PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 22 NOVEMBRE 2023

à destination des élèves du groupe Senior

DURÉE : 4H

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Exercice 1. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Avant que le jeu ne commence, leur amie Clara a écrit les entiers $2, 3, 4, \ldots, 30$ au tableau. Puis, chacun à leur tour, Alice et Bob effacent certains entiers encore présents sur le tableau ; on note S_k l'ensemble des entiers effacés au $k^{\text{ème}}$ tour de jeu. Pour corser le jeu, Clara a elle-même choisi l'ensemble S_1 dont elle force Alice à effacer les éléments au premier tour.

De plus, pour tout entier $k \geqslant 2$, au moment de choisir l'ensemble S_k des nombres qu'il s'apprête à effacer, le joueur qui joue au $k^{\text{ème}}$ tour doit respecter la contrainte suivante : pour chaque élément x de S_k, il doit exister au moins un élément y de S_{k-1} tel que $\mathsf{PGCD}(x, y) \neq 1$.

Par exemple, si Clara choisit l'ensemble $S_1 = \{2, 5\}$, Bob peut choisir, au deuxième tour, l'ensemble $S_2 = \{14, 25, 26\}$; au troisième tour, Alice peut alors effacer les entiers 15 et 22, mais pas 27.

Le premier joueur qui choisit un ensemble vide perd la partie. Pour combien d'ensembles S_1 non vides Alice pourra-t-elle se débrouiller pour gagner quels que soient les choix de Bob ?

Solution de l'exercice 1

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on notera $S_{\leqslant k}$ l'ensemble $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$.

On dit qu'un ensemble S est *primitif* s'il existe des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ pour lequel S est formé des entiers n compris entre 2 et 30 dont les seuls facteurs premiers figurent parmi les nombres $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$. On dit alors que $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$ *engendrent* l'ensemble S ; il s'agit des éléments de S qui sont des nombres premiers. Remarquons au passage que deux familles de nombres premiers distinctes engendrent des ensembles primitifs différents.

Si S_1 est primitif, Alice peut se débrouiller pour gagner, en choisissant à chaque fois un ensemble S_{2k+1} tel que $S_{\leqslant 2k+1}$ soit primitif. En effet, c'est le cas pour $k = 0$. Puis, étant donné un entier $k \geqslant 0$ pour lequel $S_{\leqslant 2k+1}$ est primitif, Bob devra nécessairement inclure dans son ensemble S_{2k+2} un entier n divisible par un nombre premier $p \notin S_{\leqslant k}$. Cependant, Bob ne peut pas inclure p dans l'ensemble S_{2k+2}, car p ne figure pas parmi les facteurs premiers des éléments de $S_{\leqslant 2k+1}$. Alice pourra alors choisir S_{2k+3} de sorte que $S_{\leqslant 2k+3}$ soit l'ensemble primitif engendré par tous les nombres premiers divisant un élément de $S_{\leqslant 2k+2}$; cet ensemble S_{2k+3} est non vide, car il contient p. Ainsi, à chaque étape, Alice pourra toujours effacer au moins un nombre, donc elle ne perdra pas, et c'est Bob qui perdra.

Si, au contraire, S_1 n'est pas primitif, Bob commence par choisir l'ensemble S_2 de sorte que $S_{\leqslant 2}$ soit l'ensemble primitif engendré par tous les nombres premiers divisant un élément de S_1. Il applique désormais la même stratégie qu'Alice aurait appliquée si elle avait débuté avec l'ensemble primitif $S_{\leqslant 2}$ au lieu de l'ensemble S_1, et s'assure la victoire.

En conclusion, Alice gagne si et seulement si S_1 est primitif. Or, les nombres premiers compris entre 2 et 30 sont 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 et 29. Il y en a dix, et chaque ensemble non vide formé de ces nombres premiers engendre un ensemble primitif. Il existe donc 2^{10} ensembles primitifs, dont l'un est vide, et $2^{10} - 1$ sont non vides et propres à assurer la victoire d'Alice. La réponse attendue est donc $2^{10} - 1 = 1023$.

