+1}} = a_{k+2} > a_{k+1} = \frac{2s_k}{b_k} = \frac{2s_{k+1}}{b_k + 2},$$

de sorte que $b_{k+1} < b_k + 2$, c'est-à-dire $b_{k+1} \leqslant b_k + 1$.

Soit maintenant p un nombre premier impair, arbitrairement grand, qui divise un entier a_k. Il divise aussi $2s_{k-1}$, et même s_{k-1} ; on note ℓ le plus petit entier naturel non nul tel que p divise s_ℓ. Comme $b_{\ell-1}s_\ell = (b_{\ell-1} + 2)s_{\ell-1}$, on en déduit que p divise $b_{\ell-1} + 2$ donc que $b_{\ell-1} \geqslant p - 2$. Ainsi, la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ prend des valeurs arbitrairement grandes.

Soit alors n un entier naturel non nul, puis c un entier tel que $2cn \geqslant b_1 + 3$, et k le plus petit entier tel que $b_k \geqslant 2cn - 1$. Puisque $b_k \leqslant b_{k-1} + 1$, on sait que $b_{k-1} = 2cn - 2$. Ainsi, $2n$ divise $2cns_{k-1} = (b_{k-1}+2)s_{k-1} = b_{k-1}s_k$. Comme PGCD$(2n, b_{k-1})$ divise $2cn - b_{k-1} = 2$, on en déduit que n divise donc s_k. Mais alors n divise également $(b_k+2)s_k = b_k s_{k+1} = (2cn-1)s_{k+1}$, donc divise aussi s_{k+1}. On en conclut comme souhaité que n divise $s_{k+1} - s_k = a_k$.

<u>Solution alternative n°1</u> Pour tout $k \geqslant 0$, on pose $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ et $b_k = 2s_k/a_{k+1}$. Il s'agit là d'un entier lorsque $k \geqslant 1$, mais également lorsque $k = 0$, car $b_0 = 2s_0/a_1 = 0$. On constate alors que

$$b_{k+1}a_{k+2} = 2s_{k+1} = 2s_k + 2a_{k+1} = (b_k + 2)a_{k+1}.$$

Puisque $a_{k+1} < a_{k+2}$, on en déduit que $b_{k+1} < b_k + 2$, c'est-à-dire $b_{k+1} \leqslant b_k + 1$. En particulier, $b_k \leqslant k$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

Soit maintenant p un nombre premier arbitrairement grand, qui divise un entier a_k mais pas a_1, de sorte que $k \geqslant 2$. Comme a_k divise $b_{k-1}a_k = (b_{k-2} + 2)a_{k-1}$, et en enchaînant de telles relations de divisibilité, on constate que p et a_k divisent $(b_0+2)(b_1+2)\cdots(b_{k-2}+2)a_1$. Par conséquent, p divise l'un des facteurs b_i+2, et $b_i \geqslant p-2$. Puisque l'on a choisi p arbitrairement grand, la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ elle-même prend donc des valeurs arbitrairement grandes. Comme elle augmente d'au plus 1 à chaque fois et commence par valoir $b_0 = 0$, elle prend même toutes les valeurs entières positives.

Enfin, soit n un entier naturel non nul, et soit $\ell \geqslant n$ le plus petit entier tel que $b_\ell \geqslant n$. Puisque $n \leqslant b_\ell \leqslant b_{\ell-1} + 1 \leqslant (n-1) + 1 = n$, on sait que $b_\ell = n$ et $b_{\ell-1} = n - 1$. Ainsi,

$$na_{\ell+1} = b_\ell a_{\ell+1} = (b_{\ell-1} + 2)a_\ell = (n+1)a_\ell,$$

donc n divise a_ℓ.

<u>Commentaire des correcteurs</u> Le problème a été peu réussi, et il était difficile d'y avoir des points partiels. En effet, sans introduire la suite quotient $b_k = \frac{2(a_1+\cdots+a_k)}{a_{k+1}}$, il était très difficile d'avancer et impossible d'avoir des points, et il fallait avoir des vrais résultats sur cette suite pour avoir des points partiels.

