Cours en ligne gp E : Algèbre (Aurélien)

Exercice 1
Soit $k \geq 2$ un entier et a, b des réels. Montrer que $a - b$ est un entier divisible par k si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lfloor an \rfloor \equiv \lfloor bn \rfloor \; (mod\ k)$$

Exercice 2
Quel en, en fonction de d, l'intervalle de longueur maximale I tel que pour tout $a_i \in I$, le polynôme $P(x) = x^{2d} + a_{2d-1} \cdot x^{2d-1} + ... + a_1 x + a_0$ n'ai aucune racine réelle.

Exercice 3
Parmi 9 réels distincts, montrer qu'on peut en trouver 4 distincts a, b, c, d tels que

$$(ac + bd)^2 \geq \frac{9}{10}(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Exercice 4
Soit $\mathcal{P}$ un polynôme régulier du plan à n sommets. Quel est le degré minimal d'un polynôme réel en deux variables qui s'annule en (x, y) si et seulement si (x, y) sont les coordonnées d'un point de $\mathcal{P}$?

Exercice 5
Montrer que pour tout $M > 0$ il existe A tel que pour tout $d > A$ et tout polynôme P unitaire de degré d, il y a au plus d entiers n tels que $|P(n)| < M$.

Exercice 6
trouver tous les f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(yf(x) + f(x)f(y)) = xf(y) + f(xy)$$

Exercice 7
Montrer que pour tout x, y, z réels, on a

$$(x + y + z)^2 + \sum_{cyc} \frac{(x + y)(y + z)}{1 + |x - z|} \geq xy + yz + zx$$

Exercice 8
Trouver tous les polynômes P et Q tels qu'il existe une infinité de n entiers tels que $P(1)P(2)...P(n) = Q(n!)$