Commentaire des correcteurs

Le problème était relativement difficile, et seule une vingtaine d'élèves ont réussi à avoir une solution complète. Quelques commentaires :

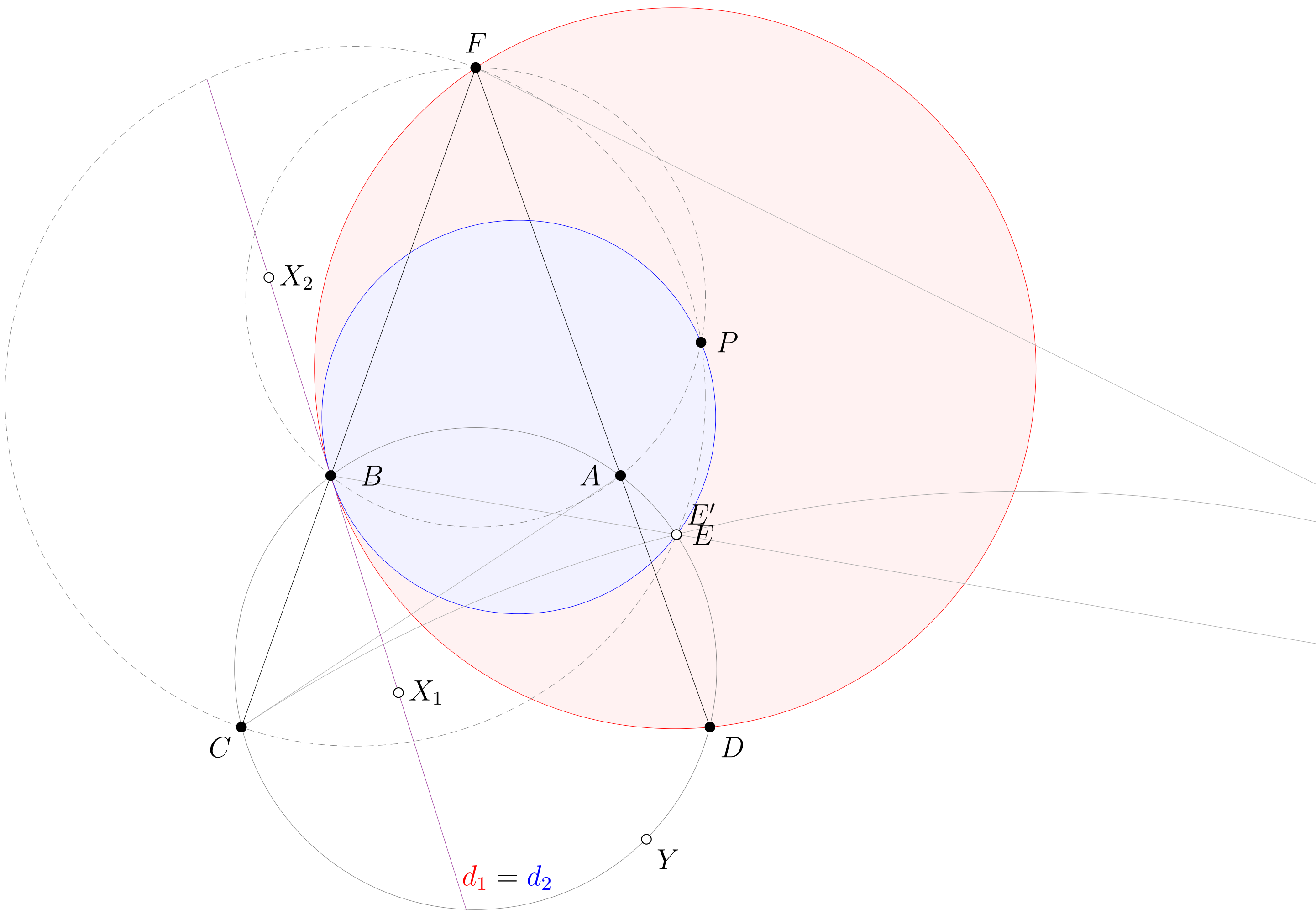
- La notion de stratégie gagnante n'est pas comprise. Une stratégie gagnante est une stratégie qui gagne quelque soit ce que fait l'adversaire. Il n'est donc pas possible de dire que chacun des joueurs adopte une stratégie gloutonne et de voir qui gagne pour conclure que cette personne gagne à tous les coups.
- Beaucoup d'élèves ont essayé une stratégie gloutonne consistant à prendre tout ce qui était possible de prendre. C'est dommage, car si on remplace 30 par 6 on voit facilement