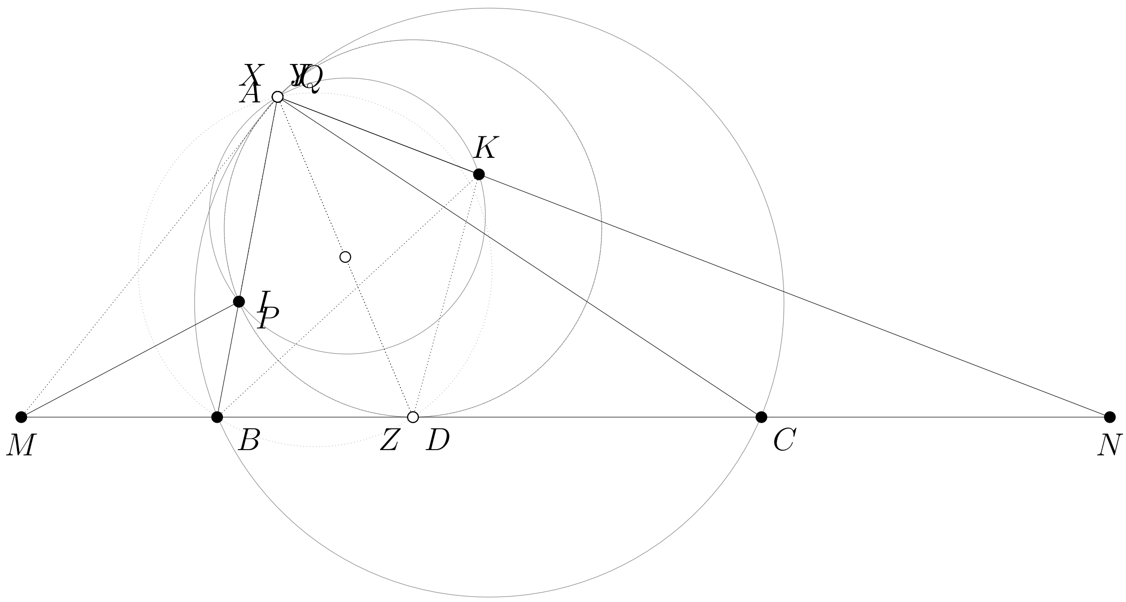
- Nous sommes surpris du faible nombre de personnes ayant posé une quantité équivalente à b_k. Seule une quinzaine d'élèves ont eu au moins un point, et parmi ceux n'ayant pas eu de points, seule une dizaine d'élèves environ a pensé à introduire cette quantité.

- ▷ Un certain nombre d'élèves a tenté de rendre une copie sur le problème 7 sans en rendre sur le problème 6. Vu les résultats et la difficulté habituelle du dernier problème, rares sont ceux qui ont obtenu un meilleur score au problème 7 qu'au 6. Il vaut mieux donc passer plus de temps sur un problème plus abordable.
- ▷ Parmi les élèves ayant des solutions essentiellement correctes, plus de la moitié a perdu un point pour des problèmes de rédaction. Par exemple, beaucoup ont supposé à partir du fait que la suite (b_k) est non majorée, et augmente d'au plus 1 quand elle augmente, que celle-ci prenait toutes les valeurs. Si $b_1 \neq 1$, c'était malheureusement faux. Il est **CRUCIAL** de relire sa preuve pour vérifier les différents détails, et éviter de perdre un point bêtement, qui sera ardu à regagner sur un problème plus difficile.
- ▷ S'il est toujours pertinent de raisonner sur des exemples ou sur les premiers termes d'une suite, un exemple n'est jamais ni une preuve ni un élément de preuve. Sauf cas exceptionnel, celui-ci ne rapporte pas de point. En tout cas, il est toujours dommage de voir des copies donnant des exemples qui ne vérifient pas l'énoncé pour $k = 1$.
- ▷ Attention aux calculs et plus spécifiquement aux indices. Régulièrement, il nous était difficile de différencier b_{k+2} et $b_k + 2$ dans les calculs écrits par certains élèves. Parfois cela leur nuit, car eux-mêmes confondent les deux suites.