que la stratégie est parfois perdante. Tester ce qui se passe pour des valeurs plus petites (par exemple en remplaçant 30 par 6) ici était crucial pour comprendre ce qui se passait, et quels ensembles étaient ou non gagnants.

- ▷ Certains ont essentiellement trouvé quels ensembles étaient gagnants ou non, ont parfois réussi à le prouver, parfois pas, et n'ont pas voulu/réussi à les compter. C'est dommage car c'était une partie abordable du problème, qui pouvait être obtenue même pas les élèves n'ayant pas trouvé toute la stratégie.
- ▷ Certains ont utilisé la stratégie du corrigé, mais en remplaçant $S_{\leqslant k}$ par S_k, ce qui ne marche pas. Par exemple, si Clara choisit $\{5, 3\}$, Bob choisit $\{9, 15, 25, 27\}$, puis si Alice choisit $\{10\}$, Bob choisit $\{2, 4, 8, 16, 20\}$ mais pas 15 ni 30. Alice peut alors gagner en prenant ces deux nombres au prochain tour, et en appliquant la stratégie du corrigé.

Exercice 2. Soit A, B, C, D et E cinq points situées dans cet ordre sur un même cercle, tels que $AD = BC$. On suppose que les droites (AD) et (BC) se rencontrent en un point F, et on note P le point d'intersection, autre que F, entre les cercles circonscrits à ABF et CEF. Démontrer que les cercles circonscrits à BDF et BEP sont tangents l'un à l'autre.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



Soit d_1 la tangente à BEP en B, et d_2 la tangente à BDF en B. Ensuite, soit X_1 un point sur d_1 et X_2 un point sur d_2, autres que B, comme ci-dessus. Nous allons démontrer que $\widehat{X_1BX_2} = 180°$. À cette fin, on entreprend d'éliminer au fur et à mesure des points de la figure.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\widehat{X_1BE} &= \widehat{BPE} \\ &= \widehat{FPE} - \widehat{FPB} \\ &= (180° - \widehat{ECF}) - \widehat{FAB} \\ &= 180° - \widehat{ECB} - (180° - \widehat{BAD}) \\ &= \widehat{BAD} - \widehat{ECB}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\widehat{X_2BF} = \widehat{BDF} = \widehat{BDA}$. Ainsi,

$$\widehat{X_1BX_2} = \widehat{X_1BE} + \widehat{EBF} + \widehat{FBX_2} = (\widehat{BAD} - \widehat{ECB}) + (180° - \widehat{CBE}) + \widehat{ABD}.$$

Enfin, et pour conclure plus simplement, on introduit un point Y sur le cercle circonscrit à $ABCDE$, par exemple situé sur l'arc de cercle $\wideparen{CD}$. On vérifie alors que

$$\begin{aligned}\widehat{X_1BX_2} &= (180^\circ - \widehat{DYB}) - \widehat{EYB} + 180^\circ - (180^\circ - \widehat{EYC}) + \widehat{AYB} \\ &= 180^\circ + (\widehat{EYC} - \widehat{EYB}) + (\widehat{AYB} - \widehat{DYB}) \\ &= 180^\circ + \widehat{BYC} - \widehat{DYA}.\end{aligned}$$

Or, comme $AD = BC$, les angles $\widehat{BYC}$ et $\widehat{DYA}$ sont égaux. On en conclut comme souhaité que $\widehat{X_1BX_2} = 180^\circ$, ce qui signifie bien que $d_1 = d_2$, c'est-à-dire que BEP et BDF sont tangents en B.

<u>*Solution alternative n°1*</u>

On peut reprendre directement la preuve ci-dessus en angles de droites, puis en identifiant les angles de droites entre points du cercle circonscrit à $ABCDE$ à des longueurs d'arc orientées (modulo 180°). Ainsi,

$$\begin{aligned}(d_1, d_2) &= (d_1, EB) + (EB, FB) + (FB, d_2) \\ &= (PB, PE) + (BE, BF) + (DF, DB) \\ &= (PB, PF) + (PF, PE) + (BE, BF) + (DF, DB) \\ &= (AB, AF) + (CF, CE) + (BE, BF) + (DF, DB) \\ &= (AB, AD) + (CB, CE) + (BE, BC) + (DA, DB). \\ &= \overline{BD} + \overline{BE} + \overline{EC} + \overline{AB} \\ &= \overline{AD} + \overline{BC} \\ &= 0^\circ.\end{aligned}$$

Bien qu'il s'agisse exactement des mêmes étapes, cette version-ci, si elle peut passer pour plus compliquée car faisant usage d'angles de droites, a plusieurs avantages :

- ▷ elle ne pas dépend de l'ordre des points sur un cercle ou une droite ;
- ▷ elle ne nécessite pas d'introduire les points X_1, X_2 et Y ;
- ▷ elle rend plus mécaniques la suppression des droites d_1 et d_2 puis des points P, F et E, ainsi que les relations d'égalité angulaire obtenues à la fin.

<u>*Solution alternative n°2*</u>

L'inversion de centre F et de rayon $\sqrt{FB \times FC} = \sqrt{FA \times FD}$ a les effets suivants : elle

- ▷ échange les points B et C,
- ▷ échange les points A et D,
- ▷ laisse le point F invariant,
- ▷ envoie le cercle circonscrit à $ABCDE$ sur lui-même,
- ▷ échange le cercle circonscrit à ABF avec la droite (CD),
- ▷ échange le point P avec le point d'intersection, disons P', entre (CD) et (FP),
- ▷ échange le cercle circonscrit à CPF avec la droite (BP'),
- ▷ échange le point E avec le point d'intersection autre que B, disons E', entre (BP) et le cercle circonscrit à $ABCDE$,
- ▷ échange le cercle circonscrit à BDF avec la droite (AC),
- ▷ échange le cercle circonscrit à BEP avec le cercle circonscrit à $CE'P'$.

Il s'agit donc de démontrer que (AC) est tangente à ce dernier cercle circonscrit. À cette fin, on vérifie directement, en angles de droites et arcs de cercles, que

$$(CA, CP') - (E'C, E'P') = (CA, CD) - (E'C, E'B) = \overline{AD} - \overline{CB} = 0^\circ,$$

ce qui conclut.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u>

Ce problème a été plutôt bien traité dans l'ensemble. Pour démontrer la tangence des cercles, beaucoup d'élèves ont essayé (et dans quelques rares cas réussi) de montrer l'alignement de B et des centres des deux cercles. Si c'est évidemment une manière correcte de prouver une tangence, il et presque toujours plus simple de montrer que les tangentes en B aux deux cercles sont parallèles en utilisant des propriétés d'angles tangents.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2 - f(y)^2$$

pour tous les réels x et y. On suppose qu'il existe des réels x_0 et y_0 pour lesquels cette inégalité est stricte.

Démontrer que f ne change jamais de signe : soit $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, soit $f(x) \leqslant 0$ pour tout réel x.

Solution de l'exercice 3

Ci-dessous, on note $\mathbf{I}(x, y)$ l'inégalité de l'énoncé.

Soit a et b deux réels quelconques, puis $u = (a+b)/2$ et $v = (a-b)/2$. Les inégalités $\mathbf{I}(u, v)$ et $\mathbf{I}(v, u)$ indiquent que

$$f(a)f(b) \geqslant f(u)^2 - f(v)^2 \text{ et } f(a)f(-b) \geqslant f(v)^2 - f(u)^2,$$

de sorte que $f(a)(f(b) + f(-b)) \geqslant 0$; on note $\mathbf{J}(a, b)$ cette inégalité.