Exercice 7. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit ω son cercle circonscrit. Soit Γ un cercle situé à l'intérieur de ω, tangent à ω en A, et tangent à la droite (BC) ; on note D le point de tangence entre Γ et (BC). Soit P le point en lequel (AB) recoupe Γ, et Q le point en lequel (AC) recoupe Γ. Soit M et N les symétriques respectifs de D par rapport à B et C. Les droites (MP) et (NQ) se coupent en K ; la droite (MP) recoupe Γ en un point I autre que P, et (NQ) recoupe Γ en un point J autre que Q. Enfin, la droite (KA) recoupe le cercle circonscrit à IJK en un point X autre que K.

Démontrer que $\widehat{BXP} = \widehat{CXQ}$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>



Une première étape est de construire la figure, notamment le cercle Γ. Pour ce faire, on nomme O le centre du cercle circonscrit à ABC, puis Z le point d'intersection entre (BC) et la perpendiculaire à (AO) passant par O, et on place le centre de Γ à l'intersection entre (AO) et la bissectrice de $\widehat{BZA}$. Cette figure nous permet maintenant d'observer que les points X, A, K et D semblent alignés.

Or, l'homothétie positive de centre A qui envoie Γ sur ω envoie P et Q sur B et C, de sorte que (PQ) est parallèle à (BC), et donc que D est le pôle Sud de APQ issu de A.

On note alors h_A de centre A qui envoie B sur P, h_K l'homothétie de centre K qui envoie P sur M, et h_D l'homothétie positive de centre D et de rapport $1/2$. Puisque (PQ) et (BC) sont parallèles, h_A envoie C sur Q et h_K envoie Q sur N. Par ailleurs, h_D envoie M sur B et N sur C. Ainsi, B et C sont deux points fixes de l'homothétie $h_D \circ h_K \circ h_A$, qui est donc l'identité. Mais alors le point $h_K^{-1}(D) = h_A(D)$ se trouve sur les deux droites (AD) et (KD), ce qui signifie que A, K et D sont bien alignés.

Le parallélisme de (PQ) et (BC) indique en outre que

$$\widehat{IXD} = \widehat{IXK} = \widehat{IJK} = \widehat{IJQ} = \widehat{IPQ} = \widehat{IMD},$$

ce qui signifie que les points I, D, M et X sont cocycliques. On en déduit que

$$\widehat{MXD} = \widehat{MID} = \widehat{PID} = \widehat{PAD},$$

ce qui signifie que les droites (XM) et (AB) sont parallèles. Comme B est le milieu de $[DM]$, la droite (AB) est donc une droite des milieux du triangle DMX, et A est le milieu de $[DX]$.

Soit maintenant i l'inversion de centre D et de rayon $DP = DQ$. Cette inversion envoie A sur le point d'intersection de (PQ) et (AD), que l'on note Y. Elle envoie également B sur le second point d'intersection de (BD) et du cercle circonscrit à PDY, que l'on note Z. Puisque D est le pôle sud de APQ,

$$\widehat{YQD} = \widehat{PQD} = \widehat{DPQ} = \widehat{DPY} = \widehat{ZDY}.$$

Comme (DZ) est parallèle à (QY), la droite (ZY) est donc parallèle à (QD), et $ZDQY$ est un parallélogramme. Par conséquent, la diagonale (ZQ) contient le milieu de $[DY]$, c'est-à-dire l'image de X par i, et les points B, Q, D, X sont cocycliques.

De même, les points C, D, P et X sont cocycliques. On en conclut alors comme souhaité que

$$\begin{aligned}\widehat{BXP} = \widehat{BXQ} - \widehat{PXQ} &= (180^\circ - \widehat{QDB}) - \widehat{PXQ} \\ &= (180^\circ - \widehat{CDP}) - \widehat{PXQ} = \widehat{PXC} - \widehat{PXQ} = \widehat{QXC}.\end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs Un problème difficile relativement bien traité pour sa difficulté. Plusieurs personnes ont réussi à dire des choses intéressantes, comme montrer l'alignement de A, D et K, que l'on pouvait conjecturer sur une belle figure et montrer de nombreuses manières différentes. De nombreux élèves ont conjecturé et démontré des résultats sur les points I et J, mais ne mentionnant pas les points K et X. Une telle copie ne pourra rapporter qu'un nombre très faible de points car le cœur de l'exercice est de « comprendre » le point X, et ce même si le travail sur le reste de la figure est admirable