Or, lorsque $a = x_0 + y_0$ et $b = x_0 - y_0$, l'inégalité $\mathbf{I}(u, v) = \mathbf{I}(x_0, y_0)$ est stricte, donc $\mathbf{J}(a, b)$ est stricte également. Par conséquent, lorsque $b = x_0 - y_0$, la somme $f(b) + f(-b)$ est non nulle, et elle est de même signe que chaque réel $f(a)$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs

Contrairement à ce que pourrait suggérer la brièveté de sa solution, cet exercice était assez difficile. C'est donc avec plaisir que les correcteurs ont constaté qu'une vingtaine d'élèves avaient réussi à le résoudre partiellement ou intégralement.

De nombreux élèves ont pensé à faire des substitutions simples telles que poser $x = 0$, $y = 0$, ou encore échanger x et y. Malheureusement, trop se sont arrêtés là, sans même avoir invoqué l'existence des réels x_0 et y_0 mentionnés dans l'énoncé. Leur existence était pourtant nécessaire afin d'assurer la conclusion du problème, par exemple afin d'écarter la fonction identité $f : x \mapsto x$.

Enfin, les correcteurs ont été fort surpris de constater à plusieurs reprises que des élèves avaient dû fournir plusieurs lignes de calcul pour aboutir à une inégalité telle que $f(x)^2 \geqslant 0$, ou encore avaient affirmé que « si $0 \geqslant -u^2$, c'est que $u = 0$ ». De même, de nombreux élèves ont abusivement divisé des inégalités par des nombres négatifs ou nuls, affirmant par exemple que a et b sont de même signe dès lors que $ac \geqslant 0$ et $bc \geqslant 0$ (alors que l'on pourrait simplement avoir $c = 0$), ou encore que si $ab \geqslant ac$ alors $b \geqslant c$ (alors que l'on pourrait simplement avoir $a \leqslant 0$).

Ces exemples indiquent avant tout un manque de prise de recul associé à l'absence d'une relecture nécessaire. De manière générale, il est **très fortement recommandé** de se relire, au minimum, juste après avoir résolu un problème (pour s'assurer qu'on n'a pas laissé de trou) et une heure avant la fin de l'épreuve (pour se laisser le temps de corriger des trous éventuels).

Exercice 4. On dit qu'une suite d'entiers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ est *olympique* lorsque $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et

$$(a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n)(a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n) = 0$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. On dit également qu'un entier est *olympique* s'il appartient à une suite olympique.

Soit m un entier tel que m et $m+1$ soient tous deux olympiques. Démontrer que m est un multiple de 3 et que $m/3$ est lui aussi olympique.

Solution de l'exercice 4

Tout d'abord, la caractérisation des suites olympiques peut se réécrire comme suit : il s'agit des suites pour lesquelles, pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe un entier $d_n \in \{2, 3\}$ tel que $a_{n+2} - a_{n+1} = d_n(a_{n+1} - a_n)$. On dit que la suite $d_0, d_1, d_2, \ldots$ *engendre* la suite $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Maintenant, soit $n \geqslant 1$ un entier olympique, et soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite olympique dont n est un terme, disons a_ℓ ; soit $d_0, d_1, d_2, \ldots$ la suite qui engendre $a_0, a_1, a_2, \ldots$ La suite $d_1, d_2, d_3, \ldots$ engendre la suite $b_0, b_1, b_2, \ldots$ définie par $b_n = (a_{n+1} - 1)/d_0$. En effet, on a bien $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ et

$$b_{n+2} - b_{n+1} = \frac{a_{n+3} - a_{n+2}}{d_0} = \frac{d_n(a_{n+2} - a_{n+1})}{d_0} = \frac{d_n(d_0 b_{n+1} + 1 - d_0 b_n - 1}{d_0} = d_n(b_{n+1} - b_n).$$

Ainsi, la suite $b_0, b_1, b_2, \ldots$ est olympique, une récurrence montre qu'elle ne contient que des entiers, et le nombre $b_{\ell-1} = (n-1)/d_0$ est lui aussi un entier olympique.

Dès lors, une récurrence sur n indique que tout entier olympique n satisfait la relation de congruence $n \not\equiv 2 \pmod 3$. En effet, si n est le plus petit entier olympique tel que $n \equiv 2 \pmod 3$, on sait que $d_0 \neq 3$, de sorte que $(n-1)/2$ est aussi olympique ; puisque $(n-1)/2 \equiv 2(n-1) \equiv 2 \pmod 3$, cela contredit la minimalité de n.

On s'intéresse enfin aux entiers m et $m+1$ de l'énoncé. Si $m = 0$, le résultat désiré est immédiat ; on suppose donc $m \geqslant 1$. Comme m et $m+1$ sont olympiques, il existe deux entiers u et v, chacun égal à 2 ou à 3, tels que $(m-1)/u$ et m/v sont des entiers olympiques.

Ni m ni $m+1$ ne sont congrus à $2 \pmod 3$, donc m est un multiple de 3. Ainsi, $u \neq 3$, donc $u = 2$, et m est impair. Par conséquent, $v \neq 2$, donc $v = 3$, et $m/3$ est bien un entier olympique.

Solution alternative n°1

On peut aussi démontrer directement que m est un multiple de 3, en procédant de la manière suivante (qui, a priori, n'aide pas à démontrer que $m/3$ est olympique).

Une suite est olympique lorsque, pour tout entier $n \geqslant 0$, le terme a_{n+2} vaut $3a_{n+1} - 2a_n$ ou $4a_{n+1} - 3a_n$. Dans les deux cas, $a_{n+2} \equiv \{a_n, a_{n+1}\} \pmod 3$, et une récurrence immédiate indique donc que nul terme a_n n'est congru à $2 \pmod 3$. Par conséquent, si m et $m+1$ sont tous deux olympiques, $m/3$ est un entier.

Commentaire des correcteurs

Plusieurs remarques :

- Ce problème était un problème à conjecture. Il fallait réussir à voir des propriétés vraies exploitables et les prouver. Aucune preuve n'était vraiment difficile, mais toute la difficulté résidait dans le fait de trouver des conjectures pertinentes.
- En particulier, la première chose à faire dans ce problème était de regarder toutes les valeurs possibles de $a_1, a_2, \ldots$. Nous espérons que toute personne s'intéressant au problème a dessiné un arbre avec toutes les possibilités : avoir beaucoup de valeurs était nécessaire à comprendre le comportement de la suite.

- ▷ Peu d'élèves ont cherché le problème (environ une quarantaine). À peu près la moitié ont eu un point, car montrer que m était divisible par 3 était très abordable (cf la solution alternative 1) et rapportait 1 point. En test, il est important de bien regarder les différents exercices. Même si l'exercice 4 peut être dur, y passer une quinzaine de minutes permet souvent d'avoir les points les plus faciles (quitte à ne pas y passer plus d'une quinzaine de minutes, pour consacrer plus de temps à la recherche d'un problème plus simple). Il est cependant déconseillé d'y passer beaucoup de temps si on bloque sur les autres exercices : en effet, peut-être qu'avoir 1 point est facile, mais en avoir plus est souvent beaucoup plus dur que sur les autres problèmes : ici, si avoir la preuve de la solution alternative 1 était facile, il était difficile d'avoir tout l'argument de la première preuve.
- ▷ Beaucoup d'élèves ont cru que m et $m+1$ apparaissaient dans la même suite : ça n'a aucune raison d'être vrai. Donc prouver des propriétés non arithmétiques sur la suite (croissance, etc) était voué à l'échec.
- ▷ Il y avait plusieurs autres observations simples mais très utiles. Prouver que tous les termes (sauf a_0) d'une suite olympique commençant par $a_2 = 4a_1 - 3a_0$ valent 1 modulo 3, et que ceux d'une suite commençant par $a_2 = 3a_1 - 2a_0$ sont impairs est accessible quand on a dessiné l'arbre associé aux différentes suites et possibilités. Mais peu d'élèves ont fait ce constat pourtant utile et valorisé. De même, peu d'élèves ont essayé de voir pourquoi, comme sur tous les exemples qu'ils ont pu trouver, $m+1$ venait d'une suite commençant par $a_2 = 4a_1 - 3a_0$ (sauf lorsque $m = 0